

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE SAN LUIS POTOSI

POSGRADO EN CIENCIAS INTERDISCIPLINARIA

DINAMICA NO-MARKOVIANA DE EMISORES GIGANTES EN ELECTRODINAMICA CUANTICA: COHERENCIA, ENTRELAZAMIENTO Y NO-CLASICIDAD

T E S I S

que para obtener el grado de
Maestra en Ciencias Interdisciplinarias

PRESENTA:
ANAHI OLMEDO RODRIGUEZ

ASESOR DE TESIS:

DR. CARLOS ANDRES GONZALEZ GUTIERREZ, ICF-UNAM

CO-ASESOR DE TESIS:

DR. JESUS DORANTES DAVILA, IF-UASLP

COMITE EVALUADOR:

DR. PEDRO RUIZ DIAZ, IF-UASLP

DR. ENRIQUE GONZALEZ TOVAR, IF-UASLP

DR. JESUS URIAS HERMOSILLO, IF-UASLP

San Luis Potosí, México. 2026

Dinámica no-Markoviana de Emisores Gigantes en Electrodinámica Cuántica: coherencia, entrelazamiento y no-clasicidad © 2026 por Anahí Olmedo Rodríguez tiene licencia CC BY-NC-ND 4.0. Para ver una copia de esta licencia, visite https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/.

Agradecimientos

Si agradeciera a todas las personas que me han enseñado y acompañado a lo largo de este camino, no terminaría, así que intentaré ser escueta.

Agradezco a mi familia por su apoyo incondicional y siempre presente: mi mamá Claudia, mi papá Francisco, mi hermano Pavel, mi abuelita Rosa, y mis tíos Mario y Eréndira.

Agradezco a todos mis profesores; en esta etapa, especialmente a mis asesores, el Dr. Dorantes y el Dr. Carlos, por acompañarme en la escritura de esta tesis. Al Dr. Enrique por sus palabras y por encaminarme con mi actual asesor, y a Thomas por brindarme un hogar en la ciudad de la eterna primavera.

Agradezco a mis amigas, en especial a Valeria, Andrea, Andy y Mer, por estar en las risas y en los llantos. Y agradezco a mi lugar seguro, Arturo, por acompañarme en cada momento.

Resumen

En esta tesis se estudian fenómenos no-Markovianos en emisores gigantes acoplados a entornos bosónicos, con el objetivo de analizar mecanismos de preservación de recursos cuánticos como la coherencia, el entrelazamiento y la no-clasicidad. Se consideran dos modelos de interacción con el entorno: una dinámica de desfase puro para sistemas de dos niveles y una dinámica de amortiguamiento de amplitud para un oscilador armónico gigante acoplado a un baño estructurado. Para el caso de desfase, se obtiene una solución analítica basada en el operador de eco de Loschmidt, evitando las aproximaciones de Born-Markov. Se analiza la influencia del número de conexiones, la separación espacial y la temperatura del baño, obteniendo además una expresión analítica en el límite de un número infinito de conexiones. Posteriormente, se estudia la evolución del entrelazamiento entre dos qubits gigantes inicialmente en un estado de Bell, mostrando que la concurrencia está determinada por el cuadrado de la coherencia de un solo qubit bajo una dinámica de desfase. Finalmente, se analiza un oscilador armónico gigante preparado inicialmente en un estado tipo gato de Schrödinger. Se demuestra que la preservación de la coherencia y de la negatividad de la función de Wigner está gobernada por la evolución del número promedio de excitaciones del sistema.

Los resultados obtenidos muestran que modificar la geometría del acoplamiento de un emisor gigante permite proteger recursos cuánticos, gracias a la aparición de dinámicas no-Markovianas, como oscilaciones persistentes, *revivals* y estados ligados dentro y fuera del continuo (BIC y BOC).

Índice general

Agradecimientos II

1. Introducción 1

2. Conceptos fundamentales 3
2.1. Sistema de dos niveles (qubits) . . . 3
2.2. Matriz de densidad . . . 4
2.3. Estados coherentes . . . 5
2.4. Estados térmicos . . . 6
2.5. Estados separables y estados entrelazados . . . 6
2.6. Traza parcial . . . 7
2.7. Operadores de Kraus . . . 7
2.8. Mapeo de dos qubits con entornos independientes . . . 8
2.9. Dinámica Markoviana . . . 10
2.10. Interacción de desfase y ecuación maestra . . . 10
2.11. Medidas de coherencia y entrelazamiento . . . 13
2.12. Representación en el espacio de fase . . . 14

3. Modelos de interacción luz-materia 16
3.1. La función espectral . . . 16
3.2. Dinámica de amortiguamiento de amplitud . . . 17
3.3. Emisores gigantes . . . 20
3.4. Acoplamiento efectivo para un emisor gigante . . . 22

4. Resultados 24
4.1. Dinámica de desfase no-Markoviana . . . 24
4.1.1. Aplicación a un baño Óhmico a $T = 0$ . . . 26
4.1.2. Aplicación a un baño Óhmico a T finita . . . 28
4.1.3. Aplicación a un baño Óhmico - átomo gigante a $T = 0$ con N_c conexiones 30
4.1.4. Aplicación a un baño Óhmico - átomo gigante a T finita . . . 35
4.1.5. Mapeo a 2-Qubits con entornos independientes . . . 37
4.2. Oscilador armónico gigante . . . 40
4.2.1. La función de Wigner . . . 44

5. Conclusiones 50

A. Solución analítica por el método de Berman-Ford **52**
A.1. Transformada de Laplace y función auxiliar 52
A.2. Corte de rama, polos y residuos 52

B. Electrodinámica cuántica en circuitos (c-QED) **54**
B.1. El oscilador armónico cuántico como un circuito LC 54
B.2. Circuito Transmon 55
B.3. Línea de transmisión 56
B.4. Interacción entre una línea de transmisión y un átomo gigante 58

Capítulo 1

Introducción

Uno de los problemas fundamentales de la física actual es la interacción entre un sistema cuántico y su entorno. Mientras que los sistemas cuánticos aislados evolucionan de manera unitaria de acuerdo con la ecuación de Schrödinger, los sistemas físicos reales inevitablemente intercambian información con grados de libertad externos[1, 2]. Como consecuencia, propiedades exclusivamente cuánticas, tales como la coherencia, el entrelazamiento y la no-clasicidad, pueden degradarse con el tiempo mediante procesos de decoherencia.

El estudio de estos fenómenos ha dado origen al campo de los sistemas cuánticos abiertos, cuyo objetivo es comprender cómo la presencia de un entorno modifica la dinámica del sistema de interés. En numerosos casos, la influencia del entorno puede describirse mediante una dinámica efectiva bajo la aproximación Markoviana, donde se asume que el baño carece de memoria y la información se transfiere del sistema al entorno, perdiéndose de manera irreversible. Bajo estas condiciones, las coherencias suelen decaer exponencialmente [3] y el entrelazamiento desaparece de forma monótona [4].

Sin embargo, numerosos sistemas físicos operan fuera de este régimen idealizado. Cuando el entorno posee tiempos de correlación comparables con los tiempos de relajación del sistema, o cuando la interacción presenta una estructura espacial compleja, pueden aparecer efectos de memoria que permiten el flujo parcial de información desde el entorno hacia el sistema [5]. Esta dinámica es conocida como no-Markoviana y puede dar lugar a fenómenos como revivals de coherencia, preservación parcial del entrelazamiento, estados ligados y oscilaciones persistentes de población.

En años recientes, los emisores gigantes han emergido como una plataforma particularmente atractiva para estudiar estos efectos. A diferencia de los emisores puntuales convencionales, un emisor gigante interactúa con el mismo entorno a través de múltiples puntos de acoplamiento espacialmente separados [6]. La interferencia entre los distintos canales de interacción modifica el acoplamiento efectivo con el baño, permitiendo controlar la respuesta espectral del entorno.

Entre las consecuencias más importantes de esta geometría destacan la aparición de frecuencias oscuras, donde el acoplamiento efectivo con el entorno se anula por interferencia destructiva; la formación de estados ligados dentro o fuera del continuo espectral (por sus siglas en inglés, BIC y BOC, respectivamente) [7, 8]; y la aparición de fuertes efectos no-Markovianos asociados a retardos temporales y realimentación de información [9]. Estos mecanismos convierten a los emisores gigantes en una plataforma evidente para explorar

estrategias de protección frente a la decoherencia.

El objetivo de esta tesis es estudiar cómo la estructura espacial de un emisor gigante modifica la dinámica de diversos recursos cuánticos bajo distintas interacciones con entornos bosónicos. En particular, se analiza la influencia del número de puntos de acoplamiento, su separación espacial y la temperatura del entorno sobre la evolución temporal de la coherencia, el entrelazamiento y la no-clasicidad.

Para ello se consideran dos modelos fundamentales de interacción sistema-entorno. El primero corresponde a una dinámica de desfase puro, donde no existe intercambio de energía con el baño, pero sí pérdida de coherencia cuántica. Dentro de este contexto se estudia la dinámica de un qubit gigante acoplado a un baño óhmico a temperatura finita, obteniéndose expresiones analíticas para la evolución de las coherencias y para el límite de infinitos puntos de acoplamiento. Asimismo, se analiza la preservación del entrelazamiento entre dos qubits gigantes sometidos a entornos bosónicos independientes.

El segundo modelo corresponde a una dinámica de intercambio de energía tipo amortiguamiento de amplitud. En este caso se estudia un oscilador armónico gigante acoplado a un arreglo unidimensional de cavidades bosónicas. Se analiza la formación de estados ligados dentro y fuera del continuo espectral, así como su influencia sobre la preservación de estados tipo gato de Schrödinger. La dinámica de la coherencia y de la negatividad de la función de Wigner permite establecer una conexión directa entre la existencia de fenómenos no-Markovianos y la protección de recursos cuánticos no clásicos.

Los resultados obtenidos muestran que la geometría no local del acoplamiento es un mecanismo capaz de modificar la interacción con el entorno y favorecer la preservación de propiedades cuánticas. En particular, se demuestra que el aumento en el número de conexiones está directamente relacionado con la aparición de frecuencias oscuras, además de la formación de estados ligados, circunstancias en las cuales se reducen los efectos de la decoherencia. Esto proporciona información fundamental para el diseño de arquitecturas cuánticas más robustas frente a la pérdida de recursos cuánticos, derivada de la interacción entre los grados de libertad del sistema y el entorno.

Capítulo 2

Conceptos fundamentales

En este capítulo se darán a conocer los conceptos generales y necesarios de mecánica cuántica, para poder entender los modelos y resultados presentados en los capítulos posteriores.

2.1. Sistema de dos niveles (qubits)

El sistema cuántico más sencillo es aquel que está conformado por dos estados que podemos escribir como $|0\rangle$ y $|1\rangle$. Estos estados suelen usarse para describir la polarización de la luz: vertical y horizontal; la dirección del spin: arriba o abajo; mientras que en el caso de un átomo representan el estado base y el estado excitado respectivamente.

A los sistemas de dos niveles también se les conoce como qubits, término usado principalmente en teoría de la información cuántica y computación cuántica, debido a su analogía con el bit clásico, donde la información se codifica de forma binaria usando ceros y unos.

Cualquier estado de un sistema de dos niveles puede ser escrito como una combinación lineal de $|0\rangle$ y $|1\rangle$:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \tag{2.1}$$

donde α y β son números complejos, correspondientes a las amplitudes de cada estado y cumplen que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

El Hamiltoniano general para un sistema de dos niveles tiene la siguiente forma:

$$\hat{H} = E + B\,\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}, \tag{2.2}$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario que indica la dirección espacial, E y B son constantes reales, y $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ es el vector de matrices de Pauli. Estas matrices, junto con la identidad $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \mathbb{1}\}$, constituyen una base para el espacio de operadores lineales en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ al que pertenecen los vectores $|0\rangle$ y $|1\rangle$ [10]:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

2.2. Matriz de densidad

La matriz u operador de densidad es la herramienta matemática más general para describir un sistema cuántico, ya que permite representar tanto estados puros como estados mixtos. Aunque es común describir un sistema mediante un vector de estado (como una superposición), existen dos casos fundamentales en los que este enfoque es insuficiente:

- Los ensambles estadísticos: mezcla generada a partir de la preparación probabilística de un sistema, donde aparece incertidumbre clásica sobre el estado.
- Tras realizar la traza parcial a un estado entrelazado (ver sección 2.6): mezcla generada debido a la correlación con los grados de libertad trazados.

Para incorporar tanto la incertidumbre cuántica como la falta de información clásica, el operador densidad se define como [11]:

$$\varrho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \tag{2.4}$$

dónde la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado $|\psi_i\rangle$ está determinada por p_i.

Propiedades de la matriz densidad

Una matriz de densidad que describe a un sistema físico posee necesariamente las siguientes tres propiedades:

1. Hermitiana ($\varrho = \varrho^\dagger$): Tiene que ser igual a su transpuesta conjugada.
2. Semidefinida positiva ($p_i \geqslant 0$): Los eigenvalores de la matriz densidad tienen que ser mayores o iguales a cero. Esto garantiza que no existan probabilidades negativas.
3. Traza igual a uno ($\mathrm{Tr}(\varrho) = 1$): La suma de la diagonal tiene que ser igual a uno, para que la probabilidad total sea uno $\sum_i p_i = 1$.

El caso particular en el que el sistema cuántico se encuentra en un estado bien definido $|\psi\rangle$, es conocido como estado puro. En esta situación la matriz de densidad correspondiente es:

$$\varrho = |\psi\rangle\langle\psi|. \tag{2.5}$$

Mientras que los estados con incertidumbre clásica, aquellos que son una mezcla estadística de varios estados posibles, se les conoce como estados mixtos, y la matriz de densidad adopta la forma general dada en la ecuación (2.27).

La pureza

Una forma de distinguir entre estados puros y mixtos, es mediante la pureza, definida como:

$$\mathcal{P} = \mathrm{Tr}(\varrho^2) \tag{2.6}$$

Si el estado es puro, obtenemos $\mathcal{P} = 1$; si es menor a esto, estaríamos hablando de un estado mixto, el cual tiene un límite determinado por la dimensión del espacio de Hilbert del subsistema $\frac{1}{N} \leqslant \mathcal{P} \leqslant 1$.

La pureza es un caso particular de la entropía de Renyi [12]:

$$S_n(A) = \frac{1}{1-n} \log \mathrm{Tr}(\varrho_A^n), \tag{2.7}$$

para el caso $n = 2$, la cual tiene una estrecha relación con la entropía de von Neumann, $n = 1$. Es por eso que:

$$S_2 = -\ln \mathcal{P} \tag{2.8}$$

2.3. Estados coherentes

Los estados coherentes aparecen por vez primera cuando Schrödinger resuelve el oscilador armónico cuántico, donde nota que el paquete de onda gaussiano dentro de este potencial no se deforma, y su centro oscila como una partícula clásica. Es por esto que a los estados coherentes también se les conoce como estados de mínima incertidumbre, ya que cumplen con $\Delta x \Delta p = \hbar/2$.

Posteriormente los estados coherentes $|\alpha\rangle$ se vuelven importantes para poder describir la luz de un láser. A diferencia de los estados de Fock $|n\rangle$, los estados coherentes tienen información de la fase $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$. La descripción matemática de estos estados se le atribuye a Glauber, y concuerda con el comportamiento de los fotones de un láser, que siguen una distribución de Poisson [13]:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \tag{2.9}$$

Los estados coherentes forman una base sobre completa, ya que no son ortogonales entre ellos:

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \alpha^* \beta \right). \tag{2.10}$$

Los estados coherentes son estados propios del operador de aniquilación $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ y su operador generador es el operador de desplazamiento $\mathrm{D}(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle$.

La definición matemática del operador desplazamiento es:

$$\mathrm{D}(\alpha) = \exp\left(\alpha a^\dagger - \alpha^* a\right), \tag{2.11}$$

y las propiedades de $\mathrm{D}(\alpha)$ empleadas en el desarrollo de este trabajo son las siguientes:

- Unitariedad: Es lineal, invertible y conserva la norma

$$\mathrm{D}^\dagger(\alpha) = D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha). \tag{2.12}$$

- Composición: El producto de operadores desplazamiento no conmuta

$$\mathrm{D}(\alpha)\,\mathrm{D}(\beta) = \mathrm{D}(\alpha+\beta)e^{\frac{1}{2}(\alpha\beta^*-\alpha^*\beta)}. \tag{2.13}$$

- Transformación de similitud: Cambia el marco de referencia del sistema en el espacio de fase; mientras conserva sus reglas de conmutación y sus autovalores, así mismo mantiene invariante la traza y el determinante.

$$\mathrm{D}^\dagger(\alpha)a\,\mathrm{D}(\alpha) = a+\alpha, \tag{2.14}$$

$$\mathrm{D}(\alpha)a\,\mathrm{D}^\dagger(\alpha) = a-\alpha. \tag{2.15}$$

2.4. Estados térmicos

A diferencia de los estados coherentes que son estados puros, los estados térmicos son estados mixtos, descritos por la ecuación (2.27). Donde la probabilidad de encontrar n fotones está dada por la distribución de Bose-Einstein:

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{(\bar{n}+1)^{n+1}}. \tag{2.16}$$

Mientras que el número promedio de fotones $\bar{n}$ depende de la temperatura T en equilibrio del entorno con el que interacciona el sistema:

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1}. \tag{2.17}$$

Entonces, un estado térmico que describe un sistema con distribución de Bose-Einstein, interactuando con un baño en equilibrio térmico se puede escribir como [14, 15]:

$$\varrho = \sum_n \frac{e^{-\beta E_n}}{Z}|n\rangle\langle n|, \quad \beta = 1/k_BT, \tag{2.18}$$

donde $Z = \frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}$ es la función de partición. Esta actúa normalizando la distribución estadística de cada peso correspondiente a la energía propia E_n de un determinado número de ocupación $|n\rangle$.

2.5. Estados separables y estados entrelazados

En el caso más general, la separabilidad de un sistema cuántico bipartito se define en términos de su operador densidad. Un estado ϱ_{AB} es **separable** si puede expresarse como una mezcla ponderada de estados producto de los subsistemas A y B:

$$\varrho_{AB} = \sum_k p_k\,\varrho_A^{(k)} \otimes \varrho_B^{(k)}, \tag{2.19}$$

donde $p_k \geqslant 0$ y $\sum_k p_k = 1$, siendo $\varrho_A^{(k)}$ y $\varrho_B^{(k)}$ los operadores densidad de los subsistemas A y B, respectivamente. Esta clase de estados puede presentar correlaciones de origen clásico, pero carece de correlaciones cuánticas.

En el caso particular en que el sistema global se encuentra en un estado puro ($|\psi\rangle_{AB}$), la condición de separabilidad se reduce a un estado producto:

$$|\psi\rangle_{AB} = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B. \tag{2.20}$$

Por definición, los estados **entrelazados** son aquellos que no admiten una descomposición separable de la forma dada por la ecuación 2.19. En el caso particular de un sistema en un estado puro, el entrelazamiento implica que el vector de estado no puede factorizarse como un producto tensorial único ($|\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$), sino que debe escribirse como una superposición de la forma:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{ij} c_{ij} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B. \tag{2.21}$$

Existen 4 estados entrelazados que describen un sistema compuesto de dos subsistemas, ambos de dos niveles, máximamente entrelazados entre sí. Estos estados son conocidos como los estados de Bell [16]:

$$|\Phi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle \pm |11\rangle\big), \tag{2.22}$$

$$|\Psi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|01\rangle \pm |10\rangle\big). \tag{2.23}$$

2.6. Traza parcial

La traza parcial es la operación matemática que permite promediar los grados de libertad de un subsistema B que está interactuando con el sistema de interés A [11]. Gracias a este procedimiento se puede obtener una matriz reducida del sistema A, denotada como:

$$\varrho_A = \mathrm{Tr}_B\left\{\varrho_{AB}\right\}. \tag{2.24}$$

Considerando dos vectores $|a_1\rangle$ y $|a_2\rangle$ del espacio de estados del sistema A, y los vectores $|b_1\rangle$ y $|b_2\rangle$ del espacio de estados del sistema B, la traza parcial se define como:

$$\mathrm{Tr}_B\left\{|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|\right\} \equiv |a_1\rangle\langle a_2| \,\mathrm{Tr}\left\{|b_1\rangle\langle b_2|\right\}. \tag{2.25}$$

2.7. Operadores de Kraus

En sistemas cuánticos abiertos, la evolución deja de ser unitaria, y para describir esos cambios irreversibles a través del tiempo, es útil introducir los operadores de Kraus [2]:

$$K_{\mu\nu}(t) = \sqrt{\lambda_\nu}\langle\mu|U(t)|\nu\rangle, \tag{2.26}$$

donde $U(t)$ es el operador de evolución temporal del sistema total. Los posibles estados en los que puede terminar el baño están denotados por $|\mu\rangle$. Mientras que λ_ν son las probabilidades de que el baño se encuentre en el estado $|\nu\rangle$ al tiempo inicial. Entonces, si escribimos el estado inicial del entorno $\varrho_B(0)$ en su descomposición espectral:

$$\varrho_B(0) = \sum_\nu \lambda_\nu |\nu\rangle\langle\nu|, \tag{2.27}$$

podemos escribir la matriz de densidad del sistema reducido en el tiempo t, denotada como $\varrho_s(t)$, evoluciona de manera no unitaria a partir de su estado inicial $\varrho_s(0)$ mediante la suma de Kraus:

$$\varrho_s(t) = \sum_{\mu\nu} K_{\mu\nu}(t)\varrho_s(0)K^\dagger_{\mu\nu}(t). \tag{2.28}$$

Para que los operadores de Kraus describan un sistema físico real, necesitan cumplir la condición de completez:

$$\sum_{\mu\nu} K^\dagger_{\mu\nu}(t)K_{\mu\nu}(t) = I. \tag{2.29}$$

Esta condición asegura que se preserven las propiedades de la matriz de densidad $\varrho_s(t)$. Esto hace que el mapeo sea completamente positivo y preserve la traza (CPTP, por sus siglas en inglés).

2.8. Mapeo de dos qubits con entornos independientes

La matriz de densidad reducida de un qubit interactuando con su entorno se puede escribir en términos de operadores de Kraus, como se muestra en la ecuación 2.28. A partir de esto, es posible extender el análisis a sistemas compuestos utilizando el formalismo de Lo Franco et al. [17].

Consideremos ahora un sistema conformado por dos qubits, $S = A + B$, donde cada qubit interacciona con un entorno independiente R_A y R_B respectivamente. Al ser entornos independientes, ver figura 2.1, la evolución de los qubits es factorizable $U(t) = U^A(t)\otimes U^B(t)$, por lo que la matriz total se puede expresar:

$$\varrho^T(t) = \sum_{\delta\gamma}\sum_{\mu\nu} K^A_{\delta\gamma}(t)K^B_{\mu\nu}(t)\varrho^T(0)K^{\dagger A}_{\delta\gamma}(t)K^{\dagger B}_{\mu\nu}(t), \tag{2.30}$$



Figura 2.1: Esquema de un sistema de dos qubits con entornos independientes.

Escrito componente a componente en la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$:

$$\varrho^T_{ii',jj'}(t) = \sum_{\substack{ll'\\mm'}} A^{ll'}_{ii'}(t)\, B^{mm'}_{jj'}(t)\, \varrho^T_{ll',mm'}(0),$$

donde $A^{ll'}_{ii'}(t)$ y $B^{mm'}_{jj'}(t)$ son los coeficientes que evolucionan el operador de densidad de cada qubit:

$$\varrho^A_{ii'}(t) = \sum_{ll'} A^{ll'}_{ii'}(t)\varrho^A_{ll'}(0), \quad \varrho^B_{jj'}(t) = \sum_{mm'} B^{mm'}_{jj'}(t)\varrho^B_{mm'}(0). \tag{2.31}$$

Estos coeficientes se encargan de conectar la matriz de densidad inicial con la final. Para el sistema A, l y l' corresponden a los indices de la matriz inicial, mientras i e i' corresponden a los coeficientes de la matriz final:

$$A^{ll'}_{ii'}(t) = \sum_{\mu\nu} \langle i|K_{\mu\nu}(t)|l\rangle\langle l'|K^\dagger_{\mu\nu}(t)|i'\rangle. \tag{2.32}$$

Esto funciona igual para el sistema B.

Como caso particular, se considera un canal de amortiguamiento de amplitud, la matriz reducida de un qubit tiene la forma:

$$\hat{\varrho}^S(t) = \begin{pmatrix} \varrho^S_{11}(0)P(t) & \varrho^S_{10}(0)\sqrt{P(t)} \\ \varrho^S_{01}(0)\sqrt{P(t)} & \varrho^S_{00}(0) + \varrho^S_{11}(0)(1-P(t)) \end{pmatrix}$$

.

Los elementos diagonales de la matriz de densidad total $\varrho^T(t)$ en la base $\mathcal{B} = \{|1\rangle \equiv |00\rangle, |2\rangle \equiv |01\rangle, |3\rangle \equiv |10\rangle, |4\rangle \equiv |11\rangle\}$ son:

$$\begin{aligned} \varrho^T_{11}(t) &= \varrho^T_{11}(0)P(t)^2, \\ \varrho^T_{22}(t) &= \varrho^T_{22}(0)P(t) + \varrho^T_{11}(0)P(t)(1-P(t)), \\ \varrho^T_{33}(t) &= \varrho^T_{33}(0)P(t) + \varrho^T_{11}P(t)(1-P(t)), \\ \varrho^T_{44}(t) &= 1 - [\varrho^T_{11}(t) + \varrho^T_{22}(t) + \varrho^T_{33}(t)]. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Mientras los elementos fuera de la diagonal se escriben:

$$\begin{aligned} &\varrho^T_{12}(t) = \varrho^T_{12}(0)P(t)^{3/2}, \quad \varrho^T_{13}(t) = \varrho^T_{13}(0)P(t)^{3/2}, \\ &\varrho^T_{14}(t) = \varrho^T_{14}(0)P(t), \quad \varrho^T_{23}(t) = \varrho^T_{23}(0)P(t), \\ &\varrho^T_{24}(t) = \sqrt{P(t)}[\varrho^T_{24}(0) + \varrho^T_{13}(0)(1-P(t))], \\ &\varrho^T_{34}(t) = \sqrt{P(t)}[\varrho^T_{34}(0) + \varrho^T_{12}(0)(1-P(t))]. \end{aligned} \tag{2.34}$$

2.9. Dinámica Markoviana

La descripción de la dinámica de un sistema cuántico abierto suele recurrir a dos aproximaciones: la aproximación de Born y la aproximación de Markov. La primera se fundamenta en el supuesto de que el acoplamiento entre el sistema y su entorno es suficientemente débil como para despreciar las correlaciones que se generan entre ambos durante la evolución. En consecuencia, se considera que el estado conjunto puede aproximarse mediante un estado producto,

$$\varrho_T(t) \approx \varrho_s(t) \otimes \varrho_e(0), \tag{2.35}$$

donde se supone, además, que el entorno permanece aproximadamente en su estado inicial. Esta aproximación permite truncar la expansión perturbativa a segundo orden en el Hamiltoniano de interacción y conduce a la siguiente ecuación para la matriz de densidad reducida del sistema [2]:

$$\dot{\varrho}_s(t) = -\int_0^t dt' \, \mathrm{Tr}_B[H_{int}(t), [H_{int}(t'), \varrho_s(t') \otimes \varrho_B(0)]]. \tag{2.36}$$

Por otra parte, la aproximación de Markov consiste en suponer que las correlaciones temporales del entorno decaen mucho más rápido que la escala característica de evolución del sistema. Esto implica que el entorno pierde memoria de las interacciones ocurridas en tiempos anteriores. Esto vuelve local en el tiempo la ecuación integro-diferencial de Redfield al aproximar $\varrho_s(t') \approx \varrho_s(t)$:

$$\frac{d}{dt}\varrho_s(t) = -\int_0^\infty d\tau \, \mathrm{Tr}_B[H_{int}(t), [H_{int}(t-\tau), \varrho_s(t) \otimes \varrho_B(0)]]. \tag{2.37}$$

El integrando se recorre de $[0, t]$ a $[0, \infty)$ gracias a Markov, ya que un proceso Markoviano no puede depender del momento en que este empieza, la evolución debe ser la misma a todo tiempo. Esto sólo es valido si $\tau_R \gg \tau_B$, es decir, el tiempo de correlación del baño τ_B tiene que ser mucho menor que el tiempo de relajación del sistema τ_R.

2.10. Interacción de desfase y ecuación maestra

El Hamiltoniano general de un sistema que interacciona con su entorno se escribe:

$$H = H_s + H_e + H_{int}, \tag{2.38}$$

donde el Hamiltoniano total, es la suma del Hamiltoniano del sistema, el Hamiltoniano del entorno y el Hamiltoniano de interacción.

El acoplamiento de desfase es aquel donde el sistema tiene la capacidad de intercambiar coherencia con el entorno, pero no energía [18]. Para que la energía del sistema se conserve, $[H_s, H] = [H_s, H_{\mathrm{int}}] = 0$. Esta interacción genera decoherencia, debido al cambio de la fase relativa entre los estados propios del sistema.

El Hamiltoniano de interacción es de la forma:

$$H_{\text{int}} = \sum_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j| \otimes V_j^e = \sum_j P_j V_j^e, \tag{2.39}$$

donde $P_j = |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$ es el proyector en la base de H^s. Entonces, el Hamiltoniano total puede escribirse en términos de éste proyector, los valores propios del sistema ϵ_j, y el operador V_j^e que actúa sobre el baño, y está condicionado por el estado del sistema:

$$H = \sum_j P_j \left(\epsilon_j + H_e + V_j^e\right). \tag{2.40}$$

Consideramos que el estado que evoluciona bajo este Hamiltoniano es factorizable, es decir, no hay correlaciones iniciales entre el entorno y el sistema:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_j c_j e^{i\epsilon_j t}|\phi_j\rangle|\chi_j(t)\rangle, \tag{2.41}$$

con $|\chi_j(t)\rangle = e^{-i(H_e+V_j^e)t}|\chi_0\rangle$, siendo $|\chi_0\rangle$ el estado inicial del entorno.
El sistema a todo tiempo está descrito por un estado puro $\varrho(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$, por lo que nuestra matriz de densidad se escribe:

$$\varrho(t) = \sum_{jk} c_j c_k^* e^{i(\epsilon_j-\epsilon_k)t}|\phi_j\rangle\langle\phi_k| \otimes |\chi_j(t)\rangle\langle\chi_k(t)|. \tag{2.42}$$

La dinámica de interés es la del sistema, por lo cual se promedian los grados de libertad del entorno $\varrho_s(t) = \text{Tr}_\text{e}\{\varrho(\text{t})\}$:

$$\varrho_s(t) \quad = \quad \sum_{jk} \varrho_{jk}(0) e^{i(\epsilon_j-\epsilon_k)t}|\phi_j\rangle\langle\phi_k|\langle\chi_k(t)|\chi_j(t)\rangle,$$

donde $\langle\chi_k(t)|\chi_j(t)\rangle$ es equivalente al valor esperado del operador Loschmidt eco:

$$\langle\chi_0|M(t)|\chi_0\rangle = \langle\chi_0|e^{i(H_e-V_k^e)t}e^{-i(H_e+V_j^e)t}|\chi_0\rangle. \tag{2.43}$$

Entonces, la ecuación (2.43) se puede escribir como:

$$\varrho_s(t) = \sum_{kj} \varrho_{jk}(0) e^{i(\epsilon_j-\epsilon_k)t}\langle M(t)\rangle|\phi_j\rangle\langle\phi_k|. \tag{2.44}$$

Para describir la dinámica de un sistema, sobre todo de una matriz de densidad reducida $\varrho_s(t)$, se usa una ecuación diferencial que da la evolución temporal de esta matriz densidad, a esta ecuación se le conoce como ecuación maestra. De ahora en adelante, $\varrho_s(t)$ se escribirá como $\varrho(t)$ por simplicidad.

Antes de diferenciar la matriz de densidad, separemos los elementos diagonales, también conocidos como poblaciones, de los elementos no diagonales, conocidos como coherencias:

$$\varrho(t) \quad = \quad \sum_j \varrho_{jj}(0)|\phi_j\rangle\langle\phi_j| + \sum_{jk} \varrho_{jk}(0) e^{i(\epsilon_j-\epsilon_k)t}|\phi_j\rangle\langle\phi_k|\langle M(t)\rangle. \tag{2.45}$$

Al derivar con respecto al tiempo, nos damos cuenta que el primer término es cero, ya que, la dependencia temporal sólo está presente en la exponencial y el valor esperado del operador de eco, ambos contenidos en el segundo término. Es por eso que decimos que las poblaciones se mantienen constantes y las coherencias son las únicas que evolucionan con el tiempo. Después de hacer el producto de derivadas y agrupar términos, la ecuación maestra resultante es:

$$\dot{\varrho}(t) = -i[H_s, \varrho] + \sum_{j \neq k} \varrho_{jk}(0) e^{i(\epsilon_j - \epsilon_k)t} |\phi_j\rangle\langle\phi_k| \langle \dot{M}(t)\rangle. \tag{2.46}$$

La tasa de decoherencia instantánea y las coherencias se pueden expresar como:

$$\gamma(t) = \frac{\langle \dot{M}(t)\rangle}{\langle M(t)\rangle} = \frac{d}{dt} \ln\langle M(t)\rangle, \quad \varrho_{jk}(t) = \varrho_{jk}(0) e^{i(\epsilon_j - \epsilon_k)t} \langle M(t)\rangle. \tag{2.47}$$

Al sustituir la tasa y las coherencias, la ecuación maestra resultante, que usaremos para la interacción de desfase es:

$$\dot{\varrho}(t) \;\; = \;\; -i[H_s, \varrho] - \gamma(t) \sum_{j \neq k} \varrho_{jk}(t) |\phi_j\rangle\langle\phi_k|. \tag{2.48}$$

La ecuación maestra anterior, para un sistema de dos niveles, tiene la forma de la ecuación de Lindblad, la cual es Markoviana:

$$\dot{\varrho}(t) \;\; = \;\; -i[H_s, \varrho] + \frac{\gamma(t)}{2} \left[\sigma^z \varrho \sigma^z - \varrho\right]. \tag{2.49}$$

La diferencia fundamental con la ecuación maestra que se dedujo usando el valor esperado del operador de *eco*, es que la tasa de decoherencia $\gamma(t)$ es no-Markoviana, a diferencia de la tasa en la ecuación de Lindblad, que es constante en el tiempo.

Calculando el conmutador $\dot{\varrho}_{11} = 0, \quad \dot{\varrho}_{22} = 0$. Esto cumple la conservación de la energía, $\varrho_{11}(t) = \varrho_{11}(0)$, $\varrho_{22}(t) = \varrho_{22}(0)$, las poblaciones no cambian. Mientras que los elementos no diagonales satisfacen las ecuaciones diferenciales lineales:

$$\dot{\varrho}_{12} = -(i\Delta + \gamma(t))\varrho_{12}, \quad \dot{\varrho}_{21} = (i\Delta - \gamma(t))\varrho_{21}. \tag{2.50}$$

Debido a que $\varrho_{21} = \varrho_{12}^*$, basta resolver para ϱ_{12}.

$$\varrho_{12}(t) = \varrho_{12}(0)\, e^{-i\Delta t}\, e^{-\Gamma(t)}, \tag{2.51}$$

donde $\Gamma(t)$ es la tasa de decaimiento de la coherencia:

$$\Gamma(t) = \int_0^t d\tau \gamma(\tau). \tag{2.52}$$

2.11. Medidas de coherencia y entrelazamiento

La coherencia es un recurso cuántico que puede entenderse como la propiedad que refleja la existencia de superposición en un sistema cuántico. Matemáticamente, se manifiesta en la presencia de términos fuera de la diagonal de la matriz de densidad; físicamente es la responsable de la aparición de los efectos de interferencia. Para cuantificarla formalmente, Baumgratz *et al.* [19] establecieron la llamada l_1-*norma de coherencia*. Dada una base ortonormal, la coherencia de un estado arbitrario ϱ se define como la suma de los valores absolutos de todos sus elementos no diagonales:

$$C_{l_1}(\varrho) = \sum_{i \neq j} |\varrho_{i,j}|. \tag{2.53}$$

El entrelazamiento es un recurso crucial en tecnologías cuánticas. En sistemas abiertos, la interacción con el entorno degrada este entrelazamiento. En el caso particular de dos qubits que interactúan con baños independientes, descritos en la sección 2.8, los grados de libertad del entorno se acoplan y se correlacionan con los del sistema. Al no tener acceso a la descripción completa del entorno, lo que matemáticamente se formaliza tomando la traza parcial sobre dichos grados de libertad, las correlaciones cuánticas se escapan hacia el baño, provocando que el estado efectivo de los qubits se vuelva mixto y que su entrelazamiento mutuo decaiga con el tiempo. El entrelazamiento para éste sistema compuesto, puede ser cuantificado mediante la concurrencia, $C_{\hat{\varrho}}(t)$. El valor de la concurrencia va desde 0 hasta 1, donde 1 es valor obtenido de un estado de Bell, es decir, un estado máximamente entrelazado, y 0 es un estado completamente factorizable. La fórmula de Wootters para obtener la concurrencia es la siguiente [20]:

$$C_{\hat{\varrho}}(t) = \text{máx}\left(0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\right), \tag{2.54}$$

los λ_i son los valores propios de la matriz ζ

$$\zeta = \hat{\varrho}(\sigma_y{}^A \otimes \sigma_y{}^B)\hat{\varrho}^*(\sigma_y{}^A \otimes \sigma_y{}^B). \tag{2.55}$$

Es posible usar esta fórmula como medida del entrelazamiento, gracias a que $C_{\hat{\varrho}}(t)$ es una función monótona del entrelazamiento de formación, el cual, para un estado puro $\varrho = |\psi\rangle\langle\psi|$, puede estar definido por la entropía, ya sea del subsistema A o del B:

$$E(\psi) = -\operatorname{Tr}(\varrho_A \log_2 \varrho_A) = -\operatorname{Tr}(\varrho_B \log_2 \varrho_B). \tag{2.56}$$

Mientras que el entrelazamiento de formación para un estado mixto ϱ se define como el entrelazamiento promedio de los estados puros de la descomposición, minimizado sobre todas las descomposiciones de ϱ [21]:

$$E(\psi) = \text{mín} \sum_i p_i E(\psi_i). \tag{2.57}$$

Calcular analíticamente esta minimización para estados mixtos arbitrarios es extremadamente complejo. Por esta razón, el uso de la concurrencia resulta de enorme utilidad tanto a nivel analítico como numérico, ya que la relación monótona que guarda con el entrelazamiento de formación permite cuantificar el entrelazamiento de manera directa sin necesidad de resolver el problema de optimización global.

2.12. Representación en el espacio de fase

El espacio de fase se suele asociar a las variables de posición x y momento p, pero en mecánica cuántica se puede extender a cualquier par de operadores conjugados que satisfagan una relación de conmutación del tipo $[A, B] = iC$. Mediante un mapeo, como lo es la transformada de Wigner-Weyl, los operadores del espacio de Hilbert pasan a ser funciones en el espacio de fase. La función de Wigner $W(x, p)$ resultante describe una distribución cuasiprobabilística. Se le denomina cuasiprobabilidad porque, aunque la suma (o integral) total es igual a uno, esta puede presentar valores negativos, los cuales son una firma directa de fenómenos de interferencia cuántica y no-clasicidad.

Aunque existen otras distribuciones de cuasiprobabilidad en el espacio de fase, como es la representación de Glauber-Sudarshan, la distribución de cuasiprobabilidad que se usa en el desarrollo de esta tesis, es la función de Wigner [13]:

$$W(x,p) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \Big\langle x + \frac{1}{2}\xi \Big| \varrho \Big| x - \frac{1}{2}\xi \Big\rangle e^{-ip\xi/\hbar}, \tag{2.58}$$

donde $\xi \equiv x'' - x'$, mientras que x' y x'' corresponde a los elementos de la matriz densidad $\varrho(x', x'') = \langle x'|\varrho|x''\rangle$.

Alternativamente, en el formalismo de la óptica cuántica y variables continuas, resulta más conveniente expresar el espacio de fase en términos de la variable compleja $\alpha = x + ip$. Utilizando las propiedades del operador de desplazamiento $D(\alpha)$ previamente introducidas, la función de Wigner se puede reescribir como el valor esperado del operador de paridad desplazado [22]:

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Tr}\left[\varrho(t) D(\alpha)\Pi D^{\dagger}(\alpha)\right], \tag{2.59}$$

donde $\Pi = (-1)^{a^{\dagger}a}$ es el operador de paridad. Desde el punto de vista analítico, esta representación simplifica el desarrollo del cálculo debido a que los operadores de desplazamiento actúan de forma natural sobre los estados coherentes. Esto resulta sumamente conveniente para encontrar la forma analítica de la distribución de cuasiprobabilidad de estados macroscópicos compuestos, tales como el estado de gato de Schrödinger, los cuáles se analizan en este trabajo.

Es importante notar que, debido al principio de incertidumbre de Heisenberg, la función de Wigner de estos estados no puede estar localizada en el espacio de fase. Para cualquier estado cuántico debe respetarse el límite $\Delta x \Delta p \geqslant \hbar/2$, lo que impide representar trayectorias clásicas puntuales. Es por ello que el estado se describe mediante una distribución de cuasiprobabilidad, cuyas regiones negativas constituyen una firma directa de interferencia cuántica y, fundamentalmente, de no-clasicidad.

A la firma de no-clasicidad de la función de Wigner se le conoce como negatividad, y es condición suficiente, pero no necesaria para la no-clasicidad. Esto se debe a que existen diversos estados en la mecánica cuántica, tanto puros (como los estados coherentes, los estados comprimidos y el vacío) como mixtos (por ejemplo, los estados térmicos gaussianos), cuyas funciones de Wigner son siempre no negativas. De acuerdo con el Teorema de Hudson, los únicos estados cuánticos puros que poseen una función de Wigner estrictamente no negativa son precisamente los estados Gaussianos.

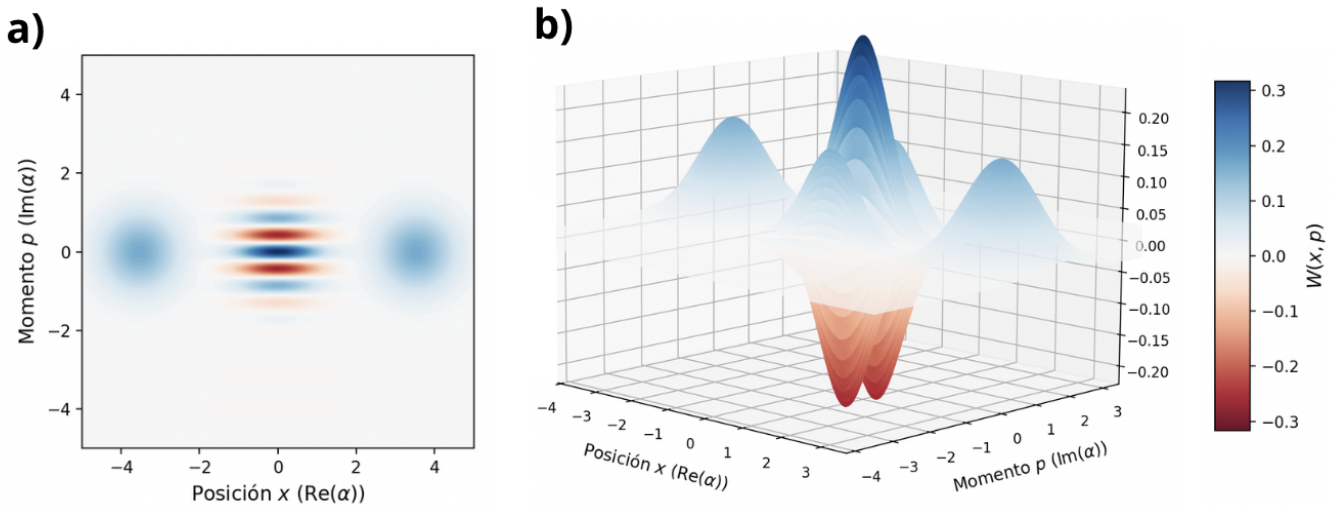

Figura 2.2: Función de Wigner para un estado de gato de Schrödinger par, con $\alpha = 2.5$. a) Vista cenital en el plano de fase (x, p). (b) Se muestra la distribución de la función de Wigner en 3D. Las regiones azules son las partes positivas de la función, mientras que las rojas son las negativas.

Para cuantificar la presencia de valores negativos de la función de Wigner, se define la negatividad $\mathcal{N}$ como [23]:

$$\mathcal{N} \equiv \frac{1}{2}\int d^2\alpha[|W(\alpha)| - W(\alpha)], \tag{2.60}$$

donde $\alpha = (x + ip)/\sqrt{2}$

En el marco de este trabajo, el interés central de analizar el espacio de fase radica en la caracterización de sistemas cuánticos cuyas funciones de onda presentan superposiciones macroscópicas. Dentro de esta categoría, los estados tipo gato de Schrödinger constituyen el objeto de estudio fundamental debido a que maximizan la aparición de regiones de cuasi-probabilidad negativa. En el contexto de las variables continuas y la óptica cuántica, estos estados se modelan mediante la superposición de dos estados coherentes $|\alpha\rangle$ diametralmente opuestos en el espacio de fase:

$$|\psi_\pm\rangle = N_\pm(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle). \tag{2.61}$$

- Gato par $(+)$: El centro del espacio de fase tiene una interferencia constructiva, es decir, la función de Wigner tiene un máximo local en $(0, 0)$.
- Gato impar $(-)$: El centro del espacio de fase tiene una interferencia destructiva, es decir, la función de Wigner tiene un mínimo local en $(0, 0)$, formando un pozo fuertemente negativo.

La negatividad de un estado de gato tiene una cota superior de $\mathcal{N}_{max} = 1/\pi \approx 0.3183$ cuando la separación entre los estados coherentes tiende al infinito, es decir, $|\alpha| \to \infty$, pero con un valor de $|\alpha| = 4$ el valor de $\mathcal{N} \to \mathcal{N}_{max}$, siendo $\mathcal{N}(|\alpha| = 4) \approx 0.318$ [24].

Capítulo 3

Modelos de interacción luz-materia en electrodinámica cuántica de guía de ondas

3.1. La función espectral

La función espectral se introduce al modelar el entorno como un conjunto de modos independientes acoplados linealmente al sistema. Esta función contiene la información necesaria para describir la interacción entre un sistema y su entorno, más específicamente, cómo se acopla el sistema a los distintos modos k del entorno y cómo se distribuye este acoplamiento en frecuencia. Esta función espectral se define como:

$$J(\omega) = 2\pi \sum_k |g_k|^2 \delta(\omega - \omega_k), \tag{3.1}$$

aquí g_k es una constante que nos dice qué tan fuerte es el acoplamiento para el modo k y ω_k son las frecuencias del entorno.

En el límite continuo, la suma sobre los modos discretos se reemplaza por una integral, introduciendo la densidad de estados del entorno $\rho(\omega) = \frac{dk}{d\omega}$. De este modo, la función espectral se expresa como:

$$J(\omega) = \rho(\omega)|g(\omega)|^2, \tag{3.2}$$

la cual caracteriza la estructura estática del baño. Desde el punto de vista dinámico, esta función determina las propiedades de las fluctuaciones y la disipación del entorno a través de las transformadas de Fourier seno y coseno de sus funciones de correlación [2]:

$$D(\tau) \equiv i\langle[B, B(-\tau)]\rangle = i[B, B(-\tau)], \tag{3.3}$$
$$D_1(\tau) \equiv \langle\{B, B(-\tau)\}\rangle. \tag{3.4}$$

Estas correlaciones describen la dinámica del kernel de disipación $D(\tau)$ y del kernel de ruido $D_1(\tau)$:

$$D(\tau) = 2\hbar \int_0^\infty d\omega J(\omega) \sin \omega\tau, \tag{3.5}$$

$$D_1(\tau) = 2\hbar \int_0^\infty d\omega J(\omega) \coth(\hbar\omega/2k_BT) \cos \omega\tau. \tag{3.6}$$

Estos kernels forman parte del generador disipativo que determina la evolución no unitaria de la ecuación maestra. En consecuencia, la forma funcional de $J(\omega)$ dicta las características de la dinámica del sistema. Tradicionalmente, su comportamiento a bajas frecuencias se clasifica mediante leyes de potencia $J(\omega) \propto \omega^s$:

- Sub-óhmico $s < 1$.
- Óhmico $s = 1$.
- Super-óhmico $s > 1$.

Más allá de estas clasificaciones ideales, las funciones espectrales suelen poseer una estructura más compleja, como distribuciones de banda finita ($\omega_{\text{mín}} \leqslant \omega \leqslant \omega_{\text{máx}}$), perfiles de tipo Lorentziano o acoplamientos multimodales. De hecho, a excepción del caso límite en el que $J(\omega)$ es estrictamente constante (el cual define el régimen Markoviano libre de memoria), prácticamente cualquier función espectral estructurada dará lugar a efectos de memoria y a una dinámica no-Markoviana en el sistema abierto.

3.2. Dinámica de amortiguamiento de amplitud

El canal de amortiguamiento de amplitud (conocido comúnmente en la literatura como *amplitude damping*), $\mathcal{E}$, es aquel que describe el proceso de un sistema cuántico donde sólo existe disipación de energía hacía el entorno, mapeando un estado inicial $\varrho(0)$ a uno evolucionado en el tiempo $\varrho(t)$ [11].

$$\mathcal{E}(\varrho) = \begin{pmatrix} \varrho_{ee}(0)|\alpha(t)|^2 & \varrho_{eg}(0)\alpha(t) \\ \varrho_{ge}(0)\alpha^*(t) & \varrho_{gg}(0) + \varrho_{ee}(0)(1 - |\alpha(t)|^2) \end{pmatrix},$$

donde $\alpha(t)$ es la amplitud de probabilidad de emisión. En el caso de un átomo, la emisión espontanea de un fotón, en una red cristalina, la perdida de un fonón, y para un espin, su relajación. Estos procesos evolucionan bajo un Hamiltoniano de tipo Jaynes-Cummings:

$$\hat{H} = \frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z + \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \sum_k g_k(\hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a}_k \hat{\sigma}_+), \tag{3.7}$$

aquí, el primer término corresponde al Hamiltoniano del sistema con frecuencia de transición ω_0 y operadores de inversión de población $\hat{\sigma}_z$, junto con los operadores de ascenso $\hat{\sigma}+$ y bajada $\hat{\sigma}-$. El segundo término describe el reservorio como un conjunto de modos bosónicos independientes de frecuencias ω_k, cuyos operadores de aniquilación y creación satisfacen las

relaciones de conmutación canónicas $[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}$. Finalmente, el tercer término modela la interacción, donde g_k denota la fuerza de acoplamiento entre el sistema y cada modo k del reservorio.

Este Hamiltoniano resulta de aplicar la aproximación de onda rotante (RWA) a un Hamiltoniano más general, que es el Hamiltoniano de Rabi. Esto es importante mencionar, porque es ésta aproximación la que promedia los términos contrarotantes $\hat{a}_k\hat{\sigma}_-$ y $\hat{a}_k^\dagger\hat{\sigma}_+$, los cuales no conservan el número total de excitaciones. En la interacción tipo Jaynes-Cummings, al sólo tener los términos rotantes, la interacción entre el sistema y el entorno consiste en la aniquilación de una excitación en el sistema para crear una excitación en el entorno $\hat{a}_k^\dagger\hat{\sigma}_-$, y la aniquilación de una excitación en el entorno para generar una excitación en el sistema $\hat{a}_k\hat{\sigma}_+$.

Para resolver la dinámica del sistema compuesto, la teoría de Wigner-Weisskopf comienza proponiendo un ansatz para la función de onda:

$$|\Psi(t)\rangle = \alpha(t)|e, 0\rangle + \sum_k \beta_k(t)|g, 1_k\rangle. \tag{3.8}$$

Este vector de estado corresponde al estado general en el subespacio de una sóla excitación, la cual considera que el sistema en el tiempo t es una superposición de la probabilidad de que el átomo esté excitado y el entorno esté vacío, y la probabilidad de que el átomo esté en el estado base con una excitación en el modo k en el entorno.

Se sustituye tanto el ansatz de la ecuación 3.8 como el Hamiltoniano 3.7 en la ecuación de Schrödinguer, lo que resulta en un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, donde la evolución de las amplitudes de probabilidad del sistema dependen de la evolución de las amplitudes del entorno, y viceversa:

$$\dot{\alpha}(t) = -i\frac{\omega_0}{2}\alpha(t) - i\sum_k g_k^*\beta_k(t), \tag{3.9}$$

$$\dot{\beta}_k(t) = -i\Big(\omega_k - \frac{\omega_0}{2}\Big)\beta_k(t) - ig_k\alpha(t). \tag{3.10}$$

Por lo general estas ecuaciones se escriben en el marco rotado para eliminar las oscilaciones rápidas y centrarse en el intercambio de energía entre el átomo y su entorno:

$$\dot{\alpha}(t) = -i\sum_k g_k^* e^{-i(\omega_k-\omega_0)t}\beta_k(t), \tag{3.11}$$

$$\dot{\beta}_k(t) = -ig_k e^{i(\omega_k-\omega_0)t}\alpha(t). \tag{3.12}$$

Asumiendo que el baño se encuentra inicialmente vacío ($\beta_k(0) = 0$), se integra la ecuación 3.12 y se sustituye en 3.11, lo que nos permite escribir una ecuación íntegro-diferencial cerrada para la dinámica del emisor:

$$\dot{\alpha}(t) = -\int_0^t dt' K(t-t')\alpha(t'), \tag{3.13}$$

donde $K(t-t') = \sum_k |g_k|^2 e^{-i(\omega_k-\omega_0)(t-t')}$ representa el núcleo de memoria.

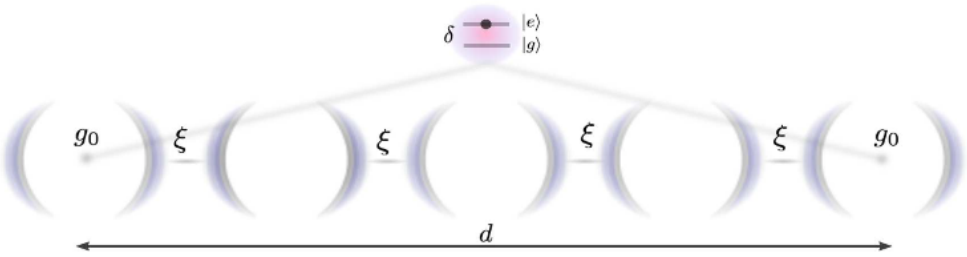

Figura 3.1: Modelo mínimo para un emisor gigante acoplado a dos cavidades distantes ($N_c = 2$). Tomado de [8]

.

En este punto la aproximación de Weisskopf–Wigner consiste en asumir un espectro continuo y aproximadamente plano alrededor de la frecuencia de transición, permitiendo extender artificialmente el dominio de integración de frecuencias positivas a todo el eje real. Bajo esta hipótesis, el núcleo de memoria adquiere una forma local en el tiempo,

$$K(t-t')\propto\delta(t-t'),$$

conduciendo a una dinámica Markoviana y a un decaimiento exponencial. En particular, la extensión del intervalo de integración,

$$\int_0^\infty d\omega \longrightarrow \int_{-\infty}^\infty d\omega,$$

permite utilizar la identidad de Fourier que da lugar a la delta de Dirac. No obstante, esta extensión es una idealización matemática, ya que incluye frecuencias negativas que no corresponden a modos físicos del reservorio[25]. Esta aproximación no captura la dinámica para baños estructurales, donde sus funciones espectrales tiene un ancho de banda finito.

Es por eso que con el fin de explorar los efectos no-Markovianos más allá del límite de Weisskopf-Wigner, en este trabajo se usa el formalismo de Berman-Ford [25], para un modelo analítico correspondiente a un emisor gigante acoplado a un arreglo unidimensional de cavidades acopladas, que en nuestro caso nos centraremos en un acoplamiento de dos conexiones, $N_c = 2$, ver figura 3.1. En este escenario, el sistema central es un qubit con energía de excitación δ, interactuando con la cavidad central ($n = 0$) de una red con parámetro de *hopping* ζ, también conocido como parámetro de salto y frecuencia natural ω_c. El Hamiltoniano del sistema está dado por:

$$H = \delta\sigma^+\sigma^- + \omega_c\sum_n a_n^\dagger a_n + \zeta\sum_n\left(a_{n+1}^\dagger a_n + a_n^\dagger a_{n+1}\right) + g_0\sum_{j=1}^{N_c}\left(\sigma^+ a_{xj} + \sigma^- a_{xj}^\dagger\right). \tag{3.14}$$

La función espectral de un arreglo de cavidades se ve modificada por el término de interferencia generado por las dos conexiones en el acoplamiento. Resultando en una función espectral efectiva dependiente de la distancia entre las conexiones d:

$$J(\omega) = \frac{g_0^2}{\sqrt{4\zeta^2-\omega^2}}[1+\cos\left(k(\omega)d\right)]. \tag{3.15}$$

Para diagonalizar el Hamiltoniano de las cavidades se realiza una transformada de Fourier discreta para los operadores bosónicos $a_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikn} a_k$, cuando $N \to \infty$. Tras diagonalizar el Hamiltoniano y rotar el marco con respecto a ω_c en términos del *detuning* $\Delta = \delta - \omega_c$, se obtiene la relación de dispersión de la red $\omega_k = 2\zeta \cos(k)$ y el Hamiltoniano total toma la forma:

$$H = \Delta \sigma^+ \sigma^- + \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_k \tilde{g}_k \left(\sigma^+ a_k + \sigma^- a_k^\dagger \right), \tag{3.16}$$

donde el acoplamiento en el caso de dos conexiones se escribe:

$$\tilde{g}_k = \frac{g_0}{N_c \sqrt{N}} \frac{\sin\left(k d N_c/2\right)}{\sin\left(kd/2\right)}. \tag{3.17}$$

Para resolver la ecuación integrodiferencial 3.13, correspondiente a éste Hamiltoniano se usa el método de Berman y Ford, mediante la transformada de Laplace (cuyos detalles formales de polos, cortes de rama y residuos se detallan en el Apéndice A, la solución explícita para la amplitud de probabilidad $\alpha(t)$ del emisor gigante adopta la forma:

$$\alpha(t) = \frac{4 g_0^2}{\pi \zeta^2} \int_{-1}^{1} d\tilde{y}\, K_{\text{giant}}(\tilde{y}, d) e^{i2\tilde{y}t} + \sum_{j=\pm} r_j e^{-i y_j t}, \tag{3.18}$$

siendo la función núcleo (kernel):

$$K_{\text{giant}}(\tilde{y}, d) = \frac{\sqrt{1-\tilde{y}^2}\left[1 + \cos(k(-\tilde{y})d)\right]}{8(2\tilde{y} + \Delta/\zeta)^2(1-\tilde{y}^2) + F(\tilde{y}, d)}, \tag{3.19}$$

con $F(\tilde{y}, d) = (g_0/\zeta)^4(1 + \cos(k(-\tilde{y})d)) - 4(g_0/\zeta)^2(2\tilde{y} + \Delta/\zeta)\sqrt{1-\tilde{y}^2}\sin(k(-\tilde{y})d)$.

Los polos discretos y_j determinan las contribuciones de los estados ligados dentro del continuo, mientras que el término integral (corte de rama) describe la disipación transitoria. A tiempos largos, la contribución del corte de rama decae y la dinámica estacional se reduce a:

$$\lim_{t\to\infty} |\alpha(t)|^2 = r_+^2 + r_-^2 + 2 r_+ r_- \cos\left((y_+ - y_-)t\right). \tag{3.20}$$

Entonces, lo que domina la dinámica son los residuos fuera de la banda r_+, con $y_+ > 2\zeta$ y los residuos del estado ligado dentro del continuo r_m, estos últimos tienen frecuencias características, que satisfacen $\omega_m = 2\zeta \cos\left[\pi(2m+1)/d\right]$. La existencia de los estados ligados es consecuencia de los efectos de interferencia destructiva que anulan localmente la densidad espectral efectiva ($J_{\text{eff}}(\omega_m) = 0$), impidiendo la disipación total de la energía y consolidando un régimen fuertemente no-Markoviano.

3.3. Emisores gigantes

En óptica cuántica se suele asumir que el tamaño del sistema que emite o absorbe radiación es mucho menor que la longitud de onda del campo con el que interactúa $r \ll \lambda$, a esta aproximación se le conoce como aproximación dipolar [26, 3]. Sin embargo, esta aproximación

no se cumple para los emisores gigantes, ya que sus dimensiones efectivas son comparables a la longitud de onda de la luz con la que interactúan. Al contar con múltiples puntos de acoplamiento distribuidos a lo largo de distancias macroscópicas, estos sistemas aumentan su tamaño efectivo hasta volverse comparables con la longitud de onda de la radiación. Como consecuencia de esta geometría, los distintos puntos de contacto interactúan con fases diferentes del campo, dando lugar a efectos de interferencia que no se presentan en los emisores pequeños. Los sistemas de dos niveles que se describen bajo esta interacción no local con la luz son conocidos como átomos gigantes en un régimen de dos niveles, ver figura 3.2.

En el marco de este trabajo, se estudiará la dinámica de dos sistemas fundamentales: un oscilador armónico cuántico y un qubit. Estos modelos describen distintas plataformas físicas. Algunas de las plataformas físicas más estudiadas son los circuitos superconductores, los puntos cuánticos y los átomos de Rydberg, los primeros dos corresponden a átomos artificiales gigantes, ya que, la descripción de la interacción luz-materia es la misma que se usa para un átomo "natural", pero no son los átomos que encontramos en la tabla periódica. Ver apéndice B. Las plataformas físicas que modela un oscilador armónico cuántico son múltiples, algunos ejemplos son los resonadores y las vibraciones espaciales de una molécula.

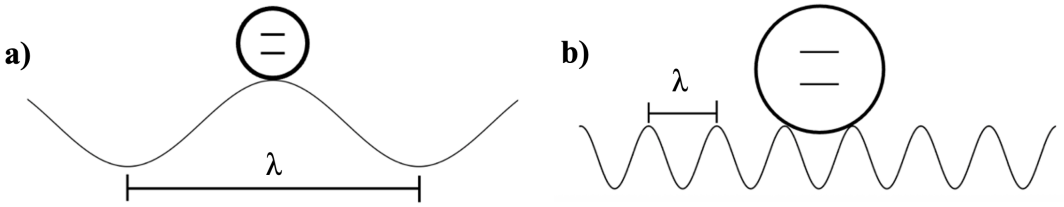

Figura 3.2: a) Representación de un átomo pequeño, cumple la aproximación dipolar $r \ll \lambda$. b) Representación de un átomo gigante, no cumple la aproximación dipolar.

Debido a la interferencia generada entre los múltiples puntos de acoplamiento, los emisores gigantes exhiben diversos fenómenos no-Markovianos, entre los efectos más relevantes se encuentran los siguientes [27, 3, 7]:

- Revivals: estos inducen términos retardados en la dinámica debido a la propagación finita de información entre los puntos de acoplamiento ($\tau_{ij} = |x_i - x_j|/v$).
- Estados oscuros: corresponde a estados del sistema desacoplados del entorno ($L|\psi\rangle = 0$), donde (L) es el operador de salto asociado al canal disipativo. En términos espectrales, esto se relaciona con la anulación de la densidad espectral efectiva, ($\rho(\omega) = 0$), para ciertas frecuencias.
- Estados ligados: surgen cuando la interacción sistema–entorno da lugar a estados propios del Hamiltoniano total que no se disipan en el continuo ($\lim_{t\to\infty} P_e(t) \neq 0$).

La clase de fenómeno no-Markoviano va a depender del tipo de interacción que exista entre el sistema y su entorno, lo que está descrito bajo un Hamiltoniano de interacción, además de estar íntimamente ligada a la geometría de los acoplamientos. Cabe aclarar que el criterio de no-Markovianidad considerado en este trabajo está basado en la tasa instantánea de decoherencia, el cual resulta sumamente adecuado para la dinámica de desfase estudiada.

Este criterio consiste en la existencia de intervalos temporales en los cuales:

$$\gamma(t) = \frac{d\Gamma(t)}{dt} < 0, \tag{3.21}$$

lo que indica una recuperación parcial de la coherencia asociada al flujo de información desde el entorno hacia el sistema y, de manera equivalente, a la pérdida de divisibilidad completamente positiva del mapa dinámico[5].

3.4. Acoplamiento efectivo para un emisor gigante

El acoplamiento efectivo para un sistema con N_c número de conexiones, entre el emisor y la guía de onda, distribuidos a una distancia x_j es [28]:

$$\tilde{g}_k = \frac{g_k}{\sqrt{N_c}} \sum_j e^{ikx_j}, \tag{3.22}$$

donde g_k es la amplitud de acoplamiento individual de un emisor puntual. Si consideramos el caso particular donde los puntos de contacto se encuentran distribuidos de manera equiespaciada a lo largo de la guía de onda, sus posiciones quedan descritas como $x_j = (j-1)x$, siendo x la distancia fija entre conexiones adyacentes.

Bajo esta configuración geométrica, la suma geométrica de las fases da lugar al factor de interferencia que modula la función espectral:

$$|\tilde{g}_k|^2 = \frac{|g_k|^2}{N_c} \frac{1-\cos(kxN_c)}{1-\cos(kx)}, \tag{3.23}$$

donde el vector de onda k está determinado por la relación de dispersión general de la guía, $\omega_k = \omega(k)$. Esta modulación periódica en el dominio de las frecuencias da origen a fenómenos de interferencia constructiva y destructiva controlados por la distancia de separación x (ver figura 3.3), permitiendo la existencia de frecuencias protegidas de la disipación.

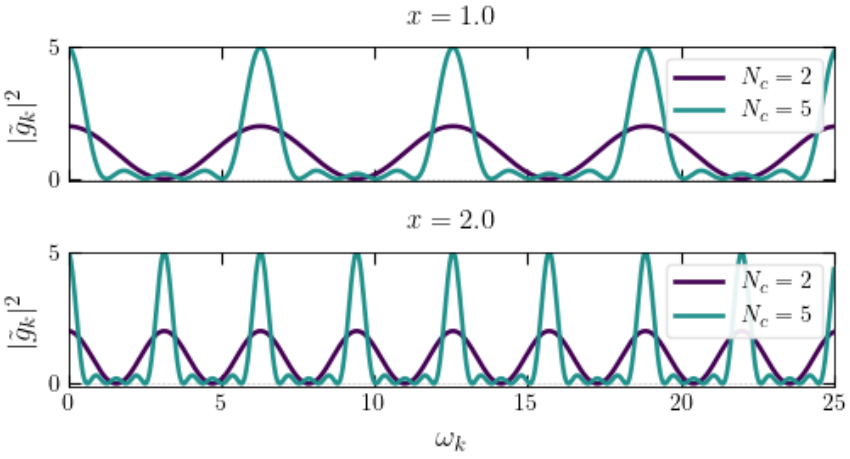

Figura 3.3: Módulo al cuadrado de la amplitud de acoplamiento efectiva, $|\tilde{g}_k|^2$, en función de la frecuencia k-esima, ω_k. En ambas gráficas se varía el número de conexiones, N_c. A la gráfica superior le corresponde a una distancia $x = 1$ entre conexiones, mientras la gráfica inferior le corresponde una distancia $x = 2$.

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos para la dinámica de desfase y de amortiguamiento de amplitud en emisores gigantes acoplados a entornos bosónicos. Con el propósito de validar el formalismo desarrollado, se analizan en primer lugar diversos casos estudiados en la literatura, recuperando expresiones conocidas para un emisor puntual acoplado a un baño óhmico tanto a temperatura cero como a temperatura finita. Estas derivaciones permiten verificar la consistencia del tratamiento basado en el operador de eco de Loschmidt y constituyen el punto de referencia para el estudio de emisores gigantes.

Posteriormente se presentan los resultados originales de este trabajo. En primer lugar, se extiende el modelo al caso de un emisor gigante con múltiples puntos de acoplamiento y se obtiene una expresión analítica para la función de decoherencia en términos del núcleo de Fejér. A partir de ella se analiza la influencia del número de conexiones, la separación espacial entre ellas y la temperatura del entorno sobre la dinámica de las coherencias. Asimismo, se estudia el límite de un número infinito de conexiones, para el cual se obtiene una expresión analítica cerrada que describe la evolución de la coherencia.

En una segunda etapa, se considera un sistema de dos qubits gigantes inicialmente preparados en un estado máximamente entrelazado e interactuando con baños bosónicos independientes mediante una dinámica de desfase. Se demuestra que la evolución de la concurrencia puede expresarse directamente en términos de la coherencia de un solo qubit, estableciendo una conexión entre la preservación de la coherencia individual y la protección del entrelazamiento bipartito.

Finalmente, se estudia la dinámica de un oscilador armónico gigante sometido a un proceso de amortiguamiento de amplitud. Se analiza la preservación de estados tipo gato de Schrödinger en distintos regímenes espectrales asociados con estados ligados dentro y fuera del continuo (BIC y BOC), estableciendo la relación entre la evolución del número promedio de excitaciones, la coherencia cuántica y la negatividad de la función de Wigner como medida de no-clasicidad.

4.1. Dinámica de desfase no-Markoviana

En esta sección se estudia la dinámica de desfase de un emisor cuántico de dos niveles, acoplado a un baño bosónico. Se analiza primero el caso de un emisor puntual, para el cual se

recuperan resultados conocidos de la literatura, y posteriormente se extiende el estudio a un emisor gigante con múltiples puntos de acoplamiento. Se muestra cómo la estructura espacial del emisor modifica la función espectral efectiva y da lugar a fenómenos no-Markovianos, tales como revivals de coherencia y frecuencias oscuras. Posteriormente, estudia el límite de infinitas conexiones, para el cual se obtiene una expresión analítica cerrada para la dinámica de la coherencia. Finalmente, se estudia el efecto de la temperatura en la dinámica del emisor gigante.

El Hamiltoniano de desfase para un emisor cuántico (sistema de dos niveles) acoplado a un baño bosónico, en el caso de un acoplamiento local, una sola conexión, $N_c = 1$, que corresponde a un emisor puntual es:

$$\hat{H} = \frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_z + \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{\sigma}_z \sum_k (g_k^* \hat{a}_k + g_k \hat{a}_k^\dagger), \tag{4.1}$$

donde Δ es la frecuencia de transición del qubit, ω_k son las frecuencias de los modos del entorno y g_k describe la intensidad de acoplamiento entre el sistema y el baño. La matriz de Pauli $\hat{\sigma}_z$ es el operador del sistema, mietras que los operadores del baño son los operadores bosónicos de creación y aniquilación del modo k-esimo, $\hat{a}_k^\dagger$ y $\hat{a}_k$ respectivamente.

En la sección 2.10 vimos que la evolución de la coherencia depende del valor esperado del operador de *eco*:

$$\varrho_{12}(t) = \varrho_{12}(0)\, e^{-i\Delta t} \langle M(t) \rangle. \tag{4.2}$$

El cual evoluciona el estado inicial del baño χ_0 bajo la acción combinada del Hamiltoniano $\hat{H}_e$ del entorno y el operador perteneciente al entorno $\hat{V}_e$ presente en el Hamiltoniano de interacción $\hat{H}_{int} = \hat{S} \otimes \hat{V}_e$

$$\langle \chi_0 | \hat{M}(t) | \chi_0 \rangle = \langle \chi_0 | e^{i(\hat{H}_e - \hat{V}_e)t} e^{-i(\hat{H}_e + \hat{V}_e)t} | \chi_0 \rangle. \tag{4.3}$$

Observando el Hamiltoniano total de la dinámica de desfase, ecuación 4.1, identificamos H_e y V_e

$$H_e = \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k, \quad V_e = \sum_k (g_k^* a_k + g_k a_k^\dagger). \tag{4.4}$$

Consideramos que el estado inicial del baño es el estado vacío $|\chi_0\rangle = |0\rangle$ y procedemos a calcular la interacción hacía adelante:

$$e^{-i(H_e + V_e)t} |0\rangle. \tag{4.5}$$

Para ello $H_e + V_e$ pueden reescribirse en términos del operador desplazamiento, definido en la sección de *estados coherentes*: $D(\alpha_k) = \exp(\alpha_k a_k^\dagger - \alpha_k^* a_k)$. El cuál actua sobre el estado de vacío desplazándolo a un estado coherente $|\alpha\rangle$: $\hat{D}(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle$

$$H_e + V_e = \sum_k \left[\omega_k D^\dagger(\alpha_k) a_k^\dagger a_k D(\alpha_k) - \frac{|g_k|^2}{\omega_k} \right], \tag{4.6}$$

donde $\alpha_k = g_k/\omega_k$.
Sustituyendo la expresión anterior, la evolución temporal resulta:

$$e^{-i(H_e+V_e)t}|0\rangle = \prod_k e^{ig_k^2 t/\omega_k} D^\dagger(\alpha_k) e^{-i\omega_k a_k^\dagger a_k t} D(\alpha_k)|0\rangle. \tag{4.7}$$

Siguiendo un procedimiento similar, para la evolución temporal hacia atrás:

$$\langle 0|e^{i(H_e-V_e)t} = \langle 0| \prod_k e^{-ig_k^2 t/\omega_k} D(\alpha_k) e^{i\omega_k a_k^\dagger a_k t} D^\dagger(\alpha_k). \tag{4.8}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la definición del valor esperado del operador de *eco* y utilizando las propiedades del operador de desplazamiento, su unitaridad $D^\dagger(\alpha) = D(-\alpha)$ y su regla de composición $D(\alpha)D(\beta) = e^{(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)/2} D(\alpha+\beta)$. Y considerando que el producto interno de los estados coherentes $|\alpha\rangle$ es: $\langle\beta|\gamma\rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\beta|^2+|\gamma|^2)+\beta^*\gamma}$. El valor esperado del operador de *eco* se simplifica a:

$$\langle M(t)\rangle = e^{4\sum_k |\alpha_k|^2(\cos(\omega_k t)-1)}. \tag{4.9}$$

En el límite continuo, reemplazamos la suma sobre modos por una integral, introduciendo la función espectral $J(\omega) = 2\pi \sum_k |g_k|^2 \delta(\omega - \omega_k)$:

$$\langle M(t)\rangle = e^{-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega^2}(1-\cos(\omega t))}. \tag{4.10}$$

Por lo tanto, la ecuación que describe las coherencias, para un acoplamiento de desfase, entre un sistema de dos niveles y un baño bosónico, se expresa:

$$\varrho_{12}(t) = \varrho_{12}(0) e^{-i\Delta t} e^{-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega^2}(1-\cos(\omega t))}. \tag{4.11}$$

4.1.1. Aplicación a un baño Óhmico a $T = 0$

Antes de analizar el efecto de múltiples puntos de acoplamiento, resulta conveniente estudiar un caso para el cual la dinámica pueda resolverse analíticamente y que, además, sirva como referencia para las secciones posteriores. Para ello se considera un baño óhmico a temperatura cero, uno de los modelos más empleados en la teoría de sistemas cuánticos abiertos debido a que describe una amplia clase de entornos bosónicos cuyo acoplamiento crece linealmente con la frecuencia a bajas energías.

La elección de este modelo permite obtener una expresión analítica para la evolución de las coherencias y estudiar de manera independiente el papel que desempeñan los parámetros físicos de la función espectral. En particular, se analizará cómo la frecuencia de corte determina el intervalo de frecuencias relevantes en la interacción sistema-entorno, mientras que el parámetro de acoplamiento controla la rapidez con la que se pierde la coherencia cuántica. Estos resultados servirán posteriormente como punto de comparación para identificar las modificaciones inducidas por la geometría de un emisor gigante.

La función espectral óhmica es aquella que cumple la relación $J(\omega) \propto \omega$, como es el caso de:

$$J(\omega) = \pi\alpha\omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}}, \tag{4.12}$$

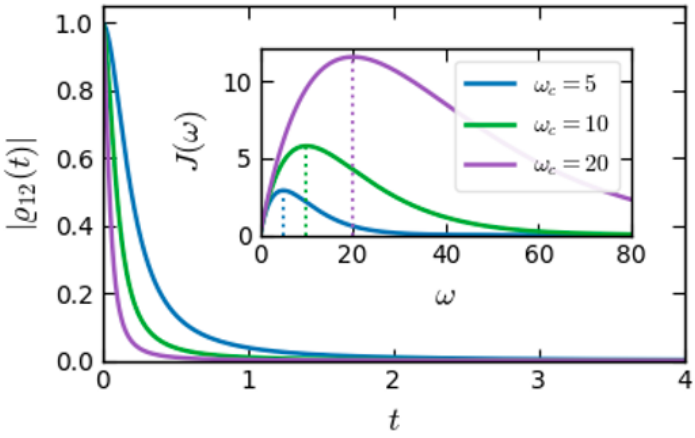

Figura 4.1: Evolución de las coherencias $|\varrho_{12}(t)|$, de una interacción de desfase entre un qubit y un baño óhmico, a T=0, variando la frecuencia de corte, ω_c. Encajada en la gráfica de las coherencias se observa la función espectral $J(\omega)$ correspondiente a cada frecuencia de corte, donde la línea punteada vertical indica el punto donde $\omega = \omega_c$. Se tomó $\varrho_{12}(0) = 1/2$, $\Delta = 1.0$, $\alpha = 1$.

donde ω_c es la frecuencia de corte, y α es un parámetro de acoplamiento adimensional que describe la fuerza de interacción entre el baño y el qubit. La frecuencia de corte evita que la función $J(\omega)$ diverja y refleja el hecho de que los sistemas físicos reales poseen un ancho de banda finito. Además, ω_c determina el rango de frecuencias que contribuyen significativamente a la interacción sistema-entorno, siendo el máximo de la función espectral justo cuando $\omega = \omega_c$. Conforme aumenta ω_c, la función espectral se extiende hacia frecuencias más altas y la amplitud máxima de la distribución también incrementa, como se muestra en la figura 4.1.

La evolución de las coherencias, para el caso óhmico a $T = 0$, tienen una expresión analítica:

$$\varrho_{12}(t) = \varrho_{12}(0)e^{-i\Delta t}(1 + \omega_c^2 t^2)^{-\alpha}. \tag{4.13}$$

La ecuación (4.13) muestra que la pérdida de coherencia sigue una ley de potencia, característica de la interacción con un entorno óhmico a temperatura cero [29]. El parámetro α determina qué tan rápido se pierde la coherencia debido a la interacción con el entorno, figura 4.2. Valores mayores de α implican un decaimiento más rápido, mientras que valores menores permiten una coherencia más persistente.

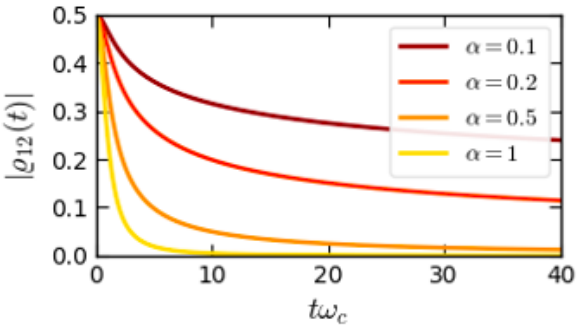

Figura 4.2: Evolución de las coherencias con respecto al tiempo, de una interacción de desfase entre un qubit y un baño óhmico, a temperatura 0, para distintos valores de α. Se tomó $\varrho_{12}(0) = 1/2$, $\Delta = 1.0$, $\omega_c = 10$.

4.1.2. Aplicación a un baño Óhmico a T finita

Para considerar efectos de temperatura finita, el valor esperado del operador de *eco* debe calcularse sobre un estado térmico del baño:

$$\langle M(t)\rangle = \mathrm{Tr}\{M(t)\varrho_\beta\}, \tag{4.14}$$

donde la matriz de densidad canónica es:

$$\varrho_\beta = \frac{e^{-\beta\sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k}}{\mathrm{Tr}\{e^{-\beta H}\}}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}. \tag{4.15}$$

y el operador eco obtenido en la sección anterior tiene la forma:

$$M(t) = \prod_k D^\dagger(-\alpha_k) e^{i\omega_k a_k^\dagger a_k t} D(-2\alpha_k) e^{-i\omega_k a_k^\dagger a_k t} D(\alpha_k). \tag{4.16}$$

Se procede a simplificar la parte temporal del operador. Usando la fórmula de BCH (Baker-Campbell-Hausdorff), se reducen los términos, permitiendo reescribir la expresión como operadores de desplazamiento dependientes del tiempo. Entonces $M(t)$ queda expresado en el producto de tres operadores de desplazamiento:

$$M(t) = D^\dagger(-\alpha_k) D(-2\alpha e^{i\omega_k t}) D(\alpha_k). \tag{4.17}$$

Después de usar la relación de composición de los operadores desplazamiento y al cancelar los factores de fase, se simplifica el valor esperado del operador eco:

$$\langle M(t)\rangle = \prod_k \mathrm{Tr}\{D(2\alpha_k - 2\alpha_k e^{i\omega_k t})\varrho_\beta\ \}. \tag{4.18}$$

La traza del operador de desplazamiento sobre un estado térmico está dada por:

$$\mathrm{Tr}\{D(\gamma_k)\varrho_\beta\} = e^{-\frac{1}{2}|\gamma_k|^2 \coth\left(\frac{\hbar\omega_k}{2k_B T}\right)}, \tag{4.19}$$

donde hemos usado la relación:

$$\coth\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + 2n_{th}(\omega_k), \tag{4.20}$$

con $n_{th}(\omega_k)$ siendo el número medio de ocupación térmica. El valor esperado del operador de eco resultante es:

$$\langle M(t)\rangle = \prod_k \exp\left[-8|\alpha_k|^2 \sin^2\left(\frac{\omega_k t}{2}\right)\coth\left(\frac{\hbar\omega_k}{2k_BT}\right)\right]. \tag{4.21}$$

Tomando el límite continuo, reemplazando $\alpha_k = g_k/\omega_k$ e introduciendo la función espectral:

$$\Gamma(t) = \ln\langle M(t)\rangle \tag{4.22}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega^2}[1-\cos(\omega t)]\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right). \tag{4.23}$$

Ésta es la tasa acumulada de decoherencia y coincide con lo ya reportado en la literatura[30, 31].

En la figura 4.3 se ilustra la evolución de las coherencias con respecto al tiempo. Se puede observar cómo el factor $\coth(\hbar\omega/2k_BT)$ incorpora los efectos de temperatura:

A $T \to 0$, $\coth(\hbar\omega/2k_BT) \to 1$, se recupera el resultado obtenido a temperatura cero. Observar figura 4.3. A altas temperaturas ($k_BT \gg \hbar\omega$), $\coth(\hbar\omega/2k_BT) \approx 2k_BT/\hbar\omega$, muestra una dependencia lineal con la temperatura.

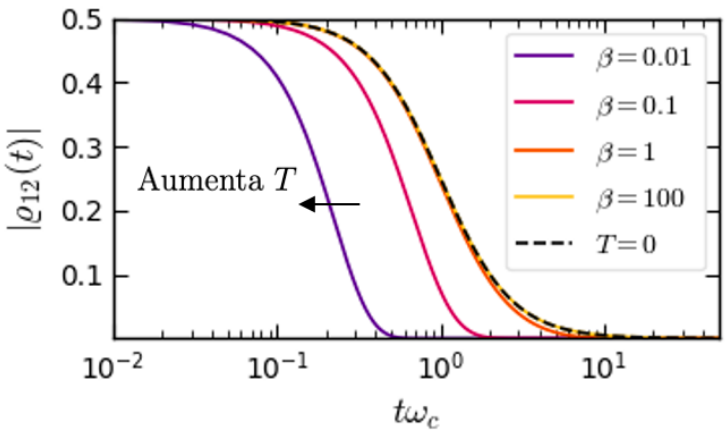

Figura 4.3: Evolución de las coherencias con respecto al tiempo, en escala logarítmica, de una interacción de desfase entre un qubit y un baño óhmico, a temperatura finita, para distintos valores de β. Se puede observar cómo la línea amarilla, con $\beta = 100$, recobra el comportamiento obtenido en la sección anterior (línea punteada), $T = 0$. Se tomó $\varrho_{12}(0) = 1/2$, $\Delta = 1.0$, $\omega_c = 10, \alpha = 1$.

4.1.3. Aplicación a un baño Óhmico - átomo gigante a $T = 0$ con N_c conexiones

Una vez establecido el formalismo microscópico del acoplamiento no local en la sección 3.4, *Acoplamiento efectivo para un emisor gigante*, y obtenida la dinámica de decoherencia para un emisor puntual en la sección 4.1, *Dinámica de desfase no-Markoviana*, en esta sección analizamos el impacto de la estructura geométrica del emisor sobre las tasas disipativas cuando el entorno continuo posee un perfil de densidad espectral de tipo óhmico con corte exponencial. A partir de la amplitud de acoplamiento efectivo del emisor gigante $\tilde{g}_k$ introducida en la ecuación 3.23, la densidad espectral del sistema adopta la forma de un perfil óhmico convencional modulado por el factor de interferencia debido al número de conexiones N_c:

$$J_{ef}(\omega) = J(\omega)\left[\frac{1-\cos(N_c\omega x/v_g)}{N_c\,(1-\cos(\omega x/v_g))}\right], \tag{4.24}$$

donde $J(\omega) = \pi\alpha\omega e^{-\omega/\omega_c}$ representa la respuesta espectral de un emisor puntual de referencia.

Bajo esta descripción, los ceros analíticos de $J_{ef}(\omega)$ adquieren un significado físico fundamental, ya que corresponden a frecuencias oscuras en las cuales el emisor se desacopla espectralmente del entorno continuo debido a fenómenos de interferencia cuántica destructiva entre sus puntos de contacto, ver figura 4.4.

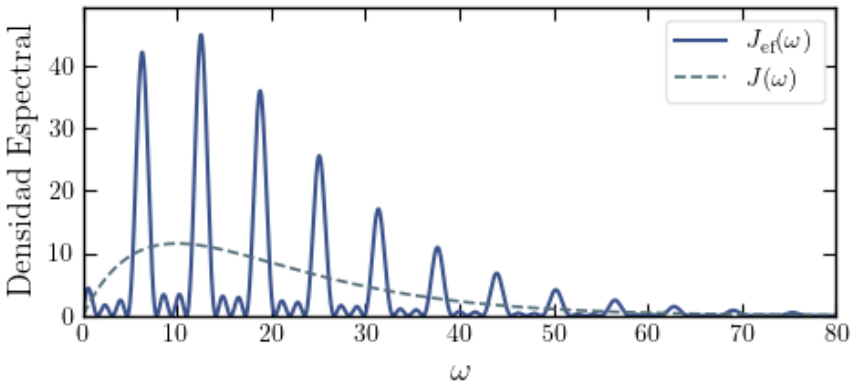

Figura 4.4: Densidad espectral efectiva de un emisor gigante $J_{ef}(\omega)$, distribuída en frecuencias ω, y la densidad óhmica $J(\omega)$ de un emisor puntual que funge como perfil para la $J_{ef}(\omega)$.

Como consecuencia directa de esta estructuración espectral, la dinámica de pérdida de fase del sistema central experimenta modificaciones respecto al caso puntual. Entonces la tasa de decoherencia temporal para el átomo gigante interactuando con este baño a temperatura cero ($T = 0$), asumiendo una velocidad de grupo normalizada $v_g = 1$ y un número de conexiones N_c, resulta ser:

$$\Gamma(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)(1-\cos(\omega t))}{\omega^2}\frac{(1-\cos(N_c\omega x))}{N_c(1-\cos(\omega x))}. \tag{4.25}$$

Cuando $N_c = 1$ podemos notar que se recuperan las ecuaciones para un emisor puntual 4.11 y 4.13.

Los ceros del numerador y del denominador que aporta la parte estructural del emisor gigante son del mismo orden (ambos son ceros dobles). Por lo tanto, se cancelan mutuamente. Aunque no hay polos que hagan divergir la integral, no tiene una primitiva directa en funciones elementales debido al acoplamiento de los cosenos en el denominador. Por ello, para poder resolver la integral se usó el núcleo de Fejér [32]:

$$\frac{(1-\cos(N_c\theta))}{N_c(1-\cos(\theta))} = \sum_{m=-N_c+1}^{N_c-1}\left(1-\frac{|m|}{N_c}\right)e^{im\theta} \tag{4.26}$$

donde $\theta = \omega x$.

Entonces, la tasa de decoherencia para cualquier $J(\omega)$ está dada en términos de la misma integral de un emisor gigante multiplicado por un fasor $e^{im\omega x}$ dentro de la misma integral, y una sumatoria que depende de el número de conexiones.

$$\Gamma(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{m=-N_c+1}^{N_c-1}\left(1-\frac{|m|}{N_c}\right)\int_{m0}^{\infty} d\omega \frac{J(\omega)(1-\cos(\omega t))e^{im\omega x}}{\omega^2}. \tag{4.27}$$

El desfase que induce la parte estructural crece linealmente con la distancia x y con el número m que corre de $m = -(N_c-1)$ a $m = N_c - 1$, por lo cual la cantidad de fasores es $2N_c - 1$ y cada uno está pesado con el término $(1 - \frac{|m|}{N_c})$.

La ecuación 4.27 también se puede escribir como:

$$\Gamma(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega \frac{J(\omega)(1-\cos(\omega t))}{\omega^2} F_{N_c}(\omega x), \tag{4.28}$$

considerando el núcleo de Féjer:

$$F_{N_c}(\omega x) = 1 + 2\sum_{m=1}^{N_c-1}\left(1-\frac{m}{N_c}\right)\cos(m\omega x). \tag{4.29}$$

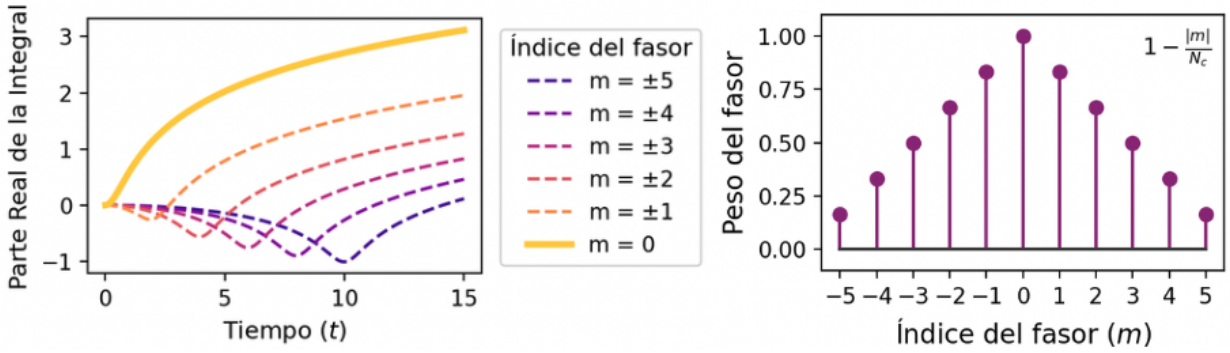

Figura 4.5: En el lado izquierdo se muestra la parte real de la integral de $\Gamma(t)$ correspondiente a una m distinta. Mientras del lado derecho se muestra el coeficiente que pesa a cada integral. Se usó una distancia entre conexiones $x = 2$ y un número de conexiones $N_c = 6$.

En la figura 4.5 se muestra cómo conforme crece el indice m, la parte negativa de la integral aumenta. Son estas partes negativas las que generan los revivals de la coherencia. El mínimo de cada integral se alcanza en $t = x$. En la misma figura 4.5 se muestra como cada integral tiene un peso diferente, a valores de $|m|$ más grandes, el peso de cada integral es menor. Por lo tanto, en la figura 4.6 se puede observar que las contribuciones de las regiones negativas decrecen para m mayores, y por lo tanto los revivals a tiempos mayores serán de menor magnitud que el anterior.

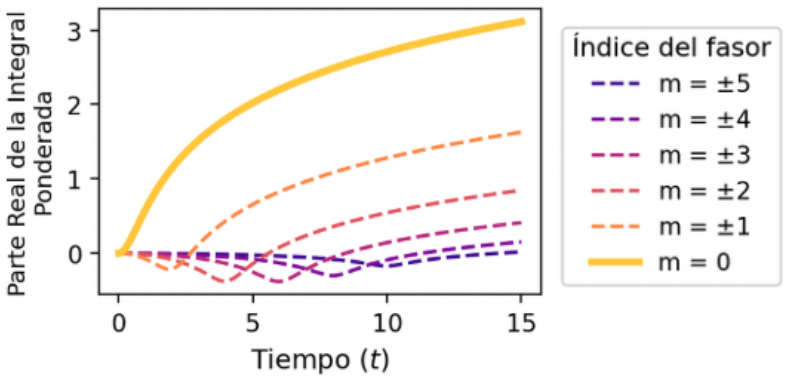

Figura 4.6: Gráfica de cada integral con respecto al tiempo, para cada m, multiplicada por su respectivo peso.

El caso de $m = 0$ corresponde al de un emisor puntual, $N_c = 1$, podemos observar, cómo no tiene partes negativas, lo que nos regresa a una dinámica de decoherencia meramente decreciente.

Ahora podemos analizar el caso de un baño óhmico tras sustituir la función espectral óhmica, la integral resultante es soluble usando la derivación bajo el signo de la integral, también conocido como truco de Feynman, al derivar con respecto a t, logramos deshacernos del término $1/\omega$. Posteriormente, la integral toma la forma de una transformada de Laplace de la función seno, tras realizar la integral sobre la frecuencia, deshacemos la derivada con respecto al tiempo para recuperar la la tasa de decoherencia:

$$\Gamma(t) = \alpha \sum_{m=-N_c+1}^{N_c-1} \left(1 - \frac{|m|}{N_c}\right) \ln\left[1 + \frac{t^2}{(1/\omega_c - imx)^2}\right]. \tag{4.30}$$

Tomando la parte real de $\Gamma(t)$, el valor esperado del operador de eco, dependiente del número de conexiones Nc, la distancia entre ellas x y el tiempo t, se comporta como el producto de funciones:

$$\langle M(t, x; N_c)\rangle = \prod_{m=-N_c+1}^{N_c-1} \left[\frac{\left(1 + (\omega_c m x)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 + \omega_c^2 (t - mx)^2\right)^{\frac{1}{4}} \left(1 + \omega_c^2 (t + mx)^2\right)^{\frac{1}{4}}}\right]^{\alpha\left(1 - \frac{|m|}{N_c}\right)}.$$

El exponente de cada término del producto está escalado por $\alpha\left(1-\frac{|m|}{N_c}\right)$. Conforme crece el número de conexiones, aumenta el número de revivals, el número de veces que se recobra la coherencia es $Nc-1$, ver figura 4.7. También se puede observar que a mayor número de conexiones, el valor máximo de los revivals aumenta, pero tras cada recuperación la caída de la coherencia se da de manera más rápida.

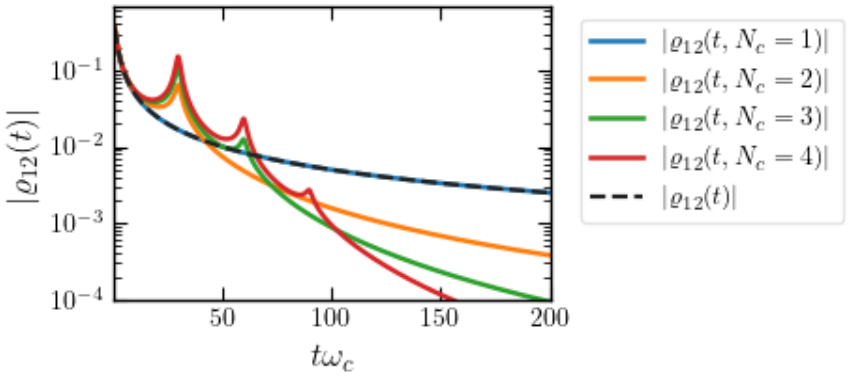

Figura 4.7: Evolución de las coherencias con respecto al tiempo, en escala logarítmica, de una interacción de desfase entre un qubit y un baño óhmico, a $T = 0$, para distinto numero de conexiones N_c. Se puede observar cómo la línea azul, con $N_c = 1$ recobra el comportamiento obtenido en la sección 3.3 (línea punteada). Se tomó $\varrho_{12}(0) = 1/2$, $\Delta = 1.0$, $\omega_c = 10, \alpha = 1$.

Cuando se analiza la respuesta dinámica del emisor en función de la distancia entre sus acoplamientos, se observa que los frentes de onda de reactivación (revivals) en la coherencia cuántica no ocurren de manera exacta en los tiempos $t_n = nx$ (con $n = 1, 2, \ldots, N_c - 1$). En su lugar, la interferencia constructiva retardada experimenta un desplazamiento temporal hacia tiempos más cortos, manifestándose en un adelanto del perfil de reactivación.

Mediante un análisis perturbativo a primer orden de $\langle M(t)\rangle$ en la vecindad de cada eco ($t \sim nx$), es posible determinar analíticamente la posición aproximada del n-ésimo máximo local de la coherencia, el cual se ubica en $t_{\text{máx}} = nx + \delta_n$. La desviación temporal δ_n está gobernada por la relación:

$$\delta_n \approx -\frac{nN_c x}{(N_c - n)(1 + n^2\omega_c^2 x^2)}. \tag{4.31}$$

El término de decaimiento local (Markoviano) actúa como una "fuerza de arrastre"sobre el pico del eco. El decaimiento adelanta el pico, cuando este se extingue o tiende a 0, la fuerza de arrastre desaparece y el máximo de cada pico queda exactamente en $t_n = nx$, ver figura 4.8.

Por otro lado, en el límite geométrico donde la separación espacial tiende a cero ($x \to 0$), el sistema retoma el comportamiento característico de un emisor puntual ordinario, dado que las N_c conexiones espaciales se superponen en una única coordenada espacial de interacción, eliminando cualquier efecto de retardo o fase geométrica en la dinámica de disipación.

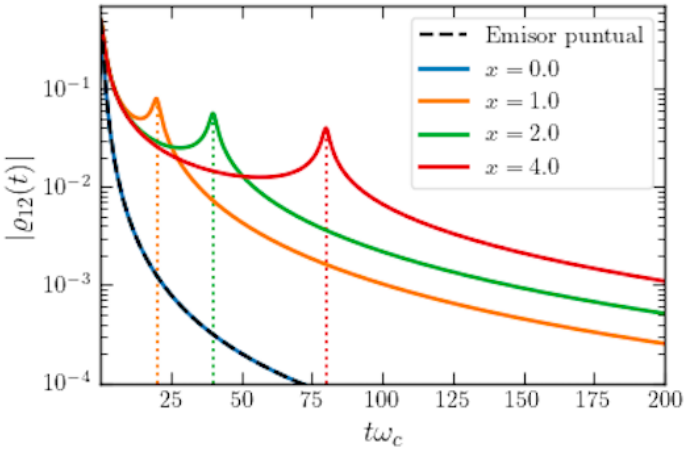

Figura 4.8: Evolución de las coherencias con respecto al tiempo, en escala logarítmica, de una interacción de desfase entre un qubit y un baño óhmico, a $T = 0$, para distintas distancias x de separación entre conexiones. Se observa cómo la línea azul, con $x = 0$ recobra el comportamiento obtenido en la sección 3.3 (línea punteada). Se tomó $\varrho_{12}(0) = 1/2$, $\Delta = 1.0$, $\omega_c = 20, \alpha = 1$.

Ahora se analizará el caso límite, para un número de conexiones que tiende a infinito, $N_c \to \infty$.

$$\Gamma(t) = \alpha \sum_{m=-N_c+1}^{N_c-1} \left(1 - \frac{|m|}{N_c}\right) f(m). \tag{4.32}$$

Es necesario saber si $\Gamma(t)$ converge al tomar el límite.
El término $\left(1 - \frac{|m|}{N_c}\right) \to 1$ cuando $N_c \to \infty$; mientras que $f(m) = \ln\left[1 + \frac{t^2}{(1/\omega_c - imx)^2}\right]$ para m grandes y al ser $|f(m)| \ll 1$, la expansión en series de Taylor nos permite escribir $f(m) \propto \frac{1}{m^2}$. La $\Gamma(t)$ resultante es una serie-p, la cual converge, porque $(p = 2) > 1$.

Después de saber que la tasa de decoherencia converge en el límite $N_c \to \infty$ la escribimos en términos de productos infinitos de Euler:

$$\Gamma(t, x)_{N_c \to \infty} = \alpha \ln\left[\frac{\sinh^2(\pi/\omega_c x) + \sin^2(\pi t/x)}{\sinh^2(\pi/\omega_c x)}\right]. \tag{4.33}$$

En consecuencia, el valor esperado del operador de eco toma la forma

$$\langle M(t)\rangle = \left[1 + \frac{\sin^2(\pi t/x)}{\sinh^2(\pi/\omega_c x)}\right]^{-\alpha}. \tag{4.34}$$

La ecuación (4.34) muestra que la dinámica se vuelve periódica. Los máximos de coherencia, siguen ocurriendo cuando $t_n = nx$, para los cuales

$$\langle M(t_n)\rangle = 1. \tag{4.35}$$

Por lo tanto, en el límite de infinitas conexiones la coherencia se recupera completamente después de cada tiempo de retardo x.

Los mínimos de coherencia aparecen en

$$t_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) x, \tag{4.36}$$

y están dados por

$$\langle M \rangle_{\text{mín}} = \tanh^{2\alpha}\left(\frac{\pi}{\omega_c x}\right). \tag{4.37}$$

La amplitud de las oscilaciones puede definirse como

$$A(x) = 1 - \tanh^{2\alpha}\left(\frac{\pi}{\omega_c x}\right). \tag{4.38}$$

De esta manera, la cantidad adimensional $\omega_c x$ controla completamente la profundidad de los revivals, ver figura 4.9. Cuando $\omega_c x \ll 1$, los mínimos se aproximan a la unidad y la coherencia permanece prácticamente constante. Por el contrario, cuando $\omega_c x \gg 1$, los mínimos se acercan a cero y las oscilaciones alcanzan su máxima amplitud.

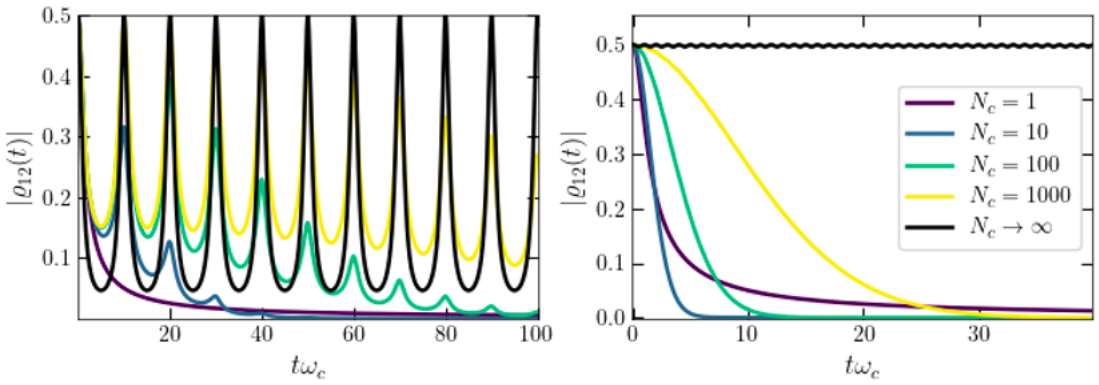

Figura 4.9: Evolución de las coherencias para distinto número de conexiones N_c, y el caso límite $N_c \to \infty$ en negro. Se consideró $\varrho_{12}(0) = 1/2$, $\Delta = 1.0$, $\omega_c = 10, \alpha = 1$. La gráfica de la izquierda corresponde al caso de una distancia entre conexiones de $x = 1$; mientras la gráfica de la derecha es el caso para una distancia de $x = 0.1$.

4.1.4. Aplicación a un baño Óhmico - átomo gigante a T finita

En las secciones anteriores se mostró que la geometría de un emisor gigante induce una estructura de interferencia capaz de generar revivals de coherencia y otros efectos no-Markovianos. Sin embargo, estos resultados corresponden al límite de temperatura cero, donde las fluctuaciones cuánticas del baño constituyen el único mecanismo de decoherencia. Un escenario más realista requiere considerar la presencia de excitaciones térmicas, las cuales introducen ruido adicional y pueden competir con los efectos de interferencia responsables de la preservación de la coherencia.

La incorporación de la temperatura modifica únicamente el núcleo de la integral de decaimiento mediante el factor de ocupación térmica $\coth(\hbar\omega/2k_BT)$, mientras que la contribución geométrica asociada al emisor gigante permanece inalterada. La tasa de decoherencia toma entonces la forma:

$$\Gamma(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega^2}[1-\cos(\omega t)]\frac{(1-\cos(N_c\omega x))}{N_c(1-\cos(\omega x))}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right). \tag{4.39}$$

El factor de ocupación térmica amplifica el efecto del baño, acelerando la decoherencia a altas temperaturas. La influencia de la temperatura sobre la dinámica está gobernada por el parámetro adimensional

$$\beta\hbar\omega_c = \frac{\hbar\omega_c}{k_BT}, \tag{4.40}$$

el cual compara la energía característica del baño, $\hbar\omega_c$, con la energía térmica, k_BT. Cuando $\beta\hbar\omega_c \gg 1$ predominan las fluctuaciones cuánticas y se recupera el límite de temperatura cero, mientras que para $\beta\hbar\omega_c \ll 1$ las fluctuaciones térmicas dominan la dinámica y aceleran la pérdida de coherencia.

La figura 4.10 muestra la evolución temporal de las coherencias para distintos valores del parámetro inverso de temperatura β. Para $\beta = 1$, correspondiente al régimen de mayor temperatura considerado, las fluctuaciones térmicas suprimen prácticamente por completo los revivals de coherencia, incluso para un número grande de conexiones. En estas condiciones la dinámica es predominantemente disipativa y la geometría del emisor tiene una influencia reducida.

Al aumentar el parámetro inverso de temperatura hasta $\beta = 10$, el sistema entra en un régimen de transición donde comienzan a distinguirse claramente las diferencias entre un emisor puntual ($N_c = 1$) y un emisor gigante. En particular, el incremento del número de conexiones favorece la aparición de recuperaciones parciales de la coherencia.

Finalmente, para $\beta = 100$, correspondiente al régimen de bajas temperaturas ($\beta\hbar\omega_c \gg 1$), las fluctuaciones térmicas resultan prácticamente despreciables frente a la energía característica del baño. En este límite la dinámica converge al caso de temperatura cero y la interferencia espacial generada por un número grande de conexiones produce nuevamente los revivals de coherencia descritos en la sección anterior.

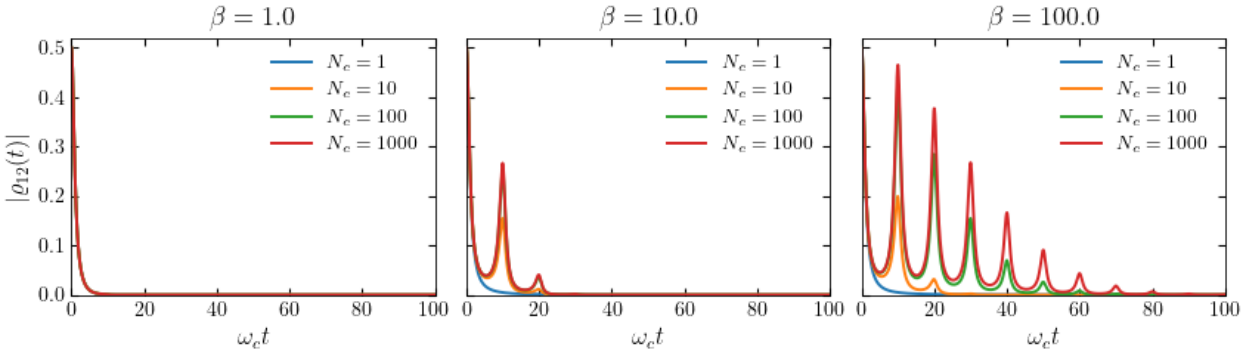

Figura 4.10: Evolución de las coherencias con respecto al tiempo, para distintos valores de β. Variando en cada gráfica el número de conexiones N_c de una interacción de desfase entre un quibit gigante y un baño óhmico.

4.1.5. Mapeo a 2-Qubits con entornos independientes

Se realizó un mapeo considerando dos partes no interactuantes, en este caso, dos átomos gigantes, A y B, y sus correspondientes reservorios R_A y R_B. Este mapeo se puede escribir en términos de operadores de Kraus[17].

En general, la dinámica de un qubit bajo desfase puede expresarse mediante operadores de Kraus $K_\mu(t)$:

$$\varrho(t) = \sum_\mu K_\mu(t)\varrho(0)K_\mu^\dagger(t), \tag{4.41}$$

con

$$K_1 = \sqrt{\frac{1+P(t)}{2}}\, I, \quad K_2 = \sqrt{\frac{1-P(t)}{2}}\, \sigma_z, \tag{4.42}$$

donde $P(t) = e^{-\Gamma(t)}$ Para dos qubits independientes, el mapeo se construye como producto tensorial de estos operadores de Kraus. Con esto se puede obtener una matriz de densidad total, en la que basta conocer la matriz de densidad de cada qubit:

$$\varrho^T_{ii',jj'}(t) = \sum_{\substack{ll'\\mm'}} A^{ll'}_{ii'}(t)\, B^{mm'}_{jj'}(t)\, \varrho^T_{ll',mm'}(0). \tag{4.43}$$

Donde la dinámica de cada qubit es:

$$\varrho^A_{ii'}(t) = \sum_{ll'} A^{ll'}_{ii'}(t)\ \varrho^A_{ll'}(0), \quad \varrho^B_{jj'}(t) = \sum_{mm'} B^{mm'}_{jj'}(t)\ \varrho^B_{mm'}(0). \tag{4.44}$$

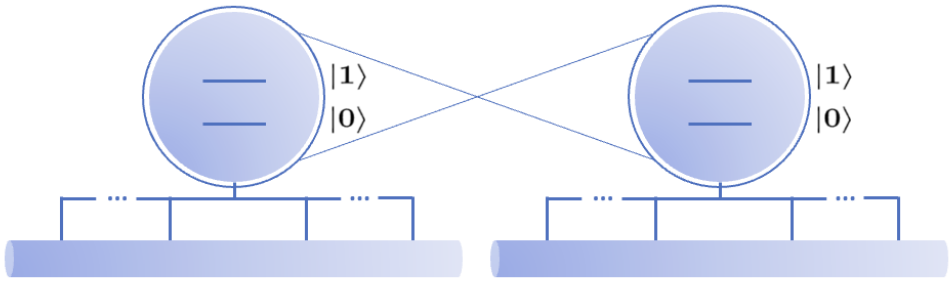

Figura 4.11: Esquema de un sistema de dos qubits gigantes entrelazados con entornos independientes.

Para el caso de un acoplamiento de desfase, donde cada qubit esta acoplado a un baño bosónico de manera independiente, la matriz de densidad $\varrho^T(t)$ en la base $\mathcal{B} = \{|1\rangle \equiv |00\rangle, |2\rangle \equiv |01\rangle, |3\rangle \equiv |10\rangle, |4\rangle \equiv |11\rangle\}$, se simplifica, y los términos cruzados desaparecen. Entonces, los elementos diagonales de la matriz de densidad total son todos constantes en el tiempo. Mientras los elementos fuera de la diagonal se escriben:

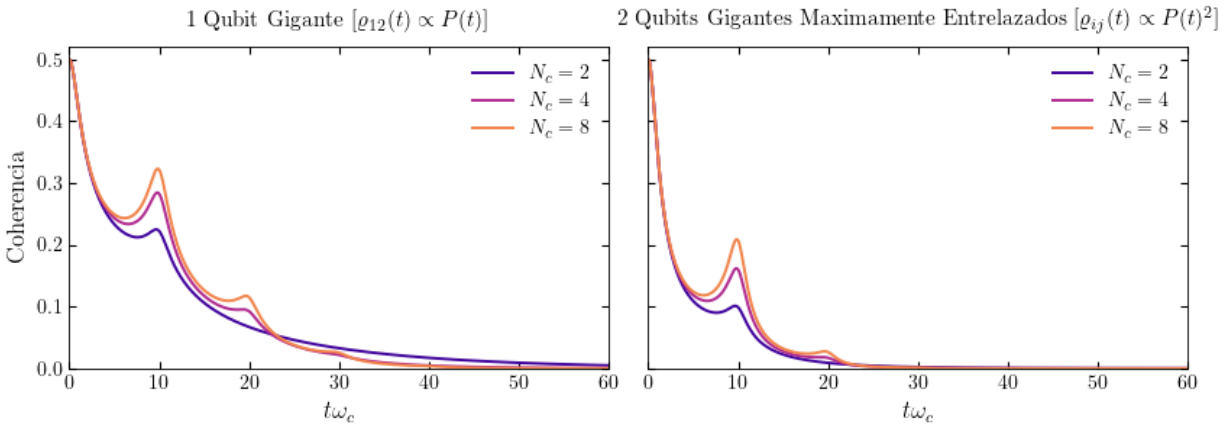

Figura 4.12: En la derecha se muestra la evolución de la coherencia para un qubit gigante con $N_c = 2, 4, 8$ conexiones. En la gráfica izquierda se muestra la evolución de la coherencia para dos qubits máximamente entrelazados con baños independientes, igualmente para los casos con $N_c = 2, 4, 8$.

$$\begin{aligned} \varrho_{12}^T(t) &= \varrho_{12}^T(0)P(t), \quad \varrho_{13}^T(t) = \varrho_{13}^T(0)P(t), \\ \varrho_{24}^T(t) &= \varrho_{24}^T(0)P(t), \quad \varrho_{34}^T(t) = \varrho_{34}^T(0)P(t), \\ \varrho_{14}^T(t) &= \varrho_{14}^T(0)P(t)^2, \quad \varrho_{23}^T(t) = \varrho_{23}^T(0)P(t)^2, \end{aligned} \tag{4.45}$$

Coherencia para dos-qubits gigantes para una dinámica de desfase con baños independientes

La medida de coherencia cuántica basada en la norma l_1, denotada como $C_{l_1}(\varrho)$, cuantifica la superposición cuántica global del sistema mediante la suma de los valores absolutos de todos los elementos fuera de la diagonal de la matriz de densidad. Bajo una dinámica de desfase puro inducida por baños óhmicos independientes, para cualquier estado inicial con coherencia no nula, la evolución temporal de la coherencia normalizada satisface las siguientes cotas:

$$P(t)^2 \leqslant C_{l_1}(t) \leqslant P(t), \tag{4.46}$$

donde las condiciones físicas que saturan dichos límites se describen a continuación:

- **Cota superior, $\propto P(t)$:** Este régimen de decaimiento mínimo se alcanza cuando el sistema se inicializa en un estado producto (no entrelazado) en el cual únicamente uno de los qubits se encuentra en un estado de superposición cuántica local, mientras que el segundo qubit permanece en un estado propio de la base computacional; por ejemplo, el estado inicial genérico de la forma:

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1\rangle + |3\rangle\big), \tag{4.47}$$

  donde se ha utilizado la base computacional antes definida. En esta configuración, la matriz de densidad global del sistema posee únicamente un canal de desfase activo en el

tiempo. Como consecuencia, la pérdida de coherencia total ocurre de manera atenuada, escalando linealmente con la probabilidad de supervivencia local del canal, es decir, $P(t) = e^{-\Gamma(t)}$. Esto nos devuelve la dinámica analizada en las secciones anteriores, es decir, la coherencia del sistema total evoluciona como el caso de un único qubit gigante acoplado a un baño bosónico, ver figura 4.12.

- **Cota inferior, $\propto P(t)^2$:** Este límite inferior de decoherencia acelerada se satura estrictamente cuando la información cuántica inicial se encuentra distribuida de forma máxima y no-local a través de todo el espacio correlacionado, tal como ocurre en la familia de los cuatro estados de Bell. Al estar los estados máximamente entrelazados, la pérdida de fase en cualquiera de los dos canales independientes destruye de forma irreversible la coherencia global del sistema compuesto. Esto acelera el decaimiento, siendo la evolución proporcional al cuadrado de la probabilidad de supervivencia, es decir, $P(t)^2 = e^{-2\Gamma(t)}$, ver figura 4.12.

Para calcular la coherencia de un estado máximamente entrelazado no importa el estado de Bell inicial que escojamos. No hay distinción entre empezar en un estado Φ^+ o un estado Φ^-, ni entre Ψ^+ y Ψ^- debido a que se toma el valor absoluto de los elementos fuera de la diagonal. Igualmente, la evolución será la misma tanto si el estado inicial es Φ o Ψ, ya que las entradas $\varrho_{24}^T(t)$ y $\varrho_{14}^T(t)$ evolucionan ambas como $P(t)^2$.

Concurrencia para dos-qubits gigantes para una dinámica de desfase con baños independientes

Los eigenvalores de la matriz de Wooters obtenidos fueron:

$$\lambda_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(t)^2\right)^2, \quad \lambda_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}P(t)^2\right)^2, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 0$$

por lo que la concurrencia sin importar el estado inicial de Bell, para una dinámica de desfase, será:

$$C(t)_{\varrho^T} = P(t)^2. \tag{4.48}$$

Esto quiere decir que tanto la concurrencia como la coherencia de un estado máximamente entrelazados de dos qubits gigantes acoplados a baños óhmicos independientes evoluciona mediante la misma función $P(t)^2 = e^{-2\Gamma(t)}$.

4.2. Oscilador armónico gigante

Se considera un oscilador armónico acoplado a un baño bosónico:

$$H = \hbar\Omega a^\dagger a + \hbar\sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k + \hbar\sum_k g_k(ab_k^\dagger + a^\dagger b_k), \tag{4.49}$$

donde nos interesa estudiar el caso de un oscilador acoplado en distintos puntos N_c con el entorno, por lo cual el acoplamiento está dado por:

$$g_k = \frac{g_0}{N_c\sqrt{N}}\frac{\sin(kdN_c/2)}{\sin(kd/2)}. \tag{4.50}$$

El producto de estados coherentes es solución a la ecuación de Schrödinger

$$\begin{aligned}|\Psi(t)\rangle &= |z(t)\rangle\otimes|\beta_1(t)\rangle\otimes|\beta_2(t)\rangle\otimes\ldots\otimes|\beta_k(t)\rangle\otimes\ldots\\ &= |z(t)\rangle\otimes|B(t)\rangle.\end{aligned} \tag{4.51}$$

Las ecuaciones de evolución de movimiento son [18]:

$$\begin{aligned}\frac{dz(t)}{dt} &= -i\Omega z(t) - i\sum_k g_k\beta_k(t),\\ \frac{d\beta_k(t)}{dt} &= -i\omega_k\beta_k(t) - ig_k z(t).\end{aligned} \tag{4.52}$$

El estado inicial con el que trabajamos es un Gato de Schrödinger:

$$|\Psi(0)\rangle = N\left[|z_1(0)\rangle + |z_2(0)\rangle\right]\otimes|0\rangle. \tag{4.53}$$

Aquí, N es la constante de normalización. Debido a que los estados coherentes no son ortogonales, esta constante no es, en general, $1/\sqrt{2}$, sino que está determinada por

$$N = \frac{1}{\sqrt{2 + 2\,\mathrm{Re}\left[\langle z_1(0)|z_2(0)\rangle\right]}}. \tag{4.54}$$

Considerando esta normalización, la evolución de la matriz de densidad queda determinada por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\varrho(t) = N^2\Big[&|z_1(t)\rangle\langle z_1(t)| + |z_2(t)\rangle\langle z_2(t)|\\ &+\langle B_2(t)|B_1(t)\rangle|z_1(t)\rangle\langle z_2(t)|\\ &+\langle B_1(t)|B_2(t)\rangle|z_2(t)\rangle\langle z_1(t)|\Big].\end{aligned} \tag{4.55}$$

Los términos cruzados de esta expresión describen la coherencia entre los dos estados coherentes constituyentes del estado gato. Para cuantificarla, definimos el coeficiente de coherencia

$$C_{12}(t) = N^2\langle B_2(t)|B_1(t)\rangle. \tag{4.56}$$

Esta cantidad corresponde al coeficiente que multiplica al operador $|z_1(t)\rangle\langle z_2(t)|$ en la matriz de densidad reducida. Dado que el entorno inicia en el estado vacío, se cumple que

$$C_{12}(0) = N^2. \tag{4.57}$$

Por consiguiente, la evolución del coeficiente de coherencia está determinada por

$$C_{12}(t) = C_{12}(0)\langle B_2(t)|B_1(t)\rangle. \tag{4.58}$$

Para evaluar el producto escalar entre los estados coherentes multimodo del baño, utilizamos: $\langle B_2|B_1\rangle = e^{-\frac{1}{2}|B_1|^2-\frac{1}{2}|B_2|^2+B_2^*B_1}$. Por otro lado, el Hamiltoniano conserva el número total de excitaciones del sistema cerrado formado por el oscilador y el baño bosónico, por ello cada una de las trayectorias coherentes satisface:

$$|z_i(t)|^2 + \sum_k |\beta_{i,k}(t)|^2 = |z_i(0)|^2, \qquad i = 1, 2. \tag{4.59}$$

En este punto es conveniente introducir las amplitudes reducidas $\alpha(t)$ y $\beta_k(t)$ mediante

$$z_i(t) = z_i(0)\alpha(t), \qquad \beta_{i,k}(t) = z_i(0)\beta_k(t), \tag{4.60}$$

donde las funciones $\alpha(t)$ y $\beta_k(t)$ son independientes de la condición inicial y satisfacen la relación de normalización

$$|\alpha(t)|^2 + \sum_k |\beta_k(t)|^2 = 1. \tag{4.61}$$

La función $\alpha(t)$ corresponde a la amplitud de supervivencia del oscilador y coincide con la obtenida en la sección dedicada a la dinámica de amortiguamiento de amplitud. Sustituyendo las amplitudes reducidas en el producto escalar entre los estados del baño, obtenemos

$$\langle B_2(t)|B_1(t)\rangle = \exp\left\{ -\frac{1}{2}|z_1(0) - z_2(0)|^2 \sum_k |\beta_k(t)|^2 + i\,\mathrm{Im}\left[z_2^*(0)z_1(0)\right] \sum_k |\beta_k(t)|^2 \right\}. \tag{4.62}$$

Por lo tanto, el módulo del coeficiente de coherencia queda expresado como

$$\frac{|C_{12}(t)|}{|C_{12}(0)|} = \exp\left[-\frac{1}{2}|z_1(0) - z_2(0)|^2 \left(1 - |\alpha(t)|^2\right) \right]. \tag{4.63}$$

La ecuación (4.63) muestra que la pérdida de coherencia está completamente determinada por dos factores: la separación inicial entre los componentes del estado gato y la población remanente en el oscilador, dada por $|\alpha(t)|^2$. Cuando el oscilador conserva excitaciones debido a efectos no-Markovianos, estados ligados o interferencia destructiva con el entorno, la coherencia también se preserva durante tiempos más largos.

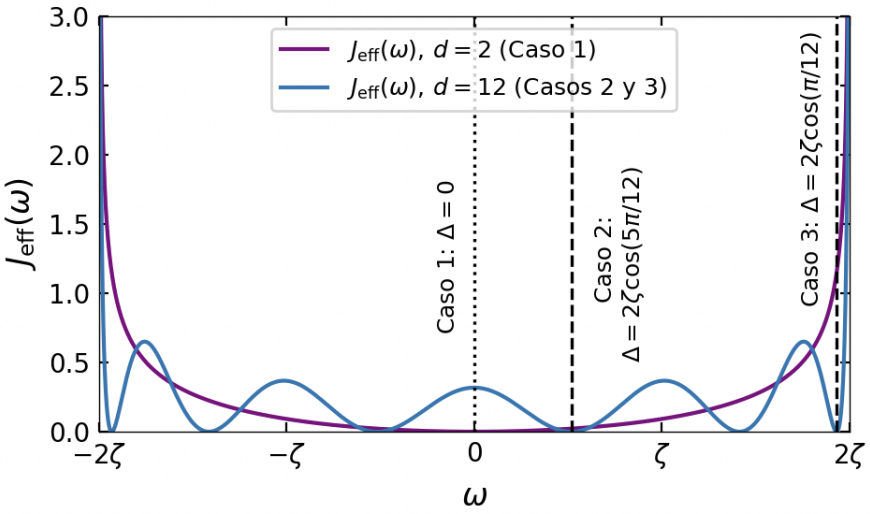

Figura 4.13: Densidad espectral efectiva $J_{\text{eff}}(k)$ para un átomo gigante acoplado a un arreglo unidimensional con $N_c = 2$ puntos de contacto, dentro de la banda de frecuencias del baño $\omega \in [-2\zeta, 2\zeta]$. La curva morada denota el régimen de acoplamiento corto ($d = 2$, Caso 1), mientras que la curva azul representa la geometría extendida ($d = 12$, Casos 2 y 3). Las líneas verticales discontinuas indican la posición de las tres frecuencias utilizadas: Caso 1 con $\Delta = 0$, Caso 2 con $\Delta = 2\zeta\cos(5\pi/12)$ y Caso 3 con ($\Delta = 2\zeta\cos(\pi/12)$.

Con el objetivo de analizar distintos mecanismos de preservación y pérdida de coherencia cuántica, se consideran cuatro configuraciones representativas obtenidas al variar la desintonía (Δ) y la separación espacial entre los puntos de acoplamiento (d). Estas configuraciones permiten explorar diversos regímenes tanto dentro como fuera de la banda espectral del entorno, así como evaluar los efectos de interferencia espacial inducidos estrictamente por la geometría extendida del oscilador gigante:

- **Caso I (Resonancia en el centro de la banda):** Se considera $\Delta = 0$ y $d = 2$, donde el oscilador se encuentra en resonancia con el centro de la banda fotónica; aquí, la densidad de estados presenta un comportamiento suave.

- **Caso II (Resonancia interna con acoplamiento gigante):** Se considera $\Delta = 2\zeta\cos(5\pi/12)$ y $d = 12$. La desintonía se localiza en la vecindad inmediata del cero de la función espectral escogida, $J(\Delta = 2\zeta\cos(5\pi/12) = 0$.

- **Caso III (Proximidad al borde de banda):** Se considera $\Delta = 2\zeta\cos(\pi/12)$ y $d = 12$. En este régimen, la desintonía se aproxima al borde superior de la banda fotónica, donde la densidad espectral presenta una variación abrupta.

- **Caso IV (Frecuencia fuera de la banda espectral):** Se establece $\Delta = 2.5$ y $d = 2$. En este régimen, la desintonía se ubica fuera del intervalo espectral permitido por la guía de onda bosónica.

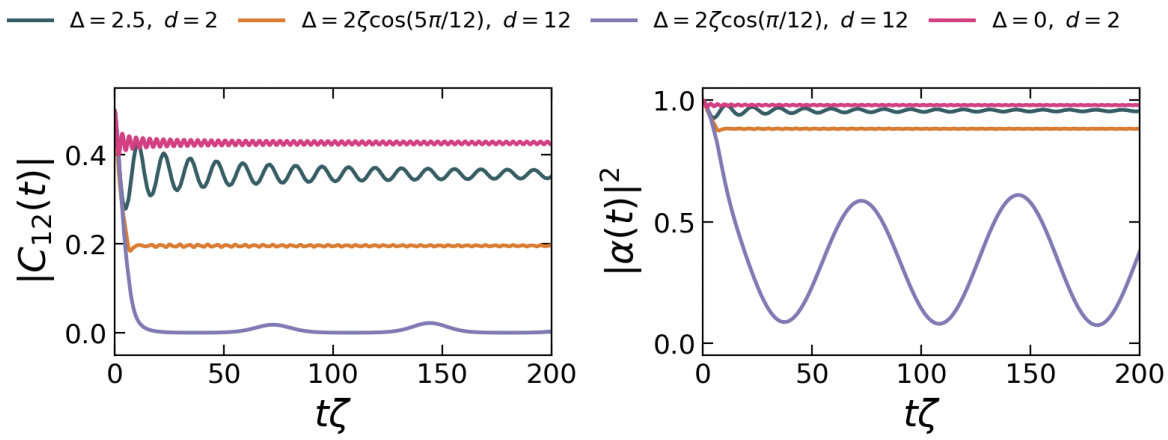

Figura 4.14: Del lado izquierto tenemos la evolución de las coherecias $|\varrho_{12}(t)|$ para el oscilador armónico gigante, y del lado derecho la evolución del número promedio de excitaciones $|\alpha(t)|^2$. Ambas evoluciones para distintos valores de la distancia entre conexiones d y el detuning Δ. Se usó como valores iniciales para los estados coherentes $z_1 = 2$ y $z_2 = -2$.

Al ver la figura 4.14, es evidente la conexión entre el número promedio de excitaciones $|z(t)|^2$ y el nivel de preservación de la coherencia cuántica $|C_{12}(t)|$. Dicha conexión está gobernada de forma no lineal por el decaimiento exponencial presente en la ecuación 4.63. Esta dependencia exponencial revela que cualquier pérdida de población en el oscilador, por mínima que sea, afecta de manera drástica a la coherencia, generando atenuaciones y colapsos significativos sobre el estado.

El Caso I preserva el número de excitaciones de manera casi perfecta; gracias a esto, el valor de la coherencia se mantiene protegido. La dinámica del BIC se puede atribuir a la función espectral, la cual se comporta de manera suave en la vecindad de la desintonía escogida.

Por su parte, los Casos II y III corresponden a una configuración geométrica extendida ($d = 12$), bajo la cual la función espectral efectiva del baño exhibe múltiples ceros. Estos ceros espectrales corresponden a las frecuencias oscuras, para las cuales el acoplamiento efectivo entre el emisor y el continuo bosónico se anula debido a la interferencia destructiva entre los distintos puntos de acoplamiento. Sin embargo, la existencia de un estado ligado dentro del continuo (BIC) requiere, además, que la frecuencia correspondiente satisfaga la ecuación característica del sistema,

$$y - \Delta + iG(-iy) = 0,$$

presentada en el Apéndice A, de manera que exista un polo real de la dinámica asociado a una frecuencia perteneciente al continuo y desacoplado de este. Asimismo, el residuo asociado a dicho polo debe ser finito y no nulo, lo que garantiza una contribución persistente a la amplitud de supervivencia del emisor. La presencia de estos estados ligados impide la completa relajación del sistema y se manifiesta en la dinámica de la coherencia mediante oscilaciones persistentes.

A pesar de que tanto el Caso II como el Caso III involucran la presencia de frecuencias oscuras, sus dinámicas difieren sustancialmente a causa de la estructura local de la densidad

de estados. En el Caso II, la frecuencia seleccionada se sitúa en una región interna donde la función espectral efectiva $J_{\text{eff}}(\omega)$ varía lentamente, conduciendo a una degradación de la coherencia comparativamente moderada. En contraposición, en el Caso III la frecuencia se halla próxima al borde de la banda, donde la pendiente de la función espectral posee crece de manera abrupta. Esto amplifica considerablemente la amplitud de las oscilaciones de la población a tiempos largos, induciendo una decoherencia mayor debido a la alta sensibilidad de la exponencial.

El Caso IV esta fuera de la banda espectral $[-2\zeta, 2\zeta]$, el cual es el mapa de resonancias del baño, en este régimen el arreglo de cavidades deja de comportarse como un canal conductor de fotones propagativos; entonces una $\Delta = 2.5$ es una zona prohibida (bandgap) donde el arreglo de cavidades actúa como un aislante reflexivo, obligando a la energía a quedarse confinada alrededor del qubit en forma de BOC (estado ligado fuera del continuo) u onda evanescente. Esta localización persistente mitiga el decaimiento de la población local y preserva de manera estacionaria la coherencia a tiempos asintóticamente largos.

4.2.1. La función de Wigner

La función de Wigner nos permite apreciar la interferencia cuántica y cómo se distribuye en el espacio de momento y de posición.

Usando la representación de la función de Wigner en términos de los operadores de desplazamiento, tenemos:

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Tr}[\varrho(t)D(\alpha)\Pi D^{\dagger}(\alpha)]. \tag{4.64}$$

Escribiendo el operador de paridad explícitamente $\Pi = \sum(-1)^n|n\rangle\langle n|$:

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi}\sum_{n}^{\infty}(-1)^n\langle n|D^{\dagger}(\alpha)\varrho(t)D(\alpha)|n\rangle, \tag{4.65}$$

donde $\varrho(t)$ corresponde a la ecuación 4.55 y. Entonces la función de Wigner se puede expresar como la suma de cuatro términos que se pueden desarrollar de manera independiente $W_T(\alpha) = W^{(1)}_{int}(\alpha) + W^{(2)}_{int}(\alpha) + W_{z_1}(\alpha) + W_{z_2}(\alpha)$. El cálculo se puede dividir en dos casos, la contribución de las poblaciones:

$$W_{z1}(\alpha) = \tfrac{2N^2}{\pi}\textstyle\sum_n^{\infty}(-1)^n\langle n|D^{\dagger}(\alpha)|z_1(t)\rangle\langle z_1(t)|D(\alpha)|n\rangle,$$

$$W_{z2}(\alpha) = \tfrac{2N^2}{\pi}\textstyle\sum_n^{\infty}(-1)^n\langle n|D^{\dagger}(\alpha)|z_2(t)\rangle\langle z_2(t)|D(\alpha)|n\rangle.$$

y la contribución de las coherencias:

$$W^{(1)}_{int}(\alpha) = \tfrac{2N^2}{\pi}\langle B_2(t)|B_1(t)\rangle\textstyle\sum_n^{\infty}(-1)^n\langle n|D^{\dagger}(\alpha)|z_1(t)\rangle\langle z_2(t)|D(\alpha)|n\rangle,$$

$$W^{(2)}_{int}(\alpha) = \tfrac{2N^2}{\pi}\langle B_1(t)|B_2(t)\rangle\textstyle\sum_n^{\infty}(-1)^n\langle n|D^{\dagger}(\alpha)|z_2(t)\rangle\langle z_1(t)|D(\alpha)|n\rangle.$$

Para obtener los términos debidos a las poblaciones, basta con desplazar el operador de paridad $D^\dagger(\alpha)\Pi D(\alpha) = \Pi(\alpha)$, y tras calcular el valor esperado del operador de paridad desplazado para un estado coherente, llegamos a la expresión gaussiana de la función de Wigner $\langle\beta|\Pi(\alpha)|\beta\rangle = \exp(-2|\alpha-\beta|^2)$. Entonces:

$$W_{z1}(\alpha) = \frac{2N^2}{\pi}\exp(-2|\alpha+z_1|^2),$$

$$W_{z2}(\alpha) = \frac{2N^2}{\pi}\exp(-2|\alpha-z_1|^2).$$

Para calcular los términos de interferencia se usa la propiedad de composición de los operadores de desplazamiento $\mathrm{D}(\alpha)\,\mathrm{D}(\beta) = \mathrm{D}(\alpha+\beta)e^{i\Im(\beta^*\alpha)}$ y considerando que $D(\alpha)$ es unitario:

$$W_{int}^{(1)}(\alpha) = \frac{2N^2}{\pi}\langle B_2(t)|B_1(t)\rangle e^{-2i\Im(z_1^*\alpha)}\langle z_1-\alpha|\,\Pi\,|\alpha-z_2\rangle.$$

El operador de paridad sobre un estado coherente actúa invirtiéndolo en el espacio de fase con respecto al origen $\Pi\,|\alpha\rangle = |-\alpha\rangle$ y considerando que el traslape de estados coherentes es $\langle\alpha|\beta\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \alpha^*\beta\right)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
W_{int}^{(1)}(\alpha) &= \frac{2N^2}{\pi}\langle B_2(t)|B_1(t)\rangle e^{-2i\Im(z_1^*\alpha)}\exp\left[-\frac{1}{2}|z_1-\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\alpha-z_2|^2 + (z_1-\alpha)^*(\alpha-z_2)\right],\\
&= \frac{2N^2}{\pi}\langle B_2(t)|B_1(t)\rangle e^{-4i\Im(z_1^*\alpha)}e^{-2|\alpha|^2},\\
W_{int}^{(2)}(\alpha) &= \frac{2N^2}{\pi}\langle B_1(t)|B_2(t)\rangle e^{4i\Im(z_1^*\alpha)}e^{-2|\alpha|^2}.
\end{aligned}$$

Al juntar los términos de Wigner gaussianos y los términos de interferencia, y considerando que los coeficientes debidos al baño $\langle B_2(t)|B_1(t)\rangle = \langle B_1(t)|B_2(t)\rangle$, la función de Wigner total es:

$$W_T(\alpha) = \frac{2N^2}{\pi}\left(\langle B_1|B_2\rangle e^{-2|\alpha|^2}\cos\left[4\Im(\alpha z_1^*)\right] + e^{-2|z_1-\alpha|^2} + e^{-2|z_1+\alpha|^2}\right). \tag{4.66}$$

El término $\cos\left[4\Im(\alpha z_1^*)\right]$ es el que genera la interferencia cuántica, para que esta interferencia sea visible es necesario que los valles de la función coseno estén dentro del área gris generada por el coeficiente $\exp(-2|\alpha|^2)$, observar figura 4.15. A mayor distancia inicial entre los gatos, $z_1(t)$, los valles se encontraran más cerca del máximo de la exponencial decayente, y por ende las franjas de interferencia serán más intensas. También se puede observar, que a mayor distancia $z_1(t)$ mayor número de franjas de interferencia. Para $z_1(0) = 1$ se observarían 2 franjas, para $z_1(0) = 3$ se observarían 6.

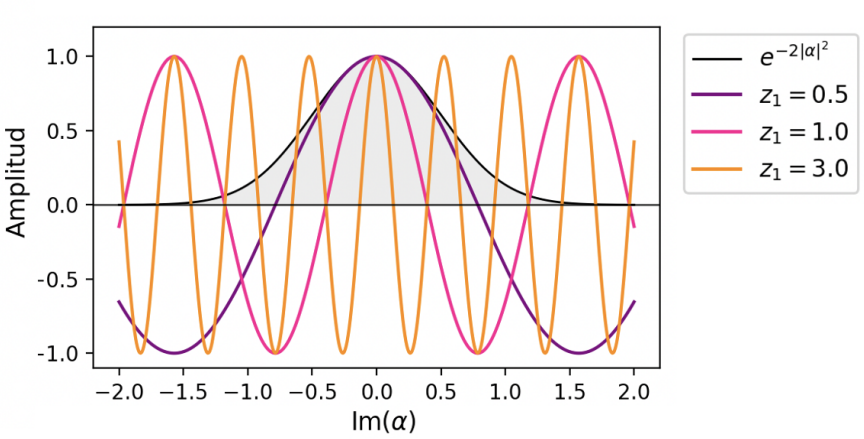

Figura 4.15: Término de interferencia de un estado de gato, $\cos[4\Im(\alpha z_1^*)]$, para distintos valores de $z_1(0) = \{0.5, 1, 3\}$ y su envolvente $\exp(-2|\alpha|^2)$

Para que la interferencia sea visible, no sólo importa que los valles de la función coseno caigan dentro de la envolvente antes de que esta tienda a cero; también es necesario que los términos gaussianos $e^{-2|z_1-\alpha|^2} + e^{-2|z_1+\alpha|^2}$, que son siempre positivos, no compitan con las partes negativas del término de interferencia. Para ello, se muestra igualmente favorable tomar distancias $z_1(0) \geqslant 2$; ver figura 4.16.

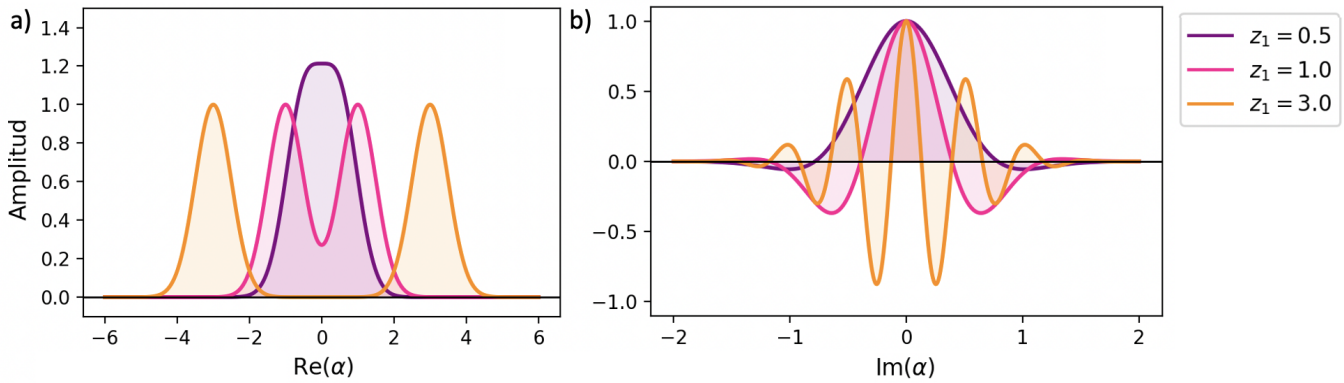

Figura 4.16: a) Términos gaussianos de la función de Wigner de un estado gato, a $t = 0$, $e^{-2|z_1-\alpha|^2} + e^{-2|z_1+\alpha|^2}$, centrados en $z_1(0)$. b) Término de interferencia de la función de Wigner a $t = 0$, $e^{-2|\alpha|^2}\cos[4\Im(\alpha z_1^*)]$

La función de Wigner se calculó utilizando la definición estándar del espacio de fase adimensional (x, p), donde los operadores de cuadratura están escalados como $\hat{x} = (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)/\sqrt{2}$ y $\hat{p} = i(\hat{a}^\dagger - \hat{a})/\sqrt{2}$. Por esta razón, para un estado coherente inicial con amplitud $|z(0)| = 2$, los centros de las gaussianas en la simulación visual se localizan en $\pm\sqrt{2}|z(0)| \approx \pm 2.82$.

Con el objetivo de visualizar cómo la dinámica no-Markoviana afecta la coherencia cuántica en el espacio de fase, se analiza la evolución temporal de la función de Wigner para tres de las configuraciones estudiadas previamente. Estas configuraciones corresponden a los casos en los que aparecen estados ligados en el continuo (BIC).

El Caso I corresponde frecuencia resonante. Como se mostró en la sección anterior, esta configuración genera un estado ligado dentro del continuo (BIC), que impide la transferencia completa de energía hacia el entorno. En la figura 4.17 se muestra la evolución temporal de la función de Wigner para $\Delta = 0$ y $d = 2$. Las dos gaussianas asociadas a los estados coherentes permanecen claramente separadas durante la evolución, mientras que las franjas negativas de interferencia conservan casi en su totalidad su intensidad.

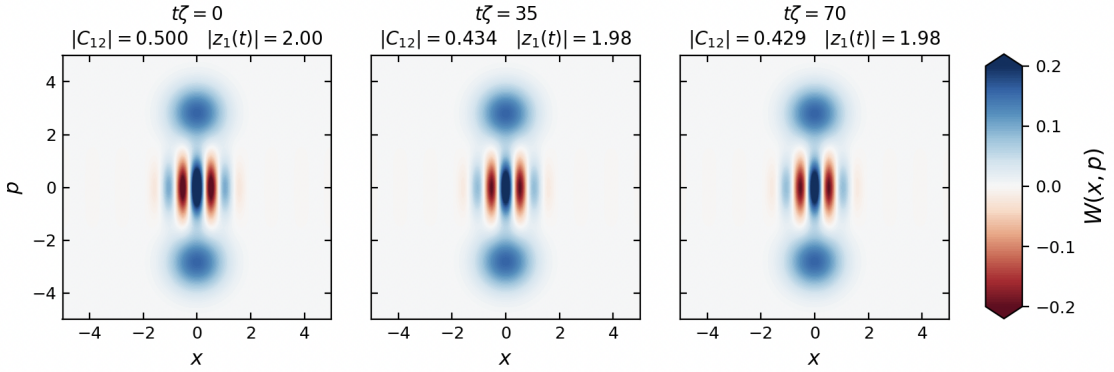

Figura 4.17: Evolución temporal de la función de Wigner para $t = \{0, 35, 70\}$, $d = 2$, $\Delta = 0$, con $z_1(0) = 2$ y $z_2(0) = -2$.

La figura 4.18 corresponde al Caso 2, con $\Delta = 2\zeta\cos(5\pi/12)$ y $d = 12$. En comparación con el caso resonante, las franjas de interferencia presentan una visibilidad menor y desaparecen con mayor rapidez. Además, se puede observar cómo al no estar en resonancia, la función de Wigner completa empieza a rotar en sentido horario.

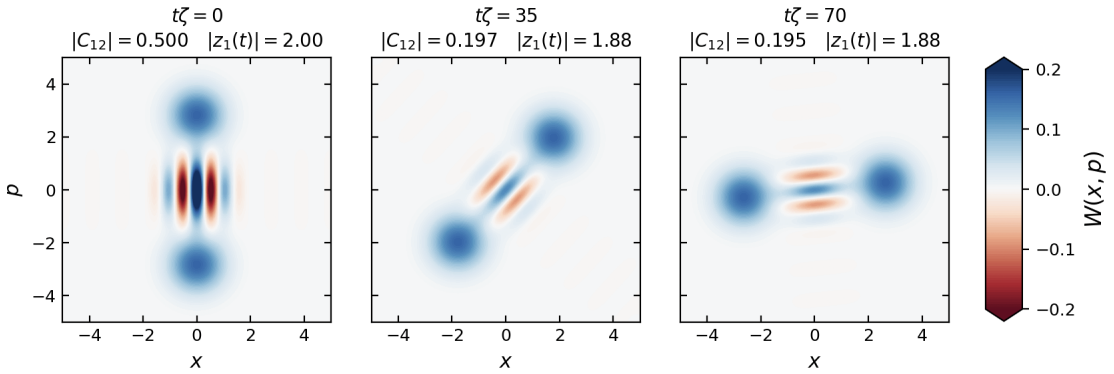

Figura 4.18: Evolución temporal de la función de Wigner para $t = \{0, 35, 70\}$, $d = 12$, $\Delta = 2\zeta\cos(5\pi/12)$, con $z_1(0) = 2$ y $z_2(0) = -2$.

En la figura 4.19 se presenta el caso $\Delta = 2\zeta\cos(\pi/12)$. A diferencia de los dos casos anteriores, la función de Wigner exhibe una dinámica oscilatoria pronunciada: la separación entre las gaussianas disminuye y posteriormente se recupera de forma periódica. Simultáneamente, las franjas de interferencia sufren una fuerte atenuación, volviéndolas casi imperceptibles.

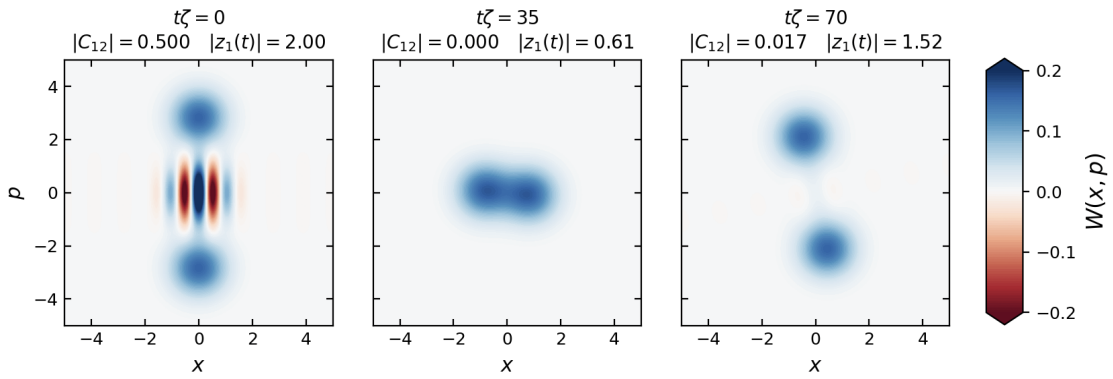

Figura 4.19: Evolución temporal de la función de Wigner para $t = \{0, 35, 70\}$, $d = 12$, $\Delta = 2\zeta\cos(\pi/12)$, con $z_1(0) = 2$ y $z_2(0) = -2$.

Negatividad

La preservación de las coherencias no implica necesariamente la preservación del carácter cuántico del estado. Para cuantificar la no-clasicidad del estado del oscilador se emplea la negatividad de la función de Wigner, definida como:

$$\mathcal{N}(t) = \frac{1}{2}\int d^2\alpha \left[|W(\alpha, t)| - W(\alpha, t)\right]. \tag{4.67}$$

Esta cantidad mide el volumen total ocupado por las regiones negativas de la función de Wigner. Para estados clásicos, cuya función de Wigner es positiva definida, se cumple $\mathcal{N} = 0$, mientras que valores positivos indican negatividad de Wigner, condisión suficiente de no-clasicidad.

En el caso del estado gato de Schrödinger considerado en este trabajo, la función de Wigner está compuesta por dos contribuciones gaussianas asociadas a los estados coherentes y un término de interferencia proporcional a la coherencia del sistema. Por consiguiente, la negatividad constituye una medida complementaria a las coherencias, ya que cuantifica directamente la supervivencia de las franjas de interferencia en el espacio de fases.

La figura 4.20 muestra la evolución temporal de la negatividad para distintos valores de $z_1(0)$. Para separaciones pequeñas, los dos estados coherentes se superponen fuertemente y las regiones negativas prácticamente desaparecen. Conforme aumenta la separación inicial, las franjas de interferencia se vuelven más visibles y la negatividad crece hasta alcanzar un máximo.

Sin embargo, para separaciones excesivamente grandes la coherencia inicial se vuelve extremadamente sensible a cualquier pérdida de excitación hacia el entorno, provocando una disminución de la negatividad. Como consecuencia, existe una región óptima de separaciones iniciales para la cual la no-clasicidad del estado es máxima.

Este comportamiento demuestra que la preservación de la no-clasicidad no depende únicamente de la dinámica del sistema abierto, sino también de la preparación inicial del estado cuántico.

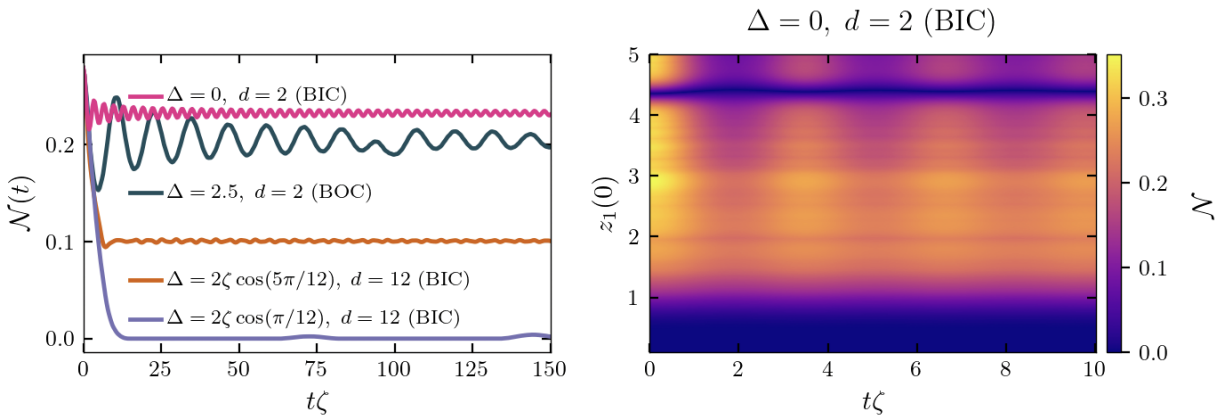

Figura 4.20: Evolución temporal de la negatividad de Wigner $\mathcal{N}(t)$ (izquierda). A la derecha se muestra el mapa de calor de la negatividad de Wigner $\mathcal{N}(t)$ en función del tiempo y de la amplitud inicial $z_1(0)$ del estado gato para el caso BIC con $\Delta = 0$ y $d = 2$. Para valores pequeños de $z_1(0)$ las franjas de interferencia son débiles, mientras que para valores grandes la decoherencia inducida por el entorno reduce significativamente la no-clasicidad. Entre ambos regímenes existe una región óptima donde la negatividad alcanza sus valores máximos.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se estudiaron fenómenos no-Markovianos inducidos por la estructura espacial de emisores cuánticos gigantes acoplados a entornos bosónicos. Se analizaron dos mecanismos fundamentales de interacción sistema-entorno: el desfase puro y el intercambio de energía (amortiguamiento de amplitud). En ambos casos se mostró que la existencia de múltiples puntos de acoplamiento modifica de manera significativa la dinámica cuántica respecto a la observada en emisores puntuales.

Para el caso de un qubit gigante interactuando con un baño óhmico mediante una dinámica de desfase, se obtuvo una expresión analítica para la evolución de las coherencias en función del número de conexiones (N_c) y la distancia entre ellas (x). Se demostró que la estructura espacial del emisor introduce interferencia entre las distintas trayectorias de propagación de las excitaciones del baño, dando lugar a revivals de coherencia característicos de una dinámica no-Markoviana.

Se encontró que el número de conexiones controla la cantidad de recuperaciones de coherencia observadas durante la evolución. Conforme (N_c) aumenta, aparecen nuevos revivals y la amplitud máxima de las recuperaciones se incrementa. En contraste, la distancia entre conexiones determina la escala temporal en la que ocurren dichos revivals, desplazando los máximos de coherencia hacia tiempos mayores conforme aumenta (x). Desde el punto de vista físico, la separación espacial introduce retardos efectivos asociados al tiempo necesario para que la información propagada por una conexión influya nuevamente sobre las demás.

También se analizó el efecto de la temperatura finita. Se observó que el incremento de la temperatura acelera el proceso de decoherencia debido al aumento de las fluctuaciones térmicas del entorno. Sin embargo, los revivals asociados a la estructura espacial del emisor persisten incluso en presencia de temperatura finita, aunque con amplitudes progresivamente menores. Esto demuestra que la memoria inducida geométricamente por el acoplamiento múltiple puede competir con los efectos destructivos de las fluctuaciones térmicas.

Un resultado particularmente relevante fue el estudio del límite ($N_c \to \infty$). En este régimen se obtuvo una expresión analítica cerrada para la tasa de decoherencia y para el valor esperado del operador de eco. Se encontró que la dinámica converge hacia un comportamiento estrictamente periódico, caracterizado por oscilaciones permanentes de la coherencia cuya amplitud depende únicamente de la separación espacial entre conexiones. Este resultado muestra que la geometría del emisor puede proteger la coherencia incluso en presencia de un entorno disipativo.

Posteriormente se estudió un sistema de dos qubits gigantes inicialmente preparados en un estado máximamente entrelazado e interactuando con baños bosónicos independientes mediante una dinámica de desfase. Se demostró que tanto la concurrencia como las coherencias bipartitas están determinadas por el cuadrado de la dinámica de coherencia obtenida para un único qubit. Como consecuencia, todos los fenómenos no-Markovianos observados en el caso de un solo emisor, incluyendo los revivals inducidos por la estructura espacial, se transfieren directamente a la dinámica del entrelazamiento. Este resultado evidencia una conexión directa entre la preservación de coherencia local y la protección de correlaciones cuánticas no locales.

Finalmente se analizó un oscilador armónico gigante acoplado mediante dos puntos de conexión a un entorno estructurado modelado como un arreglo unidimensional de cavidades. En este sistema la dinámica está gobernada por el intercambio de energía con el entorno, permitiendo la aparición de estados ligados fuera del continuo (BOC) y estados ligados en el continuo (BIC). Se mostró que la geometría del sistema modifica la función espectral efectiva y puede generar frecuencias oscuras donde el acoplamiento radiativo se anula por interferencia destructiva.

La existencia de BOC y BIC produce una preservación parcial de excitaciones dentro del oscilador, evitando la relajación completa del sistema. Como consecuencia, se obtuvo una relación exponencial entre la coherencia de estados tipo gato de Schrödinger y el número promedio de excitaciones en el oscilador. Este resultado establece una conexión directa entre la dinámica de la energía y la preservación de coherencias cuánticas. Asimismo, se observó que la negatividad de la función de Wigner sigue una evolución estrechamente relacionada con las coherencias, confirmando que los mecanismos no-Markovianos responsables de preservar excitaciones también contribuyen a la protección de propiedades cuánticas como lo son las franjas negativas en la función de Wigner.

En conjunto, los resultados obtenidos muestran que la ingeniería espacial del acoplamiento sistema-entorno constituye una herramienta efectiva para controlar procesos de decoherencia y disipación. La aparición de memoria inducida geométricamente, estados ligados y frecuencias oscuras abre la posibilidad de diseñar arquitecturas capaces de proteger coherencias, entrelazamiento y no-clasicidad durante tiempos significativamente mayores que los observados en emisores puntuales. Estos resultados contribuyen a la comprensión de los mecanismos físicos que permiten preservar recursos cuánticos en sistemas abiertos y podrían resultar relevantes para futuras aplicaciones en tecnologías cuánticas basadas en emisores gigantes y circuitos superconductores.

Apéndice A

Solución analítica por el método de Berman-Ford

A.1. Transformada de Laplace y función auxiliar

La ecuación íntegro-diferencial que describe la evolución temporal de la amplitud $\alpha(t)$ en la imagen de interacción se puede resolver formalmente utilizando la transformada de Laplace. Al aplicar dicha transformación y tomar su inversa formal, la solución se expresa como [8]:

$$\tilde{\alpha}(t) = \frac{e^{i\Delta t}}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \, \frac{e^{st}}{s + i\Delta + G(s)}, \tag{A.1}$$

en donde se ha introducido la función auxiliar $G(s)$, definida mediante la integral sobre la función espectral del entorno:

$$G(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_{\text{mín}}}^{\omega_{\text{máx}}} d\omega \, \frac{J(\omega)}{s + i\omega}. \tag{A.2}$$

A.2. Corte de rama, polos y residuos

Es posible demostrar que la función $G(s)$ presenta un salto discontinuo a lo largo del eje imaginario, desde $-\omega_{\text{máx}}$ hasta $-\omega_{\text{mín}}$, lo que da lugar a la existencia de un corte de rama (*branch cut*) en dicho intervalo. Esta función se relaciona directamente con la función de autoenergía $\Sigma(E)$ mediante la expresión $G(-iE) = i\Sigma(E)$.

Eligiendo un contorno de integración adecuado en el plano complejo y aplicando el teorema de los residuos, se llega a la solución exacta:

$$\alpha(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\omega_{\text{máx}}}^{-\omega_{\text{mín}}} \frac{dy}{2\pi} \, \frac{J(-y)e^{iyt}}{[y + \Delta - iG(-\epsilon + iy)][y + \Delta - iG(\epsilon + iy)]} + \sum_j r_j e^{-iy_j t}, \tag{A.3}$$

en donde las amplitudes asociadas a los residuos están dadas por:

$$r_j = \left[1 + G'(s)\Big|_{s=-iy_j} \right]^{-1}, \tag{A.4}$$

y las frecuencias de los polos y_j corresponden a las soluciones de la ecuación característica:

$$y - \Delta + iG(-iy) = 0. \tag{A.5}$$

Cabe destacar que se ha realizado un cambio de signo en la variable $(y \to -y)$ por mera conveniencia en la elección de los signos de los polos al aplicarlo al sistema de cavidades.

Apéndice B

Electrodinámica cuántica en circuitos (c-QED)

B.1. El oscilador armónico cuántico como un circuito LC

El oscilador armónico cuántico, comúnmente estudiado en los cursos de física, se describe mediante el Hamiltoniano:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2, \tag{B.1}$$

En circuitos cuánticos, su análogo es el oscilador LC, compuesto por un inductor L y un capacitor C (Figura B.1). El Hamiltoniano del circuito LC está dado por:

$$\hat{H}_{LC} = \frac{\hat{Q}^2}{2C} + \frac{C\omega^2}{2}\hat{\Phi}^2, \tag{B.2}$$

donde $\hat{Q}$ es el operador de carga eléctrica almacenada en el capacitor y $\hat{\Phi}$ es el operador de flujo magnético a través del inductor. Estos operadores satisfacen la relación de conmutación análoga a la del momento y posición:

$$[\hat{\Phi}, \hat{Q}] = i\hbar. \tag{B.3}$$

El Hamiltoniano (B.2) puede reescribirse en forma diagonal introduciendo los operadores de aniquilación ($\hat{b}$) y creación ($\hat{b}^\dagger$):

$$\hat{H}_{LC} = \hbar\omega\left(\hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{1}{2}\right), \tag{B.4}$$

donde $\omega = 1/\sqrt{LC}$ es la frecuencia del oscilador, $\hat{b}^\dagger\hat{b} = \hat{n}$ es el operador número, y se cumple $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$.

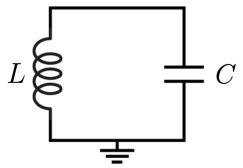

Figura B.1: Diagrama eléctrico de un circuito LC.

Sin embargo, para implementar un qubit se requieren niveles de energía no equiespaciados, condición que no satisface el oscilador LC (cuyos niveles $E_n = \hbar\omega(n+1/2)$ son equidistantes). Esta limitación plantea el desafío de cómo controlar las transiciones: Al aplicar pulsos de frecuencia para manipular el qubit (ej.: operaciones de compuertas), se excitan no solo las transiciones $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$, sino también transiciones a niveles superiores ($|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$, etc.), rompiendo la aproximación de dos niveles.
Esto motiva la introducción del circuito transmon, una modificación no lineal del oscilador LC.

B.2. Circuito Transmon

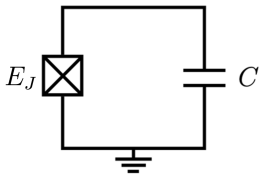

Figura B.2: Diagrama eléctrico de un circuito transmon.

Para obtener un circuito transmon, basta reemplazar el inductor del oscilador LC por una unión de Josephson (figura B.2) y restringir las transiciones a los primeros dos niveles de energía.

La unión de Josephson permite el paso de corriente entre dos superconductores separados por una capa delgada de aislante (figura B.3). Lo que da como resultado una corriente que es una función no lineal del flujo:

$$I = I_c \sin\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right), \tag{B.5}$$

aquí I_c es la corriente crítica de Josephson, a partir de la cual deja de existir tunelamiento de pares de Cooper, y $\Phi_0 = h/2e$ es el cuanto de flujo magnético.

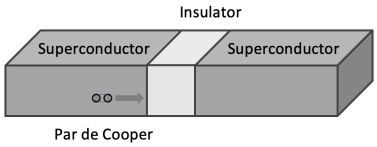

Figura B.3: Diagrama esquemático de una unión de Josephson.

A este nuevo circuito se le conoce como transmon (*transmission-line shunted plasma oscillation qubit*). El transmon se caracteriza por cumplir que $E_J/E_C \gg 1$, donde E_J es la energía de la unión de Josephson y E_C es la energía de carga, inversamente proporcional a la capacitancia total del circuito:

$$E_J = \Phi_0 I_c/2\pi, \quad E_C = e^2/2C_\Sigma. \tag{B.6}$$

Esta razón se debe cumplir ya que el término del Hamiltoniano que genera la anarmonicidad es el que acompaña a la energía de Josephson:

$$\hat{H}_T = 4E_C(\hat{n} - n_g)^2 - E_J \cos\left(2\pi \frac{\hat{\Phi}}{\Phi_0}\right), \tag{B.7}$$

el cual es un término no lineal con respecto al flujo, donde $\hat{n}$ es el operador de número de pares de Cooper y n_g es la carga de polarización.

Debido al término $\cos(\hat{\Phi})$, que puede aproximarse como una serie de potencias, el qubit superconductor —a diferencia del circuito LC— genera un potencial de oscilador anarmónico, es decir, sus niveles de energía no son equiespaciados (figura B.4). Esto nos permite controlar nuestro sistema y, al mantenerlo confinado entre los primeros dos estados, operar un qubit.

A continuación se abordarán propiedades importantes del qubit transmon al entrar en la categoría de átomos artificiales gigantes.

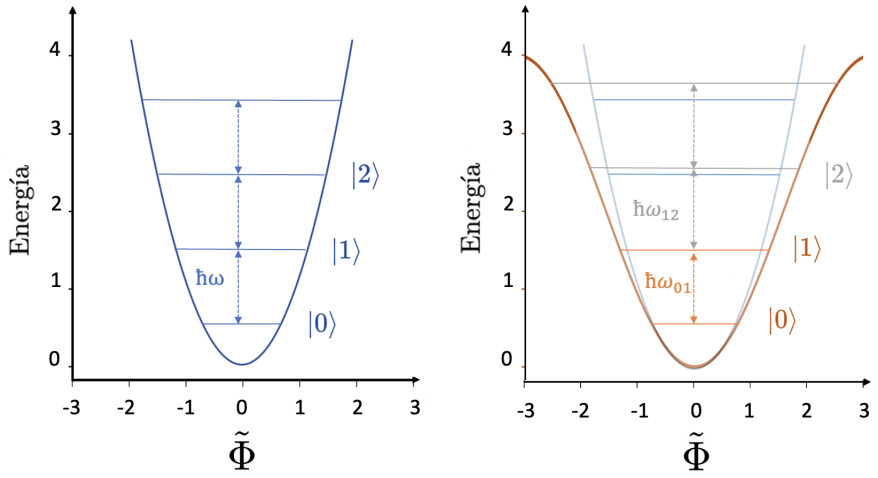

Figura B.4: a) Niveles de energía para un oscilador armónico, perteneciente a un circuito LC. b) Niveles de energía de un oscilador anarmónico, perteneciente a un transmon [33].

B.3. Línea de transmisión

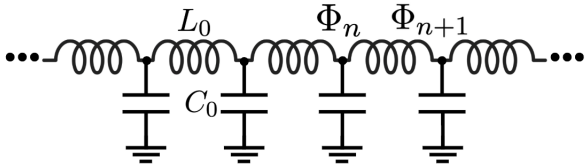

Figura B.5: Diagrama eléctrico de una línea de transmisión discreta.

Las líneas de transmisión permiten confinar y propagar ondas electromagnéticas; estas líneas de transmisión continuas se pueden aproximar usando una línea de transmisión discreta [34] (ver figura B.5). La línea de transmisión discreta con longitud L y N nodos puede imaginarse como una secuencia de inductancias L_0 y capacitancias C_0, con un incremento $\Delta x = L/N$, descrita por el siguiente Lagrangiano:

$$\mathcal{L}_L = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left[C_0\dot{\Phi}_n^2 - \frac{(\Phi_{n+1}-\Phi_n)^2}{L_0}\right]. \tag{B.8}$$

El Hamiltoniano se obtiene mediante una transformada de Legendre. Al diagonalizarlo, imponer condiciones de frontera periódicas ($\Phi_1 \equiv \Phi_{N+1}$) y transformar al espacio de momento, obtenemos la siguiente expresión:

$$H_L = \frac{1}{2}\sum_{k}\left[\frac{\tilde{q}_k\tilde{q}_k^*}{C_0} + (2-2\cos(k_m\Delta x))\,\frac{\Phi_k\Phi_k^*}{L_0}\right], \tag{B.9}$$

donde $\Phi_k = N^{-1/2}\sum_n \exp(ikx_n)\Phi_n$ es el flujo magnético en el espacio de momento, $\tilde{q}_k = q_k/\Delta x$ es la densidad de carga, y $k_m = 2\pi m/L$.

Esta diagonalización conduce de manera natural a la relación de dispersión exacta de la línea de transmisión discreta:

$$\omega_k = \frac{1}{\sqrt{L_0C_0}}\sqrt{2-2\cos(k_m\Delta x)} = \omega_c\sqrt{2-2\cos(k_m\Delta x)}, \tag{B.10}$$

donde hemos definido la frecuencia de corte $\omega_c = v_g/\Delta x$, siendo $v_g = 1/\sqrt{L_0C_0}$ la velocidad de grupo de los fotones en la línea de transmisión.

En el límite continuo, es decir, cuando $N \to \infty$ (o $\Delta x \to 0$), el Hamiltoniano adopta la forma:

$$H_L = \frac{\Delta x}{2}\sum_{k}\left[\frac{\tilde{q}_k\tilde{q}_k^*}{c_0} + \left(\frac{2\pi m}{N}\right)^2\frac{\Phi_k\Phi_k^*}{l_0}\right], \tag{B.11}$$

lo cual recupera la conocida relación de dispersión lineal para modos de baja energía:

$$\omega_k \approx v_g|k|, \tag{B.12}$$

con $c_0 = C_0/\Delta x$ y $l_0 = L_0/\Delta x$ como la capacitancia e inductancia por unidad de longitud, respectivamente.

Al realizar la cuantización canónica, las variables pasan a ser operadores de flujo ($\Phi \to \hat{\Phi}$) y carga ($Q \to \hat{Q}$), y tras definir operadores de creación ($b_k^\dagger$) y aniquilación (b_k), el Hamiltoniano modal toma la forma diagonal:

$$H_L = \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k, \tag{B.13}$$

donde ω_k es la frecuencia de cada modo de la guía de ondas.

B.4. Interacción entre una línea de transmisión y un átomo gigante

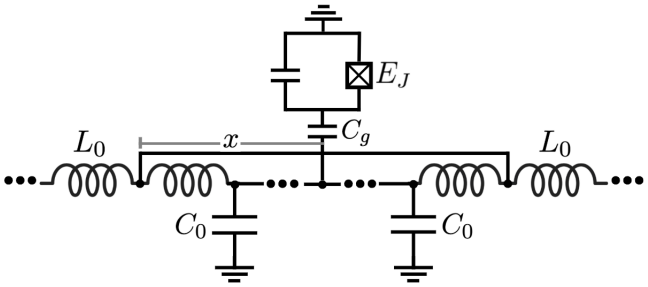

Figura B.6: Diagrama eléctrico de un transmon acoplado a una línea de transmisión discreta.

La interacción luz-materia es un fenómeno de estudio muy amplio; en el caso de este trabajo, el interés principal es la interacción de una línea de transmisión (baño bosónico) con un transmon (sistema de dos niveles).

Aunque el transmon y la línea de transmisión son elementos de circuitos superconductores, su interacción reproduce la física de sistemas atómicos acoplados a campos cuantizados, justificando el modelo de interacción luz-materia.

Dependiendo del tipo de acoplamiento, se modificará el Hamiltoniano. Debido al sistema de interés, se considera un acoplamiento capacitivo [10]:

$$\hat{H}_I = -\frac{C_g}{C_\Sigma}\hat{q}\sum_{j=1}^{N_c}\hat{V}(x_j). \tag{B.14}$$

Después de resolver $V(x) = \partial_t\Phi(x,t) = -\frac{i}{\hbar}[\Phi, H_e]$, el operador de voltaje está dado por la siguiente ecuación:

$$\hat{V}(x_j) = i\sum_k \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2c_0}}\left(\frac{e^{-ikx_j}}{\sqrt{L}}\hat{b}_k^\dagger - \frac{e^{ikx_j}}{\sqrt{L}}\hat{b}_k\right). \tag{B.15}$$

Por lo tanto, el Hamiltoniano de interacción se puede reescribir como:

$$\hat{H}_I = \hat{\sigma}^z\sum_k\left(\tilde{g}_k\hat{b}_k + \text{h.c.}\right), \tag{B.16}$$

donde la amplitud de acoplamiento al modo k-ésimo del baño es:

$$\tilde{g}_k(x_j) = -\frac{C_g}{C_\Sigma}\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2c_0}}\sum_j e^{ikx_j}. \tag{B.17}$$

Bibliografía

[1] Maximilian Schlosshauer. *Decoherence and the quantum-to-classical transition*. Springer, 2007.

[2] Heinz-Peter Breuer and Francesco Petruccione. *The theory of open quantum systems*. OUP Oxford, 2002.

[3] Anton Frisk Kockum. Quantum optics with giant atoms—the first five years. In *International Symposium on Mathematics, Quantum Theory, and Cryptography: Proceedings of MQC 2019*, pages 125–146. Springer, 2020.

[4] Bruno Bellomo, R Lo Franco, and Giuseppe Compagno. Non-markovian effects on the dynamics of entanglement. *Physical Review Letters*, 99(16):160502, 2007.

[5] Heinz-Peter Breuer, Elsi-Mari Laine, Jyrki Piilo, and Bassano Vacchini. Colloquium: Non-markovian dynamics in open quantum systems. *Rev. Mod. Phys.*, 88:021002, Apr 2016.

[6] Tsuyoshi Takagi, Masato Wakayama, Keisuke Tanaka, Noboru Kunihiro, Kazufumi Kimoto, and Yasuhiko Ikematsu. *International Symposium on Mathematics, Quantum Theory, and Cryptography*. Springer, 2021.

[7] Lingzhen Guo, Anton Frisk Kockum, Florian Marquardt, and Göran Johansson. Oscillating bound states for a giant atom. *Physical Review Research*, 2(4):043014, 2020.

[8] Carlos A González-Gutiérrez. Non-markovian dynamics of giant emitters beyond the weisskopf–wigner approximation. *Physica Scripta*, 101(19):195105, 2026.

[9] Lingzhen Guo, Arne Grimsmo, Anton Frisk Kockum, Mikhail Pletyukhov, and Göran Johansson. Giant acoustic atom: A single quantum system with a deterministic time delay. *Physical Review A*, 95(5):053821, 2017.

[10] Juan José García Ripoll. *Quantum information and quantum optics with superconducting circuits*. Cambridge University Press, 2022.

[11] Michael A Nielsen and Isaac L Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press, 2010.

[12] Rajibul Islam, Ruichao Ma, Philipp M Preiss, M Eric Tai, Alexander Lukin, Matthew Rispoli, and Markus Greiner. Measuring entanglement entropy in a quantum many-body system. *Nature*, 528(7580):77–83, 2015.

[13] Christopher C Gerry and Peter L Knight. *Introductory quantum optics*. Cambridge university press, 2023.

[14] J. J. Sakurai and Jim Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, Boston, 2nd edition, 2011.

[15] Lev Davidovich Landau and Evgenii Mikhailovich Lifshitz. *Statistical physics: volume 5*, volume 5. Elsevier, 2013.

[16] Sibasish Ghosh, Guruprasad Kar, Anirban Roy, Aditi Sen(De), and Ujjwal Sen. Distinguishability of bell states. *Phys. Rev. Lett.*, 87:277902, Dec 2001.

[17] Rosario Lo Franco, Bruno Bellomo, Sabrina Maniscalco, and Giuseppe Compagno. Dynamics of quantum correlations in two-qubit systems within non-markovian environments. *International Journal of Modern Physics B*, 27(01n03):1345053, 2013.

[18] T Gorin, T Prosen, TH Seligman, and WT Strunz. Connection between decoherence and fidelity decay in echo dynamics. *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 70(4):042105, 2004.

[19] T Baumgratz, M Cramer, and MB Plenio. Quantifying coherence. *Physical review letters*, 113(14):140401, October 2014.

[20] B. Bellomo, R. Lo Franco, and G. Compagno. Entanglement dynamics of two independent qubits in environments with and without memory. *Phys. Rev. A*, 77:032342, Mar 2008.

[21] William K Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Physical Review Letters*, 80(10):2245, 1998.

[22] Kevin E Cahill and Roy J Glauber. Density operators and quasiprobability distributions. *Physical Review*, 177(5):1882, 1969.

[23] Fernando Quijandría, Ingrid Strandberg, and Göran Johansson. Steady-state generation of wigner-negative states in one-dimensional resonance fluorescence. *Physical Review Letters*, 121(26):263603, 2018.

[24] Anatole Kenfack and Karol Życzkowski. Negativity of the wigner function as an indicator of non-classicality. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 6(10):396–404, 2004.

[25] Paul R Berman and George W Ford. Spontaneous decay, unitarity, and the weisskopf–wigner approximation. In *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, volume 59, pages 175–221. Elsevier, 2010.

[26] Bharath Kannan, Max J Ruckriegel, Daniel L Campbell, Anton Frisk Kockum, Jochen Braumüller, David K Kim, Morten Kjaergaard, Philip Krantz, Alexander Melville, Bethany M Niedzielski, et al. Waveguide quantum electrodynamics with superconducting artificial giant atoms. *Nature*, 583(7818):775–779, 2020.

[27] Sebastian Diehl, Enrique Rico, Mikhail A Baranov, and Peter Zoller. Topology by dissipation in atomic quantum wires. *Nature physics*, 7(12):971–977, 2011.

[28] Sergi Terradas-Briansó, Carlos A González-Gutiérrez, Franco Nori, Luis Martín-Moreno, and David Zueco. Ultrastrong waveguide qed with giant atoms. *Physical Review A*, 106(6):063717, 2022.

[29] Hong-Bin Chen and Yueh-Nan Chen. Canonical hamiltonian ensemble representation of dephasing dynamics and the impact of thermal fluctuations on quantum-to-classical transition. *Scientific reports*, 11(1):10046, 2021.

[30] Pinja Haikka, TH Johnson, and Sabrina Maniscalco. Non-markovianity of local dephasing channels and time-invariant discord. *Physical Review A*, 87(1):010103–R, 2013.

[31] Alex W Chin, Susana F Huelga, and Martin B Plenio. Quantum metrology in non-markovian environments. *Physical review letters*, 109(23):233601, 2012.

[32] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Fourier analysis: an introduction*, volume 1. Princeton University Press, 2011.

[33] C. A. González-Gutiérrez, M. Córdova-Ríos, A. Olmedo-Rodríguez, and L. M. Bustamante-Vargas. Introducción a los qubits superconductores. In *Memorias Académicas de la Escuela de Verano en Física en la UNAM (17–28 de junio de 2024)*, Cuernavaca, Morelos, México, 2025. Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto de Ciencias Físicas. Primera edición electrónica. ISSN: 2594-2697.

[34] Carlos A González-Gutiérrez, Juan Román-Roche, and David Zueco. Distant emitters in ultrastrong waveguide qed: Ground-state properties and non-markovian dynamics. *Physical Review A*, 104(5):053701, 2021.