



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ

FACULTAD DE CIENCIAS



**LAS SIMETRÍAS DISCRETAS DEL  
ESPACIO-TIEMPO C Y P COMO ORIGEN  
DE LAS PARTICULAS DE DIRAC Y  
MAJORANA**

**TESIS PROFESIONAL**

**PARA OBTENER EL TÍTULO DE**

**LICENCIADO EN FÍSICA**

**PRESENTA:**

**Cliffor Benjamín Compeán Jasso**

**SAN LUIS POTOSÍ, S. L. P., OCTUBRE DE 2004**



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ

FACULTAD DE CIENCIAS



**LAS SIMETRÍAS DISCRETAS DEL  
ESPACIO-TIEMPO  $C$  Y  $P$  COMO ORIGEN  
DE LAS PARTÍCULAS DE DIRAC Y  
MAJORANA**

**TESIS PROFESIONAL**

**para obtener el título de**

**LICENCIADO EN FÍSICA**

**PRESENTA:**

**Cliffor Benjamín Compeán Jasso**

**SAN LUIS POTOSÍ, S. L. P. Octubre de 2004**

SISTEMA DE  
BIBLIOTECAS  
U.A.S.L.P.  
No. DE REG.  
FMMT825

LF  
C655  
2004

# Asesor de Tesis

**Dr. Mariana Kirchbach**  
**Profesor Investigador del**  
**Instituto de Física, UASLP**



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ

FACULTAD DE CIENCIAS



LAS SIMETRÍAS DISCRETAS DEL  
ESPACIO-TIEMPO  $C$  Y  $P$  COMO  
ORIGEN DE LAS PARTÍCULAS DE  
DIRAC Y MAJORANA

TESIS PROFESIONAL

para obtener el título de

**LICENCIADO EN FÍSICA**

PRESENTA:

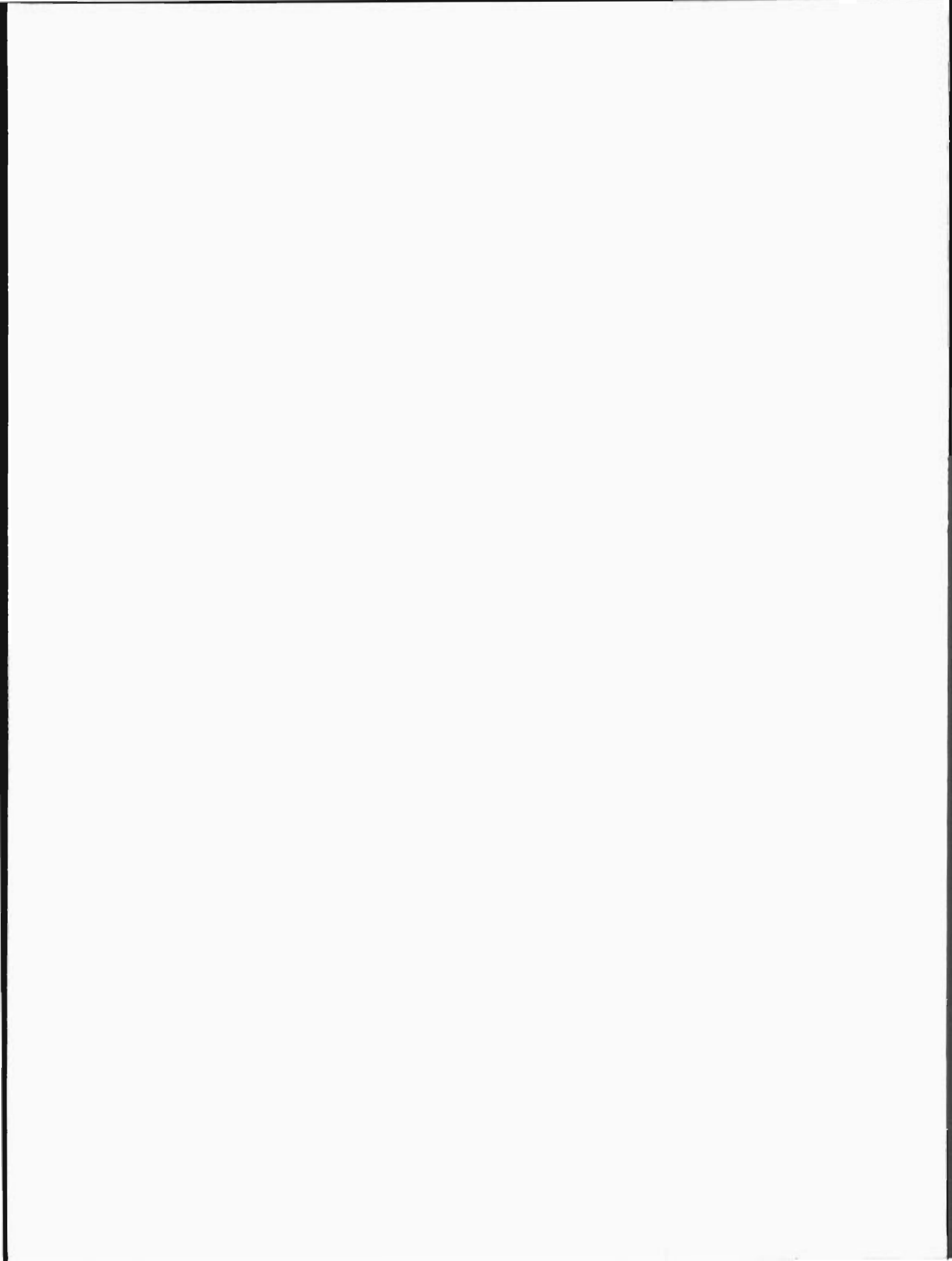
**Cliffor Benjamín Compeán Jasso**

ASESOR DE TESIS:

**Dr. Mariana Kirchbach**

Profesor Investigador del  
Instituto de Física, UASLP

SAN LUIS POTOSÍ, S. L. P. Octubre de 2004



# Agradecimientos

- A mi **Familia**, que incondicionalmente, siempre me ha apoyado en cada momento (los quiero mucho).
- A mis **Amigos**, las personas que sin formar parte de mi familia están muy cerca de mí.
- A las personas que de alguna forma han influido en mí y que ahora son parte de mis recuerdos.
- A mi asesora de tesis, **Dr. Mariana Kirchbach**, por su apoyo y paciencia que ha tenido hacia mí.
- Al Instituto de Física *Manuel Sandoval Vallarta* por toda la infraestructura necesaria para la realización del presente trabajo.
- A **Dios**, que me ha permitido estar aquí y ahora, y para mí son el mejor lugar y tiempo en el que pude estar.



# Índice general

1. Simetrías y Grupos	1
1.1. Simetrías en la Naturaleza	1
1.1.1. Tipos de Simetrías	1
1.1.2. Simetrías Discretas de Partículas Elementales	2
1.1.3. Objetivo de la Tesis	3
1.2. Teoría de Grupos	5
1.2.1. Definición de un Grupo y los Axiomas que lo Definen	5
1.2.2. Propiedades Básicas de los Grupos	5
1.3. Operadores Lineales	7
1.3.1. El Operador como Elemento de un Grupo	7
1.4. Representación Matricial	7
1.4.1. Las Matrices Representando los Elementos de un Grupo	8
1.4.2. Definición de una Representación Matricial	8
1.4.3. Representación por Matrices Regulares	9
1.4.4. Representaciones Equivalentes	9
1.5. Representaciones Reducibles e Irreducibles	10
1.5.1. Suma Directa de Dos Espacios Vectoriales	10
1.5.2. La Suma Directa de Dos Representaciones	11
1.5.3. Representación Irreducible	11
1.6. Grupos Continuos y Grupos de Lie	12
1.6.1. Grupos Continuos de $n$ Parámetros	12
1.6.2. Grupos de Lie	13
1.6.3. El álgebra de Lie	14
1.6.4. Aplicación en la Mecánica Cuántica	16
1.7. Relación entre el Grupo de Rotación $SO(3)$ y el Grupo Unitario $SU(2)$	17
1.7.1. Centro de Grupo	17
1.7.2. El Grupo Factor $SU(2)/Z_2$	17
1.7.3. La Relación entre $SO(3)$ y $SU(2)$	18



2. Representación $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ del Grupo de Lorentz	21
2.1. El Grupo de Lorentz	21
2.1.1. Postulados de la Relatividad Especial y las Transformadas de Lorentz	21
2.1.2. Relación entre el Grupo de Lorentz y el Grupo $SL(2, C)$	24
2.1.3. Espacios de Tipo $(j_R, j_L)$	26
2.2. El Espacio de Minkowski Producido por Espinores	28
2.3. Representación $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$	30
2.4. Descripción de Partículas con Espín 1/2 y la Derivación Tradicional de la Ecuación de Dirac	31
2.4.1. Ecuación de Dirac como Ecuaciones Acopladas de Espinores $(1/2, 0)$ y $(0, 1/2)$	32
2.4.2. Obtención de las Ecuaciones de Dirac para $u_h$ y $v_h$ como Condición de "Completez" para Todos los Sistemas Inerciales	34
3. Las Matrices $\gamma^\mu$ como Operadores de las Simetrías Discretas $C$ , $P$ y $T$ de Espacio Tiempo	39
3.1. Inversión del Espacio ( $P$ )	39
3.2. Retorno del Tiempo ( $T$ )	41
3.3. Reflexión Total ( $CPT$ )	43
3.4. Conjugación de Carga ( $C$ )	44
3.5. La Paridad del Espacio-Tiempo como Origen de las Partículas de Dirac	45
4. Simetría $C$ del Espacio-Tiempo como Origen de Partículas de Majorana	48
4.1. La Simetría $C$ y las Partículas de Majorana	48
4.1.1. Paridades $C$ Reales	49
4.1.2. Espinores de Majorana de Normalización Cruzada	49
4.2. La No Propagación de los Espinores de Paridad $C$	50
4.3. Construcción de Proyectores Mediante $\Psi_M^{h_i(\epsilon_j)}(\vec{0})$	51
4.4. Construcción de Espinores de Majorana que se Propagan Covariantemente	54
5. Conclusiones	56

# Capítulo 1

## Simetrías y Grupos

### 1.1. Simetrías en la Naturaleza

#### 1.1.1. Tipos de Simetrías

Las *simetrías* en la naturaleza (la indistinguibilidad de los entes físicos) tienen como consecuencia la *conservación* de las leyes de la naturaleza, como por ejemplo la isotropía y homogeneidad del espacio y la homogeneidad en el tiempo, que permiten la conservación del momento angular, del momento lineal y la energía, respectivamente. Aparte de las simetrías antes mencionadas, existen otros tipos de simetrías en la naturaleza que permiten la conservación de otras leyes, tal es el caso de enantiomorfismo que permite la indistinguibilidad de las leyes físicas con respecto a fenómenos u objetos y su reflejo. El ente que se conserva debido al enantiomorfismo es la *Paridad* que relaciona las propiedades de los objetos de ser idénticos u opuestos de sus imágenes en el espejo [1].

$$\begin{array}{ccc} \text{Objeto Real} & \longrightarrow & \text{Objeto Reflejado} \\ \vec{r} & \longrightarrow & -\vec{r} \\ \vec{v} & \longrightarrow & -\vec{v} \end{array} ,$$

donde se ve que los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$  tienen paridad negativa. Pero los vectores axiales como el momento angular, definido como:

$$\begin{array}{ccc} \text{Objeto Real} & \longrightarrow & \text{Objeto Reflejado} \\ \vec{M} = \vec{r} \times \vec{v} & \longrightarrow & \vec{M} = (-\vec{r}) \times (-\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{v} \end{array} ,$$

tienen paridad positiva.

Por otro lado, moléculas con un contenido atómico idéntico pueden tener estructuras espaciales opuestas con respecto al sentido del giro, pero sus propiedades bajo circunstancias biológicas pueden ser muy diferentes debido a la preferencia de la materia orgánica con una cierta orientación de los átomos en la molécula. Estas moléculas no tienen Paridad.

### 1.1.2. Simetrías Discretas de Partículas Elementales

En la teoría de Partículas Elementales se manejan varias simetrías para describir diferentes fenómenos [3]. Consideremos una partícula  $f$  con momento lineal  $\vec{p}$  y proyección de espín  $s$  en el eje  $z$ , descrita por el estado  $f(\vec{p}, s)$ , que se transforma bajo una operación en el estado  $f'(\vec{p}', s')$  que describe una partícula  $f'$  con momento  $\vec{p}'$  y proyección de espín  $s'$  sobre el eje  $z$ . Las principales operaciones discretas de Partículas Elementales son:

- Conjugación de Carga: El operador de conjugación de carga  $C$  transforma una partícula en su antipartícula. En caso de partículas con espín entero y simétricas bajo  $C$  se observa que la partícula  $f(\vec{p}, s)$  se transforma en  $f^*(\vec{p}, s)$  con el mismo momento y la misma proyección de espín.

$$Cf(\vec{p}, s) = \hat{\eta}_C f^*(\vec{p}, s), \quad (1.1)$$

donde  $\hat{\eta}_C$  es un factor de fase con  $|\hat{\eta}_C|^2 = 1$ , y  $*$  denota la conjugación compleja. Para partículas con espín no entero, la conjugación compleja no es suficiente para esta operación de simetría, es necesario un operador. Por ejemplo, para partículas con espín  $s = 1/2$  aparte de la conjugación compleja es necesario el operador  $i\gamma^2$  ( $\gamma^2$  es una de las matrices de Dirac, las cuales se verán más adelante) para describir el operador  $C$ .

- Inversión del Espacio: Bajo esta transformación se tiene:

$$Pf(\vec{p}, s) \rightarrow f(-\vec{p}, s). \quad (1.2)$$

En caso de partículas simétricas bajo  $P$  se observa:

$$Pf(\vec{p}, s) = \hat{\eta}_P f(-\vec{p}, s). \quad (1.3)$$

donde  $\hat{\eta}_P$  es un factor de fase llamada paridad intrínseca de la partícula  $f$ , con  $|\hat{\eta}_P|^2 = 1$ .

- Retorno del Tiempo: Esta operación indica que si un proceso tiene un estado inicial A y un estado final B, el proceso que tiene un estado inicial B y uno final A también es posible. Esta operación es equivalente en regresar el reloj, es decir, cambiar  $t$  por  $-t$  mientras que  $\vec{r}$  permanece invariante. El momento  $\vec{p} = d(m\vec{r})/dt$  cambia a  $-\vec{p}$  y el momento angular  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  cambia a  $-\vec{L}$ , cualquier momento angular  $\vec{J}$  es entonces transformado en  $-\vec{J}$ , y por consiguiente, la proyección del espín  $s$  cambia a  $-s$ . Así, para un estado de una partícula  $f(\vec{p}, s)$  simétrica con respecto de  $T$ , bajo la acción del operador de retorno de tiempo  $T$  cambia como:

$$Tf(\vec{p}, s) = \hat{\eta}_T f^*(-\vec{p}, -s), \quad (1.4)$$

donde  $\hat{\eta}_T$  es un factor de fase que depende de espín  $s$  inicial, con  $|\hat{\eta}_T|^2 = 1$ .

Uno de los teoremas más fundamentales en la teoría de las partículas elementales dice que todos los fenómenos físicos que suceden en la teoría del campo local tiene la simetría combinada  $CPT$ .

### 1.1.3. Objetivo de la Tesis

En la presente tesis se desea observar como se comportan los fermiones con espín  $s = 1/2$  ante las operaciones  $P$  y  $C$  antes mencionadas que se refieren a partículas de Dirac como el electrón y partículas totalmente neutras como un neutrino el cual es indistinguible del antineutrino. Este último tipo de fermiones es conocido como fermiones de Majorana.

La descripción de los fermiones de Majorana es uno de los problemas centrales de la física contemporánea no solamente por la especulación del fenómeno de oscilación de neutrinos o el decaimiento doble beta sin neutrinos ( $0\nu\beta\beta$ ), pero también por que las fuentes de campos fermiónicos neutros (gauginos) que aparecen acompañando a las fuentes de bosones predichas en teorías supersimétricas.

Para un punto de vista formal, las partículas de Majorana son tratadas en los libros de texto diferente a las partículas de Dirac. Mientras que el campo de Dirac es sistemáticamente derivado de la simetría  $P$  del espacio-tiempo de Lorentz, las partículas de Majorana están compuestas (de antemano) al nivel de estados cuánticos. Los estados cuánticos invariantes a  $C$  más importantes son explotados en la descripción de oscilaciones de neutrinos, construidos como ([2] y referencias incluida)

$$\begin{aligned}
 \nu &= u_h(\vec{p}) \mathbf{a}_h^+(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} |0\rangle, \\
 \nu^c &= u_h(\vec{p}) \mathbf{b}_h^+(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} |0\rangle, \\
 \nu_{L/R} &= \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\nu, \\
 \nu_{L/R}^c &= \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\nu^c,
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

donde  $u_h(\vec{p}) \mathbf{a}_h^+(\vec{p}) |0\rangle$  y  $u_h(\vec{p}) \mathbf{b}_h^+(\vec{p}) |0\rangle$  son respectivamente estados de partícula de Dirac y antipartículas (vease cap 2.4 por las notaciones). Los espinores de neutrino  $\nu_L$  y  $\nu_R^c$  son llamados "activos electrodébilmente" mientras  $\nu_R$ , y  $\nu_L^c$  son "estériles electrodébilmente". Los estados de paridad  $C$  en la ecuación (1.5) se utilizan en la oscilación de neutrinos y son llamados espinores cuánticos de Majorana. Los espinores cuánticos satisfacen un sistema de dos ecuaciones de Dirac

$$\begin{pmatrix} \not{p} - M_D & -M_M \\ -M_M & \not{p} - M_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ \nu^c \end{pmatrix} = 0. \tag{1.6}$$

La ecuación (1.6) representa una ecuación de Dirac para una generación de neutrino-antineutrino. Tiene dos casos límites. El primer caso corresponde a  $M_D = 0$  y  $M_M \neq 0$ . Este es el caso del famoso término de masa de Majorana. El segundo caso es el término de masa de Dirac puro cuando  $M_M = 0$  y  $M_D \neq 0$ .

Como el término de masa de Majorana transforma una partícula en su antipartícula, este describe procesos con rompimiento de la conservación de número leptónico por 2 unidades.

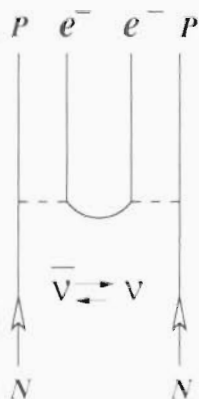


Figura 1.1: Representación esquemática del decaimiento  $0\beta\beta\nu$ .

Esto permite la existencia del decaimiento doble beta sin neutrinos (figura 1.1).

$$\begin{aligned}
 n_1 &\longrightarrow p_1 + e^- + \bar{\nu}_e \\
 (\bar{\nu}_e \equiv \nu_e) + n_2 &\longrightarrow p_2 + e^- .
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

Como no hay diferencia entre neutrino y antineutrino, el antineutrino emitido por el primer neutrón  $n_1$  puede ser absorbido como neutrino por el segundo neutrón  $n_2$  que se transforma en un protón emitiendo un segundo electrón. El decaimiento  $\beta$  de dos neutrones en dos protones y dos electrones sin antineutrinos es conocido como  $0\beta\beta\nu$  y es generado solo por neutrinos de Majorana. El decaimiento  $0\beta\beta\nu$  muestra la importancia del término de masa de Majorana. En este contexto es importante saber si el término de masa de Majorana existe exclusivamente en un nivel cuántico o si es posible tenerlo en el nivel clásico (representaciones de Lorentz).

El objetivo de esta tesis es mostrar que el término de masa de Majorana existe también en el nivel clásico y construir los espinores correspondientes.

La tesis está organizada en 4 capítulos. El capítulo 1 da los conceptos básicos de teoría de grupos, necesarios para el desarrollo y entendimiento de la tesis. El capítulo 2 muestra una forma de obtener espinores basándose en la descripción del espacio-tiempo del grupo de Lorentz, después introduce la representación  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  y finaliza obteniendo la ecuación de Dirac por métodos tradicionales. En el capítulo 3 se muestra a las matrices de Dirac ( $\gamma^0$ ,  $\gamma^1$ ,  $\gamma^2$  y  $\gamma^3$ ) como operaciones de simetrías  $C$ ,  $P$  y  $T$  en la representación  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ , después se muestra a los generadores del grupo  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  como funciones de las matrices de Dirac, para finalizar con la obtención de la ecuación de Dirac por medio del operador  $P$ . Por último, en el capítulo 4 se aplica el operador  $C$  para obtener los espinores de Majorana y se mostrará que para construir una ecuación covariante con ellos es necesario un espacio espinorial de 8 dimensiones.

## 1.2. Teoría de Grupos

Las simetrías que encontramos en la naturaleza al momento de estudiar los diferentes fenómenos existentes en ella, permiten crear las leyes para explicarlos. La *Teoría de Grupos* provee una herramienta para describir las simetrías de una manera adecuada. Los fenómenos físicos descritos por la teoría de grupos, asociadas con las simetrías, necesitan la indistinguibilidad entre ciertos objetos y fenómenos físicos [4] [5] [6].

### 1.2.1. Definición de un Grupo y los Axiomas que lo Definen

Un grupo  $\mathbf{G}$  es un conjunto de elementos  $G_1, G_2, G_3, \dots$ , con una ley de *multiplicación*, llamada *producto*  $G_i G_j$ , de dos elementos cualquiera. El conjunto satisface los siguientes axiomas:

1. Si  $G_i$  y  $G_j$  son elementos del conjunto  $\mathbf{G}$ , entonces el producto  $G_i G_j$  también es un elemento del mismo conjunto.

$$G_i G_j = G_k \in \mathbf{G}. \quad (1.8)$$

2. La multiplicación de los elementos del grupo es asociativa.

$$(G_i G_j) G_k = G_i (G_j G_k). \quad (1.9)$$

3. Existe un elemento del conjunto  $I$  llamado *Elemento Identidad* ó *Elemento Neutral* que conmuta con todos los elementos del conjunto y los deja incambiable. Para cualquier elemento arbitrario  $G_i$ :

$$I G_i = G_i I = G_i. \quad (1.10)$$

4. Cada elemento  $G_i$  tiene un *Elemento Inverso*  $G_i^{-1}$  (llamado el inverso de  $G_i$ ), que también es un elemento de  $\mathbf{G}$ , tal que el producto entre ambos es igual al elemento identidad. Si

$$G_i G_j = G_j G_i = I \Rightarrow G_j = G_i^{-1} \in \mathbf{G}. \quad (1.11)$$

entonces un conjunto con las propiedades 1-4 se denomina un grupo.

### 1.2.2. Propiedades Básicas de los Grupos

Las principales propiedades de los grupos son:

- El número de los elementos del grupo pueden ser finito o infinito, de acuerdo, los grupos pueden ser finitos o infinitos.

- El número de elementos de un grupo finito es llamado *orden* del grupo.
- El producto de un elemento arbitrario  $G_i$  por si mismo es llamado el cuadrado de  $G_i$ .

$$G_i G_i = G_i^2.$$

- El elemento identidad de un grupo es único.
- El inverso  $G_i^{-1}$  de un elemento  $G_i$  existe y es único. De esta propiedad obtenemos el siguiente teorema:

- *Teorema:* El inverso de un producto de dos o más elementos es igual al producto de los inversos tomados en el orden inverso

$$(G_1 G_2 G_3 \cdots G_n)^{-1} = G_n^{-1} G_{n-1}^{-1} G_{n-2}^{-1} \cdots G_1^{-1}. \quad (1.12)$$

- En general, la multiplicación entre los elementos de un grupo no *conmutan*

$$G_i G_j \neq G_j G_i.$$

Si todos los elementos de un grupo conmutan, el grupo es llamado *Grupo Abeliano*. Un Grupo *Cíclico* de orden  $n$  es aquel grupo Abeliano y finito de  $n$  elementos  $\{G^1, G^2, G^3, \dots, G^n\}$  donde  $n$  es el menor número en el que  $G^n = I$ .

- En el interior de un grupo  $\mathbf{G}$ , en general, se pueden encontrar varios elementos de  $\mathbf{G}$  los cuales forman conjuntos más pequeños con las propiedades de grupos llamados *subgrupos*. El elemento identidad  $I$  es por sí mismo un grupo de orden 1. El elemento identidad es elemento de todos los subgrupos de un grupo dado. En general, un elemento de un grupo, puede pertenecer a diferentes subgrupos.
- Un grupo  $\mathbf{G}$  se llama *producto directo* de sus subgrupos  $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_n$  si:

1. Los elementos de los diferentes subgrupos conmutan.
2. Cualquier elemento  $g \in \mathbf{G}$  es expresable de una manera y solo una forma como

$$g = h_1 h_2 \dots h_n,$$

donde  $h_i \in \mathbf{H}_i$ .

Se asume que ninguno de los subgrupos tiene elementos en común a excepción del elemento identidad  $I$ . Simbólicamente,

$$\mathbf{G} = \mathbf{H}_1 \otimes \mathbf{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{H}_n. \quad (1.13)$$

Los subgrupos  $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_n$  se dicen que son los *factores directos* de  $\mathbf{G}$ .

Para el caso de dos grupos  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{H}$  de ordenes respectivos  $g$  y  $h$  y elementos respectivos  $\{G_1, G_2, \dots, G_g\}$  y  $\{H_1, H_2, \dots, H_h\}$ , donde  $G_i \neq H_j \forall i, j$  excepto por  $I$ , y los elementos de ambos grupos conmutan, el grupo formado por el producto directo  $\mathbf{G} \otimes \mathbf{H}$  es de orden  $gh$  y elementos  $(G_i, H_j)(G_k, H_l) = (G_i G_k, H_j H_l) = (G_m, H_q)$ .

- Sean dos grupos  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{H}$  del mismo orden tal que a cada elemento  $G_i$  de  $\mathbf{G}$  se le puede hacer una correspondencia uno a uno con  $H_i$  de  $\mathbf{H}$ . Entonces esta correspondencia puede preservar el producto, es decir, si  $G_i$  corresponde a  $H_i$  y  $G_j$  a  $H_j$ , entonces el elemento  $G_i G_j$  corresponde al elemento  $H_i H_j$ . Entonces se dice que los grupos  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{H}$  son *grupos isomorfos*.
- Consideremos un grupo  $\mathbf{G}$  el cual podemos asociar cualquier elemento de él con uno y solo uno de otro grupo  $\mathbf{H}$ . Para cualquier elemento de  $\mathbf{H}$  puede ser asociada por lo menos a un elemento de  $\mathbf{G}$ . Y si a esta correspondencia, se preserva el producto en el sentido indicado para los grupos Isomorfos, entonces los dos grupos son *Grupos Homomorfos*

## 1.3. Operadores Lineales

### 1.3.1. El Operador como Elemento de un Grupo

- *Definición:* En general, un operador es un símbolo el cual, cuando actúa sobre un ente matemático, lo transforma en otro ente de la misma naturaleza. A cada elemento  $\mathbf{G}$  de un grupo se le puede asociar un operador, denotado por  $\Gamma(G)$ , el cual transforma un vector  $\mathbf{X}$  en otro vector  $\mathbf{X}'$  cuando  $\mathbf{G}$  realiza una transformación.

$$\mathbf{X}' = \Gamma(G)\mathbf{X}. \quad (1.14)$$

Por ejemplo, consideremos el espacio vectorial y los vectores  $\mathbf{X}$  los cuales se transforman por una rotación de un espacio geométrico en algún otro vector  $\mathbf{X}'$ . Consideremos esta transformación como

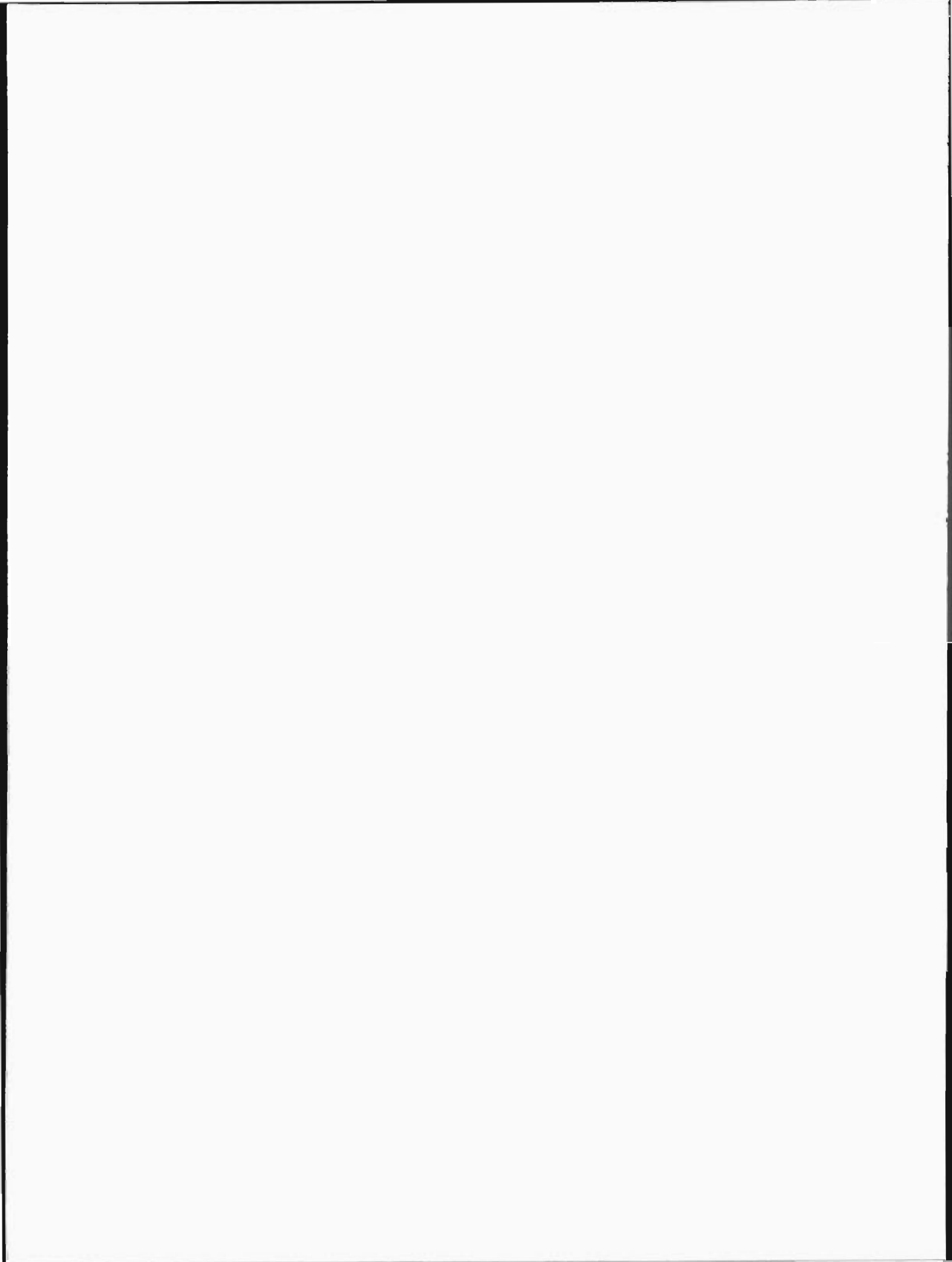
$$\mathbf{X}' = \Gamma(R)\mathbf{X}.$$

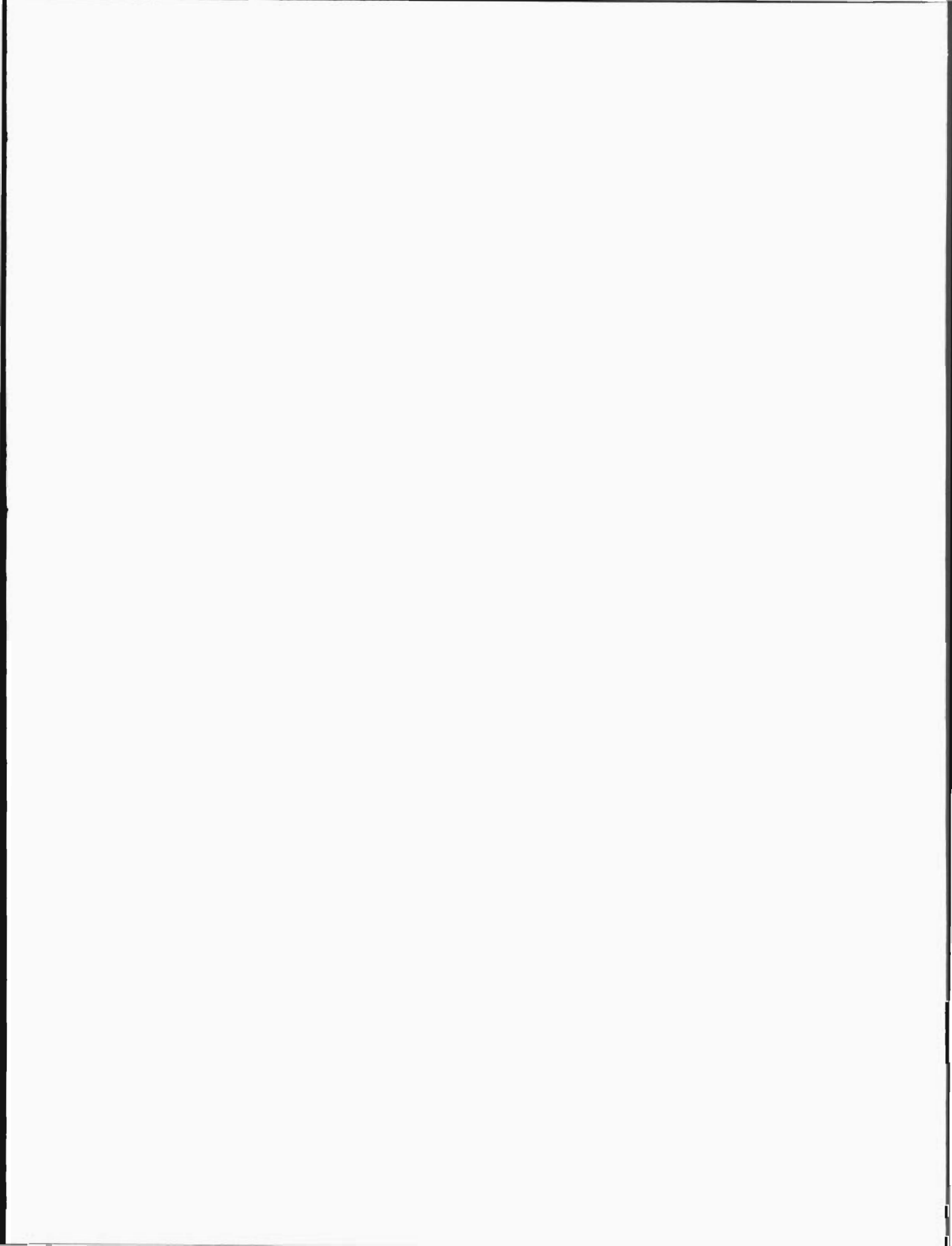
La transformación del vector  $\mathbf{X}$  en  $\mathbf{X}'$  esta dado por el símbolo  $\Gamma(R)$  llamado *operador de rotación*.

## 1.4. Representación Matricial

Cualquier operador lineal actuando sobre vectores de un espacio vectorial de dimensión finita, puede ser representado por una matriz definida con respecto a la base vectorial  $V_n$ .







### 1.4.1. Las Matrices Representando los Elementos de un Grupo

Un operador lineal  $\Gamma(G)$  actuando sobre los vectores  $\mathbf{X}$  de un espacio vectorial  $V_n$  permite la transformación vectorial

$$\Gamma(G)\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n X_i \Gamma(G)\mathbf{e}_i. \quad (1.15)$$

La descomposición de la transformación  $\Gamma(G)\mathbf{e}_i$  de la base vectorial es

$$\Gamma(G)\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^n G_{ji} \mathbf{e}_j. \quad (1.16)$$

donde  $G_{ij}$  forma los elementos de la matriz del operador  $\Gamma(G)$  con respecto a la base  $\{\mathbf{e}_i\}$  del espacio vectorial  $V_n$ . Para cada elemento  $G$  de un grupo  $\mathbf{G}$  se le puede asociar una matriz  $M(G) = [G_{ij}]$ , tal que

$$M(G) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \cdots & G_{nn} \end{bmatrix}, \quad (1.17)$$

Hay que notar que el componente  $G_{ij}$  del vector  $\Gamma(G)\mathbf{e}_i$  provee los elementos de la  $i$ -ésima columna de  $M(G)$ . Las matrices  $M(G)$  son matrices cuadradas de orden  $n$  igual a la dimensión de  $V_n$ . Se puede decir que las matrices  $M(G)$  representan los elementos  $G$  de los grupos de simetría.

### 1.4.2. Definición de una Representación Matricial

Considere un grupo  $\mathbf{G}$  y un espacio  $n$ -dimensional  $V_n$  con base  $\{\mathbf{e}_i\}$ . Se le da una correspondencia a cualquier elemento  $G$  del grupo a un operador  $\Gamma(G)$  actuando sobre el vector de  $V_n$ . Si  $A$  y  $B$  son dos elementos de  $\mathbf{G}$  los operadores asociados deben de satisfacer la propiedad

$$\Gamma(AB) = \Gamma(A)\Gamma(B). \quad (1.18)$$

Si la transformada  $\Gamma(G)\mathbf{e}_i$  de la base vectorial se da, se define el operador  $\Gamma(G)$  y consecuentemente la matriz  $M(G)$  del operador. Los elementos de la matriz  $M_{ij}(G)$  de  $M(G)$  son los componentes del vector  $\Gamma(G)\mathbf{e}_i$ , es decir

$$\Gamma(G)\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^n M_{ji}(G)\mathbf{e}_j. \quad (1.19)$$

El conjunto de matrices  $M(G)$  donde cada uno representa un elemento  $G$  del grupo forma una *Representación del Grupo en una forma Matricial*. El espacio vectorial  $V_n$  es llamado

el espacio de representaciones y la base  $\{\mathbf{e}_i\}$  es una *base de representación*. Si el operador se denota por  $\Gamma(G)$  y si  $n$  es la dimensión de  $V_n$ , la representación puede ser denotado por  $\Gamma_n$ .

*Nota:* Como el espacio vectorial es arbitrario, la representación matricial puede ser de orden arbitrarios. Para un espacio vectorial dado, las matrices dependen de la base. Tenemos un número infinito de posibles representaciones. Sin embargo, para un grupo dado todas estas representaciones se pueden descomponer en un cierto número de representaciones llamados *representaciones irreducibles* los cuales constituyen características bien definidas de un grupo y permiten las aplicaciones de la teoría de grupos en física.

## La Propiedad Fundamental de las Matrices de una Representación

Sea  $A$  y  $B$  los elementos de un grupo  $\mathbf{G}$ . Las matrices  $M(G)$  de una representación de  $\mathbf{G}$  satisface la relación

$$M(A)M(B) = M(AB). \quad (1.20)$$

### 1.4.3. Representación por Matrices Regulares

Una matriz es una *matriz regular* si su determinante no es cero y por consiguiente es invertible. Si su determinante es cero la matriz es llamada *matriz singular*.

Las matrices de las representaciones son necesariamente regulares.

Consideremos una representación matricial  $n$ -dimensional de un grupo  $\mathbf{G}$ . A cada elemento  $G$  del grupo se le asocia una matriz  $M(G)$ , tal que

$$G \longrightarrow M(G) \quad (1.21)$$

$$G^{-1} \longrightarrow M(G^{-1}) = [M(G)]^{-1} \quad (1.22)$$

$$I \longrightarrow M(I) = 1_n. \quad (1.23)$$

- *Definición:* Cuando una matriz regular esta asociada con cada elemento  $G$  de un grupo, y si estas matrices satisfacen la propiedad

$$M(B)M(A) = M(BA), \quad (1.24)$$

se puede tomar a estas matrices como una **representación matricial** del grupo.

### 1.4.4. Representaciones Equivalentes

Sean  $\{\mathbf{e}_i\}$  y  $\{\mathbf{e}'_i\}$  dos bases de una representación de un espacio vectorial  $V_n$ . Estas bases están relacionadas una con respecto a la otra por las relaciones

$$\mathbf{e}'_i = \sum_j A_{ji} \mathbf{e}_j \quad , \quad \mathbf{e}_j = \sum_i (A^{-1})_{ij} \mathbf{e}'_i. \quad (1.25)$$

El cambio de base de las matrices  $\Gamma_n$  de la representación  $\mathbf{e}_j$  se define aplicando el operador  $\Gamma(G)$  a  $\mathbf{e}'_i$

$$\Gamma(G)\mathbf{e}'_i = \sum_j A_{ji}\Gamma(G)\mathbf{e}_j = \sum_{j,l} A_{ji}M_{lj}(G)\mathbf{e}_l = \sum_m M'_{mi}(G)\mathbf{e}'_m. \quad (1.26)$$

donde  $M'_{mi}(G) = \sum_{j,l} A_{ji}M_{lj}(G)(A^{-1})_{ml}$  y representa las componentes del el vector  $\Gamma(G)\mathbf{e}'_i$  en la base  $\{\mathbf{e}'_i\}$ . Si  $A$ ,  $A^{-1}$ ,  $M(G)$  y  $M'(G)$  son las matrices con componentes  $A_{ij}$ ,  $A^{-1}_{ij}$ ,  $M_{ij}(G)$  y  $M'_{ij}(G)$ . Donde la relación es

$$M'(G) = AM(G)A^{-1}. \quad (1.27)$$

Las matrices  $M'(G)$  son las matrices de una nueva representación  $\Gamma'_n$  del grupo  $\mathbf{G}$ . Para cualquier elemento  $G_i$  y  $G_j$  del grupo

$$M'(G_i)M'(G_j) = M'(G_iG_j). \quad (1.28)$$

La representación  $\Gamma'_n$ , dada en la forma matricial  $M'(G)$  es equivalente ó isomórfico a la representación  $\Gamma_n$  formada por las matrices  $M(G)$ . Como estas dos representaciones se deducen una de la otra por un cambio de base vectorial, no son esencialmente diferentes y se identifican uno con respecto a otra de acuerdo a los requerimientos. Las matrices de dos representaciones equivalentes son llamadas *matrices equivalentes* y se caracterizan por la propiedad (1.27).

Una representación dada en la forma de matrices unitarias es llamada *representación Unitaria*. Para grupos finitos, cualquier representación de un grupo es equivalente a una representación unitaria de este grupo.

## 1.5. Representaciones Reducibles e Irreducibles

### 1.5.1. Suma Directa de Dos Espacios Vectoriales

Sea  $V_n$  un espacio vectorial y sea  $W_m$  y  $W'_p$  dos subespacios de  $V_n$ . Si cualquier vector  $\mathbf{x}$  de  $V_n$  se escribe únicamente de la forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{w}', \quad (1.29)$$

con  $\mathbf{w}$  y  $\mathbf{w}'$  pertenecen a  $W_m$  y  $W'_p$  respectivamente, entonces se dice que  $V_n$  es la *suma directa* de  $W_m$  y  $W'_p$ , y se escribe como

$$V_n = W_m \oplus W'_p. \quad (1.30)$$

La dimensión  $n$  de  $V_n$  es evidentemente igual a la suma de la dimensión  $m$  y  $p$  de  $W_m$  y  $W'_p$ . La intersección de  $W_m$  y  $W'_p$  se reduce a cero. Se dice que  $W'_p$  es el *complemento* de  $W_m$  en  $V_n$ .

## Subespacios Ortogonales

Si  $V_n$  tiene un producto Hermítico  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ , dos vectores  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  se dicen que son *mutuamente ortogonales* si

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0. \quad (1.31)$$

El conjunto de elementos de  $V_n$  el cual son ortogonales a todos los elementos de un subespacio  $W_1$  de  $V_n$  forma un subespacio  $W_2$  de  $V_n$ , llamado *subespacio ortogonal* a  $W_1$ , los subespacios  $W_1$  y  $W_2$  son complementarios y  $V_n$  es la suma directa  $W_1 \oplus W_2$ .

### 1.5.2. La Suma Directa de Dos Representaciones

Consideremos un grupo  $\mathbf{G}$  y un espacio vectorial  $V_n$  provee con un producto Hermítico  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ . Asumamos que el producto es invariante bajo  $\mathbf{G}$ , en otras palabras, para cualquier elemento  $G$  del grupo tenemos

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \Gamma(G)\mathbf{x}, \Gamma(G)\mathbf{y} \rangle \quad (1.32)$$

el cual es el caso de los operadores unitarios  $\Gamma(G)$ .

Sea  $W_1$  y  $W_2$  dos subespacios ortogonales de  $V_n$ , y respectivamente  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$  son vectores de esos subespacios. El producto hermítico entre los vectores es

$$\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = \langle \Gamma(G)\mathbf{x}_1, \Gamma(G)\mathbf{x}_2 \rangle = 0 \quad (1.33)$$

- *Teorema:* Sea  $\Gamma$  una representación unitaria de un grupo  $\mathbf{G}$ , sea el espacio de representaciones  $V_n$  con un producto hermítico, y sea  $W_1$  un subespacio vectorial de  $V_n$  que es estable bajo  $\mathbf{G}$ . Entonces existe un complemento,  $W_2$ , de  $W_1$  en  $V_n$  el cual es estable bajo  $\mathbf{G}$ .  $W_2$  es el subespacio ortogonal a  $W_1$ .

Sea  $\Gamma_1$  la representación definida sobre  $W_1$  y  $\Gamma_2$  la representación sobre  $W_2$ . También se puede formar una representación de  $\Gamma$  tomando el espacio

$$V_n = W_1 \oplus W_2, \quad (1.34)$$

como la espacio de representación. Se dice que *Gamma* es la *Suma Directa* de la representación  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  y se escribe

$$\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2. \quad (1.35)$$

### 1.5.3. Representación Irreducible

Si  $\Gamma$  es una representación lineal de un grupo  $\mathbf{G}$  el cual esta definida sobre un espacio vectorial  $V_n$ , se dice que es una *representación irreducible* si ningún subespacio vectorial de  $V_n$  es estable bajo  $\mathbf{G}$ . En el caso opuesto se llama *reducible*.

Si  $\Gamma$  es una representación irreducible, no puede representarse de la suma directa de dos

representaciones. Teorema: *Cualquier representación  $\Gamma$  es la suma directa de representaciones irreducibles.*

Una representación particular  $\Gamma_i$  puede aparecer varias veces en una representación reducible. Una descomposición puede ser obtenida en la forma

$$\Gamma = \eta_1 \Gamma_1 \oplus \eta_2 \Gamma_2 \oplus \cdots \oplus \eta_p \Gamma_p, \quad (1.36)$$

donde  $|\eta_i|^2 = 1$  para  $i = 1, \dots, p$ .

## 1.6. Grupos Continuos y Grupos de Lie

### 1.6.1. Grupos Continuos de $n$ Parámetros

- *Definición:* Los grupos continuos  $G$  de " $n$ " parámetros, son grupos infinitos donde los elementos  $g \in G$  dependen de un conjunto de  $n$  parámetros reales  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ , de los cuales al menos uno varía continuamente en un intervalo.

[4] [6] Los grupos compactos son aquellos donde los parámetros varían en un intervalo compacto (cerrado y acotado) de valores.

Algunos ejemplos de grupos continuos

1.  $GL(2)$ : Transformaciones lineales generales no singulares en  $n$  dimensiones. Este grupo es isomorfo a las matrices complejas de  $n \times n$  no singulares. El número de parámetros del grupo es  $N = 2n^2$ . Es un grupo no compacto.
2.  $U(n)$ : Transformaciones unitarias en  $n$  dimensiones. Isomorfo a las matrices Unitarias ( $A^{-1} = A^\dagger$ ) de  $n \times n$ . El número de parámetros del grupo es  $N = n^2$ . Es un grupo compacto.
3.  $SU(n)$ : Transformaciones unitarias especiales en  $n$  dimensiones. Isomorfo a las matrices unitarias de  $n \times n$  y singulares, es decir, con determinante igual a 1. El número de parámetros del grupo es  $N = n^2 - 1$ . Es un grupo compacto.
4.  $SL(n, C)$ : Transformaciones lineales especiales en  $n$  dimensiones. Isomorfo a las matrices de  $n \times n$  con determinante igual a 1. El número de parámetros del grupo es  $N = 2(n^2 - 1)$ . Es un grupo no compacto.
5.  $SO(n)$ : Transformaciones ortogonales especiales en  $n$  dimensiones. Isomorfo a las matrices reales ortogonales de  $n \times n$  con determinante 1. El número de parámetros del grupo es  $N = 2n(n - 1)/2$ . Es un grupo compacto. Las rotaciones en los planos  $(x, y)$ ,  $(y, z)$  y  $(z, x)$  que preservan  $x^2 + y^2 + z^2$  representan un grupo isomorfo a  $SO(3)$ .

6. *Grupo de Lorentz*  $SO(1,3)$ : Transformaciones que dejan invariante el intervalo  $s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ . Contiene cambios de sistema de referencia por

- Rotaciones en el espacio  $(x, y)$ ,  $(y, z)$  y  $(z, x)$ .
- Pseudorotaciones en los planos espacio-tiempo,  $(ct, x)$ ,  $(ct, y)$  y  $(ct, z)$ , ó "Boosl".

Tiene 6 parámetros. Es un grupo no compacto.

### 1.6.2. Grupos de Lie

- *Definición*: Un grupo continuo  $G$  de  $n$  parámetros  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  que varían en forma continua es llamado *Grupo de Lie* si cumple

$$\begin{aligned} g(\mathbf{a})g(\mathbf{b}) &= g(\mathbf{c}) \\ g^{-1}(\mathbf{a}) &= g(\mathbf{d}) \end{aligned} \quad g(\mathbf{a}) \in G, \quad (1.37)$$

donde  $\mathbf{c}$  puede expresarse como una función analítica de  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , y  $\mathbf{d}$  es una función analítica de  $\mathbf{a}$ .

En todo grupo de Lie existe una vecindad  $V \in G$  alrededor de la identidad  $I$  tal que

$$\begin{aligned} g_i \cdot g_j &= g_k \\ g_i^{-1} &= g_l \end{aligned} \quad \text{donde } g_i \in V \text{ y } i = 1, \dots, n. \quad (1.38)$$

Sea un elemento  $g$  de un grupo de Lie  $G$  cuya dependencia explícita de los  $n$  parámetros se denota como

$$g = g(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

donde el elemento identidad es el origen del espacio de los parámetros

$$I = g(0, 0, \dots, 0).$$

Al hacer un cambio infinitesimal  $\epsilon_j$  con respecto a uno de los parámetros, bajo un desarrollo de Taylor

$$g(0, \dots, \epsilon_j, \dots, 0) \approx I + \epsilon_j \left( \frac{\partial g}{\partial a_j} \right)_{a_j=0}$$

donde definimos el operador

$$J_j = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial g}{\partial a_j} \right)_{a_j=0} \quad (1.39)$$

entonces

$$g(0, \dots, \epsilon_j, \dots) \approx I + i\epsilon_j J_j. \quad (1.40)$$



Al hacer un cambio finito  $a_j = S\epsilon_j$ , el elemento  $g$  es el producto de los cambios infinitesimales  $S$  veces sucesivas

$$g(0, \dots, a_j, \dots) \approx (I + i\epsilon_j J_j)^S = \left( I + i \frac{a_j}{S} J_j \right)^S.$$

Tomando el límite cuando  $S$  tiende a  $\infty$

$$g(0, \dots, a_j, \dots) = \lim_{S \rightarrow \infty} \left( I + i \frac{a_j}{S} J_j \right)^S = e^{ia_j J_j}. \quad (1.41)$$

este es un resultado exacto. Este desarrollo aplicado sobre todos los parámetros, cualquier elemento del grupo puede representarse como

$$g(a_1, \dots, a_n) = e^{i \sum_j a_j J_j}. \quad (1.42)$$

A los operadores  $J_j$  se le llaman "Generadores del Grupo". Estos operadores no pertenecen al grupo y cumplen con los siguientes teoremas

- *Teorema:* Si la representación de un grupo es unitaria, los generadores vienen caracterizados por matrices hermiticas.
- *Teorema:* Si un operador lineal  $H$  definido en un espacio vectorial  $V$  es invariante frente a transformaciones en  $V$  que representan a un grupo  $G$ , entonces el operador  $H$  conmuta con todos los generadores del grupo.
- *Teorema:* El conmutador de dos generadores es una combinación lineal de los generadores.

$$[J_i, J_j] = J_i J_j - J_j J_i = \sum_k c_{ij}^k J_k \quad (1.43)$$

donde  $J_i$  es un generador de un grupo y  $c_{ij}^k$  son números complejos llamados constantes de estructura.

El conjunto de todas las combinaciones lineales de los generadores del grupo constituye un álgebra de Lie.

### 1.6.3. El álgebra de Lie

- *Definición:* Un álgebra de Lie es un espacio vectorial  $L$  de dimensión  $n$  obtenido de todas las combinaciones lineales de los generadores de un grupo, junto con una operación interna definida por el conmutador, el cual cumple con las siguientes propiedades.

#### 1. Bilinealidad

$$[aJ_i + bJ_j, J_k] = a[J_i, J_k] + b[J_j, J_k] \quad \forall J_i \in L \quad (1.44)$$

## 2. Identidad de Jacobi

$$[[J_i, J_j], J_k] + [[J_j, J_k], J_i] + [[J_k, J_i], J_j] = 0 \quad \forall J_i \in L \quad (1.45)$$

A cada grupo de Lie le corresponde un álgebra de Lie. Un subespacio vectorial de un álgebra de Lie que cumpla que el conmutador de dos operadores cualesquiera del subespacio, pertenece al mismo subespacio, forma un subálgebra, y se dice que cierra ante conmutación.

Si el álgebra de Lie de dimensión  $r$  de un grupo de dimensión  $r$  contiene un subálgebra de dimensión  $s$ , entonces con  $s$  generadores independientes contenidos en el subálgebra puede generarse un subgrupo del grupo original de orden  $s$ .

Si el álgebra de Lie de dimensión  $r$  de un subgrupo puede expresarse como la suma directa de dos subálgebras de dimensiones  $s$  y  $r - s$ , tales que los operadores de las dos subálgebras conmutan entre sí, entonces el grupo puede expresarse como el producto directo de los dos subgrupos de orden  $s$  y  $r - s$ , generados a partir de las subálgebras.

### Casimir

El Casimir de un grupo continuo es un operador que conmuta con todos los generadores de un grupo. Un grupo puede tener uno o varios Casimires independientes.

- **Teorema de Racah:** El número máximo de Casimires independientes es igual al rango del grupo.

El rango del grupo se define como el número máximo de generadores mutuamente conmutantes. También no es difícil demostrar que uno de los Casimires para un grupo semisimple siempre es de la forma:

$$C = \sum g_{ij} X_i X_j, \quad (1.46)$$

donde  $g_{ij}$  es el tensor métrico del espacio donde actúa los elementos del grupo como operadores lineales y  $X_i$  es un generador del grupo. Como  $g_{ij}$  es una matriz real y simétrica, puede llevarse a la forma diagonal por una transformación de similaridad, es decir un cambio de base, entonces en la base apropiada el Casimir es:

$$C = \sum_i g_i X_i^2. \quad (1.47)$$

En el caso especial del grupo  $SO(3)$ , el único Casimir es de la forma  $\sum L_i^2$  donde  $L_i$  representa los generadores del grupo  $SO(3)$ .

### Los Generadores en la Definición de un Espacio Irreducible en $SO(3)$

Una de la importancia de los generadores es la de definir una representación irreducible. Sea un grupo  $G$  con generadores  $X_i$  que actúa sobre un espacio vectorial  $V_n$  con vectores

base  $e_i$ , el espacio es irreducible si los vectores base son eigenvectores de unos de los generadores y los Casimires. Cuando se relacionan los generadores con los ejes coordenados se escoge al generador que se relaciona con el eje  $z$  para definir el espacio irreducible. Consideremos los generadores  $L_x$ ,  $L_y$  y  $L_z$  del grupo  $SO(3)$  donde el único Casimir del grupo es

$$L^2 = \sum L_i^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

Por la definición de un espacio irreducible, el Casimir y uno de los generadores actuando sobre los vectores base es proporcional al mismo vector base

$$L^2 e_i \propto e_i, \quad L_z e_i \propto e_i. \quad (1.48)$$

La forma de obtener los eigenvalores y los eigenvectores del Casimir se efectúa por el método estándar del álgebra lineal. El Polinomio característico para nuestro problema:

$$(L^2 - \lambda 1_4)e_i = 0. \quad (1.49)$$

Es común tener en la notación de los vectores base números relacionados con los eigenvalores asociados con el Casimir y el generador preferido, por lo que existen varias notaciones.

$$Y_{lm}, \quad |l m\rangle, \quad (1.50)$$

y los eigenvalores del Casimir y del generador  $L_z$

$$L^2 |l m\rangle = l(l+1) |l m\rangle, \quad L_z |l m\rangle = m |l m\rangle. \quad (1.51)$$

A  $l$  se le conoce como momento angular y a  $m$  se le conoce como proyección del momento angular. Nótese que  $L_z$  es el Casimir del subgrupo  $SO(2)$  de  $SO(3)$ .

#### 1.6.4. Aplicación en la Mecánica Cuántica

Una de las aplicaciones de la teoría de grupos es en la mecánica cuántica. [1] Si el hamiltoniano de un sistema es invariante frente a las transformaciones lineales que representan a un grupo  $G$ , entonces:

- El Hamiltoniano es un polinomio del Casimir del grupo.
- Los índices  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  que caracterizan las representaciones irreducibles de los grupos en la cadena de reducción

$$G_0/G_1/G_2/\dots/G_n$$

pueden utilizarse como buenos números cuánticos para etiquetar los autoestados del hamiltoniano.

- Todos los estados que generan representaciones irreducibles de  $G_0, G_1, \dots, G_n$  tienen el mismo índice  $\lambda$  de  $G$  y se llaman estados degenerados.

Los generadores de un grupo corresponden a operadores hermíticos y todos conmutan con el hamiltoniano por lo que representan observables. Uno de los generadores bajo una representación matricial pueden ser diagonalizables y, por lo tanto, sus eigenvalores proveen constantes de movimiento. Como los elemento de un grupo son exponenciales los autovalores (números cuánticos) de dichos generadores son aditivos.

## 1.7. Relación entre el Grupo de Rotación $SO(3)$ y el Grupo Unitario $SU(2)$

### 1.7.1. Centro de Grupo

El centro de un grupo es un conjunto de elementos los cuales conmutan con todos los miembros del grupo. Es igual a la intersección de los centralizadores del grupo. Si  $G$  es cualquier elemento del grupo y  $Z$  un elemento del centro del grupo, entonces debe de cumplir [4]

$$Z^{-1}GZ = Z^{-1}ZG = G. \quad (1.52)$$

El grupo Unitario Especial  $SU(2)$  tiene como su representación fundamental matrices de  $2 \times 2$  tal que todos los elementos del grupo son unitarios y tienen determinante igual a uno, es decir, si  $U \in SU(2)$  entonces  $U^\dagger = U^{-1}$  y  $\det |U| = 1$ . Todas la matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad \text{donde } |a|^2 + |b|^2 = 1, \quad (1.53)$$

son elementos del grupo  $SU(2)$ . El centro del grupo  $SU(2)$  está dado por

$$Z_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (1.54)$$

### 1.7.2. El Grupo Factor $SU(2)/Z_2$

Si  $G$  es un grupo,  $H$  es un subgrupo de  $G$  y  $g \in G$ , entonces

$$gH = \{gh : h \in G\} \quad \text{es un coset izquierdo de } H \text{ en } G. \quad (1.55)$$

$$Hg = \{hg : h \in G\} \quad \text{es un coset derecho de } H \text{ en } G. \quad (1.56)$$

▪ *Definición:* El conjunto de todos los coset derechos de  $N$  en  $G$  se denomina  $G/N$ .

Cuando el coset derecho es igual al coset izquierdo se puede formar un nuevo grupo llamado *Grupo Factor*.

El centro del grupo  $SU(2)$  está dado por la relación (1.54). El grupo factor  $SU(2)/Z_2$  es

$$SU(2)/Z_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

### 1.7.3. La Relación entre $SO(3)$ y $SU(2)$

Supongamos una rotación en el espacio vectorial de posición. Sea

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (1.58)$$

bajo una transformación de rotación

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R\mathbf{x} \quad (1.59)$$

donde  $R$  es la matriz de rotación de esta representación definido por los ángulos de *Euler*

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & \sin \beta \cos \gamma \\ -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma \\ -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}. \quad (1.60)$$

que representa al grupo  $SO(3)$  y cada ángulo consiste en las tres rotaciones sucesivas:

1. Una rotación de un ángulo  $\alpha$  con respecto al eje  $z$ ,
2. una rotación de un ángulo  $\beta$  con respecto al nuevo eje  $y$ ,
3. una rotación de un ángulo  $\gamma$  con respecto el eje  $z$  transformado.

Si al espacio vectorial de posición se mapéa sobre una matriz  $2 \times 2$ , el vector

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \quad (1.61)$$

es equivalente a  $\mathbf{x}$  pero la transformación de rotación se rige por

$$\mathbf{r}' = U \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} U^{-1} = U\mathbf{r}U^{-1}, \quad (1.62)$$

donde  $U$  es la matriz que cubre la rotación y es un elemento del grupo  $SU(2)$  que tiene la forma presentada por la ecuación (1.53). Los elementos de la matriz  $U$  están relacionados por los ángulos de Euler por

$$a = \cos \frac{\beta}{2} e^{i(\alpha+\gamma)/2}, \quad b = \sin \frac{\beta}{2} e^{i(\alpha-\gamma)/2}, \quad (1.63)$$

y se refieren como los parámetros de *Caley-Klein*.

Se puede ver que cada matriz unitaria del grupo  $SU(2)$  corresponde a una rotación única del grupo  $SO(3)$ , pero cada matriz de  $SO(3)$  corresponde a dos matrices de  $SU(2)$ , las cuales se diferencian por un signo.

Las dos rotaciones  $R(0, 0, 0)$  y  $R(0, 2\pi, 0)$  que denotan el elemento identidad de  $SO(3)$ , se mapéan sobre los dos elementos del centro del grupo  $SU(2)$  de la ecuación (1.54). En general, las operaciones  $R(\alpha, \beta, \gamma)$  y  $R(\alpha, \beta + 2\pi, \gamma)$ , los cuales representan el mismo elemento de  $SO(3)$  corresponden a dos matrices unitarias diferentes de  $SU(2)$ , uno de lo cual es el negativo del otro, y a su vez corresponde a un elemento del grupo factor  $SU(2)/Z_2$ . En otras palabras, hay un homomorfismo 2 a 1 del grupo  $SU(2)$  sobre  $SO(3)$ , y un isomorfismo entre el grupo factor  $SU(2)/Z_2$  y  $SO(3)$ .

$$SU(2)/Z_2 \cong SO(3). \quad (1.64)$$

La representación fundamental del grupo  $SU(2)$  tiene como generadores

$$J_x = \frac{\sigma_1}{2}, \quad J_y = \frac{\sigma_2}{2}, \quad J_z = \frac{\sigma_3}{2}, \quad (1.65)$$

donde  $\sigma_i$  son las matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.66)$$

Los generadores cumplen con el álgebra de Lie donde la operación de conmutación entre los generadores

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} iJ_k. \quad (1.67)$$

Nótese que rotaciones con respecto a los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  por un ángulo  $\pi$  se reducen respectivamente a  $i\sigma_1$ ,  $i\sigma_2$  y  $i\sigma_3$  de acuerdo a los parámetros de Caley-Klein descritas por las ecuaciones (1.63).

Bajo esta representación el Casimir es proporcional a la matriz unidad

$$J^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) 1_2, \quad (1.68)$$

donde  $1_2$  es la matriz identidad

$$1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y el generador que define el segundo número cuántico del espacio irreducible es  $J_z$ .

$$J^2 |1/2 \ m\rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) |1/2 \ m\rangle, \quad J_z |1/2 \ m\rangle = m |1/2 \ m\rangle, \quad m = \pm 1/2. \quad (1.69)$$

El grupo de las rotaciones  $SO(3)$  y el grupo factor  $SU(2)/Z_2$  son isomorfos, por lo tanto, los números asociados al Casimir y a  $J_z$  en  $SU(2)$  están asociados al Casimir y a  $L_z$  en

$SO(3)$ .

Las rotaciones sobre un plano es isomorfo al grupo  $SO(2)$ , el grupo  $SO(3)$  describe rotaciones en el espacio. Si consideramos el plano  $xy$ , el grupo de rotación sobre ese plano tiene como generador  $L_z$ , y considerando que rotaciones sobre un plano es mapeado sobre  $SO(2)$ , entonces  $L_z$  es el generador de  $SO(2)$  bajo esa representación. Por lo que se concluye que el valor  $m$  asociado a  $L_z$  se asocia con el grupo  $SO(2)$  y este a su vez representa un subgrupo de  $SO(3)$  al que le asociamos los valores  $l$  y  $m$  correspondientes al Casimir y a  $L_z$ , respectivamente.

$$\begin{aligned} m &\rightarrow SO(2) \\ l, m &\rightarrow SO(3) \end{aligned}$$

En general, si  $j$  es el número, al que se llamará espín, asociado a un Casimir  $J^2$  de una representación del grupo  $SU(n)$ , entonces, dependiendo de la representación,  $j$  puede ser  $j = N/2$  donde  $N$  es un número entero. En contraste con los grupos  $SU(n)$ , el espín  $l$  de una representación de un grupo  $SO(n)$  siempre es entero  $l = N$ , sin importar cual sea la representación.

FMMT825

## Capítulo 2

# Representación $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ del Grupo de Lorentz

### 2.1. El Grupo de Lorentz

#### 2.1.1. Postulados de la Relatividad Especial y las Transformadas de Lorentz

La teoría de la relatividad especial formulada por Albert Einstein en 1905 está basada en los siguientes postulados [7]

1. Las leyes de la física son idénticas en todos los sistemas de referencia inerciales.
2. La velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío es una constante independiente del sistema de referencia de la fuente.

El primer postulado de la relatividad es idéntica a la usada por Newton en la formulación de las leyes de la física clásica. El segundo postulado implica que la luz se propaga a una velocidad constante medido como

$$c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s.} \quad (2.1)$$

Supongamos un observador que se mueva a través del eje  $x$  a una velocidad  $v_x$  con respecto a un sistema de referencia al que llamaremos sistema del laboratorio y registra un evento que ocurra en una posición  $x'$  y a un tiempo  $t'$  con respecto a su sistema de referencia, mientras que el sistema de laboratorio registra el mismo evento en una posición  $x$  a un tiempo  $t$ , la relación entre los datos registrados en ambos sistemas es

$$ct' = \gamma_x(ct - \beta_x x), \quad x' = \gamma_x(x - \beta_x ct), \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (2.2)$$

donde

$$\gamma_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_x^2}}, \quad \beta_x = \frac{v_x}{c}. \quad (2.3)$$



Las ecuaciones (2.2) representan una transformación de Lorentz y pueden interpretarse como una pseudorotación en el plano  $(ct, x)$ .

En esta transformación la diferencia de cuadrados

$$s^2 = (ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = (ct')^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) \quad (2.4)$$

permanece invariante.

Bajo una notación de vectores y tensores covariantes y contravariantes, definimos

$$x_\mu \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3), \quad x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (2.5)$$

donde

$$x_0 = x^0 = ct, \quad x_1 = -x^1 = x, \quad x_2 = -x^2 = y, \quad x_3 = -x^3 = z. \quad (2.6)$$

Definimos el tensor métrico

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \equiv (1, -1, -1, -1), \quad (2.7)$$

tal que

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \quad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu. \quad (2.8)$$

Las ecuaciones (2.2) y (2.4) que describen la transformada, bajo la notación covariante se escribe como

$$x'^0 = \gamma_x(x^0 + \beta_x x^1), \quad x'^1 = \gamma_x(x^1 + \beta_x x^0), \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3, \quad (2.9)$$

$$s^2 = x^\mu x_\mu = x'^\mu x'_\mu \quad (2.10)$$

La transformada descrita por las ecuaciones (2.9) y (2.10) es una pseudorotación sobre el plano  $x^0 x^1$  por un ángulo  $\varphi_1$  y se le puede asociar las funciones trigonométricas hiperbólicas, de tal manera que

$$x'^0 = x^0 \cosh \varphi_1 + x^1 \sinh \varphi_1, \quad x'^1 = x^1 \cosh \varphi_1 + x^0 \sinh \varphi_1, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3, \quad (2.11)$$

donde

$$\sinh \varphi_1 = \gamma_x \frac{v_x}{c}, \quad \cosh \varphi_1 = \gamma_x, \quad \tanh \varphi_1 = \frac{v_x}{c}. \quad (2.12)$$

Las ecuaciones (2.11) pueden escribirse en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \varphi_1 & \sinh \varphi_1 & 0 & 0 \\ \sinh \varphi_1 & \cosh \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

La representación de la pseudorotación descrita de la ecuación (2.13) se puede representar como

$$B_1(\varphi_1) = \begin{pmatrix} \cosh \varphi_1 & \sinh \varphi_1 & 0 & 0 \\ \sinh \varphi_1 & \cosh \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{iK_1 \varphi_1}. \quad (2.14)$$

donde  $K_1$  es el generador alrededor del eje  $x^1$  de la representación matricial del grupo de transformadas de Lorentz:

$$K_1 = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial B_1}{\partial \varphi_1} \right)_{\varphi_1=0} = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

de manera similar podemos escribir los generadores de la transformadas de Lorentz alrededor de los ejes  $x^2$  y  $x^3$  como

$$K_2 = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial B_2}{\partial \varphi_2} \right)_{\varphi_2=0} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

$$K_3 = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial B_3}{\partial \varphi_3} \right)_{\varphi_3=0} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si consideramos las rotaciones espaciales, es decir, transformaciones del tipo

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ 0 & -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

cuya matriz de rotación con respecto al eje  $z$  es

$$R_3(\theta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ 0 & -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{iJ_3\theta_3}. \quad (2.18)$$

los generadores de las rotaciones espaciales son

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \frac{1}{i} \left( \frac{\partial R_1}{\partial \theta_1} \right)_{\theta_1=0} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 J_2 &= \frac{1}{i} \left( \frac{\partial R_2}{\partial \theta_2} \right)_{\theta_2=0} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 J_3 &= \frac{1}{i} \left( \frac{\partial R_3}{\partial \theta_3} \right)_{\theta_3=0} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Las rotaciones sobre los planos espaciales puros como las pseudorotaciones en los planos de espacio-tiempo, definidos en esta sección, definen al grupo  $SO(1,3)$ , y tienen como generadores a  $J_i$  y  $K_i$  donde  $i = 1, 2, 3$ . La representación de matrices de  $4 \times 4$  es la representación fundamental del grupo de Lorentz. El espacio en el que actúa el grupo de Lorentz se le conoce como el espacio de Minkowski.

El grupo de Lorentz propio es el grupo de rotaciones en los planos  $(xy)$ ,  $(yz)$  y  $(zx)$  que dejan invariante una esfera en el espacio ordinario y de transformaciones puras de Lorentz que son rotaciones pseudoeuclidianas en los planos  $(x ct)$ ,  $(y ct)$  y  $(z ct)$  que preservan hipérbolas en el espacio respectivo. El operador vectorial de transformación del grupo de Lorentz sin rotaciones espaciales lo llamaremos "*Boost*".

### 2.1.2. Relación entre el Grupo de Lorentz y el Grupo $SL(2, C)$

De manera semejante como el grupo de rotaciones tuvo un mapeo sobre los elementos del Grupo  $SU(2)$ , el grupo de transformaciones de Lorentz tiene un mapeo sobre los elementos del grupo  $SL(2, C)$ . El cuadrivector del espacio de Minkowski bajo la nueva representación es congruente con dos representaciones diferentes. El cuadrivector en su forma covariante en la representación de matrices es

$$X^\mu \cong \left\{ \begin{array}{l} X^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} = x_0 1_2 + \vec{x} \cdot \vec{\sigma} \\ X^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} = x_0 1_2 + \vec{x} \cdot \vec{\sigma}^* \end{array} \right\}. \tag{2.20}$$

y el cuadvivector contravariante es

$$x_\mu \cong \left\{ \begin{array}{l} X_{\alpha\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} x_0 - x_3 & -(x_1 + ix_2) \\ -(x_1 - ix_2) & x_0 + x_3 \end{pmatrix} = x_0 1_2 - \vec{x} \cdot \vec{\sigma}^* \\ X_{\dot{\alpha}\beta} = \begin{pmatrix} x_0 - x_3 & -(x_1 - ix_2) \\ -(x_1 + ix_2) & x_0 + x_3 \end{pmatrix} = x_0 1_2 - \vec{x} \cdot \vec{\sigma} \end{array} \right\}. \quad (2.21)$$

El tensor métrico que nos permite bajar y subir índices, se elige como

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

tal que

$$X_{\gamma\dot{\delta}} = \epsilon_{\gamma\alpha} X^{\alpha\dot{\beta}} (\epsilon_{\dot{\beta}\delta})^\dagger, \quad X^{\gamma\dot{\delta}} = \epsilon^{\gamma\alpha} X_{\alpha\dot{\beta}} (\epsilon^{\dot{\beta}\delta})^\dagger. \quad (2.23)$$

El invariante de Lorentz

$$s^2 = \frac{1}{2} X^{\alpha\dot{\beta}} X_{\dot{\alpha}\beta}. \quad (2.24)$$

Una transformación de Lorentz sobre el espacio de las coordenadas  $x_\mu$  se mapéa como una transformación de similaridad sobre  $X^{\alpha\dot{\beta}}$ . Si  $X$  es la matriz con componentes  $X^{\alpha\dot{\beta}}$  entonces

$$X' = UXU^\dagger, \quad (2.25)$$

donde  $U$  es la representación matricial del grupo de transformaciones de Lorentz.

Consideremos el caso de  $X_{\alpha\dot{\beta}}$ . El grupo de transformaciones de Lorentz consta de rotaciones y Boost. El grupo de rotaciones bajo esta representación se mapéa sobre el grupo  $SU(2)$  descrito en la sección 1.7, donde un elemento del grupo está representado por

$$R(\vec{\theta}) = e^{i\vec{J}\cdot\vec{\theta}} \quad (2.26)$$

donde  $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  son los parámetros de rotación, los generadores del grupo  $SU(2)$

$$\vec{J} = \left( J_1 \cong \frac{\sigma_1}{2}, J_2 \cong \frac{\sigma_2}{2}, J_3 \cong \frac{\sigma_3}{2} \right), \quad (2.27)$$

y  $\sigma_i$  son las matrices de Pauli. Se define  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{n=1}^3 A_n B_n$ .

Consideremos ahora el Boost. Un elemento del grupo que representa el Boost es

$$B(\vec{\varphi}) = e^{i\vec{K}\cdot\vec{\varphi}} \quad (2.28)$$

donde  $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  y los generadores del Boost bajo esta representación

$$\begin{array}{ll} \vec{K}_R = (K_1, K_2, K_3) & \text{para la representación } X^{\alpha\dot{\beta}} \\ \vec{K}_L = (-K_1, -K_2, -K_3) & \text{para la representación } X_{\dot{\alpha}\beta} \end{array} \quad (2.29)$$

y

$$K_1 \cong -i\sigma_1/2, \quad K_2 \cong -i\sigma_2/2, \quad K_3 \cong -i\sigma_3/2. \quad (2.30)$$

Bajo esta representación, el elemento del grupo de Lorentz  $U$ , tiene la forma

$$U(\vec{\theta}, \vec{\varphi}) = e^{i(\vec{J}\vec{\theta} + \vec{K}\vec{\varphi})}, \quad \det |U(\vec{\theta}, \vec{\varphi})| = 1 \quad (2.31)$$

que representa un elemento del grupo  $SL(2, C)$ .

Por lo tanto el grupo de Lorentz se mapea en el grupo  $SL(2, C)$ .

### 2.1.3. Espacios de Tipo $(j_R, j_L)$

Se puede hacer una combinación entre los generadores del grupo de Lorentz para construir otros seis generadores que están definidos como

$$\vec{J}_R = \frac{1}{2}(\vec{J} + i\vec{K}), \quad (2.32)$$

$$\vec{J}_L = \frac{1}{2}(\vec{J} - i\vec{K}), \quad (2.33)$$

los cuales cumplen con el álgebra de Lie

$$[J_L^j, J_L^k] = i\epsilon_l^{jk} J_L^l, \quad [J_R^j, J_R^k] = i\epsilon_l^{jk} J_R^l, \quad [J_L^j, J_R^k] = 0 \quad \text{para todo } j, k.$$

Cada conjunto de generadores  $\vec{J}_R$  y  $\vec{J}_L$  forma una representación del grupo  $SU(2)$  denotados por  $SU(2)_R$  y  $SU(2)_L$  respectivamente, y dichas representaciones conmutan entre si. El grupo de Lorentz se puede mapear localmente sobre el producto directo  $SU(2)_R \otimes SU(2)_L$  llamado capa compleja de  $SL(2, C)$  (Complex Shell), donde los estados se pueden etiquetar por  $(j_R, j_L)$ , que corresponde al valor característico del Casimir (espín) de los respectivos grupos  $SU(2)_R$  y  $SU(2)_L$ . Los subíndices  $R$  y  $L$  son llamados como espacios derecho e izquierdo.

Por ejemplo, para la representación fundamental las ecuaciones (2.32) y (2.33) toman la forma

$$\vec{J}_L = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{para la representación derecha} \\ \vec{\sigma}/2 & \text{para la representación izquierda} \end{array} \right\}, \quad (2.34)$$

$$\vec{J}_R = \left\{ \begin{array}{ll} \vec{\sigma}/2 & \text{para la representación derecha} \\ 0 & \text{para la representación izquierda} \end{array} \right\}, \quad (2.35)$$

y los valores representativos  $j_R$  y  $j_L$  son para cada representación

$$\begin{array}{ll} J_R \rightarrow j_R = 1/2, & j_L = 0, \\ J_L \rightarrow j_R = 0, & j_L = 1/2. \end{array}$$

Así, la representación derecha e izquierda se denotará en base a los valores de  $j_R$  y  $j_L$  y se define a la representación como

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad \text{representación derecha} \cong \phi_R(\vec{0}), \quad (2.36)$$

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) \quad \text{representación izquierda} \cong \phi_L(\vec{0}). \quad (2.37)$$

El término derecho ó izquierdo se refiere a que la representaciones  $X_R$  y  $X_L$  se relacionan bajo una reflexión espacial (Operación de Paridad), de tal manera que para el cambio de  $X_R \leftrightarrow X_L$  es necesario que  $x_0 \rightarrow x_0$  y  $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ , esta operación no cambia el signo de los generadores del grupo de rotación  $J_i \rightarrow J_i$  pero cambia de signo los generadores del Boost  $K_i \rightarrow -K_i$ . Esto es, las representaciones  $(j_R, 0)$  y  $(0, j_L)$  se intercambian bajo reflexión  $(j_R, 0) \leftrightarrow (0, j_L)$ , donde nombramos a una representación como Righthanded o derecha y por consiguiente a la otra como Lefthanded o izquierda. Si se desea considerar representaciones invariantes bajo reflexión, es necesario considerar la suma directa de ellas  $(j_R, 0) \oplus (0, j_L)$ .

En esta tesis se usará la suma de ambas representaciones  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  donde se considerarán partículas con espín  $1/2$  y es la base de la ecuación de Dirac.

### Los Operadores de Casimir del Grupo $SL(2, C)$

El grupo  $SL(2, C)$  tiene dos operadores de Casimir, debidos a la combinación de los generadores  $\vec{J}_{R/L}$ , de acuerdo a lo visto en la sección (1.6.3).

Los Casimires para el espacio  $(1/2, 0)$  se definen como

$$C_{R1} = \frac{1}{2} (J_R^2 + J_L^2) = J^2 - K^2. \quad (2.38)$$

$$C_{R2} = \frac{1}{2} (J_R^2 - J_L^2) = i\vec{J} \cdot \vec{K}. \quad (2.39)$$

La suma del cuadrado de los generadores cumplen con las relaciones

$$J^2 = \sum_{i=1}^3 J_i J_i = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1\right) 1_2. \quad (2.40)$$

$$K^2 = \sum_{i=1}^3 K_i K_i = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1\right) 1_2. \quad (2.41)$$

y el término

$$i\vec{K}_R = -i\vec{K}_L = \vec{J}. \quad (2.42)$$

entonces los Casimires para ambos espacios se definen como

$$C_1 = \frac{1}{2} (J_R^2 + J_L^2) = \frac{1}{2} (J^2 - K^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1\right) 1_2. \quad (2.43)$$

$$C_2 = \pm J^2 = \pm \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1\right) 1_2. \quad (2.44)$$

Con la obtención de los Casimires se completan todos los ingredientes necesarios para mapear el Grupo de Lorentz sobre el grupo  $SL(2, C)$ .

## 2.2. El Espacio de Minkowski Producido por Espinores

El espacio de Minkowski bajo la representación (1/2, 0) representado por las ecuaciones (2.20) y (2.21), también pueden ser representado como el producto matricial de tensores de segundo orden representados por matrices complejas de 2 elementos en forma de espinores, tal que

$$X^{\alpha\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{\dot{1}} & \xi^{\dot{2}} \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

$$X_{\alpha\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{\dot{1}} & \xi_{\dot{2}} \end{pmatrix},$$

donde  $\xi^1, \xi^2, \xi_1$  y  $\xi_2$  son números complejos y sus respectivos complejos conjugados  $\xi^{\dot{1}} = \xi^{1*}, \xi^{\dot{2}} = \xi^{2*}, \xi_1 = \xi_{1*}$  y  $\xi_2 = \xi_{2*}$ . Desarrollando el producto matricial

$$\begin{aligned} X^{1\dot{1}} &= \xi^1 \xi^{\dot{1}} = x_0 + x_3, \\ X^{2\dot{2}} &= \xi^2 \xi^{\dot{2}} = x_0 - x_3, \\ X^{1\dot{2}} &= \xi^1 \xi^{\dot{2}} = x_1 - ix_2, \\ X^{2\dot{1}} &= \xi^2 \xi^{\dot{1}} = x_1 + ix_2. \end{aligned} \quad (2.46)$$

y

$$\begin{aligned} X_{1\dot{1}} &= \xi_1 \xi_{\dot{1}} = x^0 + x^3, \\ X_{2\dot{2}} &= \xi_2 \xi_{\dot{2}} = x^0 - x^3, \\ X_{1\dot{2}} &= \xi_1 \xi_{\dot{2}} = x^1 + ix^2, \\ X_{2\dot{1}} &= \xi_2 \xi_{\dot{1}} = x^1 - ix^2. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Definimos a los espinores

$$\xi^\alpha \rightarrow \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}, \quad \xi_\alpha \rightarrow \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

donde la operación de bajar ó subir índices (ver ecuación (2.22)) fue definida como

$$\xi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \xi_\beta, \quad \xi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \xi^\beta. \quad (2.49)$$

Por lo tanto, los elementos de la representación matricial de un cuadvivector del grupo de Lorentz es

$$X_{\alpha\dot{\beta}} = \xi_\alpha \xi_{\dot{\beta}}, \quad X^{\alpha\dot{\beta}} = \xi^\alpha \xi^{\dot{\beta}}. \quad (2.50)$$

Una transformación de Lorentz es equivalente a transformaciones de los espinores

$$X' = \xi'(\xi')^\dagger = U_R(\xi(\xi)^\dagger)U_R^\dagger \quad (2.51)$$

donde

$$U_R = \exp(i\vec{\sigma} \cdot (\vec{\theta} - i\vec{\varphi})/2), \quad (2.52)$$

es la representación matricial de un elemento del grupo de Lorentz bajo la representación *derecha*. De la ecuación (2.51) se distingue la relación

$$\xi' = U_R \xi, \quad (2.53)$$

que representa una transformación de Lorentz en el espacio de los espinores.

Los espinores pueden descomponerse en vectores base, de tal manera que definimos para el sistema en reposo

$$\xi^\alpha = \xi^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \xi^1 \phi_R^{1/2}(\vec{0}) + \xi^2 \phi_R^{-1/2}(\vec{0}). \quad (2.54)$$

La base de los espinores en reposo de la ecuación (2.54)

$$\phi_R^{1/2}(\vec{0}) \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_R^{-1/2}(\vec{0}) \cong \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Base } (1/2, 0), \quad (2.55)$$

es la base de la representación fundamental del grupo  $SL(2, C)$ . Bajo una transformación de Lorentz, la base se transforma como

$$\phi_R^{1/2}(\vec{p}) = U_R \phi_R^{1/2}(\vec{0}), \quad \phi_R^{-1/2}(\vec{p}) = U_R \phi_R^{-1/2}(\vec{0}). \quad (2.56)$$

Esta nueva representación es una representación irreducible puesto que cumple con las relaciones

$$\mathbf{C}_1 \phi_R^s(0) = \frac{3}{4} \phi_R^s(0), \quad \mathbf{C}_2 \phi_R^s(0) = \frac{3}{4} \phi_R^s(0), \quad J_3 \phi_R^s(0) = s \phi_R^s(0), \quad (2.57)$$

donde  $s = \pm 1/2$  y  $\mathbf{C}_1$  y  $\mathbf{C}_2$  son los Casimires definidos en las ecuaciones (2.43) y (2.44). Este mismo razonamiento se puede aplicar a la representación  $(0, 1/2)$ . En la representación  $(0, 1/2)$  en lugar de utilizar los espinores  $\xi^\alpha$  se utilizan sus complejos conjugados  $\xi^{\dot{\alpha}}$ . La base en reposo de los espinores izquierdos son

$$\phi_L^{1/2}(\vec{0}) \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_L^{-1/2}(\vec{0}) \cong \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Base } (0, 1/2). \quad (2.58)$$

Y la base bajo una transformación de Lorentz es

$$\phi_L^{1/2}(\vec{p}) = U_L \phi_L^{1/2}(\vec{0}), \quad \phi_L^{-1/2}(\vec{p}) = U_L \phi_L^{-1/2}(\vec{0}), \quad (2.59)$$

donde

$$U_L = \exp(i\vec{\sigma} \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\varphi})/2). \quad (2.60)$$

representan la transformación de Lorentz en los respectivos espacios, y

$$\mathbf{C}_1 \phi_L^s(0) = \frac{3}{4} \phi_L^s(0), \quad \mathbf{C}_2 \phi_L^s(0) = -\frac{3}{4} \phi_L^s(0), \quad J_3 \phi_L^s(0) = s \phi_L^s(0), \quad (2.61)$$

es el equivalente a las ecuaciones (2.57) y nos indica que el espacio  $(0, 1/2)$  también es una representación irreducible.



## 2.3. Representación $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$

La suma directa  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  es otra representación del grupo de Lorentz. La base en reposo en la representación  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  es

$$u_s(\vec{0}) = \sqrt{M_D} \begin{pmatrix} \phi_R^s(\vec{0}) \\ \phi_L^s(\vec{0}) \end{pmatrix}, \quad v_s(\vec{0}) = \sqrt{M_D} \begin{pmatrix} \phi_R^s(\vec{0}) \\ -\phi_L^s(\vec{0}) \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

donde  $s = \pm 1/2$  y  $M_D$  es la masa de la partícula. La representación de la transformada de Lorentz es

$$\mathbf{U} = U_R \oplus U_L = \begin{pmatrix} U_R & 0 \\ 0 & U_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\vec{\sigma} \cdot (\vec{\theta} - i\vec{\phi})/2} & 0 \\ 0 & e^{i\vec{\sigma} \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\phi})/2} \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

donde los términos  $\theta$  y  $\varphi$  son respectivamente los coeficientes de rotación y Boost. Los generadores de esta representación son:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{i} \left( \frac{\partial U}{\partial \theta_1} \right)_{\theta_1=0} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}, \\ J_2 &= \frac{1}{i} \left( \frac{\partial U}{\partial \theta_2} \right)_{\theta_2=0} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \\ J_3 &= \frac{1}{i} \left( \frac{\partial U}{\partial \theta_3} \right)_{\theta_3=0} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.64)$$

para la rotación, y para el Boost

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{i} \left( \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} \right)_{\varphi_1=0} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}, \\ K_2 &= \frac{1}{i} \left( \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} \right)_{\varphi_2=0} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \\ K_3 &= \frac{1}{i} \left( \frac{\partial U}{\partial \varphi_3} \right)_{\varphi_3=0} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Los Casimires son

$$\frac{1}{2}(J^2 - K^2) = \frac{3}{4}1_4, \quad J^2 = \frac{3}{4}1_4. \quad (2.66)$$

La base cumple con las relaciones que define a la base de una representación irreducible.

$$J^2 u_s(\vec{0}) = \frac{3}{4} u_s(\vec{0}) \quad , \quad J^2 v_s(\vec{0}) = \frac{3}{4} v_s(\vec{0}), \quad (2.67)$$

$$\frac{1}{2}(J^2 - K^2) u_s(\vec{0}) = \frac{3}{4} u_s(\vec{0}) \quad , \quad \frac{1}{2}(J^2 - K^2) v_s(\vec{0}) = \frac{3}{4} v_s(\vec{0}), \quad (2.68)$$

$$J_3 u_s(\vec{0}) = s u_s(\vec{0}) \quad , \quad J_3 v_s(\vec{0}) = s v_s(\vec{0}), \quad (2.69)$$

Bajo una rotación y pseudorotación la base cambia como

$$u_s(\vec{\theta}, \vec{\varphi}) = \mathbf{U}u_s(\vec{0}), \quad v_s(\vec{\theta}, \vec{\varphi}) = \mathbf{U}v_s(\vec{0}). \quad (2.70)$$

Bajo esta representación, la rotación y el Boost tienen la forma

$$R = 1_4 \cos \frac{\theta}{2} + 2i\vec{J} \cdot \hat{n}_\theta \sin \frac{\theta}{2}, \quad (2.71)$$

$$B = 1_4 \cosh \frac{\varphi}{2} + 2i\vec{K} \cdot \hat{n}_\varphi \sinh \frac{\varphi}{2}, \quad (2.72)$$

donde

$$\varphi = \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}, \quad (2.73)$$

$$\theta = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}, \quad (2.74)$$

$$\hat{n}_\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)/\varphi \quad (2.75)$$

$$\hat{n}_\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)/\theta \quad (2.76)$$

representan el ángulo de rotación total ( $\theta$ ), el ángulo de boost total ( $\varphi$ ), y los cosenos directores ( $\hat{n}_\theta, \hat{n}_\varphi$ ) con los respectivos ejes.

## 2.4. Descripción de Partículas con Espín 1/2 y la Derivación Tradicional de la Ecuación de Dirac

El espacio descrito por los espinores de dos elementos, vistos en la sección (2.1.2), describen partículas con espín 1/2. Esa partícula se puede describir independientemente por (1/2, 0) y (0, 1/2) donde para pasar de un espacio a otro es necesario aplicar el operador de Paridad. Para describir la partícula sin necesidad de pensar en que espacio se está trabajando, se utiliza el espacio (1/2, 0)  $\oplus$  (0, 1/2) como en la ecuación (3.17).

La base del espacio (1/2, 0)  $\oplus$  (0, 1/2) está dado por  $u_s$  y  $v_s$  donde  $s = \pm 1/2$ . Definimos partícula si al aplicar el operador de Paridad un elemento de la base en el sistema de reposo y este se mantiene positivo y antipartícula en caso contrario. Bajo esta definición de tipo de partícula, en el espacio (1/2, 0)  $\oplus$  (0, 1/2), se encuentra que  $u_s$  describe a las partículas, mientras que  $v_s$  a las antipartículas.

En la sección (2.3) se encontró la representación (1/2, 0)  $\oplus$  (0, 1/2) del Grupo de Lorentz que incluye rotaciones y Boost. En adelante se considerará solo al Boost.

La ecuación de Dirac describe partículas con espín 1/2, la cual se considerará que tiene una masa  $M_D$ , una energía  $E \equiv p_0$  y un momento  $\vec{p}$ .

### 2.4.1. Ecuación de Dirac como Ecuaciones Acopladas de Espinores (1/2, 0) y (0, 1/2)

El álgebra espinorial no es tan popular en los libros de textos provistos para físicos nucleares y de partículas a excepción de teorías supersimétricas. En lugar de trabajar con  $SL(2, C)$  (para una teoría no local) es más común utilizar  $SU(2)_R \oplus SU(2)_L$  cuyos generadores son  $\vec{J}_{R/L} \pm i\vec{K}$ . Este grupo, es localmente isomorfo al grupo  $O(4)$  que no es precisamente el grupo de Lorentz, sino una forma Euclidiana. Sin embargo, las representaciones de tipo  $(j_R, 0) \oplus (0, j_L)$  son comunes de los grupos  $SL(2, C)$  y  $SU(2)_R \otimes SU(2)_L$ . En esta sección, se va a dar un resumen de la derivación de la ecuación de Dirac de varios libros populares como el Ryder [8] con el objetivo de tener una comparación con los métodos presentados en esta tesis.

Para describir partículas cargadas se usan espinores de la forma [8]

$$\Psi_D^h(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \phi_R^h(\vec{p}) \\ \phi_L^h(\vec{p}) \end{pmatrix}, \quad (2.77)$$

necesaria para la covarianza de paridad de la ecuación de Dirac. En la ecuación (2.77)  $\vec{p}$  es el momento de la partícula. Los componentes derechos  $\phi_R^h(\vec{p})$  se transforman como un espinor (1/2, 0) y los componentes izquierdos  $\phi_L^h(\vec{p})$  como un espinor (0, 1/2), donde la relación con los espinores en reposo y el Boost es

$$\phi_R^h(\vec{p}) = \exp\left(\frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi}\right) \phi_R^h(\vec{0}), \quad (2.78)$$

$$\phi_L^h(\vec{p}) = \exp\left(-\frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi}\right) \phi_L^h(\vec{0}), \quad (2.79)$$

donde  $\vec{\varphi}$  es el parámetro de rapidez y  $\vec{\sigma}$  son las matrices de Pauli definidas en las ecuaciones (1.66).

La matriz del Boost en el espacio  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  invariante bajo reflexión toma la forma

$$B_j = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma_j \phi_j\right) \oplus \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_j \phi_j\right). \quad (2.80)$$

Las ecuaciones (2.55) y (2.58) definieron los espinores en reposo tal que  $\phi_R^h(\vec{0}) = \phi_L^h(\vec{0})$ , pero para obtener completitud es necesario que [12]

$$\phi_R^h(\vec{0}) = \epsilon \phi_L^h(\vec{0}), \quad \text{donde } \epsilon = \pm 1 \quad (2.81)$$

<sup>3</sup>En la Notación de Ryder

$$\phi_L^h \cong (0, 1/2) \cong \zeta_h, \quad \phi_R^h \cong (1/2, 0) \cong \xi_h.$$

Según Ryder, para derivar la ecuación de Dirac primero se sustituye la ecuación (2.81) y se obtiene

$$\phi_R^h(\vec{p}) = \exp\left(\frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi}\right) \epsilon \phi_L^h(\vec{0}), \quad \epsilon \phi_L^h(\vec{p}) = \exp\left(-\frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi}\right) \phi_R^h(\vec{0}). \quad (2.82)$$

De las ecuaciones (2.78) y (2.79) se obtiene

$$\phi_{R/L}^h(\vec{0}) = \epsilon \exp\left(\mp \frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi}\right) \phi_{L/R}^h(\vec{p}). \quad (2.83)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.82) en (2.83)

$$\phi_R^h(\vec{p}) = \exp(\vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi}) \epsilon \phi_L^h(\vec{p}), \quad \epsilon \phi_L^h(\vec{p}) = \exp(-\vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi}) \phi_R^h(\vec{p}). \quad (2.84)$$

El exponencial de las ecuaciones (2.84) puede ser expandida en series de potencias y considerando las propiedades de las matrices de Pauli se obtiene

$$\exp(\pm \vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi}) = I_2 \cosh \varphi \pm \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sinh \varphi.$$

definición de  $\varphi$  está motivada por la condición de masa

$$M_D^2 = E^2 - p^2, \quad (2.85)$$

y la identidad

$$\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1$$

donde la siguiente parametrización puede ser hecha

$$\cosh \varphi = \frac{E}{M_D}, \quad \sinh \varphi = \frac{p}{M_D}, \quad \hat{n} = \frac{\vec{p}}{p}. \quad (2.86)$$

Entonces

$$\exp(\pm \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) = \frac{E I_2 \pm \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{M_D}. \quad (2.87)$$

Sustituyendo la ecuación (2.87) en (2.84), se obtienen las ecuaciones acopladas

$$(E I_2 + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \phi_L^h(\vec{p}) - \epsilon M_D \phi_R^h(\vec{p}) = 0, \quad (2.88)$$

$$(E I_2 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \phi_R^h(\vec{p}) - M_D \epsilon \phi_L^h(\vec{p}) = 0. \quad (2.89)$$

Uno puede acomodar las ecuaciones acopladas (2.88) y (2.89) dentro de una matriz como

$$\begin{pmatrix} -\epsilon M_D I_2 & E I_2 + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ E I_2 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -\epsilon M_D I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_R^h(\vec{p}) \\ \phi_L^h(\vec{p}) \end{pmatrix} = 0 \quad (2.90)$$

La ecuación (2.90) se puede leer como la ecuación de onda de Dirac del espacio de representación  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  como

$$(\gamma^\mu p_\mu \mp M_D 1_4) \Psi_D^h(\vec{p}) = 0, \quad (2.91)$$

donde se usa la notación

$$p_\mu = (E, \vec{p}), \quad (2.92)$$

y

$$\Psi_D^h(\vec{p}) = \sqrt{M_D} \begin{pmatrix} \phi_R^h(\vec{p}) \\ \phi_L^h(\vec{p}) \end{pmatrix}. \quad (2.93)$$

Obteniendo la determinante de la ecuación (2.91)

$$\det[\gamma^\mu p_\mu \mp M_D 1_4] = (p^2 + M_D^2 - E^2)^2, \quad (2.94)$$

Uno encuentra la dispersión correcta entre la energía y momento  $E^2 = p^2 + M_D^2$ . Si renombramos

$$\not{p} = \gamma^\mu p_\mu \quad (2.95)$$

entonces la ecuación 2.91 se puede reescribir como

$$(\not{p} \pm M_D) \Psi_D^h(\vec{p}) = 0 \quad (2.96)$$

En la siguiente sección se presentará a la ecuación de Dirac como una consecuencia de la condición de "completez" en el espacio  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ .

## 2.4.2. Obtención de las Ecuaciones de Dirac para $u_h$ y $v_h$ como Condición de "Completez" para Todos los Sistemas Inerciales

### Espinores de Dirac del Boost

Para obtener los espinores  $\Psi_D^h$  de la ecuación (2.77) se empiezan con los espinores  $\phi_{R/L}$  en el sistema de reposo [9] [10] [11]

$$\phi_{R/L}^{\frac{1}{2}}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.97)$$

$$\phi_{R/L}^{-\frac{1}{2}}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.98)$$

donde  $R$  y  $L$  nos indican el espacio derecho ó izquierdo y el superíndice se refieren a la proyección del espín sobre el eje  $z$ .

Entonces los espinores de Dirac  $\Psi_D^h$

$$u_{1/2}(\vec{p}) = B(\vec{p})\sqrt{M_D} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{-1/2}(\vec{p}) = B(\vec{p})\sqrt{M_D} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.99)$$

y

$$v_{1/2}(\vec{p}) = B(\vec{p})\sqrt{M_D} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{-1/2}(\vec{p}) = B(\vec{p})\sqrt{M_D} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (2.100)$$

donde el Boost es el obtenido en la ecuación (2.72) que se puede reescribir en términos de las matrices de Dirac

$$B(\vec{p}) = \cosh \frac{\varphi}{2} + \hat{n} \cdot \vec{\gamma} \gamma^0 \sinh \frac{\varphi}{2}, \quad (2.101)$$

donde podemos considerar las relaciones

$$\cosh \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}, \quad \sinh \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}, \quad \gamma = \frac{E}{M_D}, \quad (2.102)$$

por lo tanto el Boost es

$$B(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} E_+ & p_- & 0 & 0 \\ p_+ & E_- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_- & -p_- \\ 0 & 0 & -p_+ & E_+ \end{pmatrix}, \quad (2.103)$$

donde

$$N = \frac{1}{\sqrt{2M_D(E+M_D)}}, \quad E_{\pm} = E + M_D \pm p_3, \quad p_{\pm} = p_1 \pm ip_2. \quad (2.104)$$

Y los espinores de Dirac toman la forma

$$u_{1/2}(\vec{p}) = N\sqrt{M_D} \begin{pmatrix} E_+ \\ p_+ \\ E_- \\ -p_+ \end{pmatrix}, \quad u_{-1/2}(\vec{p}) = N\sqrt{M_D} \begin{pmatrix} p_- \\ E_- \\ -p_- \\ E_+ \end{pmatrix}, \quad (2.105)$$

y para antipartículas

$$v_{1/2}(\vec{p}) = N\sqrt{M_D} \begin{pmatrix} E_+ \\ p_+ \\ -E_- \\ p_+ \end{pmatrix}, \quad v_{-1/2}(\vec{p}) = N\sqrt{M_D} \begin{pmatrix} p_- \\ E_- \\ p_- \\ -E_+ \end{pmatrix}, \quad (2.106)$$

### Propiedades de los Espinores $u_h(\vec{p})$ y $v_h(\vec{p})$

Los espinores  $u_h(\vec{p})$  y  $v_h(\vec{p})$  en cualquier marco de referencia son eigenestados de  $J^2$  puesto que satisfacen las relaciones

$$J^2 \Psi_D^h(\vec{p}) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \Psi_D^h(\vec{p}), \quad (2.107)$$

para

$$\Psi_D^h(\vec{p}) = u_h(\vec{p}), v_h(\vec{p}) \quad \text{donde } h = \pm 1. \quad (2.108)$$

Sin embargo,  $\Psi_D^h(\vec{p})$  no son eigenestados de  $J_3$ , a menos que consideremos el caso especial de la base de helicidad donde  $p_1 = p_2 = 0$ <sup>2</sup>, entonces

$$J_3 \Psi_D(\vec{p}) \begin{cases} +\frac{1}{2} \Psi_D^h(\vec{p}) & \text{para } \Psi_D^h(\vec{p}) = u_{1/2}(\vec{p}), v_{1/2}(\vec{p}) \\ -\frac{1}{2} \Psi_D^h(\vec{p}) & \text{para } \Psi_D^h(\vec{p}) = u_{-1/2}(\vec{p}), v_{-1/2}(\vec{p}) \end{cases} \quad (2.109)$$

Recordemos que el operador de paridad actúa sobre los espinores de Dirac como

$$P \Psi_D^h(-\vec{p}) = \gamma^0 \Psi_D^h(-\vec{p}) = \begin{cases} +\Psi_D^h(\vec{p}) & \text{para } \Psi_D^h(\vec{p}) = u_h \\ -\Psi_D^h(\vec{p}) & \text{para } \Psi_D^h(\vec{p}) = v_h \end{cases} \quad h = \pm \frac{1}{2}. \quad (2.110)$$

Es fácil verificar que los espinores  $u$  y  $v$  son ortonormales ante la paridad

$$\bar{\Psi}_D^h(\vec{p}) \Psi_D^h(\vec{p}) = \begin{cases} 2M_D & \text{para } \Psi_D^h(\vec{p}) = u_h(\vec{p}) \\ -2M_D & \text{para } \Psi_D^h(\vec{p}) = v_h(\vec{p}) \end{cases} \quad h = \pm \frac{1}{2}. \quad (2.111)$$

donde definimos

$$\bar{\Psi}_D^h(\vec{p}) = (\Psi_D^h(\vec{p}))^\dagger \gamma^0. \quad (2.112)$$

Para la relación de completos se lee como

$$\sum_h (u_h(\vec{p}) \bar{u}_h(\vec{p}) - v_h(\vec{p}) \bar{v}_h(\vec{p})) = I_4 \quad (2.113)$$

La ecuación (2.110) muestra que  $\Psi_D^h(\vec{p})$  tiene paridad intrínseca definida, así que podemos construir proyectores sobre subespacios de paridades relativamente intrínsecas,  $\pi_+$  para los espinores  $u_h(\vec{p})$  y  $\pi_-$  para los espinores  $v_h(\vec{p})$ .

El proyector  $\pi_+$  está definido como

$$\pi_+ = \sum_h u_h(\vec{p}) \bar{u}_h(\vec{p}) = \frac{1}{2M_D} \begin{pmatrix} M_D & 0 & E + p_3 & p_- \\ 0 & M_D & p_+ & E - p_3 \\ E - p_3 & -p_- & M_D & 0 \\ -p_+ & E + p_3 & 0 & M_D \end{pmatrix}. \quad (2.114)$$

<sup>2</sup>Bajo la condición  $p_1 = p_2 = 0$  la proyección del espín y la helicidad de la partícula tienen el mismo signo.

mientras que el proyector  $\pi_-$  es

$$\begin{aligned}\pi_- &= -\sum_h v_h(\vec{p})\bar{v}_h(\vec{p}) \\ &= \frac{1}{2M_D} \begin{pmatrix} M_D & 0 & -(E+p_3) & -p_- \\ 0 & M_D & -p_+ & -(E-p_3) \\ -(E-p_3) & p_- & M_D & 0 \\ p_+ & -(E+p_3) & 0 & M_D \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (2.115)$$

Es fácil ver que  $\pi_+$  y  $\pi_-$  son proyectores y cumplen con las relaciones estándares

$$\pi_+ \Psi_D^h(\vec{p}) = \begin{cases} \Psi_D^h(\vec{p}) & \text{para } \Psi_D^h(\vec{p}) = u_h \\ 0 & \text{para } \Psi_D^h(\vec{p}) = v_h \end{cases} \quad h = \pm \frac{1}{2}, \quad (2.116)$$

$$\pi_- \Psi_D^h(\vec{p}) = \begin{cases} 0 & \text{para } \Psi_D^h(\vec{p}) = u_h \\ \Psi_D^h(\vec{p}) & \text{para } \Psi_D^h(\vec{p}) = v_h \end{cases} \quad h = \pm \frac{1}{2}. \quad (2.117)$$

$$\pi_+^2 = \pi_+, \quad (2.118)$$

$$\pi_-^2 = \pi_-, \quad (2.119)$$

$$\pi_+ + \pi_- = 1_4. \quad (2.120)$$

La ecuación de onda para los espinores  $u$  y  $v$  se puede obtener de la condición de completéz. Denotando la diferencia entre  $\pi_+$  y  $\pi_-$  como

$$\pi_+ - \pi_- = D, \quad (2.121)$$

donde se puede demostrar directamente las identidades

$$(D - 1_4)u_h(\vec{p}) = 0, \quad (2.122)$$

$$(D + 1_4)v_h(\vec{p}) = 0. \quad (2.123)$$

La forma que tiene  $D$  es

$$\begin{aligned}D &= \pi_+ - \pi_- \\ &= \frac{1}{M_D} \begin{pmatrix} 0 & 0 & E+p_3 & -p_- \\ 0 & 0 & -p_+ & E-p_3 \\ -(E-p_3) & p_- & 0 & 0 \\ p_+ & -(E+p_3) & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{M_D} \gamma^\mu \hat{p}_\mu \equiv \frac{1}{M_D} \hat{p},\end{aligned}\quad (2.124)$$



donde las matrices  $\gamma^\mu$  son las matrices de Dirac.  
 Por lo tanto las ecuaciones de onda serán

$$(\not{p} - \epsilon M_D)\Psi_D^h(\vec{p}) = 0 \quad (2.125)$$

donde

$$\epsilon = \begin{cases} +1 & \text{para } \Psi_D^h(\vec{p}) = u_h(\vec{p}) \\ -1 & \text{para } \Psi_D^h(\vec{p}) = v_h(\vec{p}) \end{cases} \quad h = \pm \frac{1}{2}. \quad (2.126)$$

Las ecuaciones (2.96) y (2.125) son iguales, pero fueron construidos por diferentes caminos. La diferencia es que la ecuación (2.125) se obtuvo utilizando el método de los proyectores construidos por los espinores y la completez en  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  mientras que la derivación del Ryder se refiere al acoplamiento de  $\phi_R^h(\vec{p})$  y  $\phi_L^h(\vec{p})$  por el término de masa. Ninguno de los dos métodos ofrece un principio específico fundamental que se podría utilizar por otras simetrías discretas. En el siguiente capítulo se ofrece un principio que se puede utilizar para otras simetrías discretas. En ella se obtendrá la ecuación de Dirac directamente de la exigencia de que los espinores sean eigenestados de la Paridad.

## Capítulo 3

# Las Matrices $\gamma^\mu$ como Operadores de las Simetrías Discretas $C$ , $P$ y $T$ de Espacio Tiempo

### 3.1. Inversión del Espacio ( $P$ )

El operador de Inversión del Espacio representa una reflexión sobre el espacio, de tal manera que el cuadrivector  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  bajo esta operación de simetría cambia como  $(x_0, -x_1, -x_2, -x_3)$ .

En la representación de espinores, la representación derecha e izquierda bajo esta operación de simetría cambia como

$$PX^{\alpha\beta} = P(x_0 1_2 + \vec{x} \cdot \vec{\sigma}) = x_0 1_2 - \vec{x} \cdot \vec{\sigma}. \quad (3.1)$$

En base a las ecuaciones (2.20), (2.21), (2.46) y (2.47) utilizamos

$$\xi^1 \xi^{\dot{1}} = x_0 + x_3, \quad (3.2)$$

$$\xi^2 \xi^{\dot{2}} = x_0 - x_3, \quad (3.3)$$

$$\xi^1 \xi^{\dot{2}} = x_1 - ix_2, \quad (3.4)$$

$$\xi^2 \xi^{\dot{1}} = x_1 + ix_2, \quad (3.5)$$

y los espinores  $\xi_a$  y  $\xi_{\dot{a}}$

$$\xi_1 \xi_{\dot{1}} = x^0 + x^3 = x_0 - x_3, \quad (3.6)$$

$$\xi_2 \xi_{\dot{2}} = x^0 - x^3 = x_0 + x_3, \quad (3.7)$$

$$\xi_1 \xi_{\dot{2}} = x^1 + ix^2 = -(x^1 + ix^2), \quad (3.8)$$

$$\xi_2 \xi_{\dot{1}} = x^1 - ix^2 = -(x^1 - ix^2). \quad (3.9)$$

La actuación de  $P$  sobre  $x_\mu$  resulta en

$$P(\xi^1 \xi^1) = P(x_0 + x_3) = x_0 - x_3 = \xi_1 \xi_1, \quad (3.10)$$

$$P(\xi^2 \xi^2) = P(x_0 - x_3) = x_0 + x_3 = \xi_2 \xi_2, \quad (3.11)$$

$$P(\xi_1 \xi_2) = P(-(x_1 + ix_2)) = x_1 + ix_2 = \xi^2 \xi^1, \quad (3.12)$$

$$P(\xi_2 \xi_1) = P(-(x_1 - ix_2)) = x_1 - ix_2 = \xi^1 \xi^2. \quad (3.13)$$

Entonces, bajo la operación de Inversión del Espacio, los elementos de los espinores cambian como <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} P\xi^1 &= \xi_1, \\ P\xi^2 &= \xi_2, \\ P\xi_1 &= \xi^1, \\ P\xi_2 &= \xi^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

En la representación  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ , si aplicamos la operación de paridad sobre un espinor, este se transforma como

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

donde la matriz

$$P \cong \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

es la representación matricial de la Operación de Simetría de Inversión del Espacio. Entonces, la invariancia bajo la inversión del espacio requiere el doble de número de grados de libertad necesarios para describir partículas con espín  $1/2$ . En general el co-espinor es diferente del espinor, es decir

$$\xi \text{ y } \dot{\eta} \quad \longrightarrow \quad \xi \oplus \dot{\eta}. \quad (3.17)$$

El Operador de Inversión del Espacio  $P$  cambia la helicidad de una partícula

$$P \left( \begin{array}{c} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ E \end{array} \right) \longrightarrow \frac{\vec{\sigma} \cdot (-\vec{p})}{E}. \quad (3.18)$$

<sup>1</sup>En general, al aplicar el operador  $P$  a las representaciones  $(0, 1/2)$  y  $(1/2, 0)$ , aparece una fase entre las representaciones, es decir

$$P\xi^{\dot{\alpha}} = e^{i\phi_P} \xi_{\dot{\alpha}} \quad \text{y} \quad P\xi_{\dot{\alpha}} = e^{-i\phi_P} \xi^{\dot{\alpha}}$$

donde  $\phi_P$  es la fase debido a  $P$ . Debido a que la representación  $(0, 1/2)$  y  $(1/2, 0)$  es la que cambia por el operador  $P$  y la fase solo indica que es otro elemento de la representación correspondiente, se considerará  $\phi_P = 0$ .

La helicidad se refiere a la correspondencia entre la dirección de movimiento de la partícula y el sentido de giro de la misma. Si la partícula tiene un sentido de giro en dirección del movimiento de la misma, entonces se dice que la partícula tiene una helicidad positiva ó  $h=+1$ , en caso contrario la partícula tiene una helicidad negativa ó  $h=-1$ . Cuando se le aplica la inversión del espacio a un sistema y este, salvo una rotación, permanece idéntico al sistema inicial se dice que el sistema tiene Paridad. Si no es necesario una rotación el sistema tiene Paridad positiva, pero si se necesita una rotación de  $180^\circ$  (en el plano) entonces el sistema tiene Paridad negativa, por lo que al operador  $P$  también se le conoce como Operador de Paridad.

### 3.2. Retorno del Tiempo ( $T$ )

Un procedimiento muy semejante al caso de  $P$  se puede realizar para obtener la representación de  $T$  en el espacio  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ .

$$TX^{\alpha\beta} = T(x_0\mathbb{1}_2 + \vec{x} \cdot \vec{\sigma}) = -x_0\mathbb{1}_2 + \vec{x} \cdot \vec{\sigma}. \quad (3.19)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.46) y (2.47) en (3.19)

$$T\xi^1\xi^1 = T(x_0 + x_3) = -x_0 + x_3 = -(\xi_1\xi_1). \quad (3.20)$$

$$T\xi^2\xi^2 = T(x_0 - x_3) = -x_0 - x_3 = -(\xi_2\xi_2), \quad (3.21)$$

$$(3.22)$$

y por lo tanto

$$T\xi^1 = \xi_1, \quad (3.23)$$

$$T\xi^1 = -\xi_1, \quad (3.24)$$

$$T\xi^2 = \xi_2, \quad (3.25)$$

$$T\xi^2 = -\xi_2. \quad (3.26)$$

Sustituyendo

$$\xi^1 = -\xi_2, \quad \xi_1 = \xi^2, \quad (3.27)$$

$$\xi^2 = \xi_1 \quad \xi_2 = -\xi^1, \quad (3.28)$$

en Ec. (3.24) y (3.26), respectivamente, se obtiene

$$T\xi_2 = \xi^2, \quad (3.29)$$

$$T\xi_1 = \xi^1. \quad (3.30)$$

Por lo tanto el operador  $T$  aplicado sobre  $\xi^\alpha$  y  $\xi^\alpha$  es

$$T\xi^\alpha \cong (-i(\sigma_2)_{\alpha\beta}\xi^\beta)^* = (\sigma_1\sigma_3)_{\alpha\beta}K\xi^\beta, \quad (3.31)$$

$$T\xi_{\dot{\alpha}} \cong (-i(\sigma_2)_{\alpha\beta}\xi_{\dot{\beta}})^* = (\sigma_1\sigma_3)_{\alpha\beta}K\xi_{\dot{\beta}}, \quad (3.32)$$

donde  $K$  representa la conjugación compleja  $K = \square^*$ .

Entonces para la representación  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ , el operador  $T$  cambia a los espinores como

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}^*, \quad (3.33)$$

entonces el operador  $T$  es de la forma

$$T \cong -\gamma^1\gamma^3K \quad (3.34)$$

donde

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

En esta caso, el operador  $T$  aplicado sobre cualquier representación, ya sea  $(1/2, 0)$  ó  $(0, 1/2)$  da como resultado otro elemento de la misma representación, es decir<sup>2</sup>

$$\xi^\alpha \xrightarrow{T} \xi_{\dot{\alpha}} \quad , \quad \xi_{\dot{\alpha}} \xrightarrow{T} \xi^\alpha.$$

Para el caso del operador de Inversión del Tiempo se refiere a que si un proceso ocurre entonces es posible el proceso inverso al tiempo. En otras palabras, si hay un proceso en el se tiene un sistema inicial A y como resultado se obtiene un sistema B, entonces existe el proceso en el que el sistema inicial es B y como resultado se obtiene el sistema A. Como por ejemplo considere el proceso

$$d + \nu_e \leftrightarrow e^- + u \quad , \quad e^- + u \leftrightarrow d + \nu_e,$$

donde  $\nu_e$  es el neutrino del electrón,  $e$  es el electrón y  $u$  y  $d$  son los quarks arriba y abajo respectivamente. Ambos procesos, tanto hacia la derecha como hacia la izquierda, son posibles.

<sup>2</sup>En la simetría  $T$  también hay una fase  $\phi_T$  y como el caso de  $P$  genera otro espinor de la misma representación. Por simplicidad se considera una fase real.

### 3.3. Reflexión Total (CPT)

Al realizar la reflexión total, al que llamaremos  $\mathcal{R}_T$ , sobre la representación  $(1/2, 0)$  el cuadrivector cambia como

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_T x^\mu &= -x^\mu \\ \mathcal{R}_T X^{\alpha\beta} &= \mathcal{R}_T(x_0 1_2 + \vec{x} \cdot \vec{\sigma}) = -(x_0 1_2 + \vec{x} \cdot \vec{\sigma}).\end{aligned}\quad (3.37)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.46) y (2.47) en (3.37) obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_T \xi^1 \xi^1 &= -(\xi^1 \xi^1), \\ \mathcal{R}_T \xi^2 \xi^2 &= -(\xi^2 \xi^2), \\ \mathcal{R}_T \xi^1 \xi^2 &= -(\xi^1 \xi^2), \\ \mathcal{R}_T \xi^2 \xi^1 &= -(\xi^1 \xi^2).\end{aligned}\quad (3.38)$$

Por lo tanto

$$\mathcal{R}_T \xi^1 = -\xi^1, \quad (3.39)$$

$$\mathcal{R}_T \xi^2 = -\xi^2, \quad (3.40)$$

$$\mathcal{R}_T \xi^1 = \xi^1, \quad (3.41)$$

$$\mathcal{R}_T \xi^2 = \xi^2, \quad (3.42)$$

Bajando los índices de  $\xi^\alpha$  como  $\xi^1 = -\xi_2$ ,  $\xi^2 = \xi_1$ , permite de obtener en lugar de (3.41) y (3.42)

$$\mathcal{R}_T \xi_i = \xi_i, \quad \mathcal{R}_T \xi_2 = \xi_2, \quad (3.43)$$

o escrito de otra manera

$$\mathcal{R}_T \xi^\alpha \cong \xi^\alpha, \quad (3.44)$$

$$\mathcal{R}_T \xi_\alpha \cong -\xi_\alpha. \quad (3.45)$$

Entonces para la representación  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ , el operador  $\mathcal{R}_T$  cambia a los espinores como

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{R}_T} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ -\xi_1 \\ -\xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.46)$$

por lo tanto, el operador  $\mathcal{R}_T$  es de la forma

$$\mathcal{R}_T \cong \gamma^5 \quad (3.47)$$

donde  $h = \pm 1/2$ . Entonces

$$\frac{1}{2}(1_4 + \gamma^0)u_h(\vec{0}) = u_h(\vec{0}), \quad (3.59)$$

$$\frac{1}{2}(1_4 - \gamma^0)v_h(\vec{0}) = v_h(\vec{0}), \quad (3.60)$$

donde  $\frac{1}{2}(1_4 + \gamma^0)$  y  $\frac{1}{2}(1_4 - \gamma^0)$  son los proyectores sobre paridades positivas y negativas respectivamente.

Trabajemos con los espinores  $u_h$ . A la ecuación (3.59) se le aplica el Boost

$$\frac{1}{2}B(\vec{p})(\gamma^0 + 1_4)u_h(\vec{0}) = B(\vec{p})u_h(\vec{0})$$

$$\frac{1}{2}B(\vec{p})(\gamma^0 + 1_4)B^{-1}(\vec{p})u_h(\vec{p}) = u_h(\vec{p}). \quad (3.61)$$

El Boost de la ecuación (2.103) se puede escribir como

$$B(\vec{p}) = N(\not{p} + M_D\gamma^0)\gamma^0, \quad (3.62)$$

y su inverso

$$B^{-1}(\vec{p}) = N\gamma^0(\not{p} + M_D\gamma^0), \quad (3.63)$$

donde  $N = 1/\sqrt{2M_D(E + M_D)}$ . Entonces de la ecuación (3.61) tomamos el término de la izquierda y considerando que  $\gamma^{02} = 1_4$

$$\begin{aligned} B(\vec{p})(\gamma^0 + 1_4)B^{-1}(\vec{p}) &= N^2(\not{p} + M_D\gamma^0)\gamma^0(\gamma^0 + 1_4)\gamma^0(\not{p} + M_D\gamma^0) \\ &= N^2(\not{p}^2 + M_D\not{p}\gamma^0 + \not{p}\gamma^0\not{p} + M_D\not{p} + M_D^2 \\ &\quad + M_D\gamma^0\not{p} + M_D^2\gamma^0 + M_D\not{p}). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Utilizando las reglas de conmutatividad y anticonmutatividad, se encuentra que

$$\not{p}^2 = p_\mu p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = E^2 - p^2 = M_D^2,$$

$$\not{p}\gamma^0 = 2E - \gamma^0\not{p}.$$

Sustituyendo en (3.64)

$$B(\vec{p})(\gamma^0 + 1_4)B^{-1}(\vec{p}) = \frac{\not{p} + M_D}{M_D}. \quad (3.65)$$

Entonces la ecuación (3.65) se sustituye en la ecuación (3.61) y se obtienen la ecuación de Dirac

$$\frac{\not{p} + M_D}{2M_D}u_\zeta(\vec{p}) = u_\zeta(\vec{p}), \quad (3.66)$$

o bien

$$(\not{p} - M_D)u_h = 0. \quad (3.67)$$

De la misma manera se hace para los espinores  $v$ , y se obtiene

$$(\not{p} + M_D)v_h = 0, \quad (3.68)$$

donde  $h = \pm 1/2$ . Las dos últimas ecuaciones son idénticas a la ecuación (2.125). De aquí se obtiene un resultado importante, los proyectores sobre paridad son idénticos a los proyectores construidos por medio de los espinores de Dirac. En otras palabras

$$B(\vec{p}) \sum_h u_h(\vec{0}) \bar{u}_h(\vec{0}) B(\vec{p})^{-1} = B(\vec{p}) \frac{1}{2} (1_4 + \gamma^0) B(\vec{p})^{-1}, \quad (3.69)$$

$$-B(\vec{p}) \sum_h v_h(\vec{0}) \bar{v}_h(\vec{0}) B(\vec{p})^{-1} = B(\vec{p}) \frac{1}{2} (1_4 - \gamma^0) B(\vec{p})^{-1}. \quad (3.70)$$

Los proyectores construidos de los espinores equivalen a los proyectores de la simetría discreta  $P$ , del espacio-tiempo, y ambos tipos de proyectores son consistentes entre sí.

Esta construcción nos da idea de que se puede construir la ecuación para espinores con paridad  $C$  empleando el proyector  $\frac{1}{2}(1_4 \pm i\gamma^2 K)$ .

Comparando con el método de los libros de texto, donde se utiliza el hecho de conocer de antemano los espinores  $u$  y  $v$  en el sistema de reposo, en el método desarrollado en esta tesis la ecuación de Dirac resulta ser una condición invariante de Paridad en todo sistemas de referencia. Nuestro método revela la propiedad del Espacio-Tiempo como el origen de la partícula de Dirac.

Los cuatro espinores  $u_h(\vec{p})$  y  $v_h(\vec{p})$  constituyen un conjunto completo de grados de libertad invariantes a la Paridad espacial en  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ . Entonces, uno puede ver la discretización de la paridad  $P$  del espacio-tiempo como el origen de partículas de Dirac. Note que la paridad espacial de los vectores base de  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  pueden ser solo reales. Una observación practica es que los bi-espinores con paridad  $P$  son conjugados a  $C$  uno a otro de acuerdo a

$$v_{-h}(\vec{p}) = \epsilon_h C u_h(\vec{p}) = i\gamma^2 \epsilon_h (u_h(\vec{p}))^*, \quad (3.71)$$

$$u_h(\vec{p}) = \epsilon_h C v_{-h}(\vec{p}) = i\gamma^2 \epsilon_h (v_{-h}(\vec{p}))^*, \quad (3.72)$$

$$\epsilon_\uparrow = -\epsilon_\downarrow = 1. \quad (3.73)$$

Los proyectores de Paridad obtenidos por medio de espinores y los proyectores analíticos son equivalentes. Este no es el caso para la paridad en  $C$ , lo cual hace que los espinores con paridad  $C$  tengan comportamientos diferentes a los espinores con paridad  $P$ .



## Capítulo 4

# Simetría $C$ del Espacio-Tiempo como Origen de Partículas de Majorana

La descripción de fermiones neutrales es uno de los temas centrales de la física contemporánea no solamente por espectacular el fenómeno de Oscilación de Neutrinos sino también por los campos de norma de los fermiones que aparecen como compañía de los bosones de norma ordinarias en teorías super-simétricas. Partículas Neutrales son indistinguibles de sus antipartículas y son eigenestados del Operador de Conjugación de Carga  $C$  para partículas y antipartículas [13] [12] [2] [15].

La conjugación de carga se definió como una de las simetrías discretas del espacio-tiempo donde se encontró en la ecuación (3.52) que para la representación  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$

$$C = i\gamma_2 K \quad (4.1)$$

donde  $\gamma_2 = -\gamma^2$ .

Note que  $x_\mu$  es invariante ante  $C$ . Esta es la razón por la que puede usar  $\zeta \otimes \tilde{\zeta}$  para la descripción de partículas neutrales como campos derivados directamente de los requerimientos sobre la simetrías  $C$  de  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ . En la siguiente sección se presenta una descripción de fermiones neutrales en términos de campos cuánticos de Majorana. Después obtendremos los campos cuánticos de Majorana desde los requerimientos de la simetría  $C$  en  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ .

### 4.1. La Simetría $C$ y las Partículas de Majorana

Las partículas neutrales son indistinguibles de sus antipartículas y son eigenestados del operador de conjugación de Carga  $C$ . La representación de Lorentz para partículas neutrales de espín 1/2 (que serán denotados por  $\Psi_M^{h;e_j}(\vec{p})$ ) que diagonalizan el operador de conjugación de carga.

Una gran cantidad de libros de texto introducen los cuatro espinores base de Paridad  $C$

como

$$\Psi_M^{h;(\epsilon_j)} = \begin{pmatrix} \epsilon_j^* i \sigma_2 [\dot{\zeta}_h]^* \\ \dot{\zeta}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_j^* \zeta_h \\ \dot{\zeta}_h \end{pmatrix},$$

$$\epsilon_j = \pm 1, \quad \text{ó} \quad \epsilon_j = \pm i, \quad h = \uparrow, \downarrow, \quad (4.2)$$

donde

$$\zeta_h = \phi_R^h, \quad \dot{\zeta}_h = \phi_L^h. \quad (4.3)$$

viene de la . Los espinores diagonalizan  $C$  de acuerdo a

$$i\gamma_2 [\Psi_M^{h;(\epsilon_j)}]^* = \epsilon_j \Psi_M^{h;(\epsilon_j)}. \quad (4.4)$$

Existen dos tipos de espinores con una paridad  $C$  real ( $\epsilon_j = \pm 1$ ) e imaginaria ( $\epsilon_j = \pm i$ ), en contraste con el operador  $P$ ,  $\gamma^0$ , el cual solo permite espinores con paridad espacial real.

#### 4.1.1. Paridades $C$ Reales

Primero se construyen las soluciones de paridad  $C$  en el sistema de reposo

$$\frac{1}{2} (1_4 \pm i\gamma_2 K) \Psi_M^{h;(\pm 1)}(\vec{0}) = \Psi_M^{h;(\pm 1)}(\vec{0}). \quad (4.5)$$

Se encuentran las siguiente cuatro soluciones en el marco Cartesiano

$$\Psi_M^{\uparrow;(+1)}(\vec{0}) = \sqrt{M_M} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_M^{\downarrow;(+1)}(\vec{0}) = \sqrt{M_M} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_M^{\uparrow;(-1)}(\vec{0}) = \sqrt{M_M} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_M^{\downarrow;(-1)}(\vec{0}) = \sqrt{M_M} \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

donde  $M_M$  será llamado Masa de Majorana en adelante.

#### 4.1.2. Espinores de Majorana de Normalización Cruzada

Una curiosidad ocurre cuando se calculan productos escalares de los espinores de Majorana. En primer lugar, todos los espinores son auto-ortogonales. En segundo lugar, los espinores de paridades  $C$  son ortogonales. Los productos escalares son 0 excepto entre los espinores Majorana de paridades opuestas y opuestos valores de  $h$ .

$$\bar{\Psi}_M^{\uparrow;(+1)}(\vec{0}) \Psi_M^{\downarrow;(-1)}(\vec{0}) = \bar{\Psi}_M^{\downarrow;(-1)}(\vec{0}) \Psi_M^{\uparrow;(+1)}(\vec{0}) = 2M_M,$$

$$\bar{\Psi}_M^{\uparrow;(-1)}(\vec{0}) \Psi_M^{\downarrow;(+1)}(\vec{0}) = \bar{\Psi}_M^{\downarrow;(+1)}(\vec{0}) \Psi_M^{\uparrow;(-1)}(\vec{0}) = 2M_M. \quad (4.7)$$

donde

$$\bar{\Psi}_M^{h:(\epsilon_j)}(\vec{0}) = (\Psi_M^{h:(\epsilon_j)}(\vec{0}))^\dagger \gamma^0. \quad (4.8)$$

Los espinores de Majorana que se muestran arriba se caracterizan por tener dos valores de helicidad opuestos. Ellos construyen dos espacios independientes distintos por el signo de su normalización cruzada. Cada subespacio contiene un espinor de paridad  $C$  positivo y negativo. Tan pronto como el producto escalar es invariante de Lorentz, la normalización cruzada es la misma para todos los marcos inerciales.

## 4.2. La No Propagación de los Espinores de Paridad $C$

La ecuación de movimiento satisfecha por los espinores de paridad  $C$  en cualquier sistema inercial es obtenida aplicando sobre ecuación (4.5), el Boost

$$\begin{aligned} B(\vec{p}) \frac{1}{2} (1_4 + \epsilon_j^* i \gamma_2 K) B(\vec{p})^{-1} \Psi_M^{h:(\epsilon_j)}(\vec{p}) &= \Psi_M^{h:(\epsilon_j)}(\vec{p}), \\ B(\vec{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2M_M(p_0 + M_M)}} (\not{p} + M_M \gamma^0) \gamma^0, \\ B(\vec{p})^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2M_M(p_0 + M_M)}} \gamma^0 (\not{p} + M_M \gamma^0). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Sin embargo, se encuentra que  $\gamma^\mu \gamma_2 = -\gamma_2 \gamma^{\mu*}$  por lo tanto

$$B(\vec{p}) C B^{-1}(\vec{p}) = C, \quad (4.10)$$

es decir que el proyector de  $C$  es independiente del momento de la partícula y la ecuación (4.9) se convierte en una identidad.

$$B(\vec{p}) \frac{1}{2} (1_4 + \epsilon_j^* i \gamma_2 K) B(\vec{p})^{-1} = \frac{1}{2} (1_4 + \epsilon_j^* i \gamma_2 K). \quad (4.11)$$

Parece ser que el procedimiento de construcción de un campo cuántico basado en  $C$  no es posible.

Entonces los proyectores  $\mathcal{P}^\pm(\vec{0})$  para paridad  $C$  real

$$\mathcal{P}^\pm(\vec{0}) = \frac{1}{2} (1_4 \pm i \gamma_2 K), \quad \mathcal{P}^\pm(\vec{0}) = \mathcal{P}^\pm(\vec{p}). \quad (4.12)$$

son independientes del momento y aparentemente los Espinores de Majorana no propagan. En la proxima sección se trató de emplear los proyectores construidos por  $\Psi_M^{h:(\epsilon_j)}$  para obtener la propagación.

### 4.3. Construcción de Proyectores Mediante $\Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\vec{0})$

En esta sección se empleará el método por la cual se obtuvo la ecuación de Dirac visto en la sección (2.4.2) con el fin de construir espinores de Majorana que propaguen. Cuando se usa  $\Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\vec{0})$  en la construcción de proyectores (denotados por  $P(\vec{0})$ ) de vectores de paridad  $C$ , se encuentra que en general son diferentes, a los proyectores analíticos en la ecuación (4.12). consideremos

$$\begin{aligned} P^+(\vec{0}) &= \frac{1}{2M_M} \left( \Psi_M^{\uparrow;(+1)}(\vec{0}) \bar{\Psi}_M^{\downarrow;(-1)}(\vec{0}) - \Psi_M^{\downarrow;(+1)}(\vec{0}) \bar{\Psi}_M^{\uparrow;(-1)}(\vec{0}) \right) \\ P^-(\vec{0}) &= -\frac{1}{2M_M} \left( \Psi_M^{\uparrow;(-1)}(\vec{0}) \bar{\Psi}_M^{\downarrow;(+1)}(\vec{0}) - \Psi_M^{\downarrow;(-1)}(\vec{0}) \bar{\Psi}_M^{\uparrow;(+1)}(\vec{0}) \right) \\ \Pi^+(\vec{0}) + \Pi^-(\vec{0}) &= \mathbf{1}_4 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Se puede verificar que  $P^+(\vec{0})$  y  $P^-(\vec{0})$  respectivamente son proyectores sobre los espinores de paridad  $C$  positivas y negativas, de acuerdo a

$$P^+(\vec{0}) \Psi_M^{\uparrow;(+1)}(\vec{0}) = \Psi_M^{\uparrow;(+1)}(\vec{0}), \quad P^+(\vec{0}) \Psi_M^{\downarrow;(-1)}(\vec{0}) = \Psi_M^{\downarrow;(-1)}(\vec{0}), \quad (4.14)$$

$$P^-(\vec{0}) \Psi_M^{\uparrow;(-1)}(\vec{0}) = -\Psi_M^{\uparrow;(-1)}(\vec{0}), \quad P^-(\vec{0}) \Psi_M^{\downarrow;(+1)}(\vec{0}) = -\Psi_M^{\downarrow;(+1)}(\vec{0}), \quad (4.15)$$

Uno esperaría que  $P^\pm(\vec{0})$  coincidiera con el proyector analítico en el sistema de reposo  $\mathcal{P}^-(\vec{0})$  en la ecuación (4.12), sin embargo no es así.

Podemos considerar otros proyectores denotados por  $\Pi^\pm(\vec{0})$  que actúan sobre  $\Psi_M^{h;(\pm 1)}$  sobre la normalización cruzada positiva y negativa

$$\begin{aligned} \Pi^+(\vec{0}) &= \frac{1}{2M_M} \left( \Psi_M^{\uparrow;(+1)}(\vec{0}) \bar{\Psi}_M^{\downarrow;(-1)}(\vec{0}) + \Psi_M^{\downarrow;(+1)}(\vec{0}) \bar{\Psi}_M^{\uparrow;(-1)}(\vec{0}) \right) \\ \Pi^-(\vec{0}) &= -\frac{1}{2M_M} \left( \Psi_M^{\uparrow;(-1)}(\vec{0}) \bar{\Psi}_M^{\downarrow;(+1)}(\vec{0}) + \Psi_M^{\downarrow;(-1)}(\vec{0}) \bar{\Psi}_M^{\uparrow;(+1)}(\vec{0}) \right) \\ \Pi^+(\vec{0}) + \Pi^-(\vec{0}) &= \mathbf{1}_4 \end{aligned} \quad (4.16)$$

De acuerdo a la ecuación (4.7), espinores de normalización cruzada iguales son de paridades opuestas  $C$ . Es por esto que los proyectores  $\Pi^\pm(\vec{0})$  son en general diferentes de  $P^\pm(\vec{0})$ . Un prueba inmediata y rápida está desarrollado en el marco cartesiano, donde se puede calcular que

$$\Pi^\pm(\vec{0}) = \frac{1}{2} \left( \mathbf{1}_4 \mp i \gamma^5 \gamma^1 \right), \quad (4.17)$$

mientras que

$$P^\pm(\vec{0}) = \frac{1}{2} \left( \mathbf{1}_4 \mp i \gamma_2 \vec{\mathcal{A}} \right), \quad (4.18)$$

donde para espinores con paridad  $C$  real

$$\vec{\mathcal{A}} = \mathbf{1}_4, \quad (4.19)$$

y aparentemente  $B(\vec{p})P^\pm(\vec{0})B(\vec{p})^{-1}$  y  $B(\vec{p})\Pi^\pm(\vec{0})B(\vec{p})^{-1}$  dan dos resultados esencialmente diferentes de ecuaciones no covariantes.

Los proyectores  $\Pi^\pm(\vec{0})$  se refieren a una simetría diferente a la que está dada por  $P^\pm(\vec{0})$ . En realidad los espinores  $\Psi_M^{h;(\pm 1)}$  son espinores propios de  $\gamma^5\gamma^1$ , y por eso una ecuación puede ser

$$B(\vec{p})\Pi^\pm(\vec{0})B(\vec{p})^{-1}\Psi_M(\vec{p}) = \Psi_M(\vec{p}), \quad (4.20)$$

sin embargo esta ecuación es no covariante.

Dicha simetría discreta es accidental. Como regla, los espinores libres cumplen con varias ecuaciones, pero solo una de ellas describe la dinámica correcta. Por ejemplo, los espinores de Dirac son espinores propios, no solo de  $\gamma^0$ , sino también de  $\gamma^5\gamma^3$  y satisfacen la ecuación no covariante

$$B(\vec{p})\frac{1}{2}(1_4 \pm i\gamma^5\gamma^3)B(\vec{p})^{-1}\Psi_D(\vec{p}) = \Psi_D(\vec{p}), \quad (4.21)$$

pero esto no significa que ellos se propaguen no convenientemente. La única simetría discreta del espacio-tiempo que se comporta covariantemente es la paridad.

La simetría más general para los espinores de paridad  $C$  es  $i\gamma_2\bar{\mathcal{A}}$  donde  $\bar{\mathcal{A}}$  es la matriz que sustituye la *conjugación compleja actuando sobre la base* en consideración,

$$[\ ]^* \longrightarrow \bar{\mathcal{A}}. \quad (4.22)$$

correspondientemente, las ecuaciones no-covariantes más generales son entonces obtenidas como

$$B^{\frac{1}{2}}(B(\vec{p}))\frac{1}{2}(1_4 + i\epsilon_j\gamma_2\bar{\mathcal{A}})B(\vec{p})^{-1}\Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\vec{p}) = \Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\vec{p}). \quad (4.23)$$

Para paridades  $C$  imaginarias en el marco Cartesiano dónde la forma de la conjugación compleja es

$$[\ ]^* \rightarrow -\gamma_5 \quad (4.24)$$

y la paridad  $C$  se reemplaza por la "paridad"  $-i\gamma_2\gamma_5$ . El proyector se asocia con la última simetría es una simetría discreta de  $\Psi_M^{h;(\pm 1)}(\vec{0})$  en el marco Cartesiano pero no es una simetría de tiempo espacial, la cual se lee

$$\frac{1}{2}(1_4 \mp i\gamma_2\gamma_5)\Psi_M^{h;(\pm 1)}(\vec{0}) = \Psi_M^{h;(\pm 1)}(\vec{0}). \quad (4.25)$$

La forma del "boost" se obtiene después de algunas manipulaciones algebraicas simples

$$((\not{p} + M_M\gamma_0)i\gamma_2\gamma_5(\not{p} + M_M\gamma_0) \pm 2M_M(p_0 + M_M))\Psi_M^{h;(\pm 1)}(\vec{p}) = 0, \quad (4.26)$$

que da lugar a otra ecuación no-covariante de los spinores  $C$ , y una vez más producirá un campo cuántico no-local. Un ejemplo extenso es la base de helicidad

$$\Phi_R^\dagger(\vec{0}) = \sqrt{M_M} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{+i\varphi/2} \end{pmatrix}, \quad \Phi_R^\dagger(\vec{0}) = \sqrt{M_M} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{+i\varphi/2} \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

donde el funcionamiento de la conjugación compleja toma la forma

$$[\ ]^* \rightarrow \mathcal{A} := \begin{pmatrix} e^{+i\varphi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{+i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

La ecuación no-covariante, de espinores  $C$  puramente imaginarios en el marco del helicidad se obtiene entonces como

$$\left( (\not{p} + M_M \gamma_0) i \gamma_2 \tilde{\mathcal{A}} (\not{p} + M_M \gamma_0) \pm 2M_M (p_0 + M_M) \right) \Psi_M^{h;(\pm i)}(\vec{p}) = 0. \quad (4.29)$$

Esta ecuación no-covariante se ha defendido en la Ref. [12] (el módulo en la referencia se diferencia en la definición de  $C = \gamma_2 K$ ).

Debido a la simetría entre  $\phi_R^\dagger$  y  $\phi_L^\dagger$ ,

$$\phi_R^\dagger = A \phi_L^\dagger, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

hay una opción mas para representar la conjugación compleja, se sabe que

$$[\ ]^* \rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0_2 & A \\ A^{-1} & 0_2 \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

y para obtener una ecuación más no-covariante como

$$\left( (\not{p} + M_M \gamma_0) \gamma_0 i \gamma_2 \tilde{A} \gamma_0 (\not{p} + M_M \gamma_0) \mp 2M_M (p_0 + M_M) \right) \Psi_M^{h;(\pm i)}(\vec{p}) = 0. \quad (4.32)$$

Una opción diferente para la helicidad en [14]

$$\Phi_\uparrow^R(\vec{0}) = \sqrt{M_M} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{+i\varphi} \end{pmatrix}, \quad \Phi_\downarrow^R(\vec{0}) = \sqrt{M_M} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

la conjugación compleja toma dos formas diferentes incluso dependiendo de la helicidad de  $\Phi_h^R(\vec{0})$  en la Ecuación (4.2). En este último espacio los se encuentran dos las ecuaciones diferente non-local del espinor  $C$ ,

$$\left( (\not{p} + M_M \gamma_0) \gamma_0 i \gamma_2 \mathcal{A}_1 \gamma_0 (\not{p} + M_M \gamma_0) \mp 2M_M (p_0 + M_M) \right) \Psi_M^{l;(\pm 1)}(\vec{p}) = 0,$$

$$\left( (\not{p} + M_M \gamma_0) \gamma_0 i \gamma_2 \mathcal{A}_2 \gamma_0 (\not{p} + M_M \gamma_0) \mp 2M_M (p_0 + M_M) \right) \Psi_M^{r;(\pm 1)}(\vec{p}) = 0,$$

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} e^{+2i\varphi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2i\varphi} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2i\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{+2i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Al parecer, además de las ecuaciones anteriores (4.26), (4.29), (4.31), y (4.34), uno puede generar el infinito el número ecuaciones no-locales a través de los cambios de la base.

## 4.4. Construcción de Espinores de Majorana que se Propagan Covariantemente

En esta sección se desarrolla la idea [13] de como tratar la ausencia de propagación de los espinores de Majorana en el espacio  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  observadas arriba. Los espinores de Majorana descritas por la ecuación (4.6) son tales que el operador de Paridad,  $\gamma^0$ , sirve como "transformación" entre los espinores de Majorana de opuesta paridad  $C$  y opuesta helicidad de los espinores  $\Psi_M^{\uparrow;(+)}(\vec{0})$ , de acuerdo a

$$\begin{aligned}\gamma^0 \Psi_M^{\uparrow;(+)}(\vec{0}) &= \Psi_M^{\downarrow;(-)}(\vec{0}), \\ \gamma^0 \Psi_M^{\downarrow;(-)}(\vec{0}) &= \Psi_M^{\uparrow;(+)}(\vec{0}), \\ \gamma^0 \Psi_M^{\uparrow;(-)}(\vec{0}) &= -\Psi_M^{\downarrow;(+)}(\vec{0}), \\ \gamma^0 \Psi_M^{\downarrow;(+)}(\vec{0}) &= -\Psi_M^{\uparrow;(-)}(\vec{0}).\end{aligned}\quad (4.35)$$

Esta observación forma directamente una nueva simetría en es espacio más grande de dimensiones espinoriales. La nueva simetría está asociada con los proyectores en el marco de reposo del tipo

$$\pi^\pm(\vec{0}) = \frac{1}{2} \left( 1_8 \pm \begin{pmatrix} 0_4 & \gamma^0 \\ \gamma^0 & 0_4 \end{pmatrix} \right), \quad \pi^+(\vec{0}) \begin{pmatrix} \Psi_M^{\downarrow;(-)}(\vec{0}) \\ \Psi_M^{\uparrow;(+)}(\vec{0}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_M^{\downarrow;(-)}(\vec{0}) \\ \Psi_M^{\uparrow;(+)}(\vec{0}) \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

ahora definiendo el operador de Conjugación de Carga en este espacio como

$$C \rightarrow \begin{pmatrix} -i\gamma_2 K & 0 \\ 0 & i\gamma_2 K \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

y uno inmediatamente encuentra que

1. los espinores tienen una paridad  $C$  bien definida.
2. el operador  $C$  conmuta con  $\pi^\pm(\vec{0})$ .

Se usa la nueva simetría discreta para la construcción de proyectores covariantes utilizando  $\pi^\pm(\vec{0})$  a transformaciones similares para el Boost

$$\frac{1}{2} \left( 1_8 + \begin{pmatrix} 0_4 & B(\vec{p})\gamma^0 B(\vec{p})^{-1} \\ B(\vec{p})\gamma^0 B(\vec{p})^{-1} & 0_4 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \Psi_M^{\downarrow;(-)}(\vec{p}) \\ \Psi_M^{\uparrow;(+)}(\vec{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_M^{\downarrow;(-)}(\vec{p}) \\ \Psi_M^{\uparrow;(+)}(\vec{p}) \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Debido a que  $B(\vec{p})\gamma^0 B(\vec{p})^{-1} = \not{p}/M_M$ , el Boost se puede reescribir como

$$\frac{1}{2} \left( 1_8 + \begin{pmatrix} 0_4 & \not{p}/M_M \\ \not{p}/M_M & 0_4 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \Psi_M^{\downarrow;(-)}(\vec{p}) \\ \Psi_M^{\uparrow;(+)}(\vec{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_M^{\downarrow;(-)}(\vec{p}) \\ \Psi_M^{\uparrow;(+)}(\vec{p}) \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

y finalmente esta última ecuación se puede escribir de la forma

$$\frac{1}{2M_M} \begin{pmatrix} M_M 1_4 & \not{p} \\ \not{p} & M_M 1_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_M^{+;(-1)}(\vec{p}) \\ \Psi_M^{+;(+) }(\vec{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_M^{+;(-1)}(\vec{p}) \\ \Psi_M^{+;(+) }(\vec{p}) \end{pmatrix}, \quad (4.40)$$

similármemente uno encuentra que

$$\frac{1}{2M_M} \begin{pmatrix} M_M 1_4 & -\not{p} \\ -\not{p} & M_M 1_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_M^{+;(-1)}(\vec{p}) \\ \Psi_M^{+;(+) }(\vec{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_M^{+;(-1)}(\vec{p}) \\ \Psi_M^{+;(+) }(\vec{p}) \end{pmatrix}. \quad (4.41)$$

Las ecuaciones (4.40) y (4.41) son equivalentes a la siguiente ecuación

$$\begin{pmatrix} \not{p} & 0_4 \\ 0_4 & \not{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\vec{p}) \\ \Psi_M^{-h;(-\epsilon_j)}(\vec{p}) \end{pmatrix} = \pm M_M \begin{pmatrix} 0_4 & 1_4 \\ 1_4 & 0_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\vec{p}) \\ \Psi_M^{-h;(-\epsilon_j)}(\vec{p}) \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

El término de masa tiene precisamente la estructura del término de masa de Majorana en la ecuación (1.6). El estudio de este trabajo demostró como el término de masa de Majorana se origina naturalmente de la simetría  $C$  del Espacio-Tiempo, cumpliendo de esta manera el objetivo de la tesis.



# Capítulo 5

## Conclusiones

- Las matrices de Dirac son primeramente operadores de las simetrías discretas  $P$ ,  $C$  y  $T$  del espacio-tiempo antes de definir el término cinético en la Ecuación de Dirac.
- Los operadores de simetría discreta  $C$ ,  $P$  y  $PTC$  definen las ecuaciones de movimiento para las partículas neutrales con una paridad  $C$ , partículas cargadas con una paridad espacial, y finalmente partículas con una buena paridad  $PTC$ , respectivamente. Los operadores  $T$ ,  $PT$  y  $CT$  no se pueden diagonalizar en el espacio del momento, por lo tanto las simetrías  $T$ ,  $PT$ ,  $CT$  y  $CP$  se pueden construir exclusivamente como estados cuánticos.
- El operador de Paridad  $P$ , es la simetría escogida por la naturaleza por ser único operador de una simetría discreta que tiene una representación covariante en todo los sistemas inerciales lo que resulta en la ecuación de Dirac. Las ecuaciones de movimiento relacionados con las otras simetrías discretas son principalmente no covariantes.
- *Las ecuaciones no covariantes en la sección 4.2 refiriéndose al operador  $C$  son un artefacto ante la imposibilidad de tener una representación matricial de la operación de conjugación compleja.* Esta es una observación original hecha en esta la tesis.
- Para describir una propagación covariante de espinores de Majorana uno debe estudiar como actúa el operador de paridad en este espacio, lo que nos lleva directamente al término de masa de Majorana (véase sección 4.4). Dicho en otras palabras, la propagación covariante de un espinor de Majorana  $\Psi_M^{h(\epsilon)}(\vec{p})$  requiere de un compañero. Por esto es necesario duplicar el espacio donde los espinores como fue descrito por las Ecuaciones (4.35) y (4.36). La ecuación de movimiento que cumplen los espinores clásicos de Majorana son (4.42) y el término de masa no es diagonal como en el caso de Dirac, sino es diagonal invertida, y por lo tanto es un término de masa tipo Majorana.

# Bibliografía

- [1] <http://www.sst.ph.ic.ac.uk/people/d.vvedensky/groups/>
- [2] S. Esposito, Nuovo Cimento B**111**, 1449 (1996);  
S. Esposito, y N. Tancredi, Eur. Phys. J. C**4**, (1998) 221.  
S. Esposito, Int. J. Mod. Phys. A**13**, 5023 (1998).
- [3] Boris Kayser, Françoise Gibrat-Debu y Frédéric Perrier, *The Physics of Massive Neutrinos* (World Scientific, Inglaterra, 1989).
- [4] Morton Hamermesh, *Group Theory and its Application to Physical Problems* (Addison-Wesley Publishing Company, INC., USA, 1964).
- [5] Jean Hladik, translated by J. Michael Cole, *Spinors in Physics* (Springer-Verlag, N.Y., 1999).
- [6] A. W. Joshi, *Elements of Group Theory for Physicists* (Wiley Eastern Limited, India, Tercera Edición, 1983).
- [7] Ulrich E. Schröder, *Special Relativity* (World Scientific, Alemania, 1989).
- [8] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, USA, 1985).
- [9] Leticia Nohemi Luis Noriega, *Propagación de Partículas Completamente Neutrales con Espín 1/2* (Tesis, UAZ, Zacatecas, Mex., 2003).
- [10] Gabriela Alejandra Caldera Cabral, *Lagrangianos para Sub-espacios Invariantes del Cuadrado del Vector de Pauli-Lubanski* (Tesis, UAZ, Zacatecas, Mex.)
- [11] Bertha Elizabeth Rodríguez Milla, *Excitaciones Barionicas como Multipletes de Espín Paridad* (Tesis, UAZ, Zacatecas, Mex., 2001).
- [12] D. V. Ahluwalia, M. Kirchbach, Int. J. Mod. Phys. D**10**, 811, (2001);

- [13] M. Kirchbach, C. Compeán y L. Noriega, *C Symmetry of Space Time as Origin of Majorana Particles*, *Revista Mexicana de Física* **48** (Feb. 2003),  
M. Kirchbach, C. Compeán y L. Noriega, *Neutral Fermion Phenomenology With Majorana Spinors*, E-Print Archive: hep-ph/0310297 .  
M. Kirchbach, C. Compeán y L. Noriega, *Beta Decays With Momentum Space Majorana Spinors*, *European Physical Journal* **A22** (2004),  
S. Esposito, *Nuovo Cimento* **B111**, 1449 (1996);  
S. Esposito, and N. Tancredi; *Eur. Phys. J.* **C4**, 221 (1998);  
S. Esposito, *Int. J. Mod. Phys. A* **13**, 5023 (1998).
- [14] M. E. Peskin, and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Westview Press, N.Y. 1995) pag. 68-76.
- [15] Ju. B. Novoshilov, *Introduction to the Theory of Elementary Particles* (Nauka, 1972, Moscow), Cap. 4.4.
- [16] James Wiliam Rohlf. *Modern Physics from  $\alpha$  to  $Z^0$* . (Hohn Wiley & Sons, Inc., USA).

# C Symmetry of Space Time as Origin of Majorana Particles

M. Kirchbach<sup>1</sup>, C. Compean-Jasso<sup>1</sup>, L. Luis-Noriega<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Física, Universidad Autónoma de San Luis Potosí,

Av. Manuel Nava 6, San Luis Potosí, S.L.P. 78290, México

<sup>2</sup>Unidad de Física, Universidad Autónoma de Zacatecas,

Av. Preparatoria 301, Zacatecas, ZAC 98068, México

Recibido el de de ; aceptado el de de

Derivamos directamente de la simetría C del espacio-tiempo de Lorentz un campo de Majorana con un término de masa de Majorana antisimétrico puramente imaginario no estándar y estudiamos algunas aplicaciones.

*Descriptores:* Neutrinos de Majorana, gauginos

We derive directly from the C symmetry of Lorentzian space-time a Majorana field with a non-standard pure-imaginary antisymmetric Majorana mass term and study some applications.

*Keywords:* Majorana neutrino, gaugino

PACS: 11.30.Er, 14.60.St

## 1. C invariant quantum states ad hoc

The description of Majorana fermions is one of the central topics of contemporary physics not only because of the spectacular phenomena of neutrino-oscillation or neutrinoless double beta decay,  $(0\nu\beta\beta)$ , but also because of the truly neutral fermion gauge fields (gauginos) predicted to appear as companions to ordinary gauge bosons in supersymmetric theories. From formal point of view, Majorana particles are treated in the textbooks differently but Dirac particles. While the Dirac field is systematically derived from the P symmetry of Lorentzian space time, Majorana particles are composed *ad hoc* at the quantum field level. The most prominent C invariant quantum states are those exploited in the description of neutrino oscillations, constructed as

$$\begin{aligned} \nu &= u_h(\vec{p})\mathbf{a}_h^+(\vec{p})e^{-i\vec{p}\cdot x}|0\rangle, \\ \nu^c &= u_h(\vec{p})\mathbf{b}_h^+(\vec{p})e^{-i\vec{p}\cdot x}|0\rangle, \\ \nu_{L/R} &= \frac{1}{2}(1_A \pm \gamma_5)\nu, \\ \nu_{L/R}^c &= \frac{1}{2}(1_A \pm \gamma_5)\nu^c, \end{aligned} \tag{1}$$

where  $u_h(\vec{p})\mathbf{a}_h^+(\vec{p})|0\rangle$  and  $u_h(\vec{p})\mathbf{b}_h^+(\vec{p})|0\rangle$  are in turn the Dirac particle and anti-particle states of momentum  $\vec{p}$  and spin-projection  $h = \uparrow / \downarrow$ . The neutrino spinors  $\nu_L$  and  $\nu_R^c$  are the so called "electroweak active", while  $\nu_R$ , and  $\nu_L^c$  are the "electroweak sterile" ones. The C parity states in Eq. (1) underly neutrino oscillation data analysis and are frequently referred to as Majorana spinors. They satisfy the following system of two Dirac equations coupled by the Majorana mass term

$$\begin{pmatrix} \not{p} - M_D & -M_M \\ -M_M & \not{p} - M_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ \nu^c \end{pmatrix} = 0. \tag{2}$$

Equation (2) is the Dirac equation for one neutrino generation. It has as two limiting cases the vanishing Dirac mass,

$M_D = 0$ , and the vanishing Majorana mass,  $M_M = 0$ , respectively. The quantum states (1) belong to the so called Dirac-Majorana fields,  $\psi_{DM}^{(\epsilon_j)}(x)$ , which are C invariant and constructed as the following combinations of the Dirac quantum field,  $\psi_D(x)$ , and its anti-particle conjugate,  $\psi_D^c(x)$ ,

$$\begin{aligned} \psi_{DM}^{(\epsilon_j)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_D(x) + \epsilon_j^* \psi_D^c(x)), \\ C\psi_{DM}^{(\epsilon_j)}(x) &= \epsilon_j \psi_{DM}^{(\epsilon_j)}(x), \quad C = i\gamma_2 K, \quad K = [ ]^*, \\ \epsilon_1 &= -\epsilon_2 = 1, \quad \text{or,} \quad \epsilon_1 = -\epsilon_2 = i. \end{aligned} \tag{3}$$

To obtain  $\psi_D^c(x)$  one interchanges  $\mathbf{a} \leftrightarrow \mathbf{b}$  in  $\psi_D(x)$  [2],

$$\begin{aligned} \psi_D^c(x) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{2p_0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_h \left( u_h(\vec{p})\mathbf{b}_h(\vec{p})e^{-i\vec{p}\cdot x} \right. \\ &\quad \left. + u_h(\vec{p})^c \mathbf{a}_h^+(\vec{p})e^{i\vec{p}\cdot x} \right). \end{aligned} \tag{4}$$

The one neutrino-anti-neutrino generation, *column*  $(\nu, \nu^c)$ , in Eq. (2) is then described by means of the Dirac-Majorana Lagrangian which is cast into the following matrix form [1]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{DM}(x) &= \bar{\psi}_{(8)}^{(\epsilon_j)}(x) \begin{pmatrix} i\not{\partial} - M_D & -\epsilon_1 M_M \\ -\epsilon_1^* M_M & i\not{\partial} - M_D \end{pmatrix} \psi_{(8)}^{(\epsilon_j)}(x), \\ \psi_{(8)}^{(\epsilon_j)} &= \begin{pmatrix} \psi_D(x) \\ \epsilon_j^* \psi_D^c(x) \end{pmatrix} = \int \frac{d^3\vec{p}}{2p_0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad \sum_h \left[ u_h(\vec{p}) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_h(\vec{p}) \\ \epsilon_j^* \mathbf{b}_h(\vec{p}) \end{pmatrix} e^{-i\vec{p}\cdot x} \right. \\ &\quad \left. + u_h(\vec{p})^c \begin{pmatrix} \mathbf{b}_h^+(\vec{p}) \\ \epsilon_j^* \mathbf{a}_h^+(\vec{p}) \end{pmatrix} e^{i\vec{p}\cdot x} \right], \end{aligned} \tag{5}$$

a field with one-storey "wave functions", and two-storey creation/annihilation operators. The diagonal part of the

mass matrix is the standard Dirac mass term. We here call standard- and non-standard Majorana mass terms the ones corresponding to  $\epsilon_1 = 1$ , and  $\epsilon_1 = i$ , respectively. We further notice that the matrix defining the Majorana mass term can equally well be viewed as a metric in the  $\psi_{(8)}^{(\epsilon_j)}(x)$  space according to

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi_{(8)}^{(\epsilon_j)}}(x) &= (\overline{\psi_D}(x), \epsilon_j \overline{\psi_D}(x)) \Gamma_8^{(\epsilon_j)}, \\ \Gamma_8^{(\epsilon_j)} &= \begin{pmatrix} 0_4 & \epsilon_1 1_4 \\ \epsilon_1^* 1_4 & 0_4 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6)$$

and write down the Lagrangian for  $M_D = 0$  as

$$\mathcal{L}_{(8)}(x) = \widetilde{\psi_{(8)}(x)} \begin{pmatrix} -M_M 1_4 & \epsilon_1 i \not{\partial} \\ \epsilon_1^* i \not{\partial} & -M_M 1_4 \end{pmatrix} \psi_{(8)}(x). \quad (7)$$

Once having cast the Lagrangians into that form allows to search for field solutions beyond Eq. (5) and of the (generic) form

$$\begin{aligned} \psi_{(8)}(x) = \int dV \left( \sum_k \lambda_k(\vec{p}) \mathbf{d}_k(\vec{p}) e^{-ipx} \right. \\ \left. + \rho_k(\vec{p}) \mathbf{d}_k^+(\vec{p}) e^{ipx} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Here  $dV$  is a properly chosen phase volume, the index  $k$  encodes in a proper way the required eight degrees of freedom.  $\mathbf{d}_h^+(\vec{p})$ , and  $\mathbf{d}_h(\vec{p})$  are in turn creation and annihilation operators of one neutrino generation, while  $\lambda_k(\vec{p})$ , and  $\rho_k(\vec{p})$  are the associated "wave functions". Our goal here is to derive systematically  $\lambda_k(\vec{p})$ , and  $\rho_k(\vec{p})$  from the discrete  $C$  symmetry of space time. Compared to Eq. (5), we expect Feynman diagram rules for  $\rho_k(\vec{p})$ -, and  $\lambda_k(\vec{p})$ , following from  $\psi_{(8)}(x)$  in Eq. (8) to be more comfortable in calculations of traces entering cross sections.

## 2. Local quantum fields for one neutrino-anti-neutrino generation

### 2.1. Restive $C$ parities

The  $C$  invariant Lorentz representations for spin-1/2 (they will be denoted by  $\Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\vec{p})$  in the following) diagonalize the charge-conjugation operator,

$$C \Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\vec{p}) = \epsilon_j \Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\vec{p}). \quad (9)$$

The existence of two types of  $C$  invariant Lorentz representations- with real, ( $\epsilon_j = \pm 1$ ), and imaginary, ( $\epsilon_j = \pm i$ )  $C$  parities, contrasts the case of the  $P$  operator,  $\gamma_0$ , which allows only for real spatial parity spinors. We first construct rest-frame  $C$  parities as

$$\frac{1}{2} (I_4 + i \epsilon_j \gamma_2 K) \Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\vec{0}) = \Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\vec{0}), \quad (10)$$

and find as possible solutions in the Cartesian frame the four spinors

$$\begin{aligned} \Psi_M^{+;(\epsilon_j)}(\vec{0}) &= \sqrt{M_M} \begin{pmatrix} 0 \\ -\epsilon_j^* \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \Psi_M^{-;(\epsilon_j)}(\vec{0}) &= \sqrt{M_M} \begin{pmatrix} -\epsilon_j^* \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

The basis spinors  $\Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\vec{0})$  result from the more general form given, among others, in Ref. [2], as well as in Ref. [3]

$$\begin{aligned} \Psi_M^{h;(\epsilon_j)} &= \begin{pmatrix} \epsilon_j^* i \sigma_2 [\zeta_h]^* \\ \zeta_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_j^* \zeta_h \\ \zeta_h \end{pmatrix}, \\ \epsilon_j &= \pm 1, \quad \text{or} \quad \epsilon_j = \pm i, \quad h = \uparrow, \downarrow. \end{aligned} \quad (12)$$

Spinor ( $\zeta$ ), and co-spinor ( $\zeta^*$ ) are defined as [4]

$$\begin{aligned} \zeta &= \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}, \quad \zeta^* = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \xi_\alpha = i(\sigma_2)_{\alpha\beta} \xi^\beta, \\ \xi_\alpha^* &= [\xi_\alpha]^*, \quad \zeta = \xi^1 \zeta_\uparrow + \xi^2 \zeta_\downarrow, \\ \zeta_\uparrow &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta_\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (13)$$

and  $(i\sigma_2)_{ij} = \epsilon_{ij}$  is the Levi-Civita symbol which plays the role of metric in the  $SL(2, C)$  spinor space. The equation of motion satisfied by the  $C$  parity spinors in any inertial frame is now obtained in subjecting Eq. (10) to the Lorentzian boost,

$$\begin{aligned} B(\vec{p}) \frac{1}{2} (I_4 + \epsilon_j i \gamma_2 K) B(\vec{p})^{-1} \Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\vec{p}) &= \Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\vec{p}), \\ B(\vec{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2M_M(p_0 + M_M)}} (\not{p} + M_M \gamma_0) \gamma_0. \end{aligned} \quad (14)$$

To ones great surprise, due to  $\gamma_\mu \gamma_2 = -\gamma_2 \gamma_\mu^*$ , the boosted  $C$  operator turns out to be *momentum independent*,

$$B(\vec{p}) i \gamma_2 K B(\vec{p})^{-1} = i \gamma_2 K, \quad (15)$$

and *identical to the rest frame  $C$  parity operator*. This apparently contrasts the case of the rest-frame parity operator,  $P = \gamma_0$ , that upon boosting provides the kinetic term of the Dirac equation,

$$B(\vec{p}) \gamma_0 B(\vec{p})^{-1} = \frac{\not{p} \cdot \gamma}{m}. \quad (16)$$

It seems that the construction procedure of a  $C$  based covariant local quantum field comes here to a stop. We emphasize on *covariant*, and *local*, because if one is willing to entertain non-local quantum fields based on the non-covariant  $\Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\vec{p})$  propagation, one can have a plenitude of them in considering in place of  $C$  miscellaneous discrete symmetries. For example, the real  $C$  parity spinors are simultaneously

$\gamma_5 \gamma_1$  invariant and  $B(\vec{p}) \frac{1}{2} (1_4 \mp \gamma_5 \gamma_1) B^{-1}(\vec{p}) \Psi_M^{h;(\pm 1)}(\vec{p}) = \Psi_M^{h;(\pm 1)}(\vec{p})$ , would be such an equation.<sup>1</sup>In general,  $C$  parities satisfy non-covariant equations of the type,

$$B(\vec{p}) \frac{1}{2} (1_4 + i\epsilon_j \gamma_2 \mathcal{A}) B^{-1}(\vec{p}) \Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\vec{p}) = \Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\vec{p}), \quad (17)$$

where  $\mathcal{A}$  is the matrix that mimics complex conjugation in the basis of choice at rest. To be specific, let us consider imaginary  $C$  parity in the helicity frame, where

$$\zeta_{\uparrow} = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{+i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}, \quad \zeta_{\downarrow} = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{+i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}.$$

Here, the operation of complex conjugation of  $\Psi_M^{h;(-i)}(\vec{0})$  takes the form  $K \rightarrow \mathcal{A} := \text{Diag}(e^{+i\varphi}, e^{-i\varphi}, e^{+i\varphi}, e^{-i\varphi})$ . Insertion of the latter expression into Eq. (14) and accounting for commutativity between  $\gamma_0$  and  $\mathcal{A}$  allows to obtain the following frame dependent wave equation reported in Ref. [5]:

$$\left( (\not{p} + m\gamma_0) \tilde{\mathcal{A}} (\not{p} + m\gamma_0) - 2m(p_0 + m) \right) \Psi_M^{h;(-i)}(\vec{p}) = 0,$$

where  $\tilde{\mathcal{A}} = \gamma_2 \mathcal{A}$ , and we used “ $m$ ” as a generic mass notion in place of  $M_M$ . In effect, as long as there is no universal matrix representation for the operation of complex conjugation, one encounters *infinite number of non-covariant equations* corresponding to infinite number of frames related to each other by similarity transformations. We here take the position that such frames can not be interpreted as preferred frames in the Universe as occasionally done in the literature [5]. Non-local quantum states based upon non-covariant propagating Lorentz representations are in our opinion unphysical.

### 2.2. Taming $C$ parity and two-storey spinors

In order to resolve the dilemma of static  $C$  propagators, we here for the sake of concreteness focus on imaginary  $C$  parity spinors and notice that spatial parity, the only covariant discrete symmetry, ladders between  $C$  parities according to  $\gamma_0 \Psi_M^{\uparrow;(\pm i)}(\vec{0}) = -i \Psi_M^{\downarrow;(\pm i)}(\vec{0})$ ,  $\gamma_0 \Psi_M^{\downarrow;(\pm i)}(\vec{0}) = i \Psi_M^{\uparrow;(\pm i)}(\vec{0})$ , etc, and creates a new discrete symmetry. This allows one to obtain covariant wave equation in two-storey spaces of the type

$$\begin{pmatrix} 0_4 & -iB(\vec{p})\gamma_0 B(\vec{p})^{-1} \\ iB(\vec{p})\gamma_0 B(\vec{p})^{-1} & 0_4 \end{pmatrix} \Lambda(\vec{p}) = \Lambda(\vec{p}),$$

$$\Lambda(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \Psi_M^{\uparrow;(\pm i)}(\vec{p}) \\ \Psi_M^{\downarrow;(\pm i)}(\vec{p}) \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup> Notice that also the Dirac  $u_h(\vec{p})$  (or,  $v_h(\vec{p})$ ) spinors can satisfy non-covariant equations. Suffices to recall that they are also eigenspinors to, for example,  $\gamma_5 \gamma_3$  and therefore solutions to  $B(\vec{p}) \frac{1}{2} (1_4 \pm \gamma_5 \gamma_3) B^{-1}(\vec{p}) u_h(\vec{p}) = u_h(\vec{p})$ . Free spinors always satisfy a variety of occasionally non-covariant differential equations. It is the dynamics that selects the relevant one in according to data. As long as data require covariance and the only covariant discrete symmetry in spinor space is parity, the wave equations for spinors of other discrete parities need to be obtained from the action of  $\gamma_0$  upon them.

In substituting for  $B(\vec{p})\gamma_0 B(\vec{p})^{-1} = \frac{E\gamma}{m} \equiv \frac{\not{p}}{m}$  results in

$$\begin{pmatrix} \not{p} & iM_M 1_4 \\ -iM_M 1_4 & \not{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_M^{\uparrow;(\pm i)}(\vec{p}) \\ \Psi_M^{\downarrow;(\pm i)}(\vec{p}) \end{pmatrix} = 0. \quad (18)$$

This is a Dirac like equation for a two-storey spinor. It differs from Eq. (2) through the *non-standard* Majorana mass term which is pure imaginary and anti-symmetric. In nullifying the determinant of the latter equation one obtains the standard time-like energy momentum dispersion relation,  $p^2 - M_M^2 = 0$ , and proves that such a mass term does not imply acausal spinor propagation. These spinors are self-orthogonal,  $\bar{\Psi}_M^{h;(\pm i)}(\vec{p}) \Psi_M^{h;(\pm i)}(\vec{p}) = 0$ , and cross-normalized according to,  $\bar{\Psi}_M^{h;(\pm i)}(\vec{p}) \Psi_M^{-h;(\pm i)}(\vec{p}) = \pm 2iM_M(\delta_{h\uparrow} - \delta_{h\downarrow})$  (properties referred to as *bi-orthogonality* in Ref. [3]). We here notice that (i) self-orthogonality describes the limiting case of a vanishing Dirac mass term, (ii) cross-normalization corresponds to a non-vanishing Majorana-mass term, and conclude that fields based on top of  $\Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\vec{p})$  will describe the limiting case of a pure Majorana field. Though the coupled equations (18) have been noticed (up to notational differences) already in Ref. [6], the identifications of the mass terms has not been established there.

We now introduce the following complete set of two-storey spinors corresponding to Eqs. (18)

$$\begin{aligned} \Lambda_1^{\uparrow}(\vec{p}) &= \begin{pmatrix} u_{\uparrow}^R(\vec{p}) \mp iu_{\uparrow}^L(\vec{p})^c \\ u_{\uparrow}^R(\vec{p}) \mp iu_{\uparrow}^L(\vec{p})^c \end{pmatrix}, \\ \Lambda_2^{\uparrow}(\vec{p}) &= \begin{pmatrix} u_{\uparrow}^R(\vec{p}) \mp iu_{\uparrow}^L(\vec{p})^c \\ u_{\uparrow}^R(\vec{p}) \mp iu_{\uparrow}^L(\vec{p})^c \end{pmatrix}, \\ \Lambda_3^{\uparrow}(\vec{p}) &= \begin{pmatrix} u_{\uparrow}^R(\vec{p}) \mp iu_{\uparrow}^L(\vec{p})^c \\ -u_{\uparrow}^R(\vec{p}) \pm iu_{\uparrow}^L(\vec{p})^c \end{pmatrix}, \\ \Lambda_4^{\uparrow}(\vec{p}) &= \begin{pmatrix} u_{\uparrow}^R(\vec{p}) \mp iu_{\uparrow}^L(\vec{p})^c \\ -u_{\uparrow}^R(\vec{p}) \pm iu_{\uparrow}^L(\vec{p})^c \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (19)$$

with  $\tau = \pm$ . In defining now  $\tilde{\Lambda}_k^{\uparrow}(\vec{p})$  as

$$\tilde{\Lambda}_k^{\uparrow}(\vec{p}) = \tilde{\Lambda}_k^{\uparrow}(\vec{p}) \Gamma_8^{(\pm)}, \quad (20)$$

allows for the construction of an orthogonal basis in the re-

cently designed two-storey space as

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_j^\tau(\vec{p})\Lambda_j^\tau(\vec{p}) &= +4M_M, & \tau &= +, & j &= 1, 4; \\ & & \tau &= -, & j &= 2, 3; \\ \tilde{\Lambda}_k^\tau(\vec{p})\Lambda_k^\tau(\vec{p}) &= -4M_M, & \tau &= +, & k &= 2, 3; \\ & & \tau &= -, & k &= 1, 4; \\ \tilde{\Lambda}_k^\tau(\vec{p})\Lambda_l^{\tau'}(\vec{p}) &= 0, & \tau &\neq \tau', & k &\neq l. \end{aligned} \quad (21)$$

Equation (21) shows that the space under consideration contains equal numbers of mutually orthogonal spinors of real positive-, and of real negative norms, much alike the Dirac space. This advantage allows for a canonical quantization *à la* Dirac when introducing the *local*  $\psi_{(8)}(x)$  field operator as

$$\begin{aligned} \psi_{(8)}(x) &= \int dV \left[ \sum_{\tau=+, j=1,4; \tau=-, j=2,3} \Lambda_j^\tau(\vec{p}) \mathbf{d}_j^\tau(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\tau=+, k=2,3; \tau=-, k=1,4} \Lambda_k^\tau(\vec{p}) \mathbf{d}_k^\tau(\vec{p}) e^{ip \cdot x} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Here,  $dV$  is the appropriate phase volume. This local quantum field is built on top of Lorentzian  $C$  parity representations and describes one Majorana-neutrino generation. In this way we derived a truly neutral local spin-1/2 field directly from  $C$  invariant Lorentz representations. As long as above fields are eight-dimensional copies of the Dirac field, the Feynman diagram rules will be the eight-dimensional version of the rules valid for the standard Dirac spinors and can be exploited in calculations of cross-sections.

A decomposition of the textbook  $C$  parity spinors in Eq. (12) into Dirac spinors takes one to a further surprise. It turns out that those are not the most economic  $C$  invariant combinations of Dirac  $u$  and  $v$  spinors as they are superpositions of two smaller  $C$  invariant spinors of opposite spin-projections/helicities according to

$$\Psi_M^{\tau, (+)}(\vec{p}) = \frac{1}{2} \left( (u_+ - iu_+^c) - i(u_- + iu_-^c) \right), \quad (23)$$

etc. As a consequence, the quantum states,

$$\Lambda_k^\tau(\vec{p}) \mathbf{d}_k^\tau(\vec{p}) |\vec{p}\rangle, \quad (24)$$

are of unspecified spin-projections (helicities). However, above conduct only reflects independence of  $C$  parity of spin-projection, and is not Majorana neutrino specific as claimed

in Ref. [5], but avoidable, a fact already manifest in Eqs. (1), (5) above. One could have started from the very beginning with the smaller single-helicity Majorana spinors and constructed a local quantum field on top of

$$\begin{pmatrix} u_h + i\eta u_h^c \\ \tau(u_h - i\eta u_h^c) \end{pmatrix} \mathbf{d}_{h\eta\tau}(\vec{p}), \quad \eta = \pm 1, \quad \tau = \pm 1. \quad (25)$$

However, this peculiarity has no impact onto physical observables such like widths and cross sections. Indeed, in Ref. [7] we calculated that traces including two-storey spinors of unspecified  $h$  label always reduce to standard Dirac traces including  $u_{h'}(\vec{p})$  spinors of well defined  $h'$ . Notice, finally, that also  $P$  parity does not distinguish between  $h$  and  $-h$ , and one can write the Dirac equation as  $(\not{p} - m)(u_h \pm u_{-h}) = 0$ . That one favors the well known single helicity version is not a consequence of parity but a tribute to angular momentum conservation.

### 3. Summary and Discussion

The merit of our work as we see it is to have (i) revealed existence of either real, or, imaginary  $C$  parity fermions, (ii) shown how to derive pure Majorana *local* quantum fields from first principles on space time symmetries, exploiting covariant, parity based discrete symmetries in eight spinorial dimensions, (iii) argued non-physicality of non-local theories as artifact of a lacking universal matrix representation of complex conjugation, (iv) observed that the possible indefiniteness of the  $h$  label (due to helicity independence of  $C$  parity) does not show up in the physics observables such as widths and cross-sections. In Ref. [7] we further showed that unpolarized beta decays do not distinguish between Dirac and Majorana fields. In polarized single  $\beta$  decays, the non-standard Majorana mass term left a footprint in triggering the drop out of the neutrino mass from the trace.

### Acknowledgments

Work supported by Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT, Mexico, grant number C01-39820.

1. S. Esposito, Nuovo Cimento **B111**, 1449 (1996); S. Esposito, and N. Tancredi, Eur. Phys. J. **C4**, 221 (1998); S. Esposito, Int. J. Mod. Phys. **A13**, 5023 (1998).
2. M. E. Peskin, and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Westview Press, N.Y. 1995) pp. 68-76.
3. D. V. Ahluwalia, Int. J. Mod. Phys. **A11**, 1885 (1996).
4. J. Hladik, *Spinors in Physics* (Springer-Verlag, N.Y., 1999).
5. D. V. Ahluwalia-Khalilova, *Extended set of Majorana spinors, A new dispersion relation, and a preferred frame*, E-Print Archive: hep-ph/0305335.
6. V. V. Dvoeglazov, Rev. Mex. Fis. **41**, 159 (1995); V. V. Dvoeglazov, Mod. Phys. Lett. **A12**, 274 (1997).
7. M. Kirchbach, C. Compean, and L. Noriega, Eur. Phys. J. **A22** (2004).

## Beta decays with momentum space Majorana spinors

M. Kirchbach<sup>1,\*</sup>, C. Compean<sup>1</sup>, and L. Noriega<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Instituto de Física, UASLP, Av. Manuel Nava 6, Zona Universitaria, San Luis Potosí, SLP 78290, Mexico

<sup>2</sup> Facultad de Física, UAZ, Av. Preparatoria 301, Fr. Progreso, Zacatecas, ZAC 98062, Mexico

Received: 11 November 2003 / Revised version: 20 April 2004 /

Published online: 12 October 2004 – © Società Italiana di Fisica / Springer-Verlag 2004

Communicated by G. Orlandini

**Abstract.** We construct and apply to  $\beta$  decays a truly neutral local quantum field that is entirely based upon momentum space Majorana spinors. We make the observation that theory with momentum space Majorana spinors of real  $C$  parities is equivalent to Dirac's theory. For imaginary  $C$  parities, the neutrino mass can drop out from the single- $\beta$  decay trace and reappear in  $0\nu\beta\beta$ , a curious and in principle experimentally testable signature for a non-trivial impact of Majorana framework in polarization experiments.

**PACS.** 11.30.Er Charge conjugation, parity, time reversal, and other discrete symmetries – 14.60.St Non-standard-model neutrinos, right-handed neutrinos, etc.

### 1 Introduction

The theory of truly neutral fermions is based upon quantum fields that are  $C$  eigenstates. In the convention of ref. [1] the charge conjugation operator reads

$$C = i\gamma_2 K, \quad (1)$$

with  $K$  standing for the operation of complex conjugation. The calculus of widest use for neutral spin-(1/2) fermions is based upon a field that is the sum,

$$\nu_M(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_D(x) + \Psi_D(x)^c), \quad (2)$$

of a Dirac quantum field,  $\Psi_D(x)$ , and its charge-conjugate,  $\Psi_D(x)^c$ , [2–4]. This so-called Majorana quantum field (denoted by  $\nu_M(x)$ ) is given by

$$\begin{aligned} \nu_M(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2p_0(2\pi)^{3/2}} \sum_h \left[ u_h(\mathbf{p}) a_h(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} \right. \\ &\quad \left. + v_h(\mathbf{p}) [\lambda a_h^+(\mathbf{p})] e^{ip \cdot x} \right], \\ a_h(\mathbf{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (b_h(\mathbf{p}) + d_h^+(\mathbf{p})), \end{aligned} \quad (3)$$

where  $h = \uparrow, \downarrow$  labels spin projection,  $b_h(\mathbf{p})$ , and  $d_h^+(\mathbf{p})$  are in turn fermion annihilation and anti-fermion creation operators. The Majorana quantum field constructed in this way is of real positive  $C$  parity,

$$C\nu_M(x) = \nu_M(x). \quad (4)$$

A comment on  $\lambda$  is in order, the free phase factor in the definition of  $a_h^+(\mathbf{p})$  in eq. (3). It is known as the *creation phase factor*, was introduced in [5], and secures that the phase freedom one has in the choice of the one-particle states does not show up in the observables, in particular, does not change the  $C$  parity of  $\nu_M(x)$ . It is also useful in the construction of a real mixing matrix.

Charged particle currents,

$$(b_h^+(\mathbf{p}) + d_h(\mathbf{p})) \bar{u}_h(\mathbf{p}) \gamma^\mu (b_{h'}(\mathbf{p}) + d_{h'}^+(\mathbf{p})) u_{h'}(\mathbf{p}), \quad (5)$$

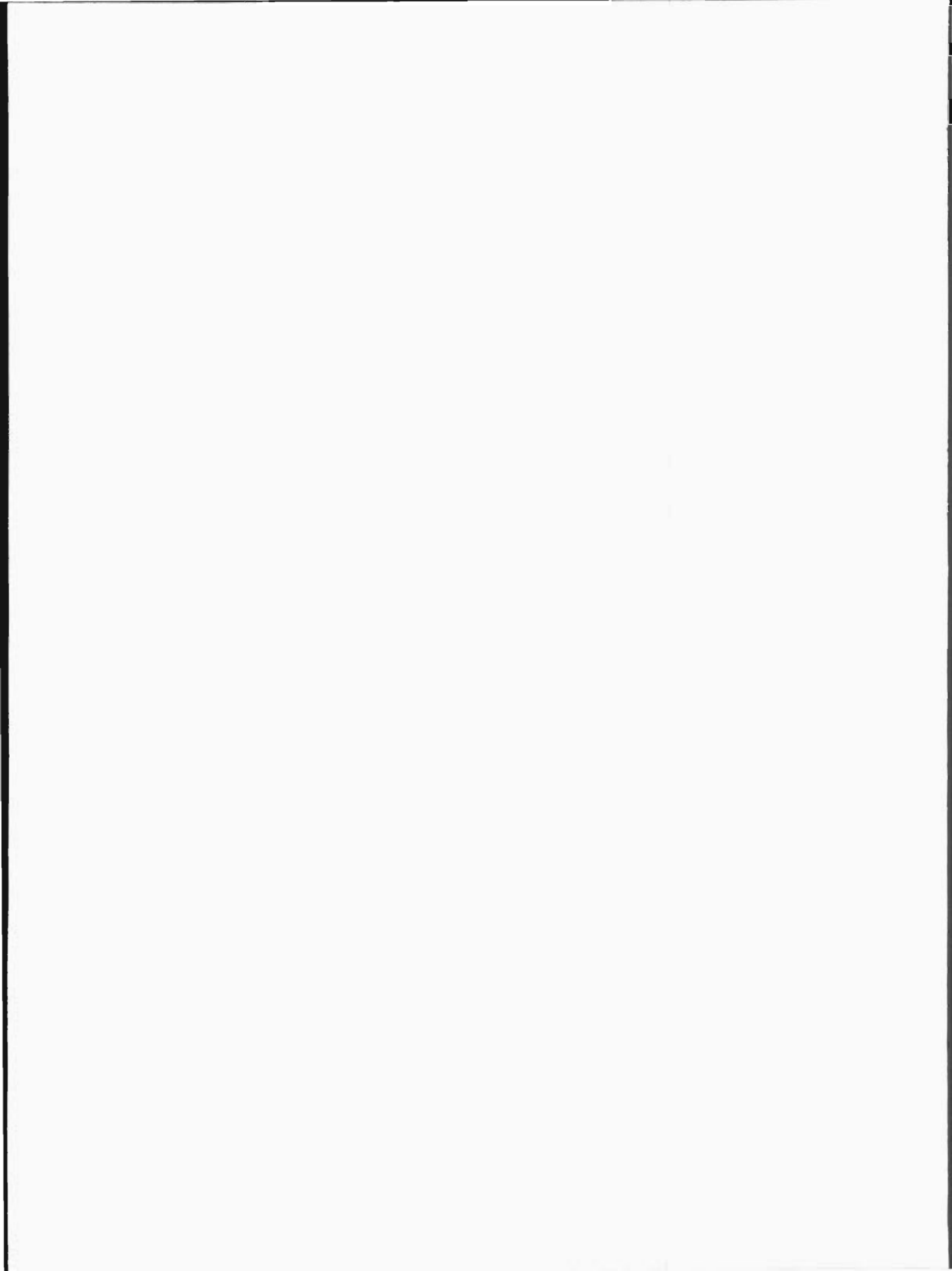
in containing the term,  $b_h^+(\mathbf{p}) \bar{u}_h(\mathbf{p}) \gamma^\mu d_{h'}^+(\mathbf{p}) u_{h'}(\mathbf{p})$ , allow the lepton number to change by two units,  $|\Delta L = 2|$ , and account for the neutrinoless double- $\beta$  decay,  $0\nu\beta\beta$ , a process in which we are particularly interested here. The resulting  $0\nu\beta\beta$  trace is expressed in terms of momentum space Dirac spinors,  $u_h(\mathbf{p})$ , and  $v_h(\mathbf{p})$ . Recall, that momentum space Dirac spinors diagonalize the parity operator,  $PR$  with  $R$  standing for space reflection,

$$P u_h(-\mathbf{p}) = \eta_j^* u_h(\mathbf{p}), \quad P v_h(-\mathbf{p}) = \eta_j^* v_h(\mathbf{p}). \quad (6)$$

The spatial parity of the Dirac spinors has been denoted by  $\eta_j^*$  with  $j = 1, 2$  and  $\eta_j \eta_j^* = 1$ , and can be either real or pure imaginary. Dirac spinors with real spatial parity,  $P = \gamma_0$ , correspond to a real mass, and are of common use. Those with a pure imaginary spatial parity,  $P = \gamma_0 K$ , correspond to imaginary mass and are ruled out because of acausal propagation (see ref. [6] for details). To recapitulate, the Majorana quantum field is constructed as an afterthought of the Dirac quantum field.

\* e-mail: mariana@fisica.uaslp.mx





On the other hand, one can have also momentum space spinors, here denoted by  $\psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\mathbf{p})$ , that have the property to diagonalize the charge conjugation operator,

$$i\gamma_2 \left( \psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\mathbf{p}) \right)^* = \epsilon_j^* \psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\mathbf{p}), \quad \epsilon_j \epsilon_j^* = 1, \quad j = 1, 2. \quad (7)$$

Such spinors are referred to as momentum space Majorana spinors [1,3,7–9], and find mentioning in neutrino oscillations [10,11].

We now ask the question whether  $C$  parity spinors qualify for the construction of a truly neutral local quantum field, and without reference to the Dirac quantum field, *i.e.* a field that is distinct from eq. (2). It is the goal of the present study to design such a field and compare it to  $\nu_M(x)$ .

To do so we follow the standard textbook quantization procedure, and construct as a first step  $\psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\mathbf{p})$  projectors and propagators. Here we run into the first obstacle. Because of non-commutativity of  $\gamma_0$  and  $\gamma_2$ , eqs. (6) and (7) cannot be diagonalized by the same set of solutions. Momentum space Majorana spinors are linear combinations of Dirac  $u_h(\mathbf{p})$  and  $v_h(\mathbf{p})$  spinors and satisfy a *system of two coupled* Dirac-like equations. An appropriate technique to treat propagators resulting from systems of two coupled spinor equations is to i) first organize the two spinors in one auxiliary eight-dimensional, (8d), spinor, ii) then construct associated projectors, iii) next obtain from them the propagators, and iv) carry out the quantization procedure, a program realized in sect. 2 below.

We consider two types of solutions to eq. (7), one with real, the other with imaginary  $C$  parities. Naively one could expect Majorana spinors of imaginary  $C$  parity to propagate acausally, similarly as imaginary spatial parity Dirac spinors. As we shall see below, this is not the case because for coupled Majorana spinor equations there is no immediate relation between  $C$  parity and causality. In the auxiliary space we build spinors of real masses and causal propagators for any  $C$  parity of the underlying Majorana spinors, and exploit them for the construction of local quantum fields. We use these fields in the calculation of  $\beta$  decays. The (8d) space considered by us is in its nature auxiliary because physics observables related to baryon  $\beta$  decays depend on traces, and our (8d) traces always reduce to four-dimensional traces expressed in terms of Dirac spinors. At that level we can compare Majorana and Dirac frameworks. We show that single- $\beta$  decays of polarized sources distinguish between Majorana and Dirac momentum space spinors a result discussed in sect. 3 below.

The paper is organized as follows. In the next section we compare Dirac and Majorana momentum space spinors and obtain coupled equations for Majorana spinors. Sections 3 and 4 are in turn devoted to single- $\beta$  and double  $0\nu\beta\beta$  decays. The main text closes with a brief summary.

## 2 Dirac versus Majorana momentum space spinors

The generic  $C$  parity spinors can be written as

$$\psi_M^{h;(\epsilon_j)} = \begin{pmatrix} \epsilon_j \xi_1^* \\ \epsilon_j \xi_2^* \\ \xi_1^* \\ \xi_2^* \end{pmatrix}, \quad \xi_\alpha^* = (i\sigma_2)_{\alpha\beta} (\xi^\beta)^*,$$

$$\zeta = \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta = \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Here,  $\xi^\alpha$  and  $\xi_\beta^*$  are the complex components of  $(0, 1/2)$ , and  $(1/2, 0)$ , respectively, which in turn correspond to spinor-, and co-spinor, while  $i\sigma_2$ , with  $\sigma_2$  standing for the second Pauli matrix, plays the role of metric in spinor space [12]. Note that for charged Dirac spinors,  $(1/2, 0)$  and  $(0, 1/2)$  are uncorrelated.

As long as parity and charge conjugation operators in  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  do not commute,  $\psi_M^{h;(\pm 1)}(\mathbf{p})$  will be a linear combination of Dirac's  $u_h(\mathbf{p})$  and  $v_h(\mathbf{p})$  spinors, and *vice versa*. The easiest way to find the linear combination is to solve eqs. (6) and (7) in the rest frame, and compare the solutions. To be specific, we exploit Cartesian rest frame spinors, here denoted by  $\zeta_h(\mathbf{0}) \simeq (0, 1/2)$ ,

$$\zeta_1(\mathbf{0}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta_1(\mathbf{0}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

### 2.1 Momentum space Majorana spinors of real $C$ parity and symmetric Majorana mass term

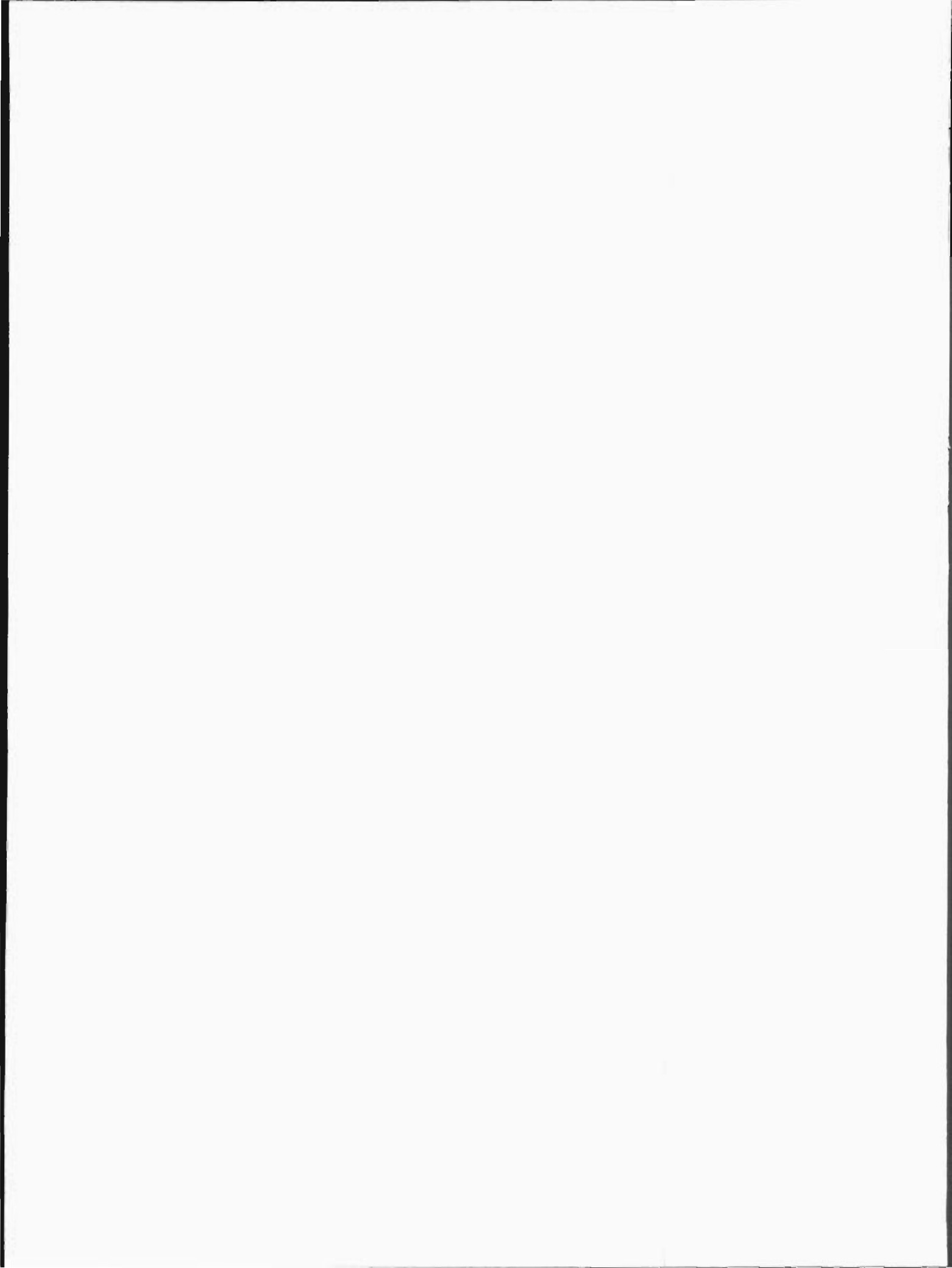
For concreteness, we first consider real  $C$  parity spinors, *i.e.*  $\epsilon_j = \pm 1$  in eq. (8). Next we solve eq. (6), for  $u_h(\mathbf{p})$ ,  $v_h(\mathbf{p})$  and eq. (7) for  $\psi_M^{h;(\pm 1)}(\mathbf{p})$ , respectively, in following the procedure of ref. [13]. Finally, in comparing spatial to  $C$  parity solutions we encounter the following decomposition of momentum space Majorana into momentum space Dirac spinors:

$$\begin{pmatrix} \psi_M^{1;(+1)}(\mathbf{p}) \\ \psi_M^{1;(+1)}(\mathbf{p}) \\ \psi_M^{1;(-1)}(\mathbf{p}) \\ \psi_M^{1;(-1)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1_4 & 1_4 & -1_4 & 1_4 \\ -1_4 & 1_4 & -1_4 & -1_4 \\ 1_4 & -1_4 & -1_4 & -1_4 \\ 1_4 & 1_4 & 1_4 & -1_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(\mathbf{p}) \\ u_1(\mathbf{p}) \\ v_1(\mathbf{p}) \\ v_1(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \quad (10)$$

Notice unitarity of the transformation matrix.

From the last equation one immediately reads off that Majorana spinors are self-orthogonal. Row by row one finds,

$$\bar{\psi}_M^{A;(\epsilon_j)}(\mathbf{p}) \psi_M^{A;(\epsilon_j)}(\mathbf{p}) = \sum_{h=1,4} u_h(\mathbf{p}) u_h(\mathbf{p}) + \sum_{h=1,4} \bar{v}_h(\mathbf{p}) v_h(\mathbf{p}) = 0, \quad (11)$$



where we used  $\bar{u}_h(\mathbf{p})u_h(\mathbf{p}) = 2m$ , and  $\bar{v}_h(\mathbf{p})v_h(\mathbf{p}) = -2m$ . Moreover, the  $\psi_M^{h,(\pm)}$ ( $\mathbf{p}$ )'s are cross-normalized according to

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_M^{\Gamma, (+1)}(\mathbf{p})\Psi_M^{\Gamma, (-1)}(\mathbf{p}) &= \bar{\Psi}_M^{\Gamma, (+1)}(\mathbf{p})\Psi_M^{\Gamma, (-1)}(\mathbf{p}) = 2m, \\ \bar{\Psi}_M^{\Gamma, (+1)}(\mathbf{p})\Psi_M^{\Gamma, (-1)}(\mathbf{p}) &= \bar{\Psi}_M^{\Gamma, (-1)}(\mathbf{p})\Psi_M^{\Gamma, (+1)}(\mathbf{p}) = -2m.\end{aligned}\quad (12)$$

Self-orthogonality and cross-normalization are unpleasant properties as they frustrate covariant propagation and local canonical quantization (see ref. [6] for technical details). It is one of the goals of the present study to find a way out of these problems.

The equation satisfied by the momentum space Majorana spinors is now determined in subjecting  $[(\not{p} - m) \otimes I_2] \oplus [(\not{p} + m) \otimes I_2]$  to a similarity transformation by means of the matrix in the r.h.s. in eq. (10):

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1_4 & 1_4 & -1_4 & 1_4 \\ -1_4 & 1_4 & -1_4 & -1_4 \\ 1_4 & -1_4 & -1_4 & -1_4 \\ 1_4 & 1_4 & 1_4 & -1_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \not{p} - m & 0_4 & 0_4 & 0_4 \\ 0_4 & \not{p} - m & 0_4 & 0_4 \\ 0_4 & 0_4 & \not{p} + m & 0_4 \\ 0_4 & 0_4 & 0_4 & \not{p} + m \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} 1_4 & 1_4 & -1_4 & 1_4 \\ -1_4 & 1_4 & -1_4 & -1_4 \\ 1_4 & -1_4 & -1_4 & -1_4 \\ 1_4 & 1_4 & 1_4 & -1_4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \not{p} & 0_4 & 0_4 & m1_4 \\ 0_4 & \not{p} & -m1_4 & 0_4 \\ 0_4 & -m1_4 & \not{p} & 0_4 \\ m1_4 & 0_4 & 0_4 & \not{p} \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (13)$$

The resulting set of equations for momentum space Majorana spinors can be cast into the following block-diagonal form:

$$\begin{pmatrix} \not{p} & -m1_4 & 0_4 & 0_4 \\ -m1_4 & \not{p} & 0_4 & 0_4 \\ 0_4 & 0_4 & \not{p} & m1_4 \\ 0_4 & 0_4 & m1_4 & \not{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_M^{\Gamma, (+1)}(\mathbf{p}) \\ \Psi_M^{\Gamma, (-1)}(\mathbf{p}) \\ \Psi_M^{\Gamma, (+1)}(\mathbf{p}) \\ \Psi_M^{\Gamma, (-1)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = 0. \quad (14)$$

Finally, eq. (14) is equivalently rewritten as the following system of two coupled Dirac equations:

$$\begin{pmatrix} \not{p} & \mp m1_4 \\ \mp m1_4 & \not{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_M^{h, (\epsilon_1)}(\mathbf{p}) \\ \psi_M^{-h, (-\epsilon_1)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = 0. \quad (15)$$

At that stage it is rather instructive to recall the following properties of Dirac spinors:

$$\gamma_5 u_h(\mathbf{p}) = v_h(\mathbf{p}), \quad \gamma_5 v_h(\mathbf{p}) = u_h(\mathbf{p}), \quad (16)$$

$$C u_\uparrow(\mathbf{p}) = v_\uparrow(\mathbf{p}), \quad C u_\downarrow(\mathbf{p}) = -v_\downarrow(\mathbf{p}),$$

$$C v_\uparrow(\mathbf{p}) = -u_\uparrow(\mathbf{p}), \quad C v_\downarrow(\mathbf{p}) = u_\downarrow(\mathbf{p}). \quad (17)$$

The insertion of eqs. (16) and (17) into eq. (10) allows to re-express the Majorana spinors as combinations of the left-handed (L), and the charge-conjugate right-handed (R) Dirac spinors according to

$$\begin{aligned}\Psi_M^{\Gamma, (+1)}(\mathbf{p}) &= u_\uparrow^L(\mathbf{p})^c + u_\uparrow^R(\mathbf{p}), \\ \Psi_M^{\Gamma, (+1)}(\mathbf{p}) &= u_\downarrow^L(\mathbf{p})^c + u_\downarrow^R(\mathbf{p}), \\ \Psi_M^{\Gamma, (-1)}(\mathbf{p}) &= -v_\uparrow^R(\mathbf{p}) + v_\uparrow^L(\mathbf{p})^c, \\ \Psi_M^{\Gamma, (-1)}(\mathbf{p}) &= -v_\downarrow^R(\mathbf{p}) + v_\downarrow^L(\mathbf{p})^c.\end{aligned}\quad (18)$$

Here,

$$\begin{aligned}u_h^R(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2} (1_4 - \gamma_5) u_h(\mathbf{p}), \\ u_h^L(\mathbf{p})^c &= \frac{1}{2} (1_4 + \gamma_5) i\gamma_2 u_h^*(\mathbf{p}),\end{aligned}\quad (19)$$

are the same classical Majorana spinors that have been introduced within the context of neutrino oscillations in refs. [10,11]. The two coupled Dirac-like equations (15) are now equivalently rewritten to

$$\begin{aligned}\not{p} (u_\uparrow^R(\mathbf{p}) + u_\uparrow^L(\mathbf{p})^c) &= m (-v_\uparrow^R(\mathbf{p}) + v_\uparrow^L(\mathbf{p})^c), \\ \not{p} (-v_\uparrow^R(\mathbf{p}) + v_\uparrow^L(\mathbf{p})^c) &= m (u_\uparrow^R(\mathbf{p}) + u_\uparrow^L(\mathbf{p})^c).\end{aligned}\quad (20)$$

The technique used by us to treat the coupled equations (15) is to introduce the following complete set of auxiliary eight-dimensional spinors:

$$\begin{aligned}A_l(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} u_\uparrow^L(\mathbf{p})^c + u_\uparrow^R(\mathbf{p}) \\ \alpha_l (-v_\uparrow^R(\mathbf{p}) + v_\uparrow^L(\mathbf{p})^c) \end{pmatrix}, \\ l &= 1, 7, \quad \alpha_1 = -\alpha_7 = 1, \\ A_k(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} -v_\uparrow^R(\mathbf{p}) + v_\uparrow^L(\mathbf{p})^c \\ \alpha_k (u_\uparrow^L(\mathbf{p})^c + u_\uparrow^R(\mathbf{p})) \end{pmatrix}, \\ k &= 2, 8, \quad \alpha_2 = -\alpha_8 = 1, \\ A_r(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} u_\uparrow^L(\mathbf{p})^c + u_\uparrow^R(\mathbf{p}) \\ \alpha_r (-v_\uparrow^R(\mathbf{p}) + v_\uparrow^L(\mathbf{p})^c) \end{pmatrix}, \\ r &= 3, 5, \quad \alpha_3 = -\alpha_5 = -1, \\ A_s(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} -v_\uparrow^R(\mathbf{p}) + v_\uparrow^L(\mathbf{p})^c \\ \alpha_s (u_\uparrow^L(\mathbf{p})^c + u_\uparrow^R(\mathbf{p})) \end{pmatrix}, \\ s &= 4, 6, \quad \alpha_4 = -\alpha_6 = -1.\end{aligned}\quad (21)$$

The advantage of the auxiliary spinors is that they can be ortho-normalized provided, one exploits the matrix from the mass term in eq. (15) as a metric in the auxiliary space and defines  $\bar{A}_k(\mathbf{p})$  as

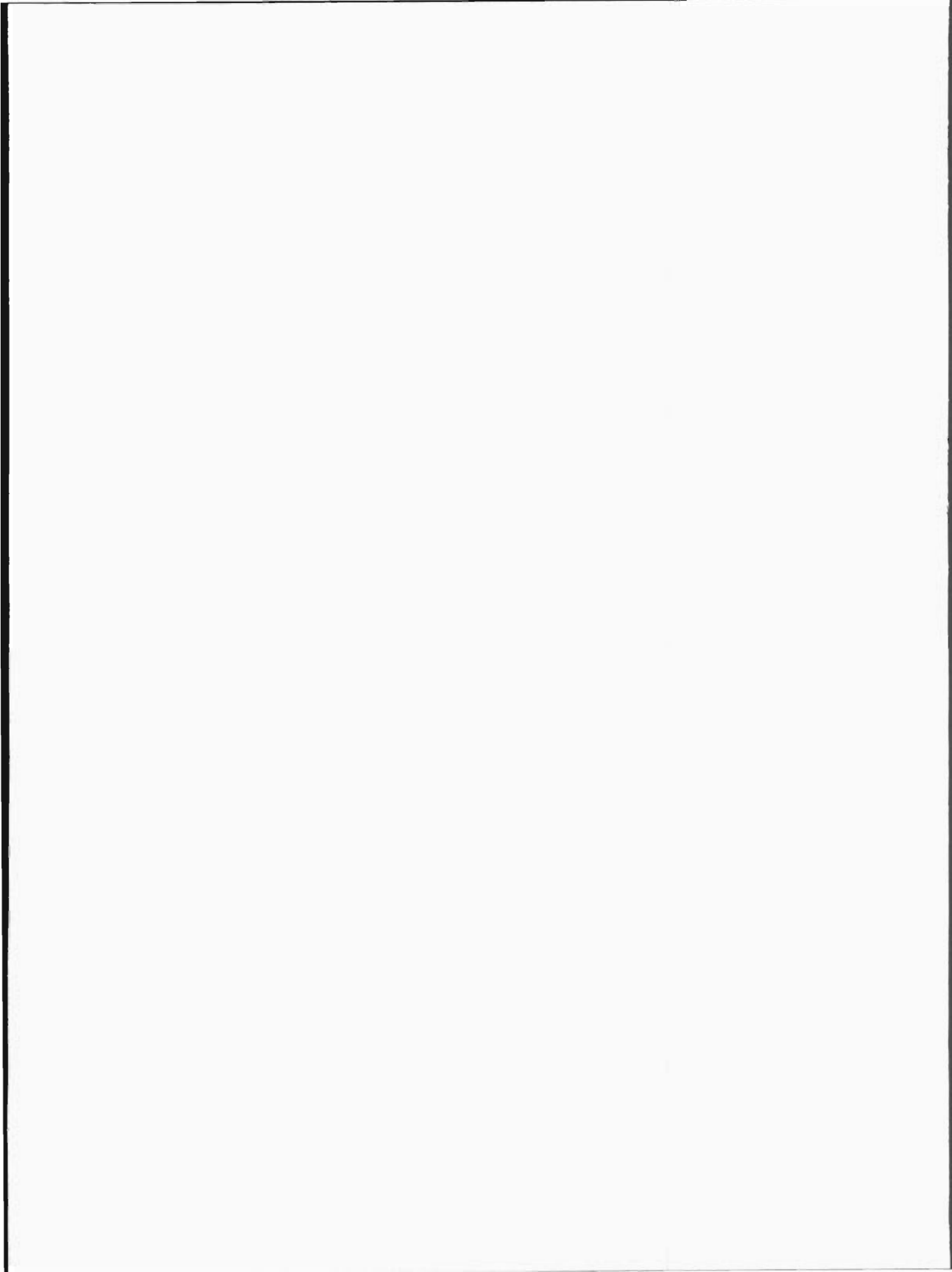
$$\begin{aligned}\bar{A}_k(\mathbf{p}) &= [A_k(\mathbf{p})]^\dagger \Gamma_8 \Gamma^0, \quad k = 1, \dots, 8, \\ \Gamma_0 &= \gamma_0 \otimes 1_2, \quad \Gamma_8 = \begin{pmatrix} 0_4 & 1_4 \\ 1_4 & 0_4 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (22)$$

With this definition, the norms of the  $A_j(\mathbf{p})$  spinors are obtained as

$$\begin{aligned}\bar{A}_i(\mathbf{p})A_i(\mathbf{p}) &= +4m, \quad i = 1, 2, 7, 8, \\ \bar{A}_j(\mathbf{p})A_j(\mathbf{p}) &= -4m, \quad j = 3, 4, 5, 6, \\ \bar{A}_k(\mathbf{p})A_l(\mathbf{p}) &= 0, \quad k \neq l.\end{aligned}\quad (23)$$

It is interesting to express  $\bar{A}_i(\mathbf{p})A_i(\mathbf{p})$  in terms of  $u_h^R(\mathbf{p})$ ,  $u_h^L(\mathbf{p})^c$ ,  $v_h^R(\mathbf{p})$ , and  $v_h^L(\mathbf{p})^c$ . To be specific, for  $i = 1$  we find

$$\begin{aligned}\bar{A}_1(\mathbf{p})A_1(\mathbf{p}) &= -\overline{v_\uparrow^R(\mathbf{p})} u_\uparrow^L(\mathbf{p})^c - \left( \overline{v_\uparrow^R(\mathbf{p})} u_\uparrow^L(\mathbf{p})^c \right)^\dagger \\ &\quad + \overline{v_\uparrow^L(\mathbf{p})^c} u_\uparrow^R(\mathbf{p}) + \left( \overline{v_\uparrow^L(\mathbf{p})^c} u_\uparrow^R(\mathbf{p}) \right)^\dagger.\end{aligned}\quad (24)$$



In the standard notations of refs. [10,11], the latter equation translates into a Majorana mass term with a real symmetric mass matrix,  $F^8$ , in the space of states like

$$\begin{pmatrix} \nu_h^{cL} + \nu_h^R \\ \pm (-\bar{\nu}_{-h}^R + \bar{\nu}_{-h}^{cL}) \end{pmatrix}, \quad (25)$$

describing one neutrino-generation.

Equation (23) shows that the auxiliary (8d) space contains equal numbers of spinors of real positive and of real negative norms, much alike the Dirac space. This advantage allows for a canonical quantization *à la* Dirac when introducing the local  $\Psi_{\{8\}}(x)$  field operator as

$$\Psi_{\{8\}}(x) = \int dV \left[ \sum_{k=1,2,7,8} A_k(\mathbf{p}) a_k(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + \sum_{j=3,4,5,6} A_j(\mathbf{p}) a_j^\dagger(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \right]. \quad (26)$$

Here,  $dV$  is the appropriate phase volume. This local quantum field is built on top of momentum space Majorana spinors and the counterpart of eq. (3). It allows to calculate  $\beta$  decays in terms of  $A_i(\mathbf{p})$  momentum space spinors.

## 2.2 Momentum space Majorana spinors of pure imaginary C parity and anti-symmetric Majorana mass term

For the momentum space Majorana spinors of pure imaginary C parity,  $\epsilon_j^\pm = \mp i$  in eq. (8), the transformation matrix in eq. (10) changes to

$$\begin{pmatrix} 1_4 & 1_4 & -1_4 & 1_4 \\ -1_4 & 1_4 & -1_4 & -1_4 \\ 1_4 & -1_4 & -1_4 & -1_4 \\ 1_4 & 1_4 & 1_4 & -1_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1_4 & -i1_4 & -1_4 & -i1_4 \\ i1_4 & 1_4 & i1_4 & -1_4 \\ 1_4 & i1_4 & -1_4 & i1_4 \\ -i1_4 & 1_4 & -i1_4 & -1_4 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

As a result, in place of eq. (15), one finds

$$\begin{pmatrix} \not{p} & \mp im1_4 \\ \pm im1_4 & \not{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_M^{h;(\mp\pm)}(\mathbf{p}) \\ \Psi_M^{l;(\mp\pm)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = 0. \quad (28)$$

In nullifying the determinant of the latter equation, one obtains the standard time-like energy momentum dispersion relation,  $p^2 - m^2 = 0$ , and delivers thereby the proof that imaginary C parity, contrary to imaginary spatial parity, does not necessarily imply acausal spinor propagation. Also these spinors are self-orthogonal

$$\bar{\Psi}_M^{h;(\mp\pm)}(\mathbf{p}) \Psi_M^{h;(\mp\pm)}(\mathbf{p}) = 0, \quad (29)$$

and cross-normalized according to

$$\bar{\Psi}_M^{h;(\mp\pm)}(\mathbf{p}) \Psi_M^{-h;(\mp\pm)}(\mathbf{p}) = \pm 2im(\delta_{h\uparrow} - \delta_{h\downarrow}), \quad (30)$$

a property termed to as *bi-orthogonality* in refs. [14]. Notice that the imaginary cross-norms change sign upon reversing the order of the spinors. At the present stage this may look odd but in the long term it will be of interest in so far as it will amount to slightly different physics relative to real C parity Majorana spinors in eq. (8). The coupled equations (28) have been written down (up to notational differences) already in ref. [15] by inspection of explicitly constructed momentum space Majorana spinors.

The complete set of auxiliary (8d) spinors corresponding to eqs. (28) is introduced as

$$\begin{aligned} A_1^\tau(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} u_1^R(\mathbf{p}) \mp iu_1^L(\mathbf{p})^c \\ \eta_1 (u_1^R(\mathbf{p}) \mp iu_1^L(\mathbf{p})^c) \end{pmatrix}, \\ A_2^\tau(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} u_1^R(\mathbf{p}) \mp iu_1^L(\mathbf{p})^c \\ \eta_1 (u_1^R(\mathbf{p}) \mp iu_1^L(\mathbf{p})^c) \end{pmatrix}, \\ A_3^\tau(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} -v_1^R(\mathbf{p}) \pm iv_1^L(\mathbf{p})^c \\ \eta_2 (-v_1^R(\mathbf{p}) \pm iv_1^L(\mathbf{p})^c) \end{pmatrix}, \\ A_4^\tau(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} -v_1^R(\mathbf{p}) \pm iv_1^L(\mathbf{p})^c \\ \eta_2 (-v_1^R(\mathbf{p}) \pm iv_1^L(\mathbf{p})^c) \end{pmatrix}, \\ \tau &= \pm, \quad \eta_1 = -\eta_2 = 1. \end{aligned} \quad (31)$$

Defining now  $\bar{A}_k^\tau(\mathbf{p})$  as

$$\bar{A}_k^\tau(\mathbf{p}) = [A_k^\tau(\mathbf{p})]^\dagger \bar{I}_8 I^0, \quad \bar{I}_8 = \begin{pmatrix} 0_4 & -i1_4 \\ i1_4 & 0_4 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

allows for the construction of an orthogonal basis in the recent (8d) space as

$$\begin{aligned} \bar{A}_j^\tau(\mathbf{p}) A_j^\tau(\mathbf{p}) &= +4m, \quad \tau = +, j = 1, 4; \tau = -, j = 2, 3 \\ \bar{A}_k^\tau(\mathbf{p}) A_k^\tau(\mathbf{p}) &= -4m, \quad \tau = +, k = 2, 3; \tau = -, k = 1, 4, \\ \bar{A}_k^\tau(\mathbf{p}) A_l^{\tau'}(\mathbf{p}) &= 0, \quad \tau \neq \tau', \quad k \neq l. \end{aligned} \quad (33)$$

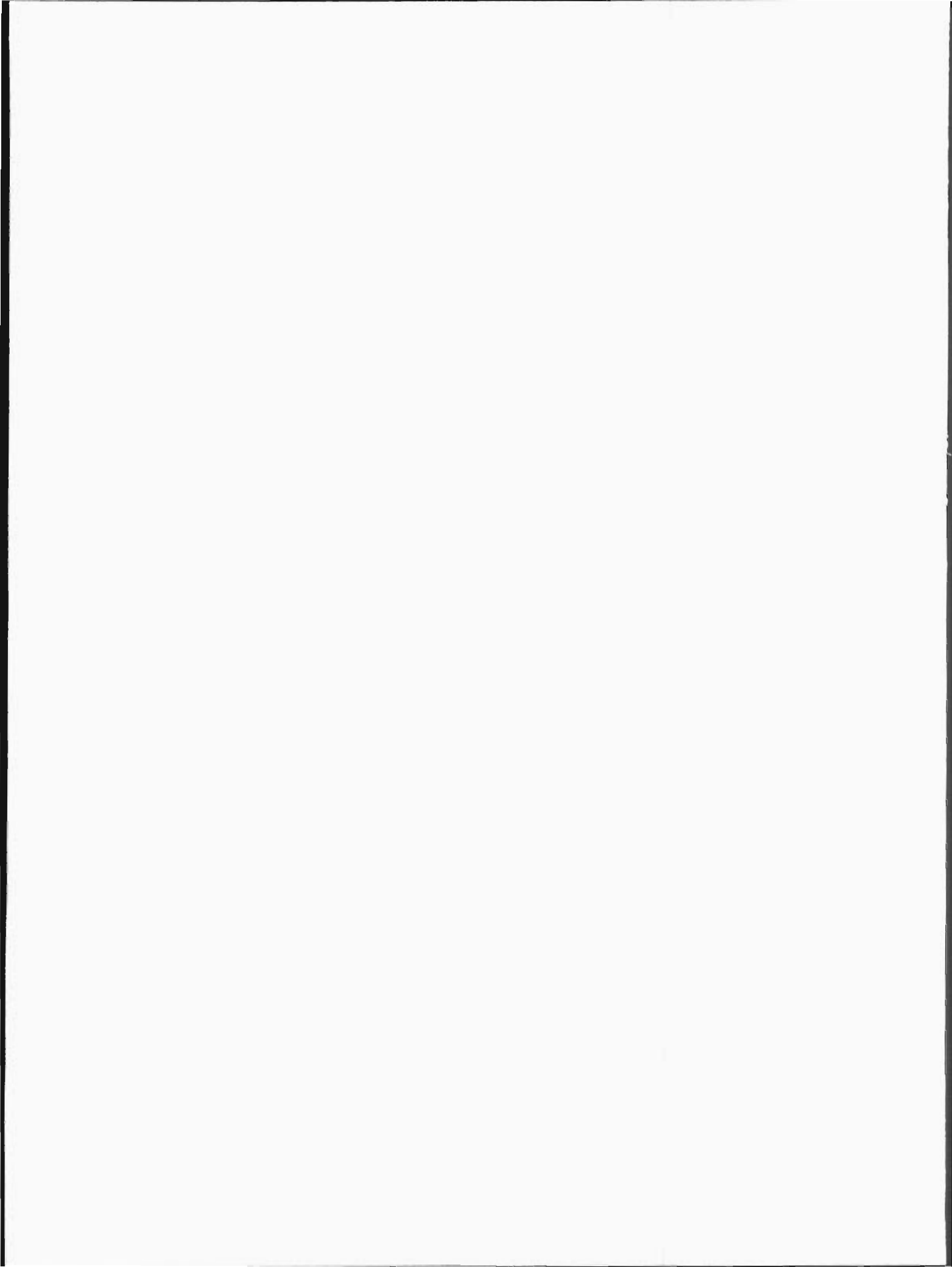
In terms of the degrees of freedom in eq. (19), say,  $\bar{A}_1^-(\mathbf{p}) A_1^-(\mathbf{p})$ , is expressed as

$$\begin{aligned} \bar{A}_1^-(\mathbf{p}) A_1^-(\mathbf{p}) &= -\overline{u_1^L(\mathbf{p})^c} u_1^R(\mathbf{p}) + \left( \overline{u_1^L(\mathbf{p})^c} u_1^R(\mathbf{p}) \right)^+ \\ &\quad - \overline{u_1^R(\mathbf{p})} u_1^L(\mathbf{p})^c + \left( \overline{u_1^R(\mathbf{p})} u_1^L(\mathbf{p})^c \right)^+. \end{aligned} \quad (34)$$

Again, in the standard notations of refs. [10,11], the latter equation translates into a Majorana mass term with an imaginary and anti-symmetric mass matrix,  $\bar{F}^8$ , in the space of states of the type

$$\begin{pmatrix} \nu_h^R \mp i\nu_h^{cL} \\ \pm (\nu_{-h}^R \mp i\nu_{-h}^{cL}) \end{pmatrix}, \quad (35)$$

describing one neutrino-generation. Also this space bifurcates into equal numbers of spinors with real positive and



real negative norms, much alike the Dirac space. The matrix  $\tilde{\Gamma}_8 \Gamma_0$  plays once again the role of the new metric here, which this time is purely imaginary and anti-symmetric, which are properties that relate to eq. (30). Also here canonical quantization *à la* Dirac is straightforward.

Comparison between eqs. (33) and (23) shows that the mass matrix in the coupled equations depends on the  $C$  parity,  $\epsilon_j^*$ , in eq. (8). In case  $\epsilon_j^*$  is real, the mass matrix is real and symmetric, while in case  $\epsilon_j^*$  is pure imaginary, it is imaginary and anti-symmetric. The above difference reflects the difference in the cross-normalization properties in eqs. (12) and (30), respectively, and will be of pivotal importance in the calculation of the single-beta decay performed below.

### 3 Single- $\beta$ decay with momentum space Majorana spinors

In order to illustrate the predictive power of models based upon momentum space Majorana spinors, here we take a close look at single- $\beta$  decay. When one considers physical processes that involve both Dirac and Majorana spinors, one needs to match single- with coupled-spinor equations. The simplest way to harmonize dimensions is to amplify the Dirac spinors in analogy with eqs. (21). In order to respect orthogonality of  $P$  eigenspinors, one has to keep spin projections the same at top and bottom. The complete set of Dirac eight-spinors introduced in this way is given by

$$U_{(j;h)}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} u_h(\mathbf{p}) \\ \eta_j u_h(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad V_{(j;h)}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} v_h(\mathbf{p}) \\ \eta_j v_h(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \\ \eta_1 = -\eta_2 = 1, \quad (36)$$

respectively. The metric in the auxiliary Dirac space is  $\Gamma_0 = \gamma_0 \otimes 1_2$ . To simplify notations, from now on we will suppress the momentum,  $\mathbf{p}$ , as argument of spinors and operators. First we consider the auxiliary (8d) space built on top of Majorana spinors of imaginary  $C$  parity. In order to calculate cross-sections, *i.e.* (8d) current-current tensors,  $G^{\mu\nu}$ , one has next to introduce the eight-currents. Here we consider the interface Dirac-Majorana current as the (8d) extension of the Dirac vector current according to

$$J_{(\tau;k)(j;h)}^\mu = \bar{A}_k^\tau \Gamma^\mu U_{(j;h)}, \\ \Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes 1_2, \quad k = 1, 2, 7, 8. \quad (37)$$

As an illustrative example, below we rewrite,  $J_{(+;1)(1;1)}^\mu$ , in terms of the degrees of freedom in eq. (19) as

$$J_{(+;1)(1;1)}^\mu = \bar{A}_1^+ \Gamma^\mu U_{(1;1)} \\ = \sum_k \bar{u}_k^L \gamma^\mu (u_{-k}^R)^c + \text{L} \leftrightarrow \text{R}.$$

Mass and four-momentum of the Dirac particle will be in turn denoted as  $m_1$ , and  $p_1$ . The above currents are conserved in the  $m \rightarrow m_1$  limit and have the property to take

states  $U_{(j;h)}$ , of positive norm, to  $C$  eigenstates, of positive norm too. The current-current tensor for  $J_{(\tau;k)(j;h)}^\mu$  is calculated to be

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{(\tau;k),(j;h)} \frac{1}{4} \bar{A}_k^\tau \Gamma^\mu U_{(j;h)} (\bar{A}_k^\tau \Gamma^\nu U_{(j;h)})^+ \quad (38)$$

In exploiting the definition of  $\bar{A}_k^\tau$  in eq. (33) and making use of,  $\Gamma^\nu + \Gamma^0 = \Gamma^0 \Gamma^\nu$ , one finds

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{(\tau;k)} \frac{1}{4} \bar{A}_k^\tau \Gamma^\mu \Pi^D \Gamma^\nu \tilde{\Gamma}_8^+ A_k^\tau, \\ 4m_1 \Pi^D = (U_{(1;1)} \bar{U}_{(1;1)} + U_{(2;1)} \bar{U}_{(2;1)}) \\ = (m_1 1_4 + \not{p}_1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Converting eq. (39) to trace is now standard and gives

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \text{tr} \begin{pmatrix} \not{p} \gamma^\mu & -im \gamma^\mu \\ im \gamma^\mu & \not{p} \gamma^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (p_1 + m_1) \gamma^\nu & (m_1 + \not{p}_1) \gamma^\nu \\ (m_1 + \not{p}_1) \gamma^\nu & (p_1 + m_1) \gamma^\nu \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{2} \text{tr} \not{p} \gamma^\mu (m_1 + \not{p}_1) \gamma^\nu. \quad (40)$$

Therefore, the trace entering the single- $\beta$  decay width turns out to be insensitive to the neutral fermion mass,  $m$ , in eq. (28).

The reason for this unexpected phenomenon is traced back to the anti-symmetric character of the cross-normalizations in eq. (30), and the coupled equations (28). The above properties show up in the trace in the form of the anti-symmetric off-diagonal matrix  $\tilde{\Gamma}_8$  which triggers cancellation of the neutral-particle mass.

The drop-out of the neutral-lepton mass from the beta decay trace in eq. (40) is an interesting though not as dramatic a phenomenon as the lepton masses affect only decay traces with polarized  $\beta$  decay sources (nucleon, nuclei). Recall that the lepton masses do not show up at all in the time-like  $G^{00}$ ,

$$G^{00} = 2(E_\nu E_e + \mathbf{p}_\nu \cdot \mathbf{p}_e + E_\nu \mathbf{p}_e \cdot \boldsymbol{\sigma} + E_e \mathbf{p}_\nu \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad (41)$$

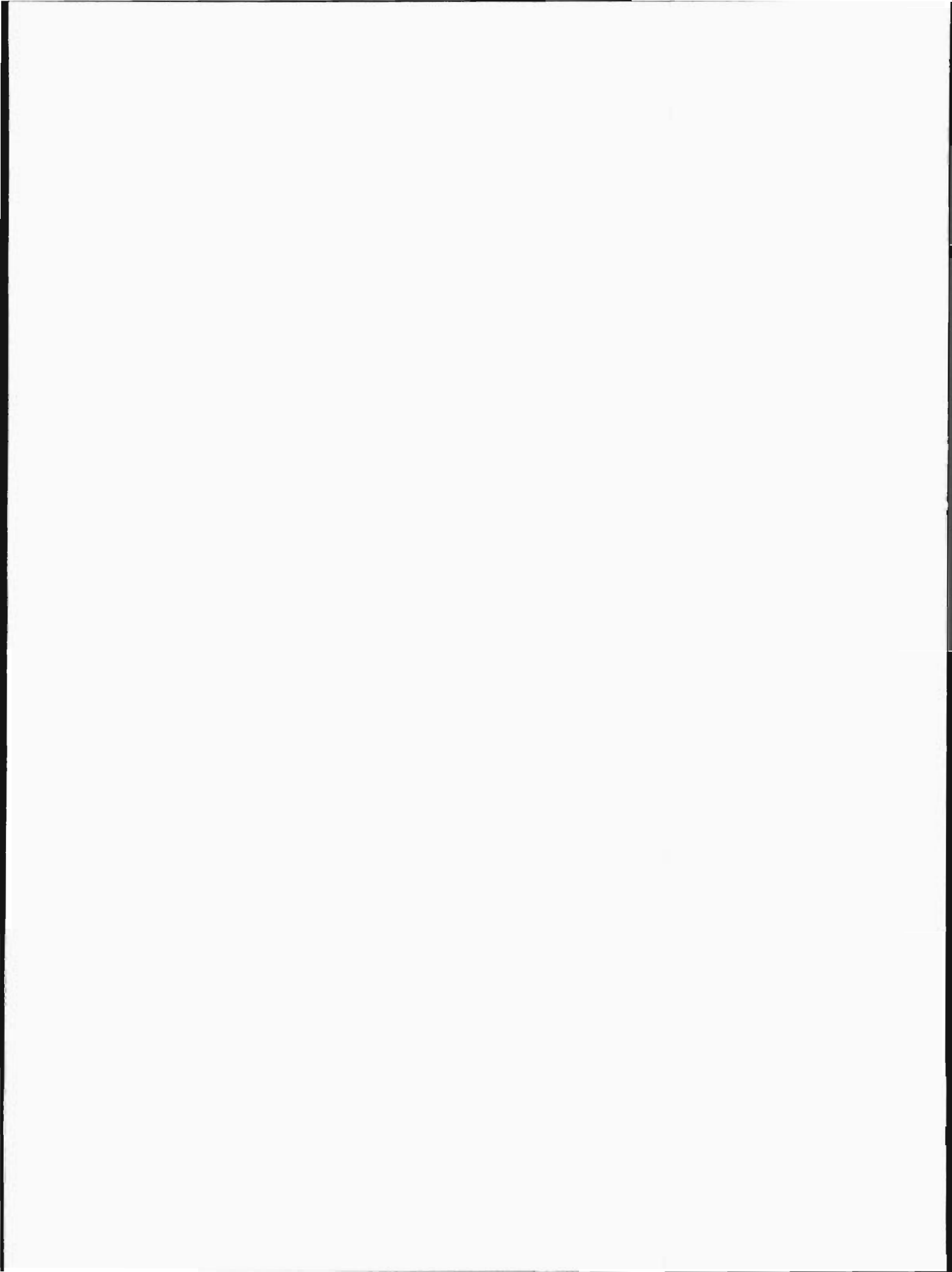
while in the space-like  $G^{ii}$  (with  $i = 1, 2, 3$ ) they enter only via spin-momentum correlation terms [16].

Had we used momentum space Majorana spinors with a real  $C$  parity, cross-normalization and coupled equations would be symmetric in accord with eqs. (12) and (15), respectively. In this case the Majorana  $\beta$  decay trace would have come out identical to the Dirac trace. In summary, compared to Dirac phenomenology, only momentum space Majorana spinors of imaginary  $C$  parity allow for differences with respect to single- $\beta$  decays of polarized sources.

### 4 The neutrinoless double-beta decay $0\nu\beta\beta$

The neutrinoless double-beta decay ( $0\nu\beta\beta$ ) is a process where two neutrons in a nucleus,  $A(Z, N)$ , are converted into two protons by the emission of two electrons while





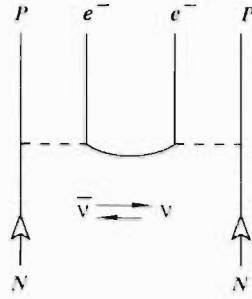


Fig. 1. Neutrinoless double-beta decay schematic representation.

the two anti-neutrinos close to a virtual internal line (see fig. 1):

$$A(Z, N) \rightarrow A(Z + 2, N - 2) + e^- + e^-, \quad (42)$$

(see ref. [3] for details).

This process is associated with a second-order element of the  $S$ -matrix and the related amplitude, here denoted by  $T_{0\nu\beta\beta}$ , is given by

$$T_{0\nu\beta\beta} = W^\mu W^\eta [\bar{u}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u_{\nu_e}] [\bar{u}_e \gamma_\eta (1 + \gamma_5) u_{\nu_e}]. \quad (43)$$

In order to bring in the virtual neutrino line in eq. (43), one makes use of the following identity:

$$\begin{aligned} \bar{u}_e \gamma_\eta (1 + \gamma_5) u_{\nu_e} &= \overline{((u_e)^c)^c} \gamma_\eta (1 + \gamma_5) ((u_{\nu_e})^c)^c \\ &= \bar{u}_{\nu_e} [-\gamma_\mu (1 - \gamma_5)] v_e. \end{aligned} \quad (44)$$

The latter expression is obtained by making use of the relations  $\gamma_0 \gamma_\mu^c = \gamma_\mu \gamma_0$ ,  $\gamma_2 \gamma_\mu^c = -\gamma_\mu^c \gamma_2$ ,  $\gamma_\mu^c = -\gamma_\mu$ , the anti-commutation relations between the Dirac matrices, with “ $c$ ” labeling the transposed matrix. With that, eq. (43) takes the form

$$\begin{aligned} T_{0\nu\beta\beta} &= W^\mu W^\eta \frac{1}{p_{\nu_e}^2 - m_{\nu_e}^2} L_{\mu\eta}, \\ L_{\mu\eta} &= \bar{u}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \Pi^{\nu_e} [-\gamma_\mu (1 - \gamma_5)] v_e, \\ \Pi^{\nu_e} &= \sum u_{\nu_e} \bar{u}_{\nu_e}. \end{aligned} \quad (45)$$

Here we suppressed “ $h$ ” labeling of the Dirac spinors in order not to overload notations so that  $\sum$  in  $\Pi^{\nu_e}$  means summation over spin projections. Finally,  $|L_{\mu\eta}|^2$  can be converted to a trace in the standard way as

$$\begin{aligned} |L_{\mu\eta}|^2 &= \left[ \bar{u}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \Pi^{\nu_e} \gamma_\eta (1 - \gamma_5) v_e \right] \\ &\quad \left[ \bar{u}_e \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \Pi^{\nu_e} \gamma_\delta (1 - \gamma_5) v_e \right]^+ \\ &= \text{tr} \left[ \Pi^{\nu_e} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \Pi^{\nu_e} \gamma_\eta (1 - \gamma_5) \Pi^{\nu_e} \right. \\ &\quad \left. \times \gamma_\delta \gamma_0 (1 + \gamma_5) \Pi^{\nu_e} \gamma_0 (1 - \gamma_5) \gamma_\lambda \right] \\ &= \text{tr} \left[ \Pi^{\nu_e} \gamma_\mu \frac{2m_{\nu_e}}{p_{\nu_e}^2} \gamma_\eta (1 - \gamma_5) \Pi^{\nu_e} \right. \\ &\quad \left. \times \gamma_\delta \gamma_0 \frac{2m_{\nu_e}}{p_{\nu_e}^2} \gamma_0 (1 - \gamma_5) \gamma_\lambda \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

In the latter equation the squared neutrino mass ( $m_{\nu_e}^2$ ) was neglected compared to the squared neutrino momentum,  $p_{\nu_e}^2$ , with the well-known result

$$(1 + \gamma_5) \Pi^{\nu_e} \gamma_\eta (1 - \gamma_5) = \frac{2m_{\nu_e}}{p_{\nu_e}^2} \gamma_\eta (1 - \gamma_5). \quad (47)$$

Now we calculate above trace within the scenario of the previous section. To do so, one has to perform in eq. (46) the replacements  $\gamma_\mu \rightarrow \Gamma_\mu$ ,  $u_e \rightarrow U_e$ ,  $v_e \rightarrow V_e$ ,  $u_{\nu_e} \rightarrow A_k^{S/A}$ , and

$$\Pi^{\nu_e} \rightarrow \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} m1_4 & -i\hat{p} \\ i\hat{p} & m1_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_4 & -i1_4 \\ i1_4 & 0_4 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Our calculation shows that the  $0\nu\beta\beta$  trace contains  $\bar{1}_8^2$  which is the (8d) identity matrix. In effect, one recovers eq. (46) and the well-known proportionality of the  $0\nu\beta\beta$  trace to the square of the neutrino mass. Therefore, the Majorana calculus does not alter the results of the Dirac theory of the neutrinoless double-beta decay.

## 5 Summary

We constructed two types of truly neutral spin-(1/2) quantum fields that differ by the  $C$  parity of the underlying momentum space Majorana spinors, real *versus* imaginary, a property that shows up as a difference in the symmetry of the corresponding Majorana mass matrices —real symmetric *versus* imaginary anti-symmetric. We exploited the above fields to calculate traces of single- and neutrinoless double-beta decays. Compared to standard phenomenology, the neutrinoless double-beta decay remains unaltered for both fields. The result extends also to one-gaugino exchange as long as the virtual fermion line in fig. 1 can be also a massive gaugino.

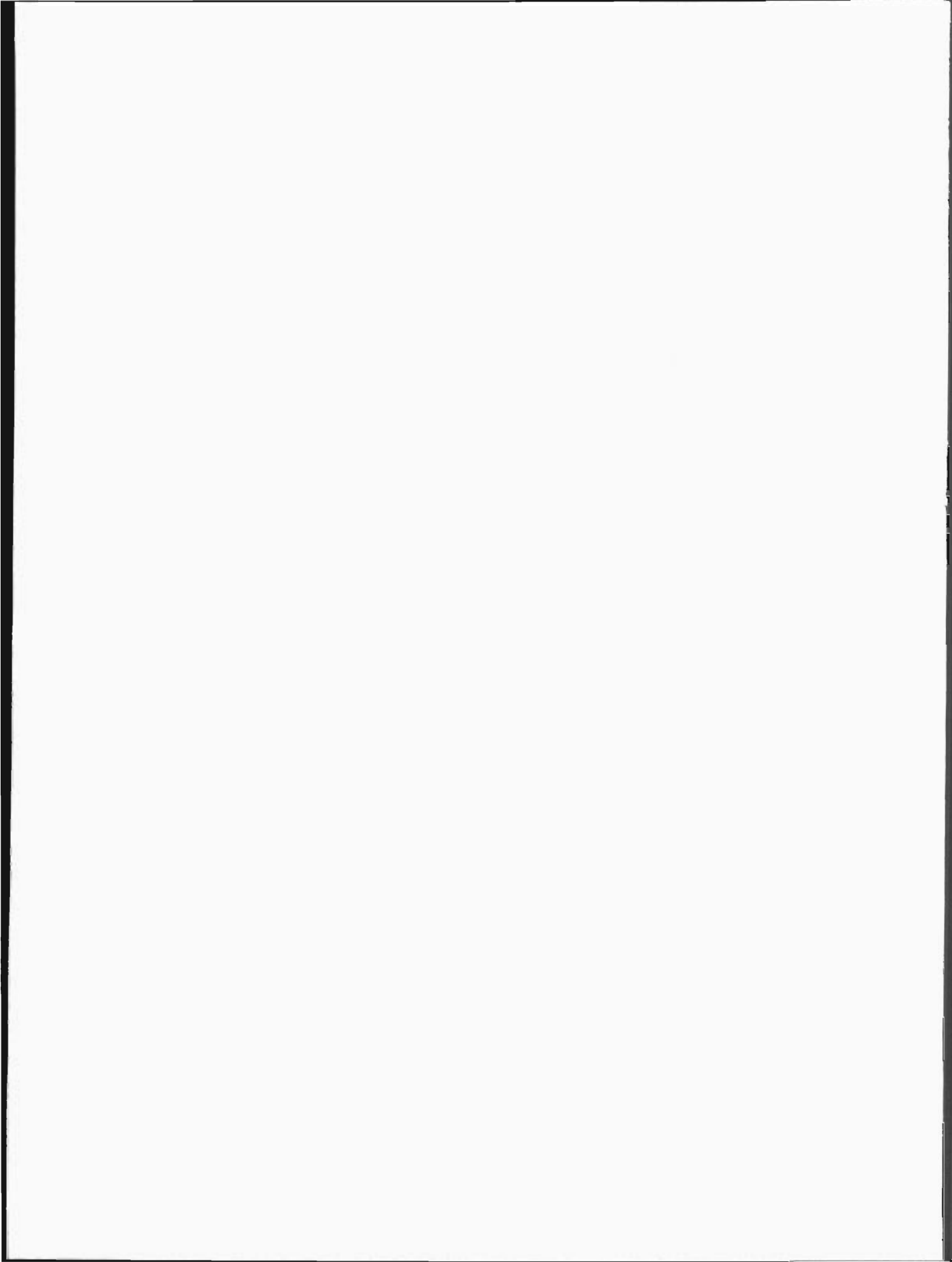
In single-beta decay, we observed a cancellation of the neutral-fermion mass in the trace, in the case of the Majorana field with the imaginary anti-symmetric mass matrix.

The latter option opens the curious possibility to have a neutral-fermion theory at hand that allows polarized tritium  $\beta$  decay [17] to drive the neutrino mass closer to zero compared to neutrino oscillation, and  $0\nu\beta\beta$  measurements, thus providing an intriguing and in principle experimentally testable signature for a non-trivial impact of momentum space Majorana spinors on phenomenology.

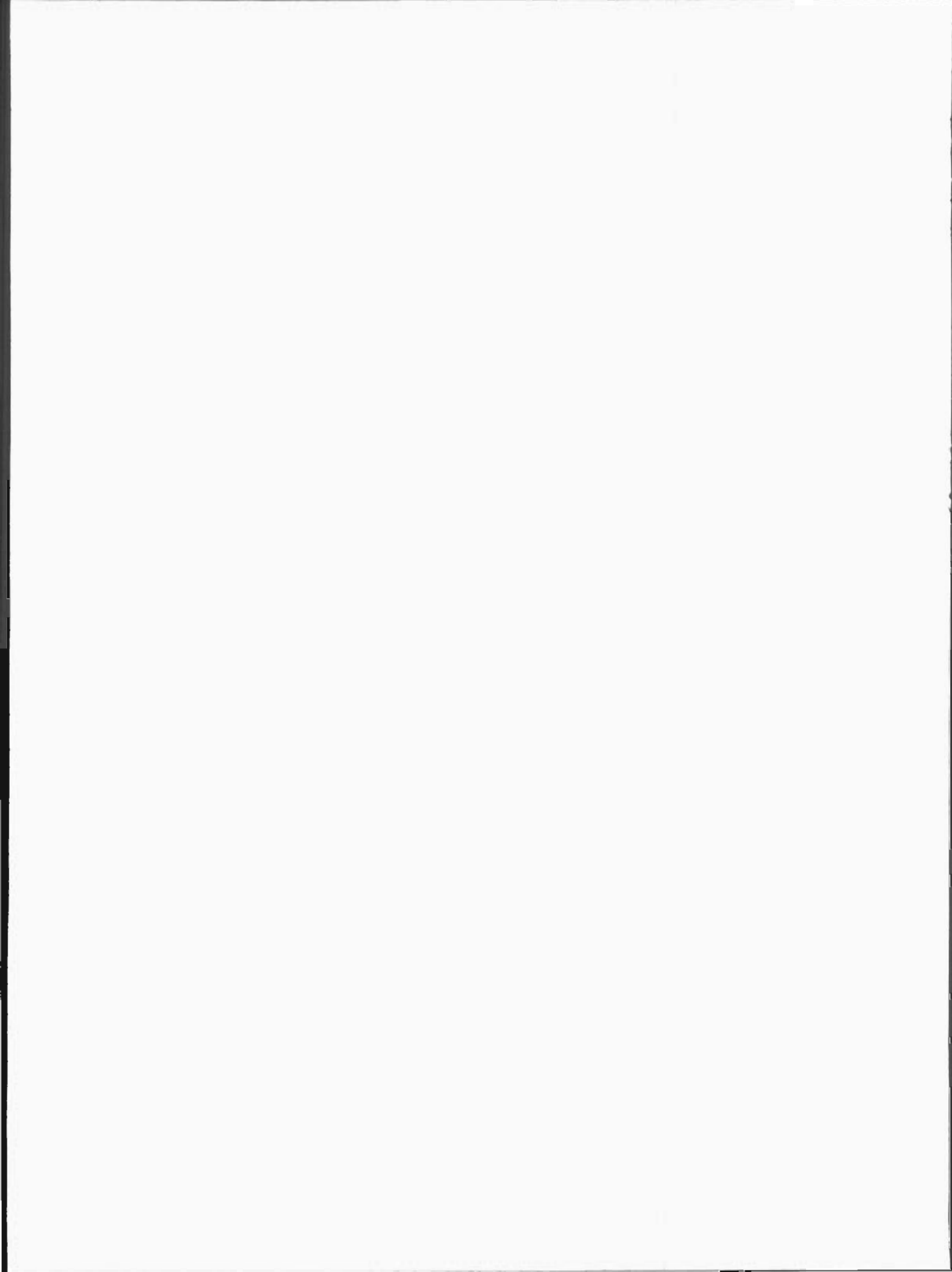
This work was supported by the Consejo Nacional de Ciencia y Tecnologia (CONASyT), Mexico, under grant No. C01-39820.

## References

1. M.E. Peskin, D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Westview Press, New York, 1995) pp. 68-76.
2. E. Majorana, *Nuovo Cimento* **14**, 171 (1937).



3. B. Kayser, F. Gibat-Debu, F. Perrier, *The Physics of Massive Neutrinos*, Lect. Notes Phys., Vol. 25 (World Scientific, Singapore, 1989).
4. E.D. Commins, P.H. Bucksbaum, *Weak Interactions of Leptons and Quarks* (Cambridge University Press, 1983).
5. B. Kayser, Phys. Rev. D **30**, 1023 (1984).
6. M. Kirchbach, C. Jasso, L. Noriega, *Neutral fermion phenomenology with Majorana spinors*, E-Print Archive: hep-ph/0310297.
7. P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer* (Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1989) p. 20.
8. Fayyazudin, Riazuddin, *A Modern Introduction to Particle Physics* (World Scientific, Singapore, 2000) Appendix A.8, pp. 325-330.
9. Stefan Pokorski, *Gauge Field Theories*, 2nd edition (Cambridge University Press, 2000) pp. 26-29.
10. S.M. Bilenky, B.M. Pontecorvo, Phys. Rep. **42**, 224 (1978).
11. S. Esposito, N. Tancredi, Eur. Phys. J. C **4**, 221 (1998).
12. J. Hladik, *Spinors in Physics* (Springer-Verlag, New York, 1999).
13. M. Kirchbach, D.V. Ahluwalia, Phys. Lett. B **529**, 124 (2002).
14. D.V. Ahluwalia, Int. J. Mod. Phys. A **11**, 1855 (1996); D.V. Ahluwalia, T. Goldman, M.B. Johnson, Acta Phys. Pol. B **25**, 1267 (1994).
15. V.V. Dvoeglazov, Int. J. Theor. Phys. **34**, 2467 (1995).
16. Judah Eisenberg, Walter Greiner, *Nuclear Theory*, Vol. 2 (North Holland Publ. Comp., Amsterdam, London, 1970) Chapt. 9.
17. J. Bonn *et al.*, Nucl. Phys. B **91**, 273 (2001); J. Bonn, in *Particles and Fields*, edited by J.L. Diaz-Cruz, J. Engelfried, M. Kirchbach, M. Mondragon, AIP Conf. Proc. **623**, 189 (2002).



# Neutral Fermion Phenomenology With Majorana Spinors

M. Kirchbach\*

*Instituto de Física, UASLP, Av. Manuel Nava 6, Zona Universitaria,  
San Luis Potosí, SLP 78240, México*

C. Compean

*Instituto de Física, UASLP, Av. Manuel Nava 6, Zona Universitaria,  
San Luis Potosí, SLP 78240, México*

L. Noriega

*Facultad de Física, UAZ, Av. Preparatoria 301, Fr. Progreso,  
Zacatecas, ZAC 98062, México*

---

## Abstract

We ask the question whether neutrino physics with momentum space Majorana spinors, the eigenvectors of the particle-antiparticle conjugation operator,  $C = i\gamma_2 K$  (with  $K$  standing for complex conjugation), is different but physics with Dirac spinors. First we analyze properties of Majorana spinors in great detail. We show that four dimensional, ( $4d$ ), Majorana spinors are unsuited for the construction of a local quantum field because  $C$  invariance does not allow for a covariant propagation in four spinor dimensions, a conduct due to  $\gamma_2 \not{p} = -\not{p}^* \gamma_2$ . The way out of this dilemma is finding one more discrete symmetry that respects  $C$  invariance and gives rise to covariant propagators. We construct such a symmetry in observing that the parity operator,  $\gamma_0$ , “ladders” between ( $4d$ ) Majorana rest frame spinors, which takes us to eight dimensional spinor spaces. We build up two types of ( $8d$ ) spaces— one with a symmetric- and an other with an anti-symmetric off diagonal metric and calculate traces of single beta- and neutrinoless double beta ( $0\nu\beta\beta$ ) decays there. We find physics with ( $8d$ ) Majorana spinors in the former space to be equivalent to physics with Dirac spinors in four dimensions. In the latter space we make the rare observation that in effect of cancellations triggered by the anti-symmetric off diagonal ( $8d$ ) metric, the neutrino mass drops from the single beta decay trace but reappears in  $0\nu\beta\beta$ , without the neutrino being massless in its free equation— a curious and in principle experimentally testable signature for a non-trivial impact of Majorana framework.

*Key words:* Majorana spinors, particle-anti-particle conjugation, beta decay

---

## 1 Introduction.

Virtual exchange of fermions among matter fields is a qualitatively new concept in contemporary particle physics and appears in supersymmetric theories as a process supplementary to the exchange of ordinary bosonic gauge fields.

Virtual fermions like photino, gravitino etc transport interactions and are truly neutral [1].

Further important process of the above type is the virtual neutrino line connecting two  $W_{\mu}^{-}\epsilon^{-}$  currents that provides the major contribution to the spectacular neutrinoless double beta decay [2], [3] where lepton number conservation appears violated.

Truly neutral fermions, in being their own anti-particles, are invariant under particle-anti-particle (charge) conjugation,  $C$ , and carry well defined  $C$  parity, while charged fermions are invariant under space reflection and are endowed with spatial,  $P$ , parity. As long as  $C$  and  $P$  do not commute, charged and truly neutral fermions are essentially different species.

Genuinely neutral spin-1/2 fermions are referred to as Majorana particles, while the charged ones are the Dirac particles.

The theory of Majorana fermions is based upon quantum fields that are  $C$  eigenstates. The calculus of widest use for neutral spin 1/2 fermions is based upon the so called Majorana quantum field, to be denoted by  $\nu(x)$  in the following. Its construction is inspired by the Dirac field,

$$\Psi_D(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2p_0}} \sum_h \left[ u_h(\mathbf{p}) a_h(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + v_h(\mathbf{p}) b_h^{\dagger}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \right]. \quad (1)$$

In defining the transformation properties of the Dirac spinors (in the convention of Ref. [4]) and the Fock operators under particle-anti-particle conjugation as [5]

---

\* Corresponding author

*Email addresses:* mariana@ifisica.uslp.mx (M. Kirchbach\* ),  
cliffor@ifisica.uslp.mx ( C. Compean), nohemi-27@hotmail.com (L. Noriega ).

$$\begin{aligned}
Cu_h(\mathbf{p}) &= \beta v_{-h}(\mathbf{p}), & Ca_h(\mathbf{p})C^{-1} &= \beta^{-1}b_{-h}^\dagger(\mathbf{p}), \\
\beta &= \delta_{h\downarrow} - \delta_{h\uparrow}, & &
\end{aligned}
\tag{2}$$

one concludes for  $C$

$$C = i\gamma_2 K, \tag{3}$$

with  $K$  standing for the operation of complex conjugation. The Majorana quantum field is now defined [6] in identifying in Eq. (1) the operators of particle- and anti-particle creation according to

$$\nu(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2p_0}} \sum_h \left[ u_h(\mathbf{p})a_h(\mathbf{p})e^{-ip\cdot x} + \lambda v_h(\mathbf{p}) a_h^\dagger(\mathbf{p})e^{ip\cdot x} \right], \tag{4}$$

where  $h$  stands for helicity, and  $\lambda$  is the so called *creation phase factor* introduced in [7]. The freedom of having the  $\lambda$  phase in Eq. (4) is important for obtaining a real mixing matrix under  $CP$  conservation. An other option for a neutral quantum field, termed to as  $\mu(x)$  by us, would be to use in place of massive Dirac spinors, which are parity,  $P$ , eigenvectors, the massive eigenvectors of the particle-anti-particle (charge) conjugation operator,  $C$ . Such spinors are known as momentum space Majorana spinors, and are denoted by us as  $\Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\mathbf{p})$ . Here,  $\epsilon_j = \pm 1$ , or  $\pm i$ , fixes  $C$  parity. A  $\mu(x)$  field built upon, say, real  $C$  parity momentum spinors is expected to take the form

$$\mu(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2p_0}} \sum_h \left[ \Psi_M^{h;(+1)}(\mathbf{p})a_h(\mathbf{p})e^{-ip\cdot x} + \Psi_M^{h;(-1)}(\mathbf{p}) a_h^\dagger(\mathbf{p})e^{ip\cdot x} \right] \tag{5}$$

Majorana spinors can be encountered in the neutrino physics chapters of a multitude of contemporary textbooks such like [2], [5], [8], [9], [10]. Now the main question is whether a construct like  $\mu(x)$  is reasonable, and if so, whether it predicts phenomena beyond the range of Eq. (4).

It is the goal of the present paper to answer these questions. We aim to go to the essentials of the  $C$  invariant four-spinors and unveil predictive power of truly neutral quantum fields entirely based upon momentum space  $C$  parity spinors. The preprint is organized as follows. Section 2 reveals various peculiarities of massive Majorana spinors such as twofold helicity content (in the helicity frame), and self-orthogonality. There we show that  $\mu(x)$  is unreasonable because the  $\Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\mathbf{p})$ 's are non-propagating. We circumvent the problem of  $\mathbf{p}$  independence of the Majorana propagators in noticing that  $p^\mu\gamma_\mu$  ladders between certain Majorana spinors, a property that reflects a discrete symmetry of Majorana spinors beyond  $C$  but in eight spinorial dimensions, ( $8d$ ). We exploit the new discrete symmetries for the construction of covariant projectors and corresponding wave equations.



Throughout Section 2 we use the textbook Majorana spinors,  $\Psi_M^{h:(\pm 1)}(\mathbf{p})$  of real  $C$  parity and build up the first complete set of eight dimensional spinor degrees of freedom. It is characterized by a metric that is real, off-diagonal, and symmetric.

In Section 3 we (i) design various ( $8d$ ) currents (ii) calculate the neutron beta decay trace, (iii) find it to be same as if we had worked in four dimensions with Dirac spinors.

We continue in Section 4 with Majorana spinors of pure imaginary  $C$  parity,  $\Psi_M^{h:(\mp i)}(\mathbf{p})$  in our notation. While this type of Majorana spinors has same gross peculiarities in  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  as the textbook ones, it also differs from the latter in some aspects. In particular, scalar products between such Majorana spinors change sign upon reversing order of the spinors. This peculiarity shows up in the associated eight dimensional space as a metric that is off-diagonal, purely imaginary and anti-symmetric.

In the latter space we make the rare observation that in effect of cancellations triggered by the anti-symmetric metric, the neutral particle mass can drop from the neutron beta decay trace and one finds a Dirac trace with a *massless* neutral particle sector, an effect that should be in principle observable in  $\beta$  decay with polarized sources.

In Section 5 we elaborate the trace in the neutrinoless double beta decay,  $0\nu\beta\beta$ , by means of ( $8d$ ) Majorana spinors and show it to be unaltered with respect to the standard expression based upon Dirac spinors, irrespective of the type of the spinor, or current input.

The paper closes with a brief Summary.

## 2 Majorana spinors of real $C$ parity.

The textbook Majorana spinors (here in momentum space) are defined as

$$\Psi_M^{h:(\epsilon_j)}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \epsilon_j i \sigma_2 \left( \Phi_L^h(\mathbf{p}) \right)^* \\ \Phi_L^h(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad h = \uparrow, \downarrow, \quad \epsilon_1 = -\epsilon_2 = 1. \quad (6)$$

Here  $\Phi_L^h(\mathbf{p})$  is a left handed,  $(0, 1/2)$ , spinor of given helicity,<sup>1</sup>  $\sigma_2$  is the standard second Pauli matrix,  $h = \uparrow, \downarrow$ , and  $\epsilon_j$  is the *real relative phase* between the Weyl spinors that will be identified with their  $C$  parity in the following.

As is well known [5],  $\sigma\sigma_2 = \sigma_2(-\sigma)^*$ , and

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \epsilon_j i\sigma_2 \left( \Phi_L^h(\mathbf{p}) \right)^* &= \epsilon_j i\sigma_2 (-\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma})^* \left( \Phi_L^h(\mathbf{p}) \right)^* \\ &= \epsilon_j (-h) i\sigma_2 \left( \Phi_L^h(\mathbf{p}) \right)^* = -\epsilon_j h \alpha \Phi_R^{-h}(\mathbf{p}), \end{aligned} \quad (7)$$

meaning that  $i\sigma_2 \left( \Phi_L^h(\mathbf{p}) \right)^*$  is (up to a sign  $\alpha = \pm$ ), a right handed field (henceforth denoted by  $\Phi_R^{-h}(\mathbf{p})$ ) of opposite helicity to  $\Phi_L^h(\mathbf{p})$ .

Therefore, contrary to Dirac spinors, Majorana spinors can not be prepared as pure helicity eigenstates. Rather, they are patched together by two Weyl spinors of opposite helicities.

### 2.1 Rest frame properties.

The explicit expressions for the rest frame spinors resulting from Eqs. (6) and (7) read

$$\begin{aligned} \Psi_M^{\uparrow;(+1)}(\mathbf{0}) &= \begin{pmatrix} \Phi_R^\downarrow(\mathbf{0}) \\ \Phi_L^\uparrow(\mathbf{0}) \end{pmatrix}, & \Psi_M^{\downarrow;(+1)}(\mathbf{0}) &= \begin{pmatrix} -\Phi_R^\uparrow(\mathbf{0}) \\ \Phi_L^\downarrow(\mathbf{0}) \end{pmatrix}, \\ \Psi_M^{\uparrow;(-1)}(\mathbf{0}) &= \begin{pmatrix} -\Phi_R^\downarrow(\mathbf{0}) \\ \Phi_L^\uparrow(\mathbf{0}) \end{pmatrix}, & \Psi_M^{\downarrow;(-1)}(\mathbf{0}) &= \begin{pmatrix} \Phi_R^\uparrow(\mathbf{0}) \\ \Phi_L^\downarrow(\mathbf{0}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

Preparing rest frame  $(1/2, 0)$ , and  $(0, 1/2)$  helicity spinors along the direction of the intended boost is standard (compare [5])

$$\Phi_{L/R}^\uparrow(\mathbf{0}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \sin(\theta/2)e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}, \quad \Phi_{L/R}^\downarrow(\mathbf{0}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \sin(\theta/2)e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ -\cos(\theta/2)e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

We used the convention  $i\sigma_2 \Phi_{L/R}^\uparrow(\mathbf{0}) = \Phi_{R/L}^\downarrow(\mathbf{0})$ , and denoted azimuthal and polar angles by  $\varphi$ , and  $\theta$ , respectively.

<sup>1</sup> We prefer to perform our calculations in the helicity frame where many a statements are more obvious. Our results are however basis independent, if not emphasized differently.

It verifies directly that  $\Psi_M^{\uparrow:(+1)}(\mathbf{0})$ , and  $\Psi_M^{\downarrow:(+1)}(\mathbf{0})$ , are of positive-, while  $\Psi_M^{\uparrow:(-1)}(\mathbf{0})$ , and  $\Psi_M^{\downarrow:(-1)}(\mathbf{0})$  are of negative  $C$  parity.

$$\begin{aligned} C\Psi_M^{h:(+1)}(\mathbf{0}) &= \Psi_M^{h:(+1)}(\mathbf{0}), \\ C\Psi_M^{h:(-1)}(\mathbf{0}) &= -\Psi_M^{h:(-1)}(\mathbf{0}). \end{aligned} \quad (10)$$

In other words,  $\epsilon_j = \pm 1$  can be viewed as a  $C$  parity label. The essential difference to Dirac spinors is that  $\Phi_R^h(\mathbf{p}) \neq i\sigma_2 \left(\Phi_L^h(\mathbf{p})\right)^*$ . It is that very difference which makes Majorana spinors so special and gives rise to several weird peculiarities, to be explored in the following.

## 2.2 Cross-Normalized Majorana spinors.

A curiosity occurs when calculating scalar products of the above Majorana spinors. In first place, all  $\Psi_M^{h:(\epsilon_j)}(\mathbf{0})$  are self-orthogonal. Second, also spinors of equal  $C$  parities happen to be orthogonal. The only non-vanishing scalar products are those between Majorana spinors of opposite  $C$  parities and opposite  $h$  labels,

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}_M^{\uparrow:(+1)}(\mathbf{0})\Psi_M^{\downarrow:(-1)}(\mathbf{0}) &= \overline{\Psi}_M^{\downarrow:(-1)}(\mathbf{0})\Psi_M^{\uparrow:(+1)}(\mathbf{0}) = 2m, \\ \overline{\Psi}_M^{\downarrow:(+1)}(\mathbf{0})\Psi_M^{\uparrow:(-1)}(\mathbf{0}) &= \overline{\Psi}_M^{\uparrow:(-1)}(\mathbf{0})\Psi_M^{\downarrow:(+1)}(\mathbf{0}) = -2m, \end{aligned} \quad (11)$$

with

$$\overline{\Psi}_M^{h:(\epsilon_j)}(\mathbf{0}) = \left(\Psi_M^{h:(\epsilon_j)}(\mathbf{0})\right)^\dagger \gamma_0, \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ 1_2 & 0_2 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Notice, that  $h$  specifies helicity of the lower Weyl spinor,  $\Phi_L^h(\mathbf{p})$ . Majorana spinors were shown above to be of twofold helicity content. In result, the textbook Majorana spinors build two independent spaces distinct by the sign of their cross-norms. Each subspace contains a positive- and a negative  $C$  parity spinor of non-vanishing cross-projections. As long as scalar products are Lorentz invariant, cross-normalization holds true in all inertial frames.

The self-orthogonality of Majorana spinors has a devastating impact on several fundamental operators in  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  such as mass term and projectors.

### 2.3 Absence of a diagonal mass term.

The structure of a (generic) Majorana spinor,  $\Psi_M^{h;(\epsilon_j)}$ , is more transparent within the context of the group  $SL(2, C)$  (consult [11] among others), where  $\Phi_L^h$  is the undotted upper-, while  $i\sigma_2(\Phi_L^h)^*$  is the dotted lower index spinor. We here focus our attention onto the diagonal (Dirac) mass term  $m_M \bar{\Psi}_M^{h;(\epsilon_j)} \Psi_M^{h;(\epsilon_j)}$ . In fact, it can not be introduced at all as self-orthogonality nullifies  $\bar{\Psi}_M^{h;(\epsilon_j)} \Psi_M^{h;(\epsilon_j)}$ .

One possible way out of vanishing Dirac mass terms for Majorana particles proposed in the literature is to restrict to two component spinors and to consider the Weyl spinor components,  $(\Phi_L^h)_a^*$ , and  $[i\sigma_2(\Phi_L^h)]_b^*$  with  $a, b = 1, 2$  as anti-commuting Grassmann numbers. In so doing, one produces the following mass term [5]

$$m_M \Phi_L^{h\dagger} [i\sigma_2(\Phi_L^h)^*] = m_M \left( (\Phi_L^h)_1^*, (\Phi_L^h)_2^* \right) \begin{pmatrix} (\Phi_L^h)_2^* \\ -(\Phi_L^h)_1^* \end{pmatrix},$$

$$(\Phi_L^h)_1^* (\Phi_L^h)_2^* = -(\Phi_L^h)_2^* (\Phi_L^h)_1^*. \quad (13)$$

The mass term for  $C$  eigenspinors in this scenario acquires purely quantum nature [12]. It is the first goal of the present study to construct classical mass terms for  $C$  parity spinors.

### 2.4 Boosted Majorana spinors.

In this subsection we consider the effect of the  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  boost, to be referred to as  $B_{R\pm L}(\mathbf{p})$ , upon  $\Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\mathbf{0})$ . In making once again use of Eq. (7) amounts to

$$\begin{pmatrix} \epsilon_j \alpha \Phi_R^{-h}(\mathbf{p}) \\ \Phi_L^h(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{p_0 + m}{2m}} \begin{pmatrix} 1_2 + \frac{|\mathbf{p}|}{p_0 + m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0_2 \\ 0_2 & 1_2 - \frac{|\mathbf{p}|}{p_0 + m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_j \alpha \Phi_R^{-h}(\mathbf{0}) \\ \Phi_L^h(\mathbf{0}) \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{\frac{p_0 + m}{2m}} \left( 1 - h \frac{|\mathbf{p}|}{p_0 + m} \right) \begin{pmatrix} \epsilon_j \alpha \Phi_R^{-h}(\mathbf{0}) \\ \Phi_L^h(\mathbf{0}) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

(compare also Ref. [13]). Identity and null matrices of dimensionality  $n \times n$  are denoted in turn by  $1_n$  and  $0_n$ , while positive and negative signs in front of the helicity operator,  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ , correspond to  $B_R(\mathbf{p})$ , and  $B_L(\mathbf{p})$ , respectively,

[14]. Beyond the representation of the boost matrix in Eq. (14), we shall occasionally use also the following manifestly covariant expressions for

$$B_{R\oplus L}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2m(p_0 + m)}}(\not{p} + m\gamma_0)\gamma_0. \quad (15)$$

and its inversed

$$B_{R\oplus L}(\mathbf{p})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2m(p_0 + m)}}\gamma_0(\not{p} + m\gamma_0). \quad (16)$$

### 2.5 Spatial parity spinors and Dirac equation.

In order to obtain  $\Psi_M^{h:(\epsilon_j)}(\mathbf{p})$  propagation one can proceed along the line of the general construction of wave equations from the discrete  $P$ , and  $C$  properties of space time. Recall, that the group-theoretical construction of the Dirac equation starts with the rest frame projector onto parity-eigenvectors,

$$\Pi_{\mathcal{R}}^{\pm}(\mathbf{0}) = \frac{1}{2}(1_4 \pm \gamma_0), \quad (17)$$

and the requirement that the spinors carry good spacial parity according to

$$\Pi_{\mathcal{R}}^{+}(\mathbf{0})u_h(\mathbf{0}) = u_h(\mathbf{0}), \quad \Pi_{\mathcal{R}}^{-}(\mathbf{0})v_h(\mathbf{0}) = v_h(\mathbf{0}), \quad (18)$$

with  $\mathcal{R}$  labeling space reflection. Notice that the  $\gamma_0$  transformation of the  $SL(2, C)$  spinors amounts to reflections in three space, i.e. to  $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ . The boosted form of Eq. (17) reads

$$\Pi_{\mathcal{R}}^{\pm}(\mathbf{p}) = B_{R\oplus L}(\mathbf{p})\frac{1}{2}(1_4 \pm \gamma_0)B_{R\oplus L}(\mathbf{p})^{-1} = \frac{\not{p} \pm m}{2m}. \quad (19)$$

The Dirac equations for the  $u$  and  $v$  spinors are then

$$\begin{aligned} B_{R\oplus L}(\mathbf{p})\frac{1}{2}(1_4 + \gamma_0)B_{R\oplus L}(\mathbf{p})^{-1}u_h(\mathbf{p}) &= u_h(\mathbf{p}), \\ B_{R\oplus L}(\mathbf{p})\frac{1}{2}(1_4 - \gamma_0)B_{R\oplus L}(\mathbf{p})^{-1}v_h(\mathbf{p}) &= v_h(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (20)$$

The solutions of Eqs. (20) can be found, among others, in Ref. [4]. The eigen-spinors of the totally symmetric real matrix  $\gamma_0$  are exclusively of real parities and the parity equals the relative phase between spinor and co-spinor in

$(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  [15]. In that regard, the general question on the relationship between the relative spinor–co-spinor phase and parity may be of interest. In other words, how does an imaginary spinor–co-spinor relative phase, say,

$$U_h^{\pm i}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \pm i \Phi_R^h(\mathbf{p}) \\ \Phi_L^h(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \quad (21)$$

relate to parity? In order to establish such a link we observe that

$$\gamma_0 \begin{pmatrix} \pm i \Phi_R^h(-\mathbf{p}) \\ \Phi_L^h(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}^* = \mp i \begin{pmatrix} \pm i \Phi_R^h(-\mathbf{p}) \\ \Phi_L^h(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}. \quad (22)$$

In a sense,  $\gamma_0 K \mathcal{R}$  acts as “analytical continuation” of the  $SL(2, C)$  parity operator and its eigenstates are of imaginary parity. Leaving aside the problem of a possible group structure for which  $\gamma_0 K \mathcal{R}$  covers space reflections, one nonetheless may try to subject the projector resulting from Eq. (22) to Lorentzian boost to obtain

$$B_{R \Rightarrow L}(\mathbf{p}) \frac{1}{2} (1_4 \pm i \gamma_0 K) B_{R \Rightarrow L}(\mathbf{p})^{-1} U_h^{\pm i}(\mathbf{p}) = U_h^{\pm i}(\mathbf{p}), \quad (23)$$

which is equivalent to

$$(\not{p} \gamma_0 + m)(\not{p}^* + m \gamma_0) U_h^{\pm i}(\mathbf{p})^* = \mp i 2m (E + m) U_h^{\pm i}(\mathbf{p}), \quad (24)$$

an equation that (i) invokes imaginary masses and acausal propagation, (ii) violates Lorentz invariance. Therefore, one can not expect any relevance of such “imaginary spatial parity” spinors. This contrasts the case of the charge conjugation operator which allows for both real and imaginary parities. Moreover, for Majorana spinors there is no relationship between  $C$  parity and causality, a reason for which one needs to consider both real and imaginary  $C$  parities on equal footing.

## 2.6 Non-propagating $C$ parity spinors.

In taking above path, we first write down the rest frame projectors onto real  $C$  parities as

$$\mathcal{P}^{\pm}(\mathbf{0}) = \frac{1}{2} (1_4 \pm i \gamma_2 K), \quad \mathcal{P}^{\pm}(\mathbf{0}) \Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\mathbf{0}) = \Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\mathbf{0}). \quad (25)$$

Boosting  $\mathcal{P}^\pm(\mathbf{0})$  in Eq. (25) amounts to

$$\mathcal{P}^\pm(\mathbf{p}) = B_{R\oplus L}(\mathbf{p}) \frac{1}{2} (1_4 \pm i\gamma_2 K) B_{R\oplus L}(\mathbf{p})^{-1}. \quad (26)$$

In substituting Eqs. (15), and (16) for  $B_{R\oplus L}(\mathbf{p})$ , and  $B_{R\oplus L}(\mathbf{p})^{-1}$ , respectively, amounts to

$$\mathcal{P}^\pm(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \left( 1_4 \pm \frac{1}{2m(E+m)} (p\gamma_0 + m) i\gamma_2 (\gamma_0 \not{p} + m) \right) = \mathcal{P}^\pm(\mathbf{0}), \quad (27)$$

where one uses  $\gamma_2 \not{p} = -\not{p} \gamma_2$ .

In other words, one calculates momentum independence of the Majorana projector.

The consequences would be absence of propagation and impossibility to construct a local  $\mu(x)$ . This serious drawback of the Majorana spinors requires special attention, a subject of subsection 2.8 below.

### 2.7 Static versus non-covariant propagation of (Ad) Majorana spinors.

A further surprise, perhaps even a pathology, associated with Majorana spinors is that when exploiting  $\Psi_M^{h:(\epsilon_j)}(\mathbf{p})$  for the construction of projectors (here denoted by  $P^\pm(\mathbf{0})$ ) onto  $C$  parity vectors, one finds them in general to be different but the analytical projector in Eq. (25). Consider

$$\begin{aligned} P^+(\mathbf{0}) &= \frac{1}{2m} \left( \Psi_M^{\uparrow:(+1)}(\mathbf{0}) \bar{\Psi}_M^{\downarrow:(-1)}(\mathbf{0}) - \Psi_M^{\downarrow:(+1)}(\mathbf{0}) \bar{\Psi}_M^{\uparrow:(-1)}(\mathbf{0}) \right), \\ P^-(\mathbf{0}) &= -\frac{1}{2m} \left( \Psi_M^{\uparrow:(-1)}(\mathbf{0}) \bar{\Psi}_M^{\downarrow:(+1)}(\mathbf{0}) - \Psi_M^{\downarrow:(-1)}(\mathbf{0}) \bar{\Psi}_M^{\uparrow:(+1)}(\mathbf{0}) \right), \\ P^+(\mathbf{0}) + P^-(\mathbf{0}) &= 1_4. \end{aligned} \quad (28)$$

It directly verifies that  $P^+(\mathbf{0})$  and  $P^-(\mathbf{0})$  in turn project onto spinors of positive and negative  $C$  parities according to

$$P^+(\mathbf{0}) \Psi_M^{h:(+1)}(\mathbf{0}) = \Psi_M^{h:(+1)}(\mathbf{0}), \quad P^-(\mathbf{0}) \Psi_M^{h:(-1)}(\mathbf{0}) = \Psi_M^{h:(-1)}(\mathbf{0}). \quad (29)$$

Naively, one expects  $P^\pm(\mathbf{0})$  to coincide with the analytical rest-frame projector  $\mathcal{P}^\pm = \frac{1}{2}(1_4 \pm i\gamma_2 K)$  in Eq. (25). This is by far not so. The reason is that at rest  $K \Psi_M^{h:(\epsilon_j)}(\mathbf{0})$  effectively reduces to  $(\Psi_M^{h:(\epsilon_j)}(\mathbf{0}))^\top = \bar{\mathcal{A}} \Psi_M^{h:(\epsilon_j)}(\mathbf{0})$ , and

$$\frac{1}{2}(1_4 \pm i\gamma_2 K) \longrightarrow \frac{1}{2}(1_4 \pm i\gamma_2 \tilde{\mathcal{A}}). \quad (30)$$

where  $\tilde{\mathcal{A}}$  is particular matrix. Obviously,  $\tilde{\mathcal{A}}$  depends on the particular choice for the spinors and can not be frame independent as long as the operator of complex conjugation *does not allow for a universal matrix representation*. In case of  $\Psi_M^{h;(\pm 1)}(\mathbf{0})$ , and in the Cartesian frame,  $\tilde{\mathcal{A}}$  is the unit matrix. For the same reason, in general

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}\Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\mathbf{0}) &= \tilde{\mathcal{A}}B_{R\oplus L}(\mathbf{p})^{-1}B_{R\oplus L}(\mathbf{p})\Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\mathbf{0}) \\ &\neq [B_{R\oplus L}(\mathbf{p})^{-1}]^* \left( \Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\mathbf{p}) \right)^* , \end{aligned} \quad (31)$$

because as a rule one observes the inequality

$$\tilde{\mathcal{A}}B_{R\oplus L}(\mathbf{p})^{-1}\tilde{\mathcal{A}}^{-1} \neq [B_{R\oplus L}(\mathbf{p})^{-1}]^* . \quad (32)$$

Next we consider projectors, in turn denoted by  $\Pi^+(\mathbf{0})$ , and  $\Pi^-(\mathbf{0})$ , onto  $\Psi_M^{h;(\pm 1)}(\mathbf{0})$  vectors of positive and negative cross-norms:

$$\begin{aligned} \Pi^+(\mathbf{0}) &= \frac{1}{2m} \left( \Psi_M^{\uparrow;(+1)}(\mathbf{0})\bar{\Psi}_M^{\downarrow;(-1)}(\mathbf{0}) + \Psi_M^{\downarrow;(-1)}(\mathbf{0})\bar{\Psi}_M^{\uparrow;(+1)}(\mathbf{0}) \right) , \\ \Pi^-(\mathbf{0}) &= -\frac{1}{2m} \left( \Psi_M^{\uparrow;(-1)}(\mathbf{0})\bar{\Psi}_M^{\downarrow;(+1)}(\mathbf{0}) + \Psi_M^{\downarrow;(+1)}(\mathbf{0})\bar{\Psi}_M^{\uparrow;(-1)}(\mathbf{0}) \right) , \\ \Pi^+(\mathbf{0}) + \Pi^-(\mathbf{0}) &= 1_4 . \end{aligned} \quad (33)$$

As long as according to Eq. (11) vectors of equal cross norms are of opposite  $C$  parities, the projectors  $\Pi^\pm(\mathbf{0})$  are in general different from  $P^\pm(\mathbf{0})$ .<sup>2</sup> An immediate and quick test of the latter statement is performed in the Cartesian frame ( $\theta = \varphi = 0$  in Eq. (9)) where one calculates  $\Pi^\pm(\mathbf{0}) = \frac{1}{2}(1_4 \mp \gamma_5 \gamma_1)$ , while  $P^\pm(\mathbf{0}) = \frac{1}{2}(1_4 \pm i\gamma_2 \tilde{\mathcal{A}})$  with  $\tilde{\mathcal{A}} = 1_4$ . Apparently, both  $B_{R\oplus L}(\mathbf{p})\frac{1}{2}(1_4 \pm i\gamma_2 \tilde{\mathcal{A}})B_{R\oplus L}(\mathbf{p})^{-1}$ , and  $B_{R\oplus L}(\mathbf{p})\frac{1}{2}(1_4 \mp \gamma_5 \gamma_1)B_{R\oplus L}(\mathbf{p})^{-1}$  give rise to two essentially different non-covariant equations.

Certainly, one may consider the frame dependent equations and non-local  $\mu(x)$  resulting from boosting  $P^\pm(\mathbf{0})$ , and/or  $\Pi^\pm(\mathbf{0})$ , and advocate arbitrary violation of Lorentz symmetry in the Universe, a path pursued in Ref. [13], and for the spinors in Section 4 below. We here take a distinct position and aim to search for covariant equations that are consistent with the boosted projectors. We circumvent the problem of static Majorana propagators in

<sup>2</sup> As we shall see below, in choosing a pure imaginary  $(1/2, 0) - (0, 1/2)$  relative phase, one at least achieves equality of the projectors onto vectors of positive/negative cross-norms and those onto vectors of positive/negative  $C$  parities but without resolving the problem of their non-covariance.



$(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  to the cost of introducing auxiliary extra spinor dimensions. In the latter space we shall establish consistency between the covariant equations and the projectors onto the degrees of freedom under consideration and shall construct a local Majorana quantum field.

### 2.8 Constructing covariantly propagating Majorana spinors.

In this subsection we develop an idea how to circumvent the absence of Majorana spinor propagation in  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  observed above. A simple observation sheds strong light onto the problem under investigation. In looking onto Eq. (8), it is not difficult to realize that the parity operator,  $\gamma_0$ , "ladders" between Majorana spinors of opposite charge conjugation parities and opposite helicities of the source spinor  $\Phi_L^h(\mathbf{0})$ , according to

$$\begin{aligned}\gamma_0 \Psi_M^{\uparrow:(+1)}(\mathbf{0}) &= \Psi_M^{\downarrow:(-1)}(\mathbf{0}), \\ \gamma_0 \Psi_M^{\downarrow:(-1)}(\mathbf{0}) &= \Psi_M^{\uparrow:(+1)}(\mathbf{0}), \\ \gamma_0 \Psi_M^{\downarrow:(+1)}(\mathbf{0}) &= -\Psi_M^{\uparrow:(-1)}(\mathbf{0}), \\ \gamma_0 \Psi_M^{\uparrow:(-1)}(\mathbf{0}) &= -\Psi_M^{\downarrow:(+1)}(\mathbf{0}).\end{aligned}\tag{34}$$

This observation takes one directly to a new discrete symmetry in the larger space of eight spinorial dimensions. The new symmetry is associated with rest frame projectors and spinors of the type

$$\pi^\pm(\mathbf{0}) = \frac{1}{2} \left( 1_8 \pm \begin{pmatrix} 0_4 & \gamma_0 \\ \gamma_0 & 0_4 \end{pmatrix} \right), \quad \pi^+(\mathbf{0}) \begin{pmatrix} \Psi_M^{\downarrow:(-1)}(\mathbf{0}) \\ \Psi_M^{\uparrow:(+1)}(\mathbf{0}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_M^{\downarrow:(-1)}(\mathbf{0}) \\ \Psi_M^{\uparrow:(+1)}(\mathbf{0}) \end{pmatrix}.\tag{35}$$

In now defining charge conjugation in the enlarged space as  $\text{diag}(-i\gamma_2 K, i\gamma_2 K)$ , one immediately realizes that (i) the blown up spinors carry a well defined  $C$  parity, (ii) the  $C$  operator commutes with  $\pi^\pm(\mathbf{0})$ . We exploit the new discrete symmetry for the construction of covariant projectors in subjecting  $\pi^\pm(\mathbf{0})$  to similarity transformations by the boost with the following result:

$$\frac{1}{2m} \begin{pmatrix} m1_4 & \not{p} \\ \not{p} & m1_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_M^{\downarrow:(-1)}(\mathbf{p}) \\ \Psi_M^{\uparrow:(+1)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_M^{\downarrow:(-1)}(\mathbf{p}) \\ \Psi_M^{\uparrow:(+1)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}.\tag{36}$$

Similarly, one finds

$$\frac{1}{2m} \begin{pmatrix} m1_4 & -\not{p} \\ -\not{p} & m1_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_M^{\uparrow;(-1)}(\mathbf{p}) \\ \Psi_M^{\downarrow;(+1)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_M^{\uparrow;(-1)}(\mathbf{p}) \\ \Psi_M^{\downarrow;(+1)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Equations (36) and (37) are equivalently rewritten to

$$\begin{pmatrix} \not{p} & 0_4 \\ 0_4 & \not{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\mathbf{p}) \\ \Psi_M^{-h;(-\epsilon_j)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \pm m \begin{pmatrix} 0_4 & 1_4 \\ 1_4 & 0_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_M^{h;(\epsilon_j)}(\mathbf{p}) \\ \Psi_M^{-h;(-\epsilon_j)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}. \quad (38)$$

The off diagonal form of the ( $8d$ ) mass matrix in Eq. (38) expresses cross-normalization of  $\Psi_M^{h;(\pm 1)}(\mathbf{p})$ , and its symmetric character reflects the independence of the cross-norm on the order of the spinors. Equations (36) and (37) demonstrate how Majorana spinors propagate in eight dimensions and that the propagating degrees of freedom are well represented by the following complete set of eight dimensional spinors:

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} \Psi_M^{\uparrow;(+1)}(\mathbf{p}) \\ \Psi_M^{\downarrow;(-1)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, & \Lambda_2(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} \Psi_M^{\downarrow;(-1)}(\mathbf{p}) \\ \Psi_M^{\uparrow;(+1)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \\ \Lambda_3(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} \Psi_M^{\uparrow;(+1)}(\mathbf{p}) \\ -\Psi_M^{\downarrow;(-1)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, & \Lambda_4(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} \Psi_M^{\downarrow;(-1)}(\mathbf{p}) \\ -\Psi_M^{\uparrow;(+1)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \\ \Lambda_5(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} \Psi_M^{\downarrow;(+1)}(\mathbf{p}) \\ \Psi_M^{\uparrow;(-1)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, & \Lambda_6(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} \Psi_M^{\downarrow;(+1)}(\mathbf{p}) \\ \Psi_M^{\uparrow;(-1)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \\ \Lambda_7(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} \Psi_M^{\downarrow;(+1)}(\mathbf{p}) \\ -\Psi_M^{\uparrow;(-1)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, & \Lambda_8(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} \Psi_M^{\downarrow;(+1)}(\mathbf{p}) \\ -\Psi_M^{\uparrow;(-1)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (39)$$

Notice that above spinors define an orthonormal basis as

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_1(\mathbf{p})\Lambda_1(\mathbf{p}) &= \bar{\Lambda}_2(\mathbf{p})\Lambda_2(\mathbf{p}) = \bar{\Lambda}_7(\mathbf{p})\Lambda_7(\mathbf{p}) = \bar{\Lambda}_8(\mathbf{p})\Lambda_8(\mathbf{p}) = 4m, \\ \bar{\Lambda}_3(\mathbf{p})\Lambda_3(\mathbf{p}) &= \bar{\Lambda}_4(\mathbf{p})\Lambda_4(\mathbf{p}) = \bar{\Lambda}_5(\mathbf{p})\Lambda_5(\mathbf{p}) = \bar{\Lambda}_6(\mathbf{p})\Lambda_6(\mathbf{p}) = -4m, \\ \bar{\Lambda}_k(\mathbf{p}) &= [\Lambda_k(\mathbf{p})]^\dagger \Gamma_8 \Gamma^0, \quad k = 1, \dots, 8, \quad \Gamma_8 = \begin{pmatrix} 0_4 & 1_4 \\ 1_4 & 0_4 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (40)$$

Here,  $\Gamma_8$  plays the role of metric in the eight dimensional space of the  $\Lambda_k(\mathbf{p})$  spinors. Next we check the energy-momentum dispersion relation for the ( $8d$ ) Majorana spinors. For this purpose we cast, say, Eq. (36) into the form

$$\begin{pmatrix} -m1_4 & \not{p} \\ \not{p} & -m1_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_M^{h:(-1)}(\mathbf{p}) \\ \Psi_M^{h:(+1)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = 0. \quad (41)$$

nullify the determinant of the  $8 \times 8$  matrix on the lhs, and find the time-like relation,  $p^2 - m^2 = 0$ . Therefore, Eq. (41) describes neutral particles of real mass in terms of spinors that are eigenvectors of the particle-anti-particle conjugation operator.

### 2.9 Consistency of wave equations and projectors.

At that stage it is necessary to test consistency of Eq. (41) with the projector onto the  $\Lambda_k(\mathbf{p})$  spinors. In the following  $\pi^+(\mathbf{p})$  and  $\pi^-(\mathbf{p})$  in turn denote projectors onto  $\Lambda_k(\mathbf{p})$  spinors of positive, and negative norms according to:

$$\pi^+(\mathbf{p}) = \frac{1}{4m} (\Lambda_1(\mathbf{p})\Lambda_1(\mathbf{p}) + \Lambda_2(\mathbf{p})\Lambda_2(\mathbf{p}) + \Lambda_7(\mathbf{p})\Lambda_7(\mathbf{p}) + \Lambda_8(\mathbf{p})\Lambda_8(\mathbf{p})). \quad (42)$$

$$\pi^-(\mathbf{p}) = -\frac{1}{4m} (\Lambda_3(\mathbf{p})\Lambda_3(\mathbf{p}) + \Lambda_4(\mathbf{p})\Lambda_4(\mathbf{p}) + \Lambda_5(\mathbf{p})\Lambda_5(\mathbf{p}) + \Lambda_6(\mathbf{p})\Lambda_6(\mathbf{p})). \quad (43)$$

In terms of  $\pi^\pm(\mathbf{p})$ , the wave equation for the propagating  $\Lambda_k(\mathbf{p})$  spinors reads

$$\pi^\pm(\mathbf{p})\Lambda_k(\mathbf{p}) = \Lambda_k(\mathbf{p}), \quad k = 1, \dots, 8, \quad (44)$$

where  $\pi^+(\mathbf{p})$  applies to  $\Lambda_1(\mathbf{p})$ ,  $\Lambda_2(\mathbf{p})$ ,  $\Lambda_7(\mathbf{p})$ ,  $\Lambda_8(\mathbf{p})$ , while  $\pi^-(\mathbf{p})$  applies to the rest. A direct calculation of, say,  $\pi^+(\mathbf{p})$  leads to

$$\begin{aligned} \pi^+(\mathbf{p}) &= \frac{1}{4m} \begin{pmatrix} 2m(\Pi^+(\mathbf{0}) + \Pi^-(\mathbf{0})) & \Sigma(\mathbf{p}) \\ \Sigma(\mathbf{p}) & 2m(\Pi^+(\mathbf{0}) + \Pi^-(\mathbf{0})) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} m1_4 & \frac{1}{2}\Sigma(\mathbf{p}) \\ \frac{1}{2}\Sigma(\mathbf{p}) & m1_4 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (45)$$

where we exploited completeness of the  $\Psi_M^{h:(\mp 1)}(\mathbf{p})$  degrees of freedom, and introduced  $\Sigma(\mathbf{p}) = \sum_{h:\epsilon_j} \Psi_M^{h:(\epsilon_j)}(\mathbf{p})\bar{\Psi}_M^{h:(\epsilon_j)}(\mathbf{p})$ . This quantity can be reduced to a combination of Dirac  $u$  and  $v$  spinors upon decomposing the complete set of  $\Psi_M^{h:(\epsilon_j)}(\mathbf{p})$  spinors into the complete set of Dirac's  $\{u_h(\mathbf{p}), v_h(\mathbf{p})\}$  spinors. In so doing one encounters

$$\begin{pmatrix} \Psi_M^{\uparrow;(+1)}(\mathbf{p}) \\ \Psi_M^{\downarrow;(+1)}(\mathbf{p}) \\ \Psi_M^{\uparrow;(-1)}(\mathbf{p}) \\ \Psi_M^{\downarrow;(-1)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1_4 & 1_4 & -1_4 & 1_4 \\ -1_4 & 1_4 & -1_4 & -1_4 \\ 1_4 & -1_4 & -1_4 & -1_4 \\ 1_4 & 1_4 & 1_4 & -1_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\uparrow}(\mathbf{p}) \\ u_{\downarrow}(\mathbf{p}) \\ v_{\uparrow}(\mathbf{p}) \\ v_{\downarrow}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}. \quad (46)$$

The latter equation shows that a  $\Psi_M^{\uparrow;(\pm 1)}(\mathbf{p})$  spinor is a linear combination of Dirac's  $u$  and  $v$  spinors of opposite parities, as it should be due to the non-commutativity of the  $C$  and  $P$  operators.

In making use of the decomposition in Eq. (46), one calculates  $\Sigma(\mathbf{p})$  to be the sum of the projectors onto Dirac  $u$  and  $v$  spinors according to

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathbf{p}) &= u_{\uparrow}(\mathbf{p})\bar{u}_{\uparrow}(\mathbf{p}) + u_{\downarrow}(\mathbf{p})\bar{u}_{\downarrow}(\mathbf{p}) + v_{\uparrow}(\mathbf{p})\bar{v}_{\uparrow}(\mathbf{p}) + v_{\downarrow}(\mathbf{p})\bar{v}_{\downarrow}(\mathbf{p}) \\ &= (p_{\nu} + p_{\bar{\nu}}) \cdot \gamma + m_{\nu} - m_{\bar{\nu}}. \end{aligned} \quad (47)$$

Here we denoted four momentum and masses of the neutral particles and anti-particles by  $p_{\nu}$ ,  $p_{\bar{\nu}}$ ,  $m_{\nu}$ , and  $m_{\bar{\nu}}$ , respectively.

Consistency between Eqs. (41), and (42) is warrant through the equalities  $p_{\nu} = p_{\bar{\nu}}$ , and the related  $m_{\nu} = m_{\bar{\nu}}$  following from  $CPT$  symmetry. Therefore, one finds  $\Sigma = 2\hat{p}$  and

$$\pi^{\uparrow}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} m1_4 & \hat{p} \\ \hat{p} & m1_4 \end{pmatrix}, \quad (48)$$

that establishes the consistency under discussion.

Canonical quantization *à la* Dirac is now straightforward in the eight dimensional spinor space, denoted by  $\mathcal{S}_{\mathfrak{S}}$ , when introducing the *local*  $\nu_{\{\mathfrak{S}\}}(x)$  field operator as

$$\nu_{\{\mathfrak{S}\}}(x) = \int dV \left[ \sum_{k=1,2,7,8} \Lambda_k(\mathbf{p}) a_k(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + \sum_{j=3,4,5,6} \Lambda_j(\mathbf{p}) \bar{a}_j^{\dagger}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \right]. \quad (49)$$

Here,  $dV$  is the appropriate phase volume.

### 3 Neutron $\beta$ decay in $\mathcal{S}_8$ and textbook Majorana quantum field.

In this section we exploit the local truly neutral quantum field  $\nu_{\{8\}}(x)$  in the calculation of  $\beta$  decay traces. In due course we shall motivate  $\nu(x)$  in Eq. (4). Our first goal on that journey will be to take a close look on neutron  $\beta$  decay in  $\mathcal{S}_8$ . If one wishes to consider physical processes that involve both Dirac and Majorana fermions, one needs to worry about matching dimensions of both spinor spaces. The simplest way to harmonize dimensions is to amplify the Dirac spinors similarly to Eqs. (39). In order to respect orthogonality of  $P$  eigenspinors, one has to keep helicities same at top and bottom. The Dirac eight-spinors introduced in this manner are

$$U_{(j;h')}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} u_{h'}(\mathbf{p}) \\ \epsilon_j u_{h'}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad V_{(j;h')}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} v_{h'}(\mathbf{p}) \\ \epsilon_j v_{h'}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad h' = \uparrow, \downarrow, \quad (50)$$

respectively. To simplify notations we will suppress from now onward the momentum,  $\mathbf{p}$ , as argument of spinors and operators. In order to calculate cross sections, i.e. current-current tensors,  $G_{\mu\nu}$ , in  $\mathcal{S}_8$ , one has next to make a choice for the eight-currents. In analogy to the Dirac vector current, we here construct

$$\begin{aligned} J_{k(j;h')}^\mu &= \bar{\Lambda}_k \Gamma^\mu U_{(j;h')}, \quad \Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes 1_2, \\ J_{k(j;h')}^{\mu,8} &= \bar{\Lambda}_k \Gamma_8 \Gamma^\mu U_{(j;h')}, \quad k = 1, 2, 7, 8. \end{aligned} \quad (51)$$

Four momentum and mass of the Dirac particle will be in turn denoted as  $p_1$ , and  $m_1$ . As long as we are not gauging the theory, but are writing down *ad hoc* currents, one may think of the (8d) model for neutron beta decay presented here as a “toy” model. Yet, as it will be shown below, it will allow for some very instructive insights into neutrino phenomenology. Above currents are conserved in the  $m \rightarrow m_1$  limit and have the property to take the  $U_{(j;h')}$  spinor of positive norm to  $\Lambda_k(\mathbf{p})$  of positive norm too. The current-current tensor for, say,  $J_{k(j;h')}^\mu$ , reads

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{k(j;h')} \frac{1}{4} \bar{\Lambda}_k \Gamma^\mu U_{(j;h')} \left( \bar{\Lambda}_k \Gamma^\nu U_{(j;h')} \right)^\dagger. \quad (52)$$

In making use of the definition of  $\bar{\Lambda}_k$  given in Eq. (40), i. e.,

$$\left( \bar{\Lambda}_k \right)^\dagger = \left( \Lambda_k^\dagger \Gamma_8 \Gamma^0 \right)^\dagger = \Gamma^0 \dagger \Gamma_8^\dagger \Lambda_k, \quad (53)$$

and the relation  $\Gamma^\nu \dagger \Gamma^0 \dagger = \Gamma^0 \Gamma^\nu$ , Eq. (52) amounts to

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{k(j;h')} \frac{1}{4} \bar{\Lambda}_k \Gamma^\mu U_{(j;h')} \bar{U}_{(j;h')} \Gamma^\nu \Gamma_8^\dagger \Lambda_k. \quad (54)$$

In the following we shall introduce the notation  $\Pi^D$  as

$$\Pi^D = \frac{1}{2m_1} \left( U_{(1;\uparrow)} \bar{U}_{(1;\uparrow)} + U_{(2;\downarrow)} \bar{U}_{(2;\downarrow)} \right) = \frac{\not{p}_1 + m_1 1_4}{2m_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Converting Eq. (54) to trace is now standard and results in

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \text{tr} \frac{1}{4} \left( \Gamma_8^\dagger (4m\pi^+) \Gamma^\mu (2m_1 \Pi^D) \Gamma^\nu \right) \\ &= \frac{1}{4} \text{tr} \begin{pmatrix} 0_4 & 1_4 \\ 1_4 & 0_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m 1_4 & \not{p} \\ \not{p} & m 1_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_\mu (\not{p}_1 + m_1) \gamma_\nu & \gamma_\mu (\not{p}_1 + m_1) \gamma_\nu \\ \gamma_\mu (\not{p}_1 + m_1) \gamma_\nu & \gamma_\mu (\not{p}_1 + m_1) \gamma_\nu \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} (\not{p} + m) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_1) \gamma^\nu. \end{aligned} \quad (56)$$

Therefore, the trace entering the single beta decay is same as if we had used  $\nu(x)$ . In this way we reached a further goal of our investigation, namely, understand appearance of momentum space Dirac spinors in the Majorana quantum field.

## 4 Majorana spinors of pure imaginary $C$ parity.

### 4.1 Spinor construct.

In this Section we present rest-frame neutral spinors which differ from the textbook ones [5]–[10] by the relative phase between the left- and right handed Weyl components. In the textbook case, the phase was real, in the currently presented one, it will be purely imaginary. The imaginary relative phase shows up as imaginary  $C$  parity. Above difference will be of profound importance for the phenomenological consequences of the theory <sup>3</sup>.

<sup>3</sup> The relative phase  $\zeta_j$  between the two-dimensional  $(1/2, 0)$  and  $(0, 1/2)$  should not be confused with Kayser's creation phase factor,  $\lambda$ . While  $\zeta_j$  tells something about how to stick together  $(1/2, 0)$  and  $(0, 1/2)$  to a four dimensional spinor of the desired transformation properties under discrete  $C, P$  space-time symmetries, the  $\lambda$  selects a particular linear superposition between four dimensional neutral particle- and anti-particle states. In the ultra-relativistic limit,  $E_j/|\mathbf{p}_j| \rightarrow 1$ , when the particle

McLennan [16] and Case [17], constructed Majorana spinors of negative imaginary  $C$  parity, while  $C$  spinors of positive imaginary parity have been introduced in Refs. [13] and shown to be necessary for securing completeness in  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ . Majorana spinors of that type will be denoted in turn by  $\Psi_M^{h;(\zeta_j)}(\mathbf{p})$  with  $\zeta_j$  purely imaginary. The  $\Psi_M^{h;(\mp i)}(\mathbf{p})$ 's correspond to  $\lambda_{\{h,-h\}}^{S/A}(\mathbf{p})$  in Refs. [13], where  $S$  and  $A$  stand for self-conjugate (positive imaginary  $C$  parity), and anti-self-conjugate (negative imaginary  $C$  parity), respectively. The rest frame spinors are therefore chosen as

$$\Psi_M^{h;(\zeta_j)}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \zeta_j [i\sigma_2] K \Phi_L^h(\mathbf{0}) \\ \Phi_L^h(\mathbf{0}) \end{pmatrix}, \quad \zeta_1 = -i, \quad \zeta_2 = i. \quad (57)$$

It directly verifies that the above spinors are indeed  $C$  eigenvectors, i.e.,

$$C\Psi_M^{h;(-i)}(\mathbf{0}) = \zeta_1 \Psi_M^{h;(-i)}(\mathbf{0}), \quad C\Psi_M^{h;(+i)}(\mathbf{0}) = \zeta_2 \Psi_M^{h;(+i)}(\mathbf{0}). \quad (58)$$

It has been shown in Ref. [13] that following cross-normalization relations (termed to as *bi-orthogonality* there) hold true

$$\overline{\Psi}_M^{h;(\mp i)}(\mathbf{0})\Psi_M^{h;(\mp i)}(\mathbf{0}) = 0, \quad \overline{\Psi}_M^{h;(\mp i)}(\mathbf{0})\Psi_M^{-h;(\mp i)}(\mathbf{0}) = \pm 2im(\delta_{h\uparrow} - \delta_{h\downarrow}). \quad (59)$$

The imaginary norms have been provoked by the imaginary relative phase  $\zeta_j$ . As a consequence, the cross norms change sign upon inverting order of the spinors as visible from Eq. (59). At the present stage this may look as a disadvantage but on long term it will be of favor in so far as it will allow for physics different but the one related to the Majorana spinors in Eq. (6) where the relative phase has been chosen to be real.

The completeness relation for these  $C$  eigenspinors is now obtained as

$$\begin{aligned} \Pi^S(\mathbf{0}) &= -\frac{1}{2im} [\Psi_M^{\uparrow;(-i)}(\mathbf{0})\overline{\Psi}_M^{\downarrow;(-i)}(\mathbf{0}) - \Psi_M^{\downarrow;(-i)}(\mathbf{0})\overline{\Psi}_M^{\uparrow;(-i)}(\mathbf{0})], \\ \Pi^A(\mathbf{0}) &= +\frac{1}{2im} [\Psi_M^{\uparrow;(+i)}(\mathbf{0})\overline{\Psi}_M^{\downarrow;(+i)}(\mathbf{0}) - \Psi_M^{\downarrow;(+i)}(\mathbf{0})\overline{\Psi}_M^{\uparrow;(+i)}(\mathbf{0})], \\ \Pi^S(\mathbf{0}) + \Pi^A(\mathbf{0}) &= 1_4. \end{aligned} \quad (60)$$

where  $\Pi^S(\mathbf{0})$  and  $\Pi^A(\mathbf{0})$  denote in turn the rest frame projection operators and anti-particle states become predominantly left- and right-handed, respectively, the  $\lambda$  phase factor can conditionally be viewed as the relative phase between  $(1/2, 0)$  and  $(0, 1/2)$ . However, in this case, the four spinor brakes down any way and the relative phase  $\zeta_j$  becomes irrelevant to leading order.

onto the self- and anti-self conjugate neutral spinors. The  $\Pi^S(\mathbf{0})$  and  $\Pi^A(\mathbf{0})$  are simultaneously  $C$  parity projectors.

The first advantage of imaginary  $C$  parities is to equalize cross-norms to  $C$  parity projectors. Recall, in the case of a real  $\Phi_R^{-h}(\mathbf{p}) - \Phi_L^h(\mathbf{p})$  relative phase considered in Section 2, projectors onto vectors with same cross norm did not coincide with projectors onto  $C$  eigenvectors.

However, as long as Eq. (27) was deduced without any reference to the particular form of the Majorana spinors, also for  $\Psi_M^{h;(\mp i)}(\mathbf{p})$  the problem of static projectors in  $(1/2, \mathbf{0}) \oplus (\mathbf{0}, 1/2)$  stays same.

In order to circumvent this shortcoming we apply once again the procedure outlined in subsection 2.8 to  $\Psi_M^{h;(\mp i)}(\mathbf{p})$  and find the following new system of coupled matrix equations<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -m1_4 & -ip^\mu \gamma_\mu \\ ip^\mu \gamma_\mu & -m1_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_M^{\uparrow;(-i)}(\mathbf{p}) \\ \Psi_M^{\downarrow;(-i)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} &= 0, \\ \begin{pmatrix} -m1_4 & ip^\mu \gamma_\mu \\ -ip^\mu \gamma_\mu & -m1_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_M^{\uparrow;(+i)}(\mathbf{p}) \\ \Psi_M^{\downarrow;(+i)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} &= 0. \end{aligned} \quad (61)$$

#### 4.2 Covariantly propagating Majorana spinors in doubled $(1/2, \mathbf{0}) \oplus (\mathbf{0}, 1/2)$ .

Equations (61) suggest once again to amplify dimensionality of  $C$  eigenspinors from four to eight in introducing

$$\begin{aligned} \Lambda_{(S/A;1)}(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} \Psi_M^{\uparrow;(\mp i)}(\mathbf{p}) \\ \epsilon_1 \Psi_M^{\downarrow;(\mp i)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, & \Lambda_{(S/A;2)}(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} \Psi_M^{\downarrow;(\mp i)}(\mathbf{p}) \\ \epsilon_1 \Psi_M^{\uparrow;(\mp i)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \\ \Lambda_{(S/A;3)}(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} \Psi_M^{\uparrow;(\mp i)}(\mathbf{p}) \\ \epsilon_2 \Psi_M^{\downarrow;(\mp i)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, & \Lambda_{(S/A;4)}(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} \Psi_M^{\downarrow;(\mp i)}(\mathbf{p}) \\ \epsilon_2 \Psi_M^{\uparrow;(\mp i)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \\ \epsilon_1 &= -\epsilon_2 = 1. \end{aligned} \quad (62)$$

<sup>4</sup> Eq. (61) has been written down for the first time (up to notational differences) in Ref. [18] though without addressing the argument about the constancy of the projector onto four dimensional  $C$  eigenspinors and without exploring anyone of its phenomenological consequences.



Here, the index  $S$ , or  $A$  of the  $\Lambda$  spinors is associated in turn with the negative, or positive sign of the imaginary  $C$  parity. The above spinors define an orthogonal basis as

$$\begin{aligned}\bar{\Lambda}_{(S;1)}(\mathbf{p})\Lambda_{(S;1)}(\mathbf{p}) &= \bar{\Lambda}_{(S;4)}(\mathbf{p})\Lambda_{(S;4)}(\mathbf{p}) = \\ \bar{\Lambda}_{(A;2)}(\mathbf{p})\Lambda_{(A;2)}(\mathbf{p}) &= \bar{\Lambda}_{(A;3)}(\mathbf{p})\Lambda_{(A;3)}(\mathbf{p}) = +4m, \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned}\bar{\Lambda}_{(S;2)}(\mathbf{p})\Lambda_{(S;2)}(\mathbf{p}) &= \bar{\Lambda}_{(S;3)}(\mathbf{p})\Lambda_{(S;3)}(\mathbf{p}) = \\ \bar{\Lambda}_{(A;1)}(\mathbf{p})\Lambda_{(A;1)}(\mathbf{p}) &= \bar{\Lambda}_{(A;4)}(\mathbf{p})\Lambda_{(A;4)}(\mathbf{p}) = -4m, \end{aligned} \quad (64)$$

$$\Lambda_{(\tau;k)}(\mathbf{p}) = [\Lambda_{(\tau;k)}(\mathbf{p})]^\dagger \tilde{\Gamma}_8 \Gamma^0, \quad \tilde{\Gamma}_8 = \begin{pmatrix} 0_4 & -i1_4 \\ i1_4 & 0_4 \end{pmatrix}, \quad (65)$$

Here,  $\tau = S, A$ , the new matrix  $\tilde{\Gamma}_8$  plays once again the role of metric in the eight dimensional space (to be denoted by  $\tilde{\mathcal{S}}_8$ ) but this time in the space built on top of  $\Psi_M^{h;(\mp i)}(\mathbf{p})$ .

From Eq. (61) one directly reads off that the eight-dimensional spinors satisfy the Dirac like equation

$$\begin{pmatrix} p^\mu \gamma_\mu & \pm im1_4 \\ \mp im1_4 & p^\mu \gamma_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_M^{h;(\mp i)}(\mathbf{p}) \\ \epsilon_j \Psi_M^{-h;(\mp i)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = 0, \quad (66)$$

where “ $-m$ ” and “ $+m$ ” in turn correspond to  $\Lambda_{(S/A;k)}(\mathbf{p})$  of positive and negative norms. In nullifying the determinant of the matrix acting upon  $\Lambda_{(S/A;k)}(\mathbf{p})$  in Eq. (66), one finds the standard energy-momentum dispersion relation,  $p^2 - m^2 = 0$ . Therefore, Eq. (66) describes massive neutral particles in terms of spinors that are eigenvectors of the particle-anti-particle conjugation operator.

Comparison between Eqs. (65) and (40) shows that the (8d) metric takes different form in depending on the  $C$  parity. In case the  $C$  parity is real, the metric,  $\Gamma_8$ , is real and symmetric, while in case the above parity is pure imaginary, the metric,  $\tilde{\Gamma}_8$ , is imaginary and anti-symmetric.

The difference between  $\Gamma_8$ , and  $\tilde{\Gamma}_8$  comes about because for  $\Psi_M^{h;(\mp i)}(\mathbf{p})$  the cross-norms depend on the order of the vectors as visible from Eq. (59), while for  $\Psi_M^{h;(\pm 1)}(\mathbf{p})$  they did not, in accordance to Eq. (11).

Above difference is of pivotal importance for Eq. (56). Had we used  $\Lambda_{(\tau;k)}(\mathbf{p})$  in place of  $\Lambda_k(\mathbf{p})$ , i.e. Eq. (61) in place of Eq. (48), and substituted into Eq. (56)  $\tilde{\Gamma}_8$  from Eq. (65), we would have observed a cancellation of mass in the neutral fermion sector of the trace. In effect, the neutral particle sector of the (single)

beta decay trace would be massless without the neutrino being massless in reality.

A different situation is obtained in considering the current (it is conserved in the  $m \rightarrow m_1$  limit)

$$J_{(\tau;k),(j;h')}^{\mu,\pm} = \bar{\Lambda}_{(\tau;k)} \frac{1}{\sqrt{2}} (1_{\mathbf{s}} \pm \tilde{\Gamma}_{\mathbf{s}}) \Gamma^{\mu} U_{(j;h')}. \quad (67)$$

Here, the interference term

$$\pm \frac{1}{2} \left( \bar{\Lambda}_{(\tau;k)} \Gamma^{\mu} U_{(j;h')} \left( \bar{\Lambda}_{(\tau;k)} \tilde{\Gamma}_{\mathbf{s}} \Gamma^{\nu} U_{(j;h')} \right)^{\dagger} + \bar{\Lambda}_{(\tau;k)} \tilde{\Gamma}_{\mathbf{s}} \Gamma^{\mu} U_{(j;h')} \left( \bar{\Lambda}_{(\tau;k)} \Gamma^{\nu} U_{(j;h')} \right)^{\dagger} \right), \quad (68)$$

contributes  $\pm m \gamma^{\mu} (\not{p}_1 + m_1) \gamma^{\nu}$ , to the trace in Eq. (56). This happens because  $\left( \bar{\Lambda}_{(\tau;k)} \Gamma_{\mathbf{s}} \Gamma^{\nu} U \right)^{\dagger} = \bar{U}^{\dagger} \Gamma^{\nu} \Lambda_{(\tau;k)}$  upon accounting for  $\tilde{\Gamma}_{\mathbf{s}}^2 = 1_{\mathbf{s}}$ . Therefore, the anti-symmetric off diagonal metric in  $\Lambda_{(\tau;k)}(\mathbf{p})$  goes completely away from the matrix providing the trace, and phenomenologies with  $\Psi_M^{k;(\pm i)}(\mathbf{p})$  and  $\Psi_M^{k;(\pm i)}(\mathbf{p})$  amount be same again.

## 5 The neutrinoless double beta decay $0\nu\beta\beta$ .

The neutrinoless double beta decay ( $0\nu\beta\beta$ ) is a process where two neutrons in a nucleus,  $A(Z, N)$ , are converted into two protons by the emission of two virtual  $W^-$  bosons

$$A(Z, N) \rightarrow A(Z + 2, N - 2) + W^- + W^-, \quad (69)$$

in such a way that the two subsequently emerging  $W_{\mu}^- e^-$  boson-fermion currents, appear connected by a virtual neutrino line (see Ref. [2] for details). This process is associated with a second order element of the  $S$  matrix and the related amplitude, here denoted by,  $T_{0\nu\beta\beta}$ , is given by

$$T_{0\nu\beta\beta} = W^{\mu} W^{\eta} [\bar{u}_e \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) u_{\nu_e}] [\bar{u}_e \gamma_{\eta} (1 + \gamma_5) u_{\nu_e}]. \quad (70)$$

In order to bring in the virtual neutrino line one makes use of the following identity

$$\begin{aligned} \bar{u}_e \gamma_{\eta} (1 + \gamma_5) u_{\nu_e} &= \overline{((u_e)^c)}^c \gamma_{\eta} (1 + \gamma_5) ((u_{\nu_e})^c)^c \\ &= \bar{u}_{\nu_e} [-\gamma_{\mu} (1 - \gamma_5)] v_e. \end{aligned} \quad (71)$$

The latter expression is obtained in making use of the relations,  $\gamma_0 \gamma_\mu^* = \gamma_\mu \gamma_0$ ,  $\gamma_2 \gamma_\mu = -\gamma_\mu^* \gamma_2$ ,  $\gamma_\mu^t = -\gamma_\mu$ , the anticommutation relations between the Dirac matrices, and  $t$  labeling the transposed. With that Eq. (70) takes the form

$$T_{0\nu\beta\beta} = W^\mu W^\eta \frac{1}{p_{\nu_e}^2 - m_{\nu_e}^2} L_{\mu\eta},$$

$$L_{\mu\eta} = \bar{u}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \Pi^{\nu_e} [-\gamma_\mu (1 - \gamma_5)] v_e, \quad \Pi^{\nu_e} = \sum u_{\nu_e} \bar{u}_{\nu_e}. \quad (72)$$

Here we suppressed helicity labeling of the Dirac spinors in order not to overload notations but  $\sum$  in  $\Pi_{\nu_e}$  expresses summation over this degree of freedom. Finally,  $|L_{\mu\eta}|^2$  can be converted to a trace in the standard way as

$$|L_{\mu\eta}|^2 = [\bar{u}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \Pi^{\nu_e} \gamma_\eta (1 - \gamma_5) v_e] [\bar{u}_e \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \Pi^{\nu_e} \gamma_\delta (1 - \gamma_5) v_e]^\dagger$$

$$= \text{tr} [\Pi^{\nu_e} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \Pi^{\nu_e} \gamma_\eta (1 - \gamma_5) \Pi^{\nu_e} (1 + \gamma_5) \gamma_\delta \gamma_0 \Pi^{\nu_e} \gamma_0 (1 - \gamma_5) \gamma_\lambda]. \quad (73)$$

Now we calculate above trace within the scenario of the previous section. To do so one has to perform in Eq. (73) the replacements  $\gamma_\mu \rightarrow \Gamma_\mu$ ,  $u_e \rightarrow U_e$ ,  $v_e \rightarrow V_e$ ,  $u_{\nu_e} \rightarrow \Lambda_{(S/A;k)}$ , and

$$\Pi^{\nu_e} \rightarrow \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} m1_4 & -i\hat{p} \\ i\hat{p} & m1_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_4 & -i1_4 \\ i1_4 & 0_4 \end{pmatrix}. \quad (74)$$

In this way one creates the  $8 \times 8$  version of  $|L_{\mu\eta}|^2$ , where apparently, the metric matrix  $\tilde{\Gamma}_8$  enters twice. The net effect of the  $\tilde{\Gamma}_8^2$  presence in (73) is to bring back the mass to the neutral particle sector in the  $0\nu\beta\beta$  trace. Recall, that for the type of currents in Eq. (51) and same  $\tilde{\Gamma}_8$ , the neutral particle sector in the single  $\beta$  decay trace was massless. Above considerations allow to conclude that  $0\nu\beta\beta$  phenomenology with Majorana spinors results equivalent to phenomenology with Dirac spinors.

## 6 Summary.

We demonstrated momentum independence of the projectors onto classical  $C$  eigenspinors in  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  and concluded impossibility of constructing local quantum field theory based upon four dimensional Majorana spinors. We avoided the problem of static propagators in  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  in exploiting the fact that in auxiliary eight spinorial dimensions Majorana spinors possess one more discrete symmetry beyond charge conjugation. This directed us to

the auxiliary calculus for classical Majorana spinors of eight spinorial degrees of freedom. In reference to the new symmetry we constructed related rest-frame projectors which upon boosting gave rise to covariant propagation and allowed for a field quantization *à la Dirac*.

With the aim to figure out similarities and differences between Majorana and Dirac theories for neutral fermions, we calculated the  $(8d)$  trace entering the width of neutron  $\beta$  decay within such a scenario and, up to one exception, found it to be same as if we had used in four space massive Dirac spinors.

We also calculated the trace entering the neutrinoless double  $\beta$  decay and found it to be unaltered with respect to the Dirac formalism irrespective of the type of spinors and type of currents used. In other words, we showed that phenomenology with classical Majorana spinors is possible only in eight spinorial dimensions, but is by and large equivalent to phenomenology with Dirac's  $u$  and  $v$  in four spinorial dimensions.

If this were to be the only impact of the calculus, eight spinor dimensions could be viewed only as dummy degrees of freedom. However, there is a rare exception. For  $\Psi_M^{k:(\pm i)}(\mathbf{p})$  and the class of currents in Eq.(51) the single beta decay trace was shown to contain massless Dirac spinors in the neutral fermion sector. This cancellation of the neutral particle mass was triggered by the anti-symmetric off diagonal metric in the  $(8d)$  space. The latter option opens the curious possibility to have a neutral fermion theory at hand that allows polarized tritium  $\beta$  decay to drive the neutrino mass closer and closer to zero [19] without contradicting observation of possibly larger neutrino mass in oscillation- , and in  $0\nu\beta\beta$  phenomena, thus providing an intriguing and experimentally testable signature for a potentially viable and non-trivial impact of Majorana spinors on phenomenology.

## 7 Acknowledgments.

One of us (M.K.) benefited from collaboration with D. V. Ahluwalia at the very preliminary stage of this article and specifically from his knowledge on the impact relative phases between Weyl spinors in  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  may have on phenomenology, an idea that he has been tenaciously advocated in various of his works.

Work supported by Consejo Nacional de Ciencia y Tecnologia (CONASyT) Mexico under grant number C01-39820.

## References

- [1] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995 and 2000).
- [2] B. Kayser, F. Gibat-Debu, F. Perrier, *The Physics of Massive Neutrinos*, World Scientific Lecture Notes in Physics Vol. 25, (World Scientific Singapore, 1989).
- [3] H. V. Klapdor-Kleingrothaus, I. Krivosheina, A. Dietz, O. Chvoretz, *Phys. Lett. B* **529**, 198 (2004).
- [4] M. Kirchbach, D. V. Ahluwalia, *Phys. Lett. B* **529**, 124 (2002).
- [5] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Westview Press, N.Y., 1995) pp. 69-76.
- [6] E. Majorana, *Nuovo Cimento* **14**, 171 (1937).
- [7] B. Kayser, *Phys. Rev. D* **30**, 1023 (1984).
- [8] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer* (Addison-Wesley, Redwood City, California, 1989) p. 20.
- [9] Fayyazudin, Riazuddin, *A Modern Introduction to Particle Physics* (World Scientific, Singapore, 2000) pp.325-330; Appendix A.8.
- [10] Stefan Pokorski, *Gauge Field Theories* (Cambridge Univ. Press, 2000, 2nd edition) pp. 26-29.
- [11] J. Hladik, *Spinors in Physics* (Springer-Verlag, N.Y., 1999).
- [12] E. Kh. Akhmedov, *Neutrino Physics*, Lectures at the Trieste Summer School in Particle Physics, June 7-July 9, 1999, hep-ph/0001264.
- [13] D. V. Ahluwalia-Khalilova, hep-ph/0305336; D. V. Ahluwalia, *Int. J. Mod. Phys. A* **11**, 1855 (1996); D. V. Ahluwalia, T. Goldman, M. B. Johnson, *Acta Phys. Pol. B* **25**, 1267 (1994).
- [14] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
- [15] D. V. Ahluwalia, T. Goldman, M. B. Johnson, *Phys. Lett. B* **316**, 102 (1993); D. V. Ahluwalia, *Foundations of Physics* **28**, 1527 (1998).
- [16] J. A. McLennan, Jr., *Phys. Rev.* **106**, 821 (1957).
- [17] K. M. Case, *Phys. Rev.* **107**, 307 (1957).
- [18] V. V. Dvoeglazov, *Rev. Mex. Fis.* **41**, 159 (1995); V. V. Dvoeglazov, *Int. J. Theor. Phys.* **34**, 2467 (1995); V. V. Dvoeglazov, *Mod. Phys. Lett. A* **12**, 274 (1997).
- [19] J. Bonn *et al.*, *Nucl. Phys. B* **91**, 273 (2001); J. Bonn, in *Particles and Fields*, AIP Conf. Proc. **623**, 189 (2002), eds. J. L. Díaz-Cruz, J. Engelfried, M. Kirchbach, M. Mondragon.

EX LIBRIS



SISTEMA DE  
BIBLIOTECAS  
U.A.S.L.P.

No. DE REG.  
FMMT825

