UNIVERSIDAD AUTONOMA DE SAN LUIS POTOSÍ

FACULTAD DE CIENCIAS

ASIGNACIÓN DE RECURSOS Y FUNCIONES DE ELECCIÓN COLECTIVA

TESIS PROFESIONAL

PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

BEXAIDE PAOLA HERRERA JUÁREZ

ASESOR DE TESIS:

DR. LEOBARDO PLATA PÉREZ

SAN LUIS POTOSÍ, S. L. P. JULIO DE 2005

Agradecimientos

A Dios por ser la escencia de mi existencia, de todo lo que soy, todo lo tengo, por la maravillosa familia y amigos que me dio. A mis padres, Victoria Juárez Flores y Froilan Herrera Snowaball que con paciencia y sabiduría han sabido guiar mis pasos a lo largo de mi vida, porque son la luz que salvan mis más oscuros días y mi fuerza para levantarme de mis más dolorosas caídas. A mis hermanas, Susan Victoria y Joyner Danira por ser mi apoyo constante y mis mejores amigas. A mi hermana Mariazell y mi hermano Froylan Yavhe por ser mi alegría y la motivación para superarme día tras día. A mi abuela Rosa Maria Gonzáles por su confianza, su cariño y su apoyo. A mis tías, Carolina, Antonia, Natividad y Juana; y mis tíos Eleno y Guillermo por su apoyo. A Pedro Catarina por ayudarme en momentos difíciles.

A mis maestros, Froylan Marín Sánchez, Carlos Angulo, Jorge David Sánchez y Leobardo Plata Pérez, por sus consejos, sus ensenãnzas, por la paciencia que siempre me mostraron y por que sin su ayuda esto no sería posible. A la maestra Miriam, la señora Tere y Carmelita por ayudarme en los tramites para presentar el examen profesional.

A mis amigos, Clifford, Angel, Esmeralda, Berenice, Puebla, Jose Luis, Chayito, Oly, Omar, por su amistad, su ayuda y su apoyo; a Ivan, Blanca y Goyo por su cariño, estimulo, comprensión y por estar a mi lado en los momentos difíciles. Al señor Jaime Castillo porque me ayudo a encontrar información para la tesis y a imprimir las que necesitaba, a Irma y su mamá, porque me acogieron en su casa cuando más lo necesitaba y en especial a la señora Socorro Castillo porque aun sin conocerme, me dio su cariño, su ayuda y se volvio mi confidente.

Contenido

Introducción

Vivimos en un mundo de escasez, generalmente no tenemos todo lo que deseamos, agua, comida, ropa, vivienda, transporte, salud, poder económico, estatus social, entre otros. Los individuos de una sociedad no pueden satisfacer todos sus deseos debido a que los recursos para hacerlo son escasos, es decir, son pocos en comparación con los deseos de las personas. Las autoridades y la sociedad enfrentan una gran variedad de problemas de asignación de recursos que se deben entender y resolver mediante buenas desiciones debido a la repercusión de éstas sobre los individuos que la forman. La teoría económica se ha preocupado por entender el mundo de las decisiones sociales y económicas desde varios niveles de análisis. Existen desde estudios muy normativos y llenos de ideología hasta estudios positivos pero con poco alcance al referirse a situaciones reales. Los problemas de asignación de recursos escasos aparecen en diferentes entornos: provisión de bienes públicos, problemas de repartición de bienes privados, problemas de elección de un representante social, problemas de la distribución de ingresos entre los miembros de una familia, entre otros. En todos estos casos interesa llegar a soluciones mediante asignaciones viables que satisfagan criterios mínimos de eficiencia que tal vez resulten controvertidas para algunos pero se trata de generar el mayor beneficio social posible. Un ejemplo de esto ocurre en la ciudad de San Luis Potosí, debido a que en ella el agua no es lo que más abunda, las autoridades competentes han decidido realizar un tandeo de agua para su asignación entre los habitantes de la ciudad, de acuerdo a criterios que ellos han considerado, aunque puede que muchos individuos no esten de acuerdo con la forma de asignación, gracias a ella al menos tenemos la cantidad de agua necesaria para cubrir nuestras necesidades.

Los problemas de asignación se han abordado desde diferentes perspectivas, empezamos el trabajo estudiando los problemas de asignación por medio del modelo de equilibrio general bajo la perspectiva de los mercados perfectamente competitivos. Fue Adam Smith quien en 1800 ataco el problema de asignación y declaro que en un mundo ideal, donde existen mercados para todos los recursos, los mercados son la mejor forma de asignarlos. Un mercado es un concepto teórico para referirnos al lugar e institución donde se realizan intercambios de bienes y como consecuencia las asignaciones. Bajo esta perspectiva, se considera que existe un mercado para cada bien o recurso, hay muchos involucrados en la asignación, no hay autoridades, se establecen los precios de los bienes que son conocidos por todos los individuos los cuales no tienen que interactuar entre ellos para decidir su consumo sobre los bienes. Sin embargo, en la vida real no podemos solucionar todos los problemas de asignación a través de los mercados, debido a los distintos entornos no consistentes con los supuestos de Adam Smith. Las funciones de elección colectiva son una forma de estudiar los problemas de asignación de una manera mucho más general desde la perspectiva de la teoría de elección social. Dichas funciones representan métodos de elección social que pretenden modelar la toma de decisiones por parte de un grupo de individuos, con intereses posiblemente contrapuestos, sobre un conjunto de alternativas, tienen como dominio el conjunto de las valoraciones que tienen los individuos sobre las alternativas, y como codominio el conjunto de éstas. Las funciones de elección social tienen sus inicios en el siglo XVIII cuando buscando métodos de decisión colectiva aparece la paradoja de Condorcet, la cual ilustra que el método de decisiones por mayoría de votos no siempre es un buen método para elecciones sociales. En 1951 aparece Keneth Arrow con la obra Social Choice and Individual Values, con ella se funda la teora de eleccin social. Arrow estudia el problema de agregación de preferencias, es decir, toma en cuenta las preferencias de los involucrados en la elección sobre algún conjunto de alternativas, para obtener una solución que trate de beneficiar a todos. Sin embargo, no trata el problema de los incentivos que tienen algunos individuos para mentir sobre sus preferencias. Es hasta Dumment y Farquharson (1961) y Farquharson (1969) cuando empieza a verse el problema de los incentivos en la teoria de eleccin social, pero la irrupcin de los problemas de incentivos como temtica dentro de la teora de eleccin social se debe a los trabajos de Gibbard (1973) y a Satterthwaite (1975). Ellos prueban independientemente un resultado que limita la posibilidad del diseo de funciones de eleccin colectiva pues demuestran que, esencialmente, toda funcin no manipulable es dictatorial. El teorema de Gibbard-Satterthwhite es el origen y punto central de esta tesis.

A pesar de que existen diferentes formas de asignar los recursos, en este trabajo se estudian las propiedades que esos métodos tienen. Dentro de esas propiedades, se encuentra la relación que existe entre dichos métodos y las conductas de los involucrados, es decir, que si los individuos respetan o no los métodos en cuestión. Si los individuos declaran sus verdaderas preferencias sobre algún conjunto de alternativas, ellos los estarán respetando. Pero si algún individuo miente sobre sus preferencias para verse favorecido él no los estará respetando, esto es lo que intuitivamente se conoce como manipulabilidad. También, se presenta el caso en el que un solo individuo decide el resultado del método sin considerar los intereses de los demás involucrados, cuando esto pasa, se dice que el método es dictatorial. La razón principal para desarrollar este trabajo, es presentar un panorama sobre los métodos de asignación más importantes y utilizados con mayor frecuencia. Se espera que este proyecto pueda servir para orientar al lector interesado en conocer algo sobre la literatura de dicho tema. Aunque, por supuesto, no se pretende que éste sea un mapa exhaustivo sobre ello.

En este trabajo se presenta en el capítulo 1 un análisis de los problemas de asignación de recursos por medio de los mercados competitivos. En el capítulo 2 estudiamos de manera formal las funciones de elección colectiva y presentamos un resultado negativo sobre ellas conocido como teorema de Gibbard-Satterthwaite, en el cual los autores demostraron que toda función de elección colectiva dentro de una clase de preferencias muy amplia es manipulable o dictatorial. En el capítulo 3 estudiamos funciones de elección colectiva en dominios muy restringidos que representan métodos de asignación no manipulables y no dictatoriales. Finalmente en el capítulo 4 se darán las conclusiones del trabajo. Los objetivos del trabajo son, describir el modelo de equilibrio general en mercados de competencia perfecta y sus resultados más que las pruebas; explicar el teorema de Gibbard-Satterthwaite y presentar su demostración realizada por Salvador Barberá; y presentar algunos ejemplos de métodos de elección concretos no manipulables y no dictatoriales para resolver problemas de asignación.

CAPÍTULO 1

Asignación en mercados competitivos

En este capítulo se realiza un pequeño análisis desde la teoría económica para los problemas de la escasez de recursos y su asignación. Empezamos dando una breve explicación acerca de los problemas de asignación de recursos escasos, a través de ejemplos sencillos y comunes con el fin de que el lector tome interés en el contenido del capítulo. En la sección 1.2 veremos como los modelos económicos forman una herramienta básica para proponer soluciones a los problemas de escasez. En la sección 1.3 se dan algunos conceptos económicos, que resultan de gran importancia para la mejor comprensión de este trabajo. En la sección 1.4 analizaremos brevemente uno de los modelos más sencillos de la economía, para explicar los problemas de asignación mediante el mecanismo de mercado, este es el modelo de equilibrio parcial, el cual consiste en el estudio de un mercado de un solo bien que constituye una pequeña parte del conjunto de todos los bienes en la economía donde, a excepción del bien bajo estudio, los bienes y sus precios permaneces constantes. En la sección 1.5 estudiaremos los problemas de asignación mediante los mercados desde el modelo de equilibrio general, que consiste en el estudio de mercados con un número finito de bienes. Finalmente en la sección 1.6 estudiamos la teoría de equilibrio y sus propiedades.

1.1 Motivación

No siempre podemos obtener lo que queremos, vivimos en un mundo de escasez. Definimos escasez como la limitación de recursos disponibles para satisfacer los deseos. Por ejemplo, un estudiante cuenta con 1000 pesos para sus gastos quincenales y debido al crudo frío quiere comprar un calefactor, con un costo de 2500 pesos, este estudiante sufre de escasez, puesto que no puede adquirir el calefactor porque tiene una limitación de recursos, de modo que su ingreso de 1000 pesos no le permite comprar algo de mayor precio. Otro ejemplo, cuando una persona quiere asistir el sábado a las 21 : 00 horas a una cena de negocios pero también quiere ir a una reunión con sus amigos esa misma noche a la misma hora, él experimenta la escasez, debido a que solo puede asistir físicamente a uno de los eventos. Lógicamente no podrá estar en dos sitios distintos al mismo tiempo. Esto está ligado con la idea del coste de oportunidad, es decir, si la persona decide usar su tiempo para ir a la cena con los amigos esta renunciando a la oportunidad de acudir a la cena de negocios donde probablemente obtendrá algún beneficio laboral. Del mismo modo, si la persona va a la cena de negocios renuncia a la oportunidad de seguir teniendo una buena relación con sus amigos. Así pues, la renuncia a la oportunidad de asistir a una de las dos cenas es el coste de asistir a una de ellas. Por último ejemplo se tiene que una familia generalmente no puede ofrecer a sus miembros todo lo que cada uno de ellos desea, lo mismo pasa con la sociedad, ésta no puede ofrecer a sus individuos el máximo nivel de vida que aspiren tener, debido a que los recursos con los que cuenta son escasos. Los deseos simplemente no sólo exceden a los recursos limitados sino que los deseos no tienen límites.

Lo anterior nos plantea una serie de preguntas naturales: ¿Cómo se generan las distribuciones de los recursos escasos en una sociedad?, ¿Se puede hablar de cómo se debiera distribuir lo escaso con algún criterio valorativo de la calidad de la distribución? Estas preguntas pertenecen al problema general de asignación de los recursos escasos. La primera de ellas es de tipo positivo y en ella nos preocupamos por describir lo que se observa objetivamente en el mundo. La segunda es de tipo normativo y en ella nos preocupamos por analizar las posibilidades lógicas de asignación de acuerdo a diversos criterios de carácter normativo. Los modelos económicos están presentes para proponer solución a las preguntas anteriores, hay diversos modelos con distintos enfoques para estudiar los problemas de distribución, en cada uno de ellos se debe dar una especificación del conjunto de posibles recursos y sus posibles asignaciones, también se especifican los agentes involucrados, sus características y las características del entorno donde se desarrollan. En buena parte de la teoría económica contemporánea el paradigma dominante consiste en explicar resultados de asignación como producto de conductas racionales de los agentes involucrados. Ello significa suponer que los agentes satisfacen el principio de racionalidad: *"todo agente toma acciones intentando obtener el mejor beneficio para sí mismo dadas sus capacidades y limitaciones"*. Además de que lo que se observa es el resultado de la interacción de agentes racionales. La racionalidad y la modelación de la interacción son los motores que generan la explicación de los resultados observables. La hipótesis o principio de racionalidad toma cuerpo concreto en cada modelo específico, pero antes de abordar modelos económicos discutimos sus características generales en la siguiente sección.

1.2 Modelos económicos

Para estudiar los problemas de asignación de los recursos escasos, hacemos uso de modelos económicos, los cuales nos permiten explicar consistentemente y en algunos casos hacer predicciones sobre dichos problemas. Los modelos económicos son representaciones abstractas de una realidad económica, generalmente constituyen una simplificación de la realidad que se quiere analizar. Es decir, los modelos económicos contienen solamente los hechos más importantes bajo estudio. Por ejemplo, análogo a los modelos económicos, se tiene un modelo de una licuadora en el instructivo de ésta, podemos observar que en dicho modelo solo aparecen las partes que son necesarias para explicar el uso del aparato, pues la explicación sería muy complicada si el modelo tuviera cada parte que compone a dicho aparato. De ese modo, sería muy difícil hacer explicaciones y en algunos casos predicciones acerca del problema que se analiza con un modelo si éste no tuviera simplificaciones. También hacemos uso de las suposiciones para simplificar los modelos.

Elementos de un modelo económico

Un modelo económico contiene los siguientes elementos:

1. Bienes.
2. Agentes.
3. Conductas de los agentes.
4. Medio ambiente o entorno.
5. Resultado de interacción.

Con el fin de aclarar estos elementos, consideramos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.A Reparto de ganancias por venta de tacos. Los M alumnos de una clase de matemáticas, vendieron tacos en su escuela durante un año, con el fin de reunir fondos para su fiesta de graduación. Sin embargo, debido a que se generaron conflictos entre algunos compañeros, la fiesta de graduación no se llevará a cabo, así que, los alumnos han decidido repartirse las ganancias que obtuvieron. En este caso los alumnos decidieron comprar cada taco a un precio $p > 0$, para que ellos los vendieran a un precio $p' > p$. No hubo presupuesto inicial, ya que primero vendían los tacos y después los pagaban a la persona que los hizo. Supongamos que durante un año se vendierón $I > 0$ tacos, de esa manera, las ganancias que obtuvieron en la venta son $\sum_{i=1}^{I} p'_i - p_i$. Pero ¿Qué determina la cantidad de las ganancias que obtendrá cada alumno?, ¿Qué puede decirse de la conveniencia de los diferentes mecanismos económicos para la asignación de las ganancias?, ¿Qué conceptos podemos usar para juzgar los méritos de diferentes asignaciones de las ganancias entre los alumnos?. Éstas preguntas son las que queremos explorar para proponer soluciones a través de unos modelos económicos. Podemos citar algunas posibles soluciones a este problema de asignación, por ejemplo, repartir las ganancias en partes iguales, pero tal vez algunos alumnos no estarán de acuerdo con esa forma de distribución; o asignarlas de acuerdo al tiempo que cada alumno invirtió en dicha venta. Para obtener la mejor solución posible haremos uso de modelos económicos.

Ejemplo 1.B. Reparto de becas. En la Facultad de Ciencias de la U.A.S.L.P. se asignarán becas entre sus estudiantes. Se cuenta con k becas y N estudiantes, donde $k < N$, el conjunto de estudiantes se denota como $M = \{1, 2, ..., N\}$. Las becas serán asignadas al finalizar el semestre en curso, el encargado de asignarlas tendrá que elegir algún método de asignación. Pero ¿Qué determina quién obtendrá una beca?, ¿Qué puede decirse de la conveniencia de los diferentes mecanismos económicos para asignar las becas?, ¿Qué conceptos podemos usar para juzgar los méritos de diferentes asignaciones de las becas entre los alumnos?. Éstas preguntas son las que queremos modelar y analizar en el entorno de un modelo económico. Podemos citar algunas posibles soluciones, por ejemplo, asignarlas a sus estudiantes preferidos; a los alumnos que tengan las mejores calificaciones hasta el fin de semestre; a los alumnos que tengan menos recursos económicos; a los que realizen mayor esfuerzo durante el semestre en curso; o repartir las becas al azar mediante alguna rifa, aunque cabe la probabilidad de que el alumno que tenga el peor promedio o el más flojo reciba una beca y el alumno con el mejor promedio no reciba una. Considerando éstas soluciones, es lógico preguntar cual de ellas resulta ser la mejor opción para los estudiantes, la teoría económica ayuda a modelarlas y compararlas a través de modelos económicos.

Vamos a especificar los elementos de los modelos económicos en general.

Bienes

Los bienes son la especificación de los recursos, objetos o mercancías disponibles para la asignación. En el ejemplo **1.A** los bienes son las ganancias que se obtuvieron por la venta de tacos durante un año; en el ejemplo **1.B** los bienes son las becas que se van repartir entre los alumnos.

Agentes

Los agentes son los individuos o entidades involucrados en el problema de asignación. Generalmente se consideran tipos de consumidores, empresas o gobiernos. En el ejemplo **1.A** los individuos que se involucran en la asignación de las ganancias son los alumnos de la clase de matemáticas, es decir, los agentes son los integrantes del conjunto de M alumnos. Supongamos que en el ejemplo **1.B** el encargado de asignar las becas es el director de la facultad. De esta manera, los involucrados en la repartición de becas son los estudiantes de la facultad y el director de ésta, es decir, los agentes son $M \cup \{d\}$, donde $\{d\}$ es el conjunto que tiene como único elemento al director de la facultad.

Conductas

Las conductas son una especificación de las funciones objetivo de los agentes involucrados. En el ejemplo **1.A** cada alumno exijirá la mayor cantidad de ganancias que él considere que merece, de acuerdo al tiempo t_m que haya dedicado a la venta. En el ejemplo **1.B** los alumnos deciden hacer esfuerzos que pueden ser altos, medios o bajos, además tienen ciertas capacidades iniciales, en este caso son los promedios anteriores, $\{(capacidad_n, esfuerzo_n)\} = \{(c_n, e_n)\}$. El agente d puede poner una regla de asignación (impuesta por sus preferencias, en dicho caso d sería un dictador) o se encarga de hacer cumplir o implementar alguna regla establecida en los reglamentos de la U.A.S.L.P.

Medio Ambiente

El medio ambiente son las instituciones y reglas que gobiernan las conductas de los agentes. Las instituciones regulan las conductas pero los agentes pueden seguir o no respetar las reglas dada su individualidad. En el ejemplo **1.A** se considera implementar una regla de asignación. Sea $t_m \in \mathbb{R}$ el tiempo neto que el alumno m invirtió en la venta de tacos durante un año, y $x_m \in \mathbb{R}$ la cantidad monetaria de las ganancias que m recibe. Una regla de asignación en este caso tiene como dominio y rango a $\mathbb{R}$, esta asignará a cada agente m la cantidad de ganancias proporcional al tiempo que haya invertido en la venta. Si existen registros exactos sobre el tiempo que cada alumno invirtió en la venta, ellos no tendrán más alternativa que seguir la regla establecida; pero si no los hay, existe la posibilidad de que algunos alumnos deshonestos no respeten la regla, mintiendo sobre el tiempo dedicado a la venta para verse favorecidos. Ésto es lo que intuitivamente se conoce como manipulabilidad, lo veremos con detalle en el capítulo 2. Denotamos esta regla como

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longmapsto \mathbb{R} \\ g(t_m) &= x_m. \end{aligned}$$

En el ejemplo **1.B** consideramos implementar una regla de asignación. Dicha regla valorará las capacidades iniciales y el esfuerzo de cada alumno, con el fin de decidir quién obtendrá una beca. Pero, a diferencia de las capacidades iniciales de los alumnos que se representan por sus calificaciones, el esfuerzo que realiza el alumno es difícil de conocerse. Ésto puede ocasionar que algún alumno mienta sobre ello para verse favorecido en la repartición de becas. Ésto se conoce intuitivamente como manipulabilidad y no es deseable. La regla de asignación se denota por

$$f : (c_n, e_n) \longmapsto \{0,1\}$$
$$f(c_n, e_n) = \begin{cases} 1 & n \text{ tiene beca} \\ 0 & n \text{ no tiene beca} \end{cases}$$

Resultado de interacción
Una vez que se ha especificado todo lo anterior, se analizan las consecuencias de ello y esto es lo que se conoce como resultado de interacción. Ello permite generar explicaciones de fenómenos y a veces hacer predicciones, en este caso permite dar respuesta a las preguntas generadas en los ejemplos anteriores.

1.3 Algunos conceptos económicos previos

Los recursos destinados a la asignación pueden dividirse en dos grupos, bienes divisibles y bienes indivisibles. Los **bienes divisibles** son aquellos que pueden dividirse, por ejemplo, un pastel, azúcar, frutas, etcétera. Los **bienes indivisibles** son aquellos que no pueden dividirse, por ejemplo, un televisor, un libro, una cama, un coche, entre otros. Estos bienes a su vez pueden representarse como números o vectores. También entre los bienes se puede hacer una diferencia de acuerdo a su uso, estos se consideran bienes públicos o bienes privados. **Un bien público** es un bien para el cual el uso de una unidad, no impide su uso por otro agente, por ejemplo, un parque, la plaza central o un puente peatonal. **Un bien privado** es un bien para el cual una unidad sólo puede usarse por un agente a la vez, así si un agente usa dicho bien, éste no está disponible para el uso de otros, por ejemplo, una casa, un auto, etcétera. Los agentes involucrados en la asignación de los recursos son de dos tipos, consumidores y empresas. Es posible dividir estos agentes en dos conjuntos amplios de acuerdo a su función, estos son demandantes o compradores y oferentes o vendedores. Los **compradores** serán consumidores o empresas que adquieran bienes o servicios, y los **vendedores** serán consumidores o empresas que vendan algo. La interacción entre compradores y vendedores da lugar a los mercados, que resulta ser una forma de asignación de los recursos. **Un mercado** es un concepto teórico para referirse al lugar e institución donde se realizan los intercambios de bienes y donde consecuentemente se producen las asignaciones. Generalmente los mercados existen como un lugar físico, como lo es el mercado de la ciudad; o virtual, como el Internet. En un mercado las cantidades de un bien se ofrecen a precios específicos, el precio que prevalece de un bien, es el **precio del mercado** . Podemos dividir los mercados en varios grupos de acuerdo a sus características, en este caso solo trataremos con dos grupos, mercados de competencia perfecta y mercados de competencia imperfecta. Un mercado en el que cada agente económico considere que el precio de mercado esta fuera de su control, esto es, un mercado en el que existan suficientes compradores y vendedores como para garantizar que ningún agente aislado tenga poder sobre el precio de mercado, se denomina **mercado competitivo** o **mercado de competencia perfecta**, en este caso las conductas de compradores y vendedores son las que toman el precio, y cada uno decide sus acciones, de acuerdo a sus propios intereses, teniendo en cuenta los objetivos y circunstancias individuales. Por ejemplo, en el mercado de maíz en México, existen miles de agricultores que producen maíz, que es adquirido por miles de compradores para producir varios productos. Como resultado ningún comprador o vendedor aislado pueden afectar en forma significativa el precio del maíz. Usualmente en competencia perfecta, prevalece un solo precio, el precio del mercado. Por otro lado se tienen algunos mercados que contienen muchos productores, pero algunas empresas individuales pueden afectar el precio del producto, estos son los **mercados de competencia imperfecta**. Un ejemplo de esto es el mercado del petróleo en México. En el caso de competencia imperfecta, empresas diferentes pueden cobrar distintos precios por un mismo producto.

En la siguiente sección analizamos el modelo de equilibrio parcial, teniendo en cuenta los conceptos económicos vistos en esta sección ya que ellos son básicos para su estudio, y para el análisis del modelo de equilibrio general que se ve más adelante. En el siguiente modelo consideramos un mercado perfectamente competitivo con un solo bien.

1.4 Modelo de equilibrio parcial

Uno de los modelos más sencillos de la economía es el modelo de equilibrio parcial, éste representa una abstracción que considera un solo mercado con un bien. En esta situación existen suficientes consumidores y productores potenciales del bien como para garantizar que ninguno de ellos, por sí solo puede modificar en forma considerable el precio de mercado. Al estudiar este modelo nos enfrentamos al problema de asignación de unidades de un solo bien entre los muchos consumidores que participan en el mercado. Sin embargo, esta asignación debe representar un bienestar social máximo. Este bienestar se encuentra en el equilibrio del mercado, conocido en este caso como equilibrio parcial. En este modelo supondremos que el mercado bajo estudio es perfectamente competitivo, y que en la economía existen L bienes los cuales, a excepción del bien bajo estudio, se consideran constantes junto con sus precios y no se afectan por los cambios que puedan ocurrir en ese mercado.

Bienes

Se estudia un solo bien, l, arbitrario pero fijo, y su precio de mercado es p.

Agentes

Sea I un conjunto de compradores potenciales y J un conjunto de vendedores potenciales del bien. Supongamos que los vendedores tienen la característica de que al menos un material de entrada (por ejemplo el tamaño de la fabrica) es fijo para ellos, y que los conjuntos I y J deben tener cardinalidad grande [1], ya que estamos trabajando con mercados perfectamente competitivos.

Conductas

Las conductas de los agentes involucrados mantienen la hipótesis de racionalidad. La función objetivo de cada comprador está representada por una función de demanda $D(p)$, que indica la cantidad de l que el comprador puede adquirir, de acuerdo a su ingreso y al precio de mercado, de tal forma que maximice sus preferencias. De ese modo $q = D(p)$, es la cantidad que cada comprador puede adquirir al precio p. La función objetivo de cada vendedor se representa por una función de oferta $S(p)$[2] en la cual eligen un programa de producción que maximiza sus beneficios, dados los precios de los factores y productos, y las restricciones tecnológicas sobre los programas de producción. Del mismo modo, $y = S(p)$ es el programa de producción que cada vendedor implementa para maximizar sus beneficios.

[1] El suponer que los agentes sean muchos se requieren para garantizar la existencia y continuidad de las curvas de oferta y demanda.

[2] El tema de oferta y demanda se verá con detalle en la siguiente sección.

Medio ambiente
Las conductas de los agentes en este modelo están gobernadas por el mercado de competencia perfecta. En dicho mercado no existen autoridades, no hay instituciones y los agentes no pueden comunicarse entre sí a la hora de tomar decisiones. De ese modo, las conductas de los agentes solo están guiadas por las señales de precio y las características del mercado.

Puesto que en el mercado competitivo existen muchos agentes, en donde cada agente tiene su función objetivo, es necesario obtener una función objetivo para el mercado. Por lo tanto, la función de demanda de mercado sobre el bien l representa la función objetivo de los compradores y está dada por

$$D(p) = \sum_{i=1}^{I} D^i(p)$$

que es la suma de las demandas individuales. Del mismo modo la función de oferta de mercado representa la función objetivo de los vendedores, es la suma de las ofertas individuales de los vendedores y se denota por

$$S(p) = \sum_{j\in J} S^j(p)$$

Resultado de interacción
Considerando lo anterior, cada demandante y cada oferente averiguan que es lo mejor que pueden hacer para maximizar su bienestar dado el precio de mercado. Un equilibrio económico es una situación en la que todos los agentes toman la decisión que más les favorece y la conducta de cada uno es compatible con la de los demás. El precio de equilibrio del bien es aquel al que su oferta es igual a su demanda. Si $D(p)$ es la curva de demanda del mercado y $S(p)$ la de oferta, el precio de equilibrio es p^* que es la solución de la ecuación

$$D(p^*) = S(p^*).$$

Ahora bien, en un equilibrio parcial el bienestar social es máximo. Es decir, cada comprador y cada vendedor maximizan su bienestar cuando la oferta es igual a la demanda. Veamos lo siguiente: sea el bien l en el mercado con un precio de equilibrio p^*, es decir p^* es el precio de una unidad del bien para el cual la oferta del bien es igual a su demanda. El valor máximo que un consumidor arbitrario está dispuesto a pagar por una unidad del bien se denomina precio de reserva, es decir, el precio de reserva de una persona es aquel al que le da igual comprar una cosa que no comprarla. Supongamos que un consumidor tiene un precio de reserva $r_1 \geq p^*$ por la primera unidad de consumo del bien, esto significa que r_1 es el precio al que a ese consumidor le da igual consumir cero unidades del bien que una unidad. Debido a que el precio de mercado por una unidad del bien es p^*, dicho consumidor obtiene por la primera unidad de consumo del bien una ganancia o ahorro de $r_1 - p^*$ llamado "excedente". El consumidor concede un precio de reserva $r_2 \geq p^*$ a la segunda unidad de consumo, es decir, está dispuesto a pagar un precio p^* por unidad para obtener dos unidades del bien. Así obtiene un "excedente" de $r_2 - p^*$ por ella. Si sumamos los excedentes de las unidades del bien que el consumidor arbitrario elige, obtenemos su excedente total denotado por $EC(p^*)$, podemos definirlo como el área bajo la curva de demanda y sobre el precio p^*. La figura 1.1a representa un ejemplo del excedente del consumidor.

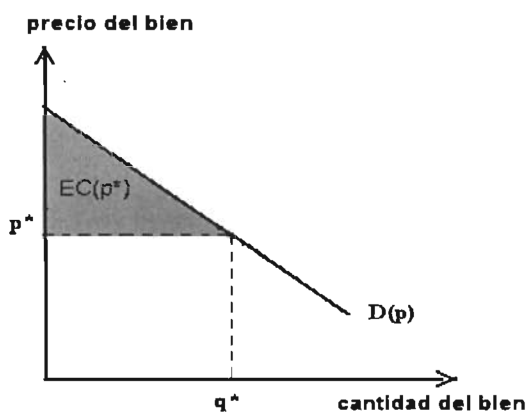

Figura 1.1a: Excedente del consumidor en p*.

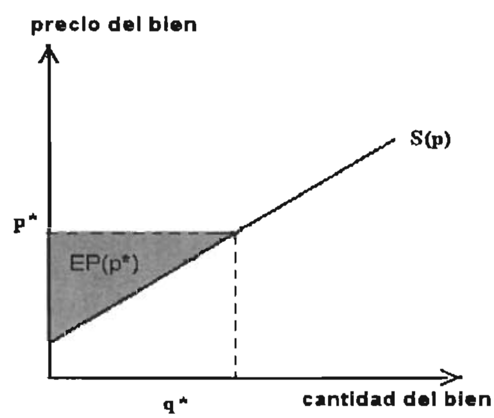

Figura 1.1b: Excedente del productor en p*.

Por otro lado, supongamos que un productor arbitrario está dispuesto a vender la primera unidad del bien l a un precio $p_s(1) \leq p^*$, pero en realidad recibe por ella el preco de mercado p^*. Del mismo modo, está dispuesto a vender la segunda unidad por $p_s(2)$, pero recibe p^*. De la misma forma continuamos la operación hasta la última unidad que vende, donde $p_s(x^*) = p^*$. La diferencia entre la cantidad mínima a la que estaría dispuesto a vender las x^* unidades y la cantidad a las que las vende realmente es el excedente del productor denotado por $EP(p^*)$. La figura 1.1b representa un ejemplo del excedente del productor. Como en este caso existen muchos agentes, si sumamos el excedente de cada consumidor obtenemos el excedente de los consumidores; y si sumamos el excedente de cada productor obtenemos el excedente de los productores. En la figura 1.1a se representa un ejemplo del excedente del consumidor en el precio de equilibrio p^* y en la figura 1.1b un ejemplo del excedente del productor en p^*.

Podemos ver el bienestar social (BS) como la suma de los excedentes de los consumidores y los excedentes de los productores, este es máximo en el precio de equilibrio p^* y en la cantidad de equilibrio q^*, es decir la cantidad del bien y el precio en los que la demanda es igual a la oferta. Para ver esto, consideremos el caso de un solo consumidor y un solo productor, definimos el excedente del consumidor como el área bajo la curva de demanda y sobre el precio p^*; y el excedente del productor como el área sobre la curva de oferta y bajo el precio p^*. Consideramos también la demanda inversa denotada por $p(q)$ y la oferta inversa denotada por $CM_g(q)$ representadas en la figura 1.2.

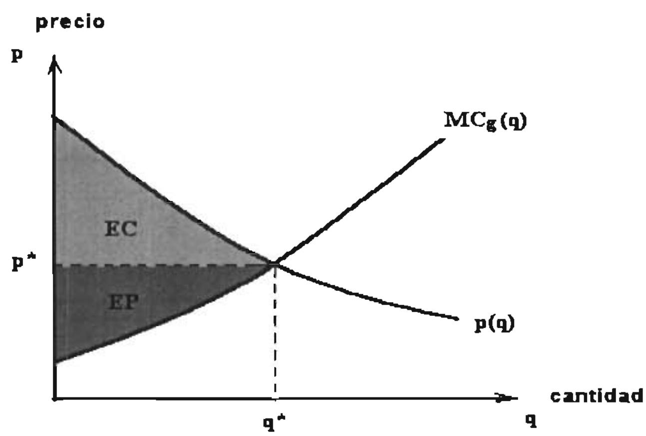

Figura 1.2: El bienestar social es máximo en el equilibrio de mercado competitivo.

Expresamos el excedente del consumidor como el área bajo la curva de demanda inversa hasta q^* menos el área del rectángulo $q^*p(q^*)$,

$$EC = \int_0^{q^*} p(q)dq - q^*p(q^*).$$

Expresamos el excedente del productor como el área del rectángulo $q^*p(q^*)$

menos el área bajo la curva de oferta inversa hasta q^*,

$$EP = q^*p(q^*) - \int_0^{q^*} CM_g(q)dq.$$

De esa manera, podemos expresar el bienestar social en q^*, $BS(q^*) = EC + EP$, como

$$\begin{aligned} BS(q^*) &= \left[\int_0^{q^*} p(q)dq - q^*p(q^*)\right] + \left[q^*p(q^*) - \int_0^{q^*} CM_g(q)dq\right] \\ &= \int_0^{q^*} \big(p(q) - CM_g(q)\big)dq \end{aligned}$$

Por el teorema fundamental del calculo,

$$BS'(q^*) = p(q^*) - CM_g(q^*),$$

pero, debido a que la oferta es igual a la demanda, $BS'(q^*) = 0$. Así que, de acuerdo al criterio de la primera derivada, tenemos que $BS(q^*)$ es máximo en q^*.

Por lo tanto, q^* maximiza $BS(q^*)$ si, y solo si, q^* es equilibrio, es decir, $p(q^*) = CM_g(q^*)$. ∎

El modelo que hemos estudiado en esta sección representa una solución al problema de asignación de unidades de un solo bien por medio del mecanismo de los mercados, pero aún no contamos con una solución al problema de asignación de unidades de L bienes. En la siguiente sección analizamos el modelo de equilibrio general, en el cual se estudian mercados con L bienes.

1.5 Modelo de equilibrio general

En esta sección analizamos el modelo de equilibrio general que representa una abstracción que considera mercados con L bienes. En esta situación consideramos que los mercados bajo estudio son perfectamente competitivos, donde todos los bienes y sus precios se consideran variables de interés y pueden ser afectados por algún cambio que se realice en dichos mercados. Podemos ver el equilibrio general como una teoría de la determinación simultánea de precios y cantidades de equilibrio de los L bienes en un sistema de mercados perfectamente competitivos. En los mercados de competencia perfecta los precios sobre los bienes se encuentran fuera del control de los agentes. Los precios son solo señales de los mercados que son consideradas en la decisión de los agentes, para elegir lo que más les conviene considerando sus propias preferencias para los consumidores o características tecnológicas en el caso de las empresas. Al estudiar este modelo nos enfrentamos al problema de asignación de unidades de L bienes entre muchos demandantes, donde el equilibrio debe representar la asignación de los bienes que produzca el máximo bienestar social posible.

Conducta de los consumidores

En una economía de mercado el consumidor se enfrenta al problema de elegir para su consumo una cesta de bienes o servicios dada su capacidad de compra o poder adquisitivo y los recursos de los que disponga para comprar. Supongamos que en la economía existen L bienes. Una **cesta de consumo** es un vector $x = (x_1, ..., x_L)$, donde $x_i \in \mathbb{R}_+$ es la cantidad consumida del bien i, denotamos como $\mathbb{R}_+$ al conjunto de los reales positivos con el cero. El conjunto de consumo posible se denota por $X = \mathbb{R}^L_+ = \{x \in \mathbb{R}^L_+ : x_i \geq 0 \ \forall i = 1, ..., L\}$ y esta formado por las cestas de consumo que el individuo podría potencialmente elegir dados los factores impuestos por su medio ambiente y sus características propias. Además de las limitantes impuestas por el medio ambiente en el conjunto consumo, el consumidor se enfrenta al problema de su restricción económica: su elección de consumo esta limitada a las cestas que él puede adquirir. Para formalizar lo anterior hacemos uso de lo siguiente.

Supuesto de mercados completos.
Existe mercado para cada bien de la economía.

Supuesto de información completa.
Los precios monetarios de los L bienes son conocidos públicamente. Estos precios se representan por $p = (p_1, ..., p_L) \in R^L{}_+$, donde p_i es el precio monetario de una unidad del bien i.

El hecho de que un consumidor pueda adquirir una cesta de consumo, depende de los precios de mercado $p = (p_1, ..., p_L)$ y de su presupuesto o ingreso w. Un **conjunto presupuestario** $B_{p,w} = \{x \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x \leq w\}$, es el conjunto de todas las cestas de consumo que el consumidor que enfrenta los precios de mercado p y tiene presupuesto w puede adquirir, supondremos que siempre $w > 0$. El conjunto $\{x \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x = w\}$ es llamado hiperplano presupuestario. Para el caso en el que $L = 2$, llamamos a este conjunto, recta presupuestaria y determina la cota superior del conjunto presupuestario. La figura 1.3 representa un ejemplo de conjunto presupuestario $B_{p,w}$ y de una recta presupuestaria S para cuando $L = 2$. Una vez que se ha especificado que cestas de consumo puede adquirir un consumidor, éste deberá decidir cuales son las mejores cestas que él puede elegir. Para esto el consumidor deberá guiarse por sus preferencias sobre el conjunto presupuestario. Veámos que queremos decir con preferencias.

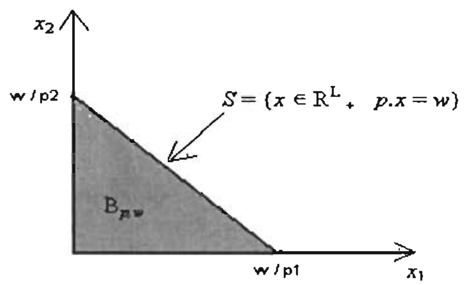

Figura 1.3: Para el caso L = 2, $B_{p,w}$ forma un conjunto presupuestario y S es la recta presupuestaria.

Supongamos que tenemos una colección finita de alternativas a considerar. Si dicha colección está ordenada de la alternativa más deseada a la menos deseada, se tiene un orden de preferencia. Existen ocasiones en las que dentro de la colección dos o más alternativas se encuentran en un mismo nivel de preferencia, es decir, son igualmente deseadas o preferidas, se dice que dichas alternativas son indiferentes. Cualesquiera dos alternativas en una misma colección puede ser comparadas, estableciendo cuál de las dos es la más preferida o si ellas son indiferentes. Se puede decir que una colección de alternativas con un orden de preferencia establecido, provee una base para hacer elecciones sobre ellas, desde cierto punto de vista.

Definición 1.1 *Sea X un conjunto de alternativas,* **una relación de preferencia** [3] *en X es una relación binaria $\Re$, con $\Re \subset X \times X$ que satisface:*

1. *Propiedad de completes: Para todo $a, b \in X$, se tiene que $a\Re b$ o $b\Re a$.*

2. *Propiedad de transitividad: Para todo $a, b, c \in X$, si $a\Re b$ y $b\Re c$ entonces $a\Re c$.*

$a\Re b$ denota que $(a, b) \in \Re$ y se lee como "a es al menos tan preferida como b". La propiedad de completes nos asegura que todas las alternativas son comparables entre sí, y la propiedad de transitividad evita que se generen ciclos en las preferencias sobre las alternativas. De la relación de preferencia podemos derivar otras dos importantes relaciones en X.

1. La **relación de preferencia estricta** P, definida por aPb si $a\Re b$ y no $(b\Re a)$,

2. La **relación de indiferencia** I, definida por aIb si $a\Re b$ y $b\Re a$.

aPb se lee como "a es estrictamente preferido a b" y aIb se lee como "a es indiferente a b". De lo anterior se sigue claramente que $\Re = P \cup I$.

Volviendo a la teoría de los consumidores, supongamos que tenemos cualesquiera dos cestas de consumo, x, y, el consumidor puede arreglarlas según sus preferencias. Si el consumidor prefiere una cesta de otra, elegirá la que prefiere. Resultará útil describir gráficamente las preferencias de los consumidores mediante curvas de indiferencia. Veamos el caso en el que $L = 2$, y escojamos una cesta de consumo arbitraria pero fija, a saber x', consideremos la figura 1.4 cuyos dos ejes representan el consumo de los dos bienes por parte de un individuo. La parte sombreada representan las cestas z que se prefieren a x', a esa área se le llama conjunto de contorno superior, denotado por $U_{x'} = \{z \mid z\Re x'\}$. Las cestas de la frontera de ese conjunto constituyen la curva de indiferencia y son las cestas que el individuo considera indiferentes a x'. Podemos trazar una curva de indiferencia partiendo de cualquier cesta de consumo que queramos. Para ver cuales son las mejores cestas de consumo de un consumidor, con la utilización de las curvas de indiferencia, resultará útil trazar flechas sobre las curvas de indiferencia que indiquen la dirección de las cestas preferidas. Una curva de indiferencia puede tomar varias formas geométricas, de acuerdo a las hipótesis o supuestos que se manejen, por

[3] También se denomina preferencia u orden de preferencia.

comodidad presentamos la figura 1.4 como un ejemplo de una curva de indiferencia y de un conjunto de contorno superior.

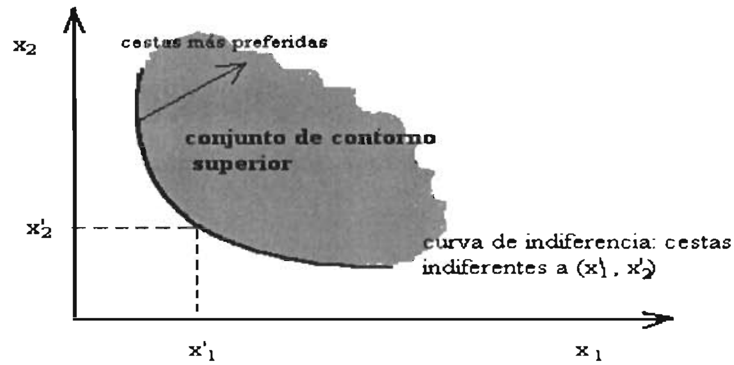

Figura 1.4: Conjunto de contorno superior

El problema del consumidor dados los precios p y el ingreso w, puede formularse como sigue: Elegir una cesta de consumo x de $B_{p,w}$ para maximizar sus preferencias.

Además del supuesto de racionalidad de las preferencias, es costumbre suponer

Supuesto de monotonía.
La relación de preferencia $\Re$ en X es monótona, es decir, se prefiere tener más a tener menos.

Este supuesto se satisface siempre y cuando los bienes sean recursos o servicios deseables para el consumidor. Aun cuando algún bien no sea deseable, podemos decir que las preferencias son monótonas , ya que frecuentemente es posible redefinir una actividad de consumo de tal forma que se satisfaga dicho supuesto. Por ejemplo, si consideramos a la basura como un bien, podemos definir el consumo individual sobre la ausencia de basura.

Supuesto de no saciedad

La relación de preferencia $\Re$ en X es localmente no saciada, es decir, para cada $x \in X$ y cada $\epsilon > 0$, existe $y \in X$ tal que $\|y - x\| \leq \epsilon$ y yPx. [4]

Este supuesto dice que para cualquier cesta de consumo $x \in R^L{}_+$ y cualquier distancia arbitrariamente pequeña a partir de x, denotada por $\epsilon > 0$, existe una cesta $y \in R^L{}_+$ dentro de esta distancia que es preferida a x.

Supuesto de convexidad.

La relación de preferencia $\Re$ en X es convexa. El supuesto de convexidad debe declararse para un conjunto de consumo general X, de hecho este supuesto se cumple solo si X es convexo.

Definición 1.2 La relación de preferencia $\Re$ sobre X es convexa *si para cada $x \in X$, el conjunto de contorno superior es convexo; es decir si $y\Re x$ y $z\Re x$, entonces $(\alpha y + (1-\alpha)z)\Re x$ para cualquier $\alpha \in [0,1]$. Si $(\alpha y + (1-\alpha)z)Px$, siempre que $y \neq z$ para todo $\alpha \in (0,1)$, entonces $\Re$* **sobre X es estrictamente convexa.**

El hecho de que las preferencias sean convexas se pueden interpretar de dos formas, primero, dadas las preferencias convexas, para cualquier cesta de consumo inicial x, y para cualesquiera dos bienes, la cesta toma cantidades de un bien cada vez más grandes para compensar las unidades perdidas del otro bien. Segundo, bajo convexidad si x es indiferente a y, entonces $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$, la mezcla de la mitad y mitad de los bienes, no puede ser peor que cualquiera de x o y.

Supuesto de continuidad

La relación de preferencia $\Re$ en X es continua.

La continuidad nos dice que las preferencias del consumidor no pueden exhibir saltos, por ejemplo, sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ dos sucesiones de alternativas para un consumidor, con los limites en x y y respectivamente. Supongamos que el consumidor prefiere cada elemento de $\{x_n\}$ al correspondiente en $\{y_n\}$, entonces las preferencias del consumidor pueden verse en los puntos limites

[4] $\|y - x\|$ es la distancia euclideana entre x y y.

de las sucesiones, es decir, $x\Re y$. Referimos al lector al libro de Mas-Collel [1995] para un análisis detallado de estos supuestos.

Dadas las preferencias del consumidor, sería muy útil si pudiéramos sumarlas mediante una función de utilidad, ya que de esa forma podrían usarse las técnicas matemáticas para resolver el problema del consumidor. Una función de utilidad es un instrumento para asignar un número a todas las cestas de consumo posibles de tal forma que las que se prefieren tengan un número más alto que las que no. El supuesto de continuidad es necesario y suficiente para garantizar la existencia de una función de utilidad.

Proposición 1.1 *Supóngase que la relación de preferencia $\Re$ en X es continua. Entonces existe una función de utilidad continua $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que representa a $\Re$.*

Referimos al lector al libro Mas-Collel [1995] para ver la demostración a la proposición anterior. Esta proposición nos dice que existe alguna función de utilidad continua que represente a $\Re$, pero no todas las funciones de utilidad representantes de $\Re$ son continuas; cualquier transformación estrictamente creciente pero discontinua de una función de utilidad, también la representa. Las restricciones sobre las preferencias pueden transladarse a las funciones de utilidad. Por ejemplo, la propiedad de monotocidad implica que la función de utilidad es creciente, es decir, $u(x) > u(y)$ si $x >> y$. La propiedad de convexidad de preferencias implica que la función de utilidad e cuasiconcava, y la propiedad de convexidad estricta de preferencias implica que la función de utilidad es estrictamente cuasiconcava.

Definición 1.3 La función de utilidad $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es cuasiconcava *si el conjunto $\{y \in X : u(y) \geq u(x)\}$ es convexo para todo $x \in X$, es decir, si*

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq Min\{u(x), u(y)\}$$

para cualquier $x \neq y$ y todo $\alpha \in [0,1]$.

Definición 1.4 La función de utilidad $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente cuasiconcava *si el conjunto $\{y \in X : u(y) \geq u(x)\}$ es estrictamente convexo para todo $x \in X$, es decir, si*

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) > Min\{u(x), u(y)\}$$

para cualquier $x \neq y$ y todo $\alpha \in [0,1]$.

El problema del consumidor de elegir la cesta de consumo que él prefiera, dados los precios p y su presupuesto w puede formularse como el siguiente problema de maximización de utilidad (PMU):

$$\begin{array}{rl} \max & u(x) \\ \text{x} & \\ \text{s.a} & p \cdot x \leq w \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Donde s.a significa sujeto a; en el PMU, el consumidor elige una cesta de consumo de su conjunto presupuestario para maximizar su nivel de utilidad.

Proposición 1.2 *Si $p > 0$ y $u(.)$ es continua, entonces el problema de maximización de utilidad tiene una solución.*

FMMT966

Prueba: Si $p > 0$, entonces el conjunto presupuestario $B_{p,w} = \{x \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x \leq w\}$ es un conjunto compacto porque es acotado y cerrado. Es acotado porque para cualquier $l = 1, ..., L$, tenemos que $x_l \leq (w/p_l)$ para todo $x \in B_{p,w}$. Es cerrado porque contiene a todos sus puntos de acumulación. El resultado sigue del hecho de que una función continua siempre tiene un valor máximo sobre un conjunto compacto. ∎

El conjunto solución al PMU se denomina conjunto de cestas óptimas del consumidor. Dicho conjunto esta formado por las cestas de consumo de su conjunto presupuestario que se encuentran en la curva de indiferencia más alta. La cesta de consumo correspondiente a esta curva se denota por $x^* = ({x^*}_1, ..., {x^*}_L)$, la cual indica las mejores cantidades de cada bien, que el consumidor puede elegir. Esto es lo que se conoce como demanda del consumidor, como se ve a continuación. El valor de la función de PMU es el valor de utilidad máximo del consumidor.

La regla que asigna el conjunto de vectores de consumo óptimos en el PMU a cada situación de precio-presupuesto $(p, w) > 0$ esta denotado por $x(p, w) \in {R^L}_+$ y es lo que se conoce como correspondencia de demanda.

Un ejemplo para $L = 2$ esta representado en la figura 1.5a, donde el punto $x(p,w)$ se encuentra en la curva de indiferencia con el nivel de utilidad más alto de cualquier punto en $B_{p,w}$. Notemos que en general, para un vector dado $(p,w) > 0$ el conjunto de cestas óptimas $x(p,w)$ puede tener más de un elemento, como se ve en la figura 1.5b. Cuando $x(p,w)$ es un solo valor para todo (p,w), llamaremos a $x(p,w)$ función de demanda.

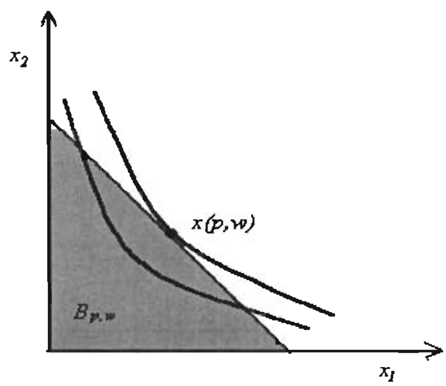

Figura 1.5a: Función de demanda.

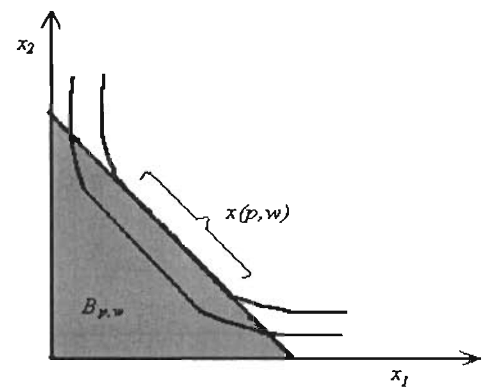

Figura 1.5b: Correspondencia de demanda.

Supongamos que existen I consumidores con relaciones de preferencia $\Re_i$ y funciones de demanda $x_i(p, wi)$. Dados los precios $p \in R^L{}_+$ y los presupuestos $w = (w_1, ..., w_I)$ para los I consumidores, la demanda agregada o demanda de mercado puede ser escrita como:

$$D(p,w) = (p, w_1, ..., w_I) = \sum_{i=1}^{I} \; x_i(p, w_i),$$

es la suma de las demandas individuales de todos los consumidores.

Ejemplo 1.C: La función de demanda derivada de la función de utilidad de Cobb-Douglas. Una función de utilidad de Cobb-Douglas para $L = 2$ está dada por $u(x_1, x_2) = kx_1^a x_2^{1-a}$ para algún $\alpha \in (0,1)$ y $k > 0$. Esta es creciente en todo $(x_1, x_2) > 0$ y es homogéneo de grado uno. Para nuestro análisis, usamos la transformación creciente $\alpha \; ln \, x_1 + (1-\alpha) \; ln \, x_2$, como una función estrictamente concava, como nuestra función de utilidad. De esta forma, el PMU puede establecerse como

$$\max_{x_1, x_2} \quad \alpha \, ln \, x_1 + (1-\alpha) \, ln \, x_2$$
$$\text{s.a} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = w.$$

Puesto que $ln \, 0 = -\infty$, la elección óptima $(x_1(p,w), x_2(p,w))$ es estrictamente positiva y debería satisfacer las condiciones de primer orden

$$\tfrac{\alpha}{x_1} = \lambda p_1 \qquad (1.1a)$$

y

$$\tfrac{1-\alpha}{x_2} = \lambda p_2 \qquad (1.1b)$$

para algún $\lambda \geq 0$, y la restricción presupuestaria $p \cdot x(p,w) = w$. Las condiciones $(1.1a)$ y $(1.1b)$ implican que

$$p_1 x_1 = \tfrac{\alpha}{1-\alpha} p_2 x_2$$

o, usando la restricción presupuestaria,

$$p_1 x_1 = \tfrac{\alpha}{1-\alpha}(w - p_1 x_1).$$

Por lo tanto, usando el argumento de x_1 y x_2

$$x_1(p,w) = \tfrac{\alpha w}{p_1},$$

y usando la restricción presupuestaria

$$x_2(p,w) = \tfrac{(1-\alpha) w}{p_2}.$$

Notemos que con la función de utilidad de Cobb-Douglas, el gasto sobre cada bien es una fracción constante de riqueza para cualquier vector precio p (una parte de α va para el primer bien y una parte de $(1-\alpha)$ va para el segundo). ∎

La producción

En una economía de mercado los productores se enfrentan al problema de elegir un plan de producción que maximiza sus beneficios dados los precios de los factores y los productos, y sus restricciones tecnológicas sobre los planes de producción.

El lado de la oferta de mercado puede verse como una composición de un número de unidades productivas, que llamaremos empresas. Las empresas pueden ser corporaciones u otros negocios reconocidos legalmente, pero ellas también pueden representar las posibilidades de producción de individuos o de familias. Los bienes necesarios para producir se denominan factores de producción (por simplicidad los llamaremos factores), y el resultado de un proceso de producción son los bienes producidos o productos. Una empresa es vista como una entidad capaz de transformar los factores en productos. Como en la sección anterior, consideraremos una economía con L bienes. Una empresa se identifica con un conjunto $Y \subset \mathbb{R}^L$ denominado **conjunto de tecnología**. Los elementos de Y se conocen como programas de producción. **Un vector** o **programa de producción** $y = (y_1, ..., y_L) \in R^L$, es un vector que describe los productos que son resultado de los L bienes desde un proceso de producción. Los números positivos del vector denotaran las producciones y los números negativos los factores. Algunos elementos del programa de producción pueden ser cero; esto significa que el proceso de producción no tiene resultado para ese factor. Por ejemplo: supongamos que tenemos $L = 5$, entonces $y = (-1, 3, 5, 0, -2)$ significa que tres y cinco unidades de los bienes 2 y 3 respectivamente son producidos mientras que una y dos unidades de los bienes 1 y 5 son usadas en el proceso de producción; el bien 4 no es producto ni factor de este programa de producción.

Algunos supuestos del conjunto de tecnología

Supuesto de no vacuidad.
El conjunto de producción Y es no vacío .

Este supuesto nos asegura que las empresas siempre tienen un plan de producción que ellas pueden realizar.

Supuesto de cerradura.
El conjunto de tecnología Y es cerrado.

Este supuesto nos dice que el límite de una sucesión de programas de producción posibles para una empresa, es también posible de realizar.

Supuesto de eliminación gratuita.
La cantidad extra de factores o productos en un conjunto de tecnología, pueden ser colocadas o eliminadas sin costo.

El supuesto de eliminación gratuita se cumple si la absorción de cualquier cantidad adicional de factores sin una reducción en la producción es siempre posible.

Supuesto de posibilidad de inacción
El conjunto de tecnología Y tiene el vector de producción 0.

El punto en el tiempo en el cual una empresa empieza a analizar sus posibilidades de producción, es importante para la validez de este supuesto. Si consideramos una empresa que podría tener acceso a un conjunto de posibilidades tecnologicas, las cuales aún no están organizadas, entonces la inacción es claramente posible. Pero si algunas decisiones de producción ya están hechas, la inacción no es posible.

Retornos a escala no crecientes
El conjunto de tecnología Y exhibe retornos a escala no crecientes si para cualquier $y \in Y$, se cumple que $\alpha y \in Y$ para todo $\alpha \in [0,1]$.

Es decir, cualquier vector de producción puede ser reducido proporcionalmente.

Supuesto de convexidad.
El conjunto de tecnología Y es convexo. Es decir, si $y, y' \in Y$ y $\alpha \in [0,1]$, entonces $\alpha y + (1-\alpha)y' \in Y$.

El supuesto de convexidad puede ser interpretado como la incorporación de dos ideas sobre las posibilidades de producción. La primera es retornos a escala no crecientes. En particular, si la inacción es posible (es decir, si $0 \in Y$), entonces la convexidad implica que Y tiene retornos a escala no crecientes. Para ver esto, notemos que para cualquier $\alpha \in [0,1]$ podemos escribir $\alpha y = \alpha y + (1-\alpha)y0 \in Y$. Por lo tanto, si $y \in Y$ y $0 \in Y$, la convexidad implica que $\alpha y \in Y$. Segundo la convexidad captura la idea de que las combinaciones de entradas no balanceadas no son más productivas que las balanceadas. En particular si los programas de producción y y y' producen exactamente la misma cantidad de productos pero usando diferentes combinaciones de entrada, entonces un programa de producción usando un nivel de cada entrada el promedio de los niveles usados en y y y', y puede ser al menos tan bueno como alguno de ellos. Referimos al lector al libro Mas-Collel [1995] para un análisis detallado de estos supuestos.

Supongamos que existe un vector de precios para los L bienes denotado por $p = (p_1, ..., p_L) > 0$ y que estos precios son independientes de los planes de producción de la empresa. Asumimos que el objetivo de la empresa es maximizar sus beneficios o ganancias. También asumimos que la tecnología siempre satisface los supuestos anteriores. Dado un vector de precios $p > 0$ y un vector de producción $y \in R^L$, la ganancia generada por la implementación de y esta dada por $p \cdot y = \sum_{l=1}^{L} \ p_l \cdot y_l$. Esto es precisamente el ingreso total menos el costo total. Dadas las limitantes tecnológicas representadas por su conjunto de producción Y, el problema del productor se formula como un problema de maximización de ganancias de la empresa (PMG):

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & p \cdot y \\ \text{s.a} & y \in Y \end{array}$$

Dado un conjunto de producción Y, la función ganancia $\pi(p)$ de una empresa asocia a cada p la cantidad $\pi(p) = Max \ \{p \cdot y : y \in Y\}$, el valor de la solución al PMG. Definimos la correspondencia de oferta de la empresa en p, denotado por $y(p)$, como el conjunto de vectores que maximizan las ganancias $y(p) = \{y \in Y : p \cdot y = \pi(p)\}$, cuando $y(p)$ es un solo valor se conoce como función de oferta: el resultado de la maximización de ganancias sujeto a los precios de ventas, posibilidades tecnológicas y precios de material de producción. Supongamos que hay J empresas en la economía, cada una de ellas especificada por su conjunto producción $Y_1, ..., Y_J$. Denotamos la función de ganancia y la función de oferta de Y_j por $\pi_j(p)$ y $y_j(p)$ respectivamente. La función de oferta agregada es la suma de las funciones de oferta individuales:

$$S(p) = \sum_{j=1}^{J} \ y_j(p).$$

En la siguiente sección, estudiamos el concepto de equilibrio general de mercado, en el cual, consideramos mercados con L bienes.

1.6 Equilibrio competitivo y sus propiedades

En la sección 1.3 vimos que una solución al problema de asignación a través de mercados consiste en un equilibrio de mercado, especificamente cuando la oferta es igual a la demanda, en cuyo caso las conductas de los agentes son compatibles con las de los demás, sin embargo, aún no sabemos formalmente que es un equilibrio, en esta sección daremos su definición.

Consideramos una economía compuesta por $I > 0$ consumidores, $i = 1, ..., I$ y $J > 0$ empresas, $j = 1, ..., J$ en las cuales existen L bienes. Cada consumidor $i \in I$ está caracterizado por un conjunto de consumo $X_i \subset R^L$ y una relación de preferencia $\Re_i$ en X_i; y cada empresa $j \in J$ está caracterizada por una tecnología o conjunto de producción $Y_j \subset R^L$ no vacio y cerrado. Los recursos iniciales de los L bienes en la economía (la dotación inicial de la economía) están dados por un vector $\varpi = (\varpi_1, ..., \varpi_L) \in R^L$. De esta manera, la información básica sobre las preferencias, tecnologías y recursos para esta economía se resumen en $(\{(X_i, \Re_i)\}_{i=1}^{I},\ \{Y_j\}_{j=1}^{J},\ \varpi)$.

Definición 1.5 Una asignación $(x, y) = (x_1, ..., x_I, y_1, ..., y_J)$ *es una especificación de una cesta de consumo* $x_i \in X_i$ *para cada consumidor* $i = 1, ..., I$ *y un vector producción* $y_j \in Y_j$ *para cada empresa* $j = 1, ..., J$. *Una asignación es* **factible** *si*

$$\sum_i x_{l,i} = \varpi_l + \sum_j y_{l,j} \text{ para cada bien } l,$$
$$\text{es decir, si } \sum_i x_i = \varpi + \sum_j y_j.$$

Denotamos un conjunto de asignaciones factibles como

$$A = \{(x, y) \in X_1 \times ... \times X_I \times Y_1 \times ... \times Y_J : \sum_i x_i = \varpi + \sum_j y_j\} \subset R^{L(I+J)}$$

Un criterio útil para comparar los resultados de diferentes instituciones económicas es un concepto conocido con el nombre de eficiencia en el sentido de Pareto o eficiencia económica. Dicha propiedad es deseable socialmente.

Definición 1.6 *Una asignación factible* (x, y) *es* **óptimo de Pareto** *o* **eficiente de Pareto** *si no existe una asignación* $(x', y') \in A$ *tal que* ${x'}_i \Re_i x_i$ *para todo* i *y* ${x'}_i P_i x_i$ *para algún* i.

La definición anterior nos dice que una asignación es óptimo de Pareto si es imposible mejorar el bienestar de un consumidor sin empeorar el de algún otro.

En este capítulo hemos estudiado las propiedades de economías de propiedad privada competitivas. En dichas economías la riqueza o presupuesto de los consumidores se derivada de sus dotaciones individuales de bienes $\omega_i = (\omega_{1i}, ..., \omega_{Li})$, donde $\omega_{li} > 0$ es la cantidad del bien l que posee el agente i, además la dotación total de la economía del bien l está denotada por $\varpi_l = \sum_i \omega_{li}$; y de la participación de los consumidores en los beneficios de las empresas. Esto se debe a que los objetivos de las empresas se originan en los objetivos de los individuos que las controlan, es decir de sus propietarios los cuales son individuos que por otro lado son consumidores. En este caso se logran producciones y ofertas de bienes si estos objetivos coinciden con la maximización de ganancias. En esta economía cada consumidor i tiene derecho a una parte $\theta_{ij} \in [0, 1]$, de las ganancias de la empresa j, y una dotación inicial de bienes $\omega_i \in R^L$, donde $\sum_i \theta_{ij} = 1$ para cada empresa j y $\varpi = \sum_i \omega_i$, así que para cualquier vector de precios $p = (p_1, ..., p_L)$ el presupuesto o nivel de riqueza de i toma la forma $w_i = p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j$. De esta manera, la información básica de preferencias, tecnologías, recursos e información de propiedad de una economía de propiedad privada se resumen en $(\{(X_i, \Re_i)\}_{i=1}^I,\ \{Y_j\}_{j=I}^J,\ \{\omega, \theta_{i1}, ..., \theta_{iJ}\}_{i=1,...,I})$.

Definición 1.7 *Dada una economía de propiedad privada especificada por* $(\{(X_i, \Re_i)\}_{i=1}^I,\ \{Y_j\}_{j=1}^J,\ \{\omega, \theta_{i1}, ..., \theta_{iJ}\}_{i=1}^I)$, *un vector de precios* $p = (p_1, ..., p_L)$ *y una asignación* (x^*, y^*) *constituyen* **un equilibrio** (x^*, y^*, p) *si:*

1. *Para cada* j, ${y^*}_j$ *maximiza las ganancias en* Y_j*; esto es*

$$p \cdot y_j \leq p \cdot {y^*}_j \quad \text{para todo } y_j \in Y_j.$$

2. *Para cada* i, ${x^*}_i$ *es máximo para* $\Re_i$ *en el conjunto presupuestario*

$$\{x_i \in X_i : p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i + \textstyle\sum_j \theta_{ij}\, p \cdot {y^*}_j\}\ ^5.$$

[5] La terminología "x_i es máximo para R_i en el conjunto presupuestario B" significa que x_i es una maximización de preferencia elegida por el consumidor i en el conjunto B; es decir, $x_i \Re_i {x'}_i$ para todo ${x'}_i \in B$.

3. $\sum_i x^*{}_i = \varpi + \sum_j y^*{}_j$.

La condición 1 nos dice que en un equilibrio, las empresas están maximizando sus ganancias dados los precios de equilibrio p. La condición 2 nos dice que los consumidores están maximizando su bienestar dados, los precios de equilibrio y la riqueza derivada de sus posesiones de bienes y de sus partes de ganancias. La condición 3 dice que todo los bienes que los consumidores demandan son todos los que se ofrecen, es decir, la oferta igual a la demanda.

Después de la definición de equilibrio, lo primero que nos preguntamos es bajo que condiciones existe, esto nos lleva al teorema de existencia de equilibrio.

Teorema 1.1 *Supongase que para una economía con $I > 0$ consumidores y $J > 0$ empresas tenemos*

1. *Para cada $i = 1, ..., I$*
   - *(a) $X_i \subset R^L$ es cerrado y convexo;*
   - *(b) La relación de preferencia $\Re_i$ es continua, localmente no saciada, y convexa en X_i;*
   - *(c) $\omega_i \geq x'_i$ para algún $x'_i \in X_i$.*
2. *Cada $Y_j \subset R^L$ es cerrado, convexo, incluye el origen, y satisface el supuesto de eliminación gratuita.*
3. *El conjunto de asignaciones factibles*

$$A = \{(x, y) \in R^{LI} \times R^{LJ} : x_i \in X_i \text{ para todo } i, y_j \in Y_j \text{ para todo } j \text{ y } \sum_i x_i \leq \sum_i \omega_i + \sum_j y_j\}$$

   es compacto.

Entonces un equilibrio (x^*, y^*, p) existe.

Referimos al lector al libro Mas-Collel [1995] para ver la demostración al teorema. Una vez que se conocen las condiciones bajo las cuales existe un equilibrio, es necesario saber si es eficiente. El primer teorema fundamental del bienestar económico establece las condiciones bajo las cuales cualquier equilibrio es óptimo de Pareto.

Teorema 1.2 *(Primer teorema fundamental del bienestar económico) Si las preferencias son localmente no saciadas, y si* (x^*, y^*, p) *es un equilibrio, entonces la asignación* (x^*, y^*) *es óptimo de pareto.*

Prueba: Supongamos que (x^*, y^*, p) es un equilibrio y que los niveles de riqueza asociados son $(w_1, ..., w_I)$. Consideramos que $\sum_i w_i = p\cdot\varpi + \sum_j p\cdot y_j^*$.

La parte 2 de la definición de equilibrio implica que

$$\text{si } x_i P_i x_i^* \text{ entonces } p \cdot x_i > w_i. \tag{1.2a}$$

Es decir, cualquier cesta estrictamente preferida a x_i^* por el consumidor i no debería ser costeable por él. El significado de la condición de la no saciedad local para el objetivo en mano es que con esto (1.2a) implica una propiedad adicional:

$$\text{si } x_i \Re_i x_i^* \text{ entonces } p \cdot x_i \geq w_i. \tag{1.2b}$$

Es decir, cualquier cesta que es al menos tan buena como x_i^* es a lo más justamente costeable. Referimos al lector al libro Mas-Collel [1995] para ver la demostración a la propiedad.

Ahora consideremos una asignación (x, y) que domina en el sentido de Pareto a (x^*, y^*). Es decir, $x_i \Re_i x_i^*$ para todo i y $x_i P_i x_i^*$ para algún i. Por (1.2b), tendríamos $p \cdot x_i \geq w_i$ para todo i, y por (1.2a) $p \cdot x_i > w_i$ para algún i. Por lo tanto,

$$\textstyle\sum_i p \cdot x_i > \sum_i w_i = p \cdot \varpi + \sum_j p \cdot y_j^*.$$

Sin embargo, ya que y_j^* es la maximizaxión de ganancias para la empresa j para el vector precio p, tenemos $p \cdot \varpi + \sum_j p \cdot y_j^* \geq p \cdot \varpi + \sum_j p \cdot y_j$. De este modo,

$$\textstyle\sum_i p \cdot x_i > p \cdot \varpi + \sum_j p \cdot y_j. \tag{1.2c}$$

Pero entonces (x, y) no puede ser factible. En efecto, $\sum_i x_i = \varpi + \sum_j y_j$ implica $\sum_i p \cdot x_i = p \cdot \varpi \sum_j p \cdot y_j$, lo cual contradice (1.2c). Concluimos que la asignación de equilibrio debe ser óptimo de Pareto. ∎

Este resultado dice que todos los equilibrios de mercado son eficientes en el sentido de Pareto; y garantiza que un mercado competitivo obtiene todas las ganancias derivadas del comercio: la asignación de equilibrio lograda por un conjuto de mercados competitivos es necesariamente eficiente en el sentido de Pareto.

Ahora, veamos que efectivamente $\sum_i w_i = p \cdot \varpi + \sum_j p \cdot y_j^*$. De acuerdo a la forma que toma el presupuesto de cada consumidor i, en esta economía, y por el hecho de que estamos en un equilibrio, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_i w_i &= \sum_i \Big[p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j^*\Big] \\ &= \sum_i p \cdot \omega_i + \sum_i \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j^*\end{aligned}$$

debido a que $\theta_{ij} \in [0, 1]$, tenemos

$$\sum_i w_i = \sum_i \big((p_1, ..., p_L) \cdot (\omega_{1i}, ..., \omega_{Li})\big) + \sum_i \theta_{ij} \sum_j p \cdot y_j^*$$

Como vimos anteriormente $\sum_i \theta_{ij} = 1$, de ese modo

$$\begin{aligned}\sum_i w_i &= \sum_i \big(p_1\omega_{1i} + ... + p_L\omega_{Li}\big) + \sum_j p \cdot y_j^* \\ &= \sum_i p_1\omega_{1i} + ... + \sum_i p_L\omega_{Li} + \sum_j p \cdot y_j^* \\ &= p_1 \sum_i \omega_{1i} + ... + p_L \sum_i \omega_{Li} + \sum_j p \cdot y_j^* \\ &= (p_1, ..., p_L) \cdot (\sum_i \omega_{1i}, ..., \sum_i \omega_{Li}) + \sum_j p \cdot y_j^* \\ &= p \cdot (\varpi_1, ..., \varpi_L) + \sum_j p \cdot y_j^*\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_i w_i = p \cdot \varpi + \sum_j p \cdot y_j^*. \quad \blacksquare$$

En el siguiente capítulo estudiamos las funciones de elección colectiva como métodos de asignación de recursos escasos cuando no existen los mercados.

CAPÍTULO 2

Funciones de elección colectiva y el teorema de Gibbard-Satterthwaite

En este capítulo estudiamos los problemas de asignación, de una manera mucho más general que en capítulo anterior, a través de las funciones de elección colectiva. Bajo esta perspectiva suponemos que no existen los mercados y consecuentemente todos los supuestos de competencia perfecta. Las funciones de elección colectiva representan métodos de elección de una alternativa en presencia de distintos criterios para ordenar y elegir alternativas, en este caso podemos ver a las alternativas como las asignaciones de bienes. Estas funciones están diseñadas de acuerdo a los supuestos y restricciones en los que se desenvuelven los problemas de asignación. Empezamos dando algunas definiciones preliminares a las funciones de elección colectiva, para poder introducir mediante ejemplos el concepto de función de elección colectiva, con el fin de que el lector pueda comprender con mayor facilidad dicho concepto y se interese en el tema. Más adelante se establece y prueba el teorema de Gibbard-Satterthwaite, el cual representa un resultado negativo sobre las funciones de elección colectiva, dicho teorema escencialmente nos dice que bajo condiciones muy generales, las funciones de elección colectiva son manipulables o dictatoriales, lo que no es deseable para una sociedad.

2.1 Definiciones preliminares a elecciones colectivas

En el capítulo anterior se desarrollo parte de la teoría de relaciones de preferencia, así que en esta sección solo se da una resumen de ella. Denotamos por X un conjunto de alternativas, y asumimos que existe un conjunto de I individuos $\mathcal{N} = \{1, ..., I\}$. Cada individuo i tiene una relación de preferencia $\Re_i$ definido sobre X. La preferencia estricta y la relación de indiferencia derivadas de $\Re_i$ están denotadas por P_i y I_i, respectivamente. Veáse Mas-Collel [1995] para un análisis detallado sobre relaciones de preferencia.

Definición 2.1 *Dado* $\mathcal{N} = \{1, 2, ..., I\}$ *un conjunto de* I *individuos o agentes,* X *un conjunto de alternativas y un orden de preferencia* $\Re_i$*, para cada* $i \in \mathcal{N}$*, denotamos como* $\mathcal{R} = (\Re_1, \Re_2, ..., \Re_I)$ *a un* **perfil de preferencia**.

Sea $\mathbf{R}$ el conjunto de todas las relaciones de preferencia, denotamos como $\mathbf{R^I}$ al conjunto de los perfiles de preferencia, es decir, $\mathbf{R^I} = \{(\Re_1, \Re_2, ..., \Re_I)/\forall i \in \mathcal{N}, \Re_i \in \mathbf{R}\}$.

Definición 2.2 Una función de elección colectiva con dominio universal *es un mapeo que tiene como dominio a* $\mathbf{R^I}$ *y como codominio al conjunto de alternativas* X.

La imagen de cada perfil de preferencia bajo una función de elección colectiva, podría ser un subconjunto de X, en cuyo caso hablaríamos de correspondencia de elección colectiva, sin embargo, en este trabajo sólo usaremos funciones de elección colectiva que mapean cada perfil de preferencia en un punto de X.

Para visualizar el concepto anterior, pensemos en una situación real, en la que existe el problema de elegir una alternativa (dentro de un conjunto de alternativas) por parte de un grupo de individuos, los cuales sin duda querrán que dicha alternativa sea la que a cada uno le convenga más que las otras. Sin embargo, el problema se complica, puesto que posiblemente los individuos tienen intereses contrapuestos. Una función de elección colectiva dará solución a dicho problema, eligiendo una alternativa que refleje las preferencias individuales del conjunto de individuos $\mathcal{N}$ sobre X.

2.2 Ejemplos de funciones de elección colectiva

Una buena forma de introducir y comprender el concepto de función de elección colectiva, es el estudio de ejemplos de estas. En esta sección veremos ejemplos de funciones de elección colectiva, el primero de ellos se denomina Mayoría secuencial, en el se muestra como un individuo puede cambiar a su favor el resultado de una función de elección colectiva. El segundo ejemplo, conocido como Dictador aleatorio, muestra como el resultado de una función puede depender de una sola persona. Finalmente, en el tercer ejemplo denominado Voto por veto generalizado se presenta una función de elección colectiva interesante desde cierto punto de vista y poco usual.

Función Manipulable: Mayoría secuencial

Sea $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$ el conjunto de tres individuos y sea $X = \{x, y, z\}$ el conjunto de tres alternativas a considerar. En este caso el dominio de la función es el conjunto de los distintos perfiles de preferencia $\mathcal{R} = (\Re_1, \Re_2, \Re_3)$ definidos por los ordenes de preferencia de $\mathcal{N}$ sobre X y el codominio de la función es el conjunto $X = \{x, y, z\}$.

En este caso se define una función de elección colectiva f como sigue:
Dado un perfil de preferencia arbitrario, se elige entre x y y por mayoría de votos en una primera etapa. Luego, en una segunda etapa la alternativa ganadora competirá contra z y nuevamente la mayoría decide la alternativa ganadora final.

Por ejemplo vamos a considerar el perfil de preferencia

$\Re_1$	$\Re_2$	$\Re_3$
x	y	z
y	z	x
z	x	y

Si aplicamos la función definida al perfil dado arriba, tenemos que se va a elegir primero entre x y y. Así tenemos que 1 vota por x, 2 vota por y y 3 vota por x. Siguiendo la función dada, x gana en la primera etapa, pues x tiene dos votos y y tiene un voto. Ahora, en la segunda etapa se va a elegir entre x y z. De acuerdo al perfil dado, 1 vota por x, 2 vota por z y 3 vota por z. Ya que z tiene dos votos y x tiene un voto, z es la ganadora final.

Así $f(\Re_1, \Re_2, \Re_3) = z$, es decir, la imagen bajo f del perfil dado, es z. Podemos observar, de acuerdo al orden de preferencia de 1, que z es la alternativa menos deseada por éste.

Conociendo el funcionamiento de f y las preferencias de los involucrados, notemos que 1 tiene incentivos a mentir sobre su verdadera preferencia con tal de verse beneficiado al final del procedimiento establecido por f. Supongamos que 1 manifiesta el siguiente orden de preferencia

$\Re'_1$
y
x
z

Conforme a la función dada, primero se va a elegir, por mayoría de votos, entre x y y. Así tenemos que, 1 vota por y de acuerdo a $\Re'_1$, 2 vota por y y 3 vota por x, entonces gana y en la primera etapa, pues y tiene mayor número de votos que x. Ahora, en la segunda etapa se va a elegir entre y y z. Luego de acuerdo al perfil de preferencia dado, 1 vota por y, 2 vota por y y 3 vota por z. Por lo tanto la ganadora final es y, puesto que tiene mayor número de votos que z.

Así $f(\Re'_1, \Re_2, \Re_3) = y$, es decir, la imagen bajo f del perfil dado, cuando 1 declara un orden de preferencia $\Re'_1$ diferente al verdadero, es y. Podemos observar de acuerdo a la verdadera valoración de las alternativas de 1, que y es la segunda mejor alternativa para él.

Comparando los resultados anteriores, concluimos que 1 obtuvo un mejor resultado al mentir estratégicamente en su preferencia sobre las alternativas, que cuando no lo hace.

Cuando ocurre este tipo de situación, se dice que la función de elección colectiva f es manipulable. Así pues intuitivamente, una función de elección colectiva f es manipulable cuando algún individuo puede cambiar a su favor el resultado final de f, manifestando un orden de preferencia diferente a su verdadera valoración de las alternativas.

En la siguiente sección se define el concepto de manipulabilidad en forma precisa. Ahora veamos un ejemplo de función de elección colectiva dictatorial.

Función dictatorial: Dictador aleatorio

Sea $\mathcal{N} = \{1, ..., I\}$ el conjunto de I individuos y sea $X = \{x_1, ..., x_n\}$ el conjunto de n alternativas a considerar. El dominio de la función es el conjunto de los distintos perfiles de preferencias $\mathcal{R} = (\Re_1, ..., \Re_I)$ definidos por los ordenes de preferencia $\Re$ de $\mathcal{N}$ sobre X y el codominio de la función es el conjunto $X = \{x_1, ..., x_n\}$.

Se define la función de elección colectiva como sigue: Cada individuo escribe en una papeleta su verdadero orden de preferencia, los cuales se colocan en una caja. Se designa un individuo arbitrario pero fijo para que escoja al azar una de las papeletas. La solución a esta función será la alternativa que más se prefiera en el orden de preferencia escrito en la papeleta seleccionada.

Por ejemplo vamos a considerar el perfil de preferencia

$\Re_1$	$\Re_2$	.	.	.	$\Re_I$
x_1	x_1	.	.	.	x_2
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

como realmente solo nos interesan las alternativas más preferidas por cada individuo, en el perfil citado arriba nos preocupamos solo por ellas.

Aplicando la función definida al perfil tenemos $f(\Re_1, ..., \Re_I) = x_j$, donde x_j es la alternativa que el individuo i eligio al azar.

De acuerdo a lo anterior podemos observar que para cualquier perfil de preferencia su imagen bajo f va a depender de la elección al azar que un individuo arbitrario haga. En este caso, debido a que la solución a la función depende de la elección de i, se dice que la función es dictatorial y llamamos a i dictador aleatorio.

El concepto de función de elección colectiva dictatorial así como el concepto de dictador, se definen en forma precisa en la siguiente sección.

Voto por veto generalizado

Sea $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ el conjunto de cinco individuos y sea $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ el conjunto de seis alternativas a considerar. El dominio de la función es el conjunto formado por los distintos perfiles de preferencia $\mathcal{R} = (\Re_1, ..., \Re_5)$ definidos por los ordenes de preferencia de $\mathcal{N}$ sobre X y el contradominio es el conjunto de alternativas X.

El procedimiento de la función de elección colectiva en este ejemplo se basa en la progresiva disminución de las alternativas de modo que una sola de ellas quede como única posible. A cada alternativa x_j se le concede de entrada $1/6$ de posibilidades. A cada individuo se le concende un derecho de veto, de modo que entre los cinco individuos puedan eliminar todas las posibilidades menos una. Estableciendo un orden en el que los individuos pueden ejercer su veto, estos van eliminando posibilidades de elección de aquellas alternativas que menos les gusten. Al final del proceso quedará una sola alternativa posible que será la escogida.

Por ejemplo vamos a considerar el perfil de preferencia

$\Re_1$	$\Re_2$	$\Re_3$	$\Re_4$	$\Re_5$
x_6	x_3	x_1	x_2	x_4
x_1	x_2	x_4	x_5	x_1
x_4	x_5	x_3	x_1	x_2
x_2	x_1	x_2	x_6	x_3
x_3	x_6	x_6	x_4	x_5
x_5	x_4	x_5	x_3	x_6

y el orden en el que los individuos van a ejercer su veto $\{2,5,4,3,1\}$, esto es, primero el señor 2 después el señor 5, hasta el último que será el señor 1. Aplicando la función dada primero quitamos a la alternativa x_4 ya que es la alternativa que menos le gusta a 2. Ahora los vetos se realizan sobre lo siguiente

$\Re_1$	$\Re_2$	$\Re_3$	$\Re_4$	$\Re_5$
x_6	x_3	x_1	x_2	x_1
x_1	x_2	x_3	x_5	x_2
x_2	x_5	x_2	x_1	x_3
x_3	x_1	x_6	x_6	x_5
x_5	x_6	x_5	x_3	x_6

Acontinuación el señor 5 ejerce su derecho de veto a x_6, ésta alternativa se quita del perfil como se hizo anteriormente y se obtiene

$\Re_1$	$\Re_2$	$\Re_3$	$\Re_4$	$\Re_5$
x_1	x_3	x_1	x_2	x_1
x_2	x_2	x_3	x_5	x_2
x_3	x_5	x_2	x_1	x_3
x_5	x_1	x_5	x_3	x_5

Ahora le toca a 4 ejercer su veto y lo hace sobre x_3, de acuerdo a lo anterior. x_3 es quitado del perfil de preferencia, de modo que

$\Re_1$	$\Re_2$	$\Re_3$	$\Re_4$	$\Re_5$
x_1	x_2	x_1	x_2	x_1
x_2	x_5	x_2	x_5	x_2
x_5	x_1	x_5	x_1	x_5

Siguiendo con la función establecida, el señor 3 ejerce su veto sobre la alternativa x_5, así que ésta alternativa es eliminada como se hizo anteriormente. Ahora podemos observar en la tabulación anterior que si se elimina x_5 solo nos quedan las alternativas x_2 y x_1

$\Re_1$	$\Re_2$	$\Re_3$	$\Re_4$	$\Re_5$
x_1	x_2	x_1	x_2	x_1
x_2	x_1	x_2	x_1	x_2

Finalmente 1 ejerce su veto sobre x_2 ya que de acuerdo al orden anterior, x_2 es la alternativa que menos le gusta. Podemos observar que solo nos queda la alternativa x_1.

Así $f(\Re_1, \Re_2, \Re_3, \Re_4, \Re_5) = x_1$, es decir, la imagen bajo f del perfil dado es x_1. Aplicando esta función observamos que el resultado no representa la peor alternativa para ningún individuo.

2.3 Teorema de Gibbard-Satterthwaite

El teorema de Gibbard-Satterthwaite fue descubierto independientemente en el año 1970 por dos reconocidos autores [Gibbard (1973), Satterthwaite (1975)]. Este es un resultado de imposibilidad muy importante, que tiene trazado un camino hacia la investigación de incentivos y una gran extensión de su implementación. Este resultado muestra que para problemas muy generales no hay esperanza de implementar satisfactoriamente funciones de elección colectiva en estrategias dominantes. Antes de enunciar formalmente el teorema nos enfocamos en las funciones de elección colectiva y algunas de sus propiedades más importantes que requerimos para su planteamiento y comprensión, como lo son las definiciones de funciones de elección colectiva manipulables y funciones de elección colectiva dictatoriales. Empezamos la sección con algunas definiciones.

Supóngase que sólo algunos ordenes de preferencia $\Re_i$ son admisibles para cada individuo $i \in \mathcal{N}$. Denotaremos a $\mathbf{D_i}$, con $\mathbf{D_i} \subset \mathbf{R}$ como el conjunto de los ordenes de preferencia admisibles para cada $i \in \mathcal{N}$, entonces un perfil de preferencia $\mathcal{R} = (\Re_1, \Re_2, ..., \Re_I)$, es un elemento perteneciente al conjunto $\mathbf{D_1} \times \mathbf{D_2} \times ... \times \mathbf{D_I}$.

Se tiene también que $P_i \subset \mathbf{D_i}$, para todo $i \in \mathcal{N}$. Denotamos como $\mathcal{P} = (P_1, P_2, ..., P_m)$ a un perfil de preferencia estricta. El conjunto de todos los perfiles de preferencia estricta se denota por $\mathbf{P^I}$.

Nota: también podemos definir a $\mathbf{P} = \{\Re \in \Re \mid$ para cada $x, y \in X$: si $x\Re y$ y $y\Re x$ entonces $x = y\}$.

En base a lo dicho anteriormente, se dará la definición precisa de función de elección colectiva.

Definición 2.3 *Una* **función de elección colectiva** *es una función f que tiene como dominio a $\mathbf{D_1} \times \mathbf{D_2} \times ... \times \mathbf{D_I}$ y como codominio a X, es decir,*

$$f : \mathbf{D_1} \times \mathbf{D_2} \times ... \times \mathbf{D_I} \longrightarrow X$$

.

Definición 2.4 *Una función de elección colectiva $f : \mathbf{D_1} \times \mathbf{D_2} \times ... \times \mathbf{D_I} \longrightarrow X$ es* **manipulable**, *si existe algún perfil de preferencia $\mathcal{R} = (\Re_1, \Re_2, ..., \Re_I) \in \mathbf{D_1} \times \mathbf{D_2} \times ... \times \mathbf{D_I}$, un individuo o agente $i \in \mathcal{N}$ y un orden de preferencia $\Re_i' \in \mathbf{D_i}$, tal que*

$$f(\Re_1, ..., \Re_i', ..., \Re_I) \; P_i \; f(\Re_1, ..., \Re_i, ..., \Re_I).$$

Esta definición nos dice que f es manipulable, si la imagen bajo f, del perfil de preferencia en el cual el agente i ha mentido estratégicamente, es estrictamente preferida por i, a la imagen bajo f, del perfil de preferencia donde i no miente.

Dada una función de elección colectiva f, denotamos por r_f al rango de f, obviamente $r_f \subset X$.

Definición 2.5 *Dada una relación de preferencia R en el conjunto X de alternativas y un subconjunto $\mathcal{B}$ de X, se define* $\mathbf{C}(\Re, \mathcal{B}) = \{b \in \mathcal{B} \mid \forall c \in \mathcal{B},\ b \Re c\}$ *como el conjunto de alternativas que un agente considera que son las mejores dentro de $\mathcal{B}$. Llamaremos a* $\mathbf{C}(\Re, \mathcal{B})$ *el conjunto de* **$\Re$-mejores elementos en $\mathcal{B}$**.

Definición 2.6 *Una función de elección colectiva f es* **dictatorial**, *si existe un individuo i fijo, tal que para todo perfil de preferencia se tiene que*

$$f(\Re_1, ..., \Re_i, ..., \Re_I) \in \mathbf{C}(\Re_i, \mathcal{B})$$

En otras palabras, una función de elección colectiva f es dictatorial, si la imagen de todo perfil de preferencia bajo f, cae siempre dentro del conjunto de las alternativas más preferidas por un individuo i fijo, es decir, en $\mathbf{C}(\Re_i, \mathcal{B})$ para todo $\mathcal{B}$ subconjunto de X. En este sentido se dice que el agente i es un **dictador**, pues el resultado de la elección colectiva que involucra a todos los individuos, es elegido en lo mejor de dicho agente.

El siguiente resultado, representa una limitación lógica en la búsqueda de funciones generales no manipulables y no dictatoriales, ambos requisitos se consideran deseables. El resultado se refiere a funciones con dominio "universal", en el sentido de que se admite para cada individuo el conjunto de todas las posibles preferencias.

Teorema 2.1 Teorema de Gibbard-Satterthwaite. *Cualquier función de elección colectiva $f : \mathbf{D^I} \longrightarrow X$ con rango de al menos tres alternativas, es dictatorial o manipulable.*

En la siguiente sección realizamos la prueba al teorema de Gibbard-Satterthwaite. Esta prueba es original de Salvador Barberá. Veáse Barberá [2001].

2.4 Prueba de Salvador Barberá

La prueba presentada en esta sección fue presentada en Barberá y Peleg (1990), y tiene sus inicios en Barberá (1983). Las pruebas del teorema de Gibbard-Satterthwaite anteriores a ésta solo se aplican cuando el número de alternativas es finito. La prueba que aquí se presenta, aunque todavía está propuesta para el caso finito, se puede adaptar facilmente al caso con un continuo de alternativas. Pero, en este trabajo no se efectuará esa adaptación debido a que no corresponde a los intereses del trabajo. La prueba se realiza para funciones de elección colectiva sobre preferencias estrictas, al finalizar se generaliza a preferencias universales.

Demostración:

1. Si $f : \mathbf{P}^n \longrightarrow X$ es manipulable, queda demostrado.

2. Supóngase que $f : \mathbf{P}^\mathbf{I} \longrightarrow X$ es no manipulable.

   Para ilustrar la esencia del razonamiento suponemos $I = 2$. Consideremos funciones de elección colectiva con dos individuos $\{1, 2\}$, afirmamos que ellos tienen preferencias estrictas P_1 y P_2 respectivamente y sea $\mathbf{P}$ el conjunto de todas las preferencias estrictas. Dado f, definimos la noción de un **conjunto opción**. Esto será la clave para la prueba. Las opciones de alternativas que 2 puede elegir, una vez que 1 ha establecido su relación de preferencia P_1, estan dadas por $O_2(P_1) = \{x \mid \exists P_2 : f(P_1, P_2) = x,\ x \in X\}$

   Supóngase que $f : \mathbf{P} \times \mathbf{P} \longrightarrow X$ es no manipulable, veremos que f es dictatorial.

   La prueba ahora procede a través de cinco pasos.

   Paso 1. Si f es no manipulable, entonces para todos los perfiles de preferencia, se tiene que $f(P_1, P_2) = \mathbf{C}(P_2, O_2(P_1))$.

Prueba:

Supóngase que existe un perfil de preferencia $\mathcal{P} = (P_1, P_2)$, para el cual $f(P_1, P_2) \neq \mathbf{C}(P_2, O_2(P_1))$, tenemos entonces que f lleva (P_1, P_2) a algo que no es máximo para 2 en $O_2(P_1)$. Esto significa que $f(P_1, P_2)$ es dominado en la preferencia P_2 con alguna elección de f teniendo a P_1 fijo, es decir, existe un P_2' tal que $f(P_1, P_2')\ P_2\ f(P_1, P_2)$, entonces tenemos que f es manipulado por 2 en el perfil (P_1, P_2). Lo anterior es una contradicción, pues por hipótesis f es no manipulable.

Paso 2. Para cada alternativa x y para cualquier perfil de preferencia P_1, si $x = \mathbf{C}(P_1, r_f)$ entonces $x \in O_2(P_1)$.

Prueba:

Consideremos P_1 fijo y sea x el mejor elemento de P_1 en el rango de f, entonces tenemos que xP_1y para todo $y \in r_f$, con $y \neq x$ y $x \in r_f$.

Supóngase que $x \notin O_2(P_1)$, entonces x no es de la forma $x = f(P_1, P_2)$ variando P_2, es decir, $x = f(P_1', P_2)$ para algún P_2. Como xP_1y para todo $y \in r_f$ con $y \neq x$, podemos tomar $y = f(P_1, P_2)$. Luego, se tiene que $f(P_1', P_2)\ P_1\ f(P_1, P_2)$. Lo anterior contradice la hipótesis, ya que 1 manipula a f.

Paso 3. Si $\mathbf{C}(P_1, r_f) = \mathbf{C}(P_1', r_f)$ entonces $O_2(P_1) = O_2(P_1')$, es decir, sólo las alternativas "más altas" para el agente 1 en r_f pueden ser relevantes en determinar las opciones que 1 le deja a 2.

Prueba:

Sea x la mejor alternativa de P_1 en r_f y sea x la mejor alternativa de P_1' en r_f.

Supóngase que para alguna alternativa z, se tiene que $z \in O_2(P_1)$ y $z \notin O_2(P_1')$. Debido al paso 2, tenemos que $x \in O_2(P_1)$ y $x \in O_2(P_1')$, entonces podemos considerar la situación de los siguientes perfiles, donde P_1' y P_1 quedan fijos y P_2 varía,

P_1	P_2		P_1'	P_2
.	z	y	.	z
.	x		.	x
.	.		.	.

Cuando se tiene un perfil en el que una componente queda fija y la otra varía, la imagen bajo f de dicho perfil es la mejor alternativa para la componente que varía, de esa forma, tenemos que $f(P_1, P_2) = z$ y que $f(P_1', P_2) = x$, pues no se puede elegir a z ya que $z \neq O_2(P_1')$.

Así, vemos que 1 puede manipular a f, puesto que $x = f(P_1', P_2)\ P_1\ f(P_1, P_2) = z$.

Paso 4. Si el rango de f contiene al menos tres alternativas entonces para cada P_1, $O_2(P_1)$ es igual a r_f ó a $\mathbf{C}(P_1, r_f)$.

Prueba

(a) Si $O_2(P_1)$ es igual a r_f queda demostrado.

(b) Supongamos que $O_2(P_1)$ no es igual a r_f.
Prueba: Probaremos que $O_2(P_1) = \mathbf{C}(P_1, r_f)$ para cada P_1 con la doble inclusión de conjuntos.

   i. Sabemos por el paso 2 que $\mathbf{C}(P_1, r_f) \subset O_2(P_1)$ para cada P_1.

   ii. Sea P_1 arbitrario pero fijo y sea $x \in O_2(P_1)$, entonces $x = f(P_1, P_2)$ para todo P_2. Supongamos que $x \notin \mathbf{C}(P_1, r_f)$, entonces existe un $z \in \mathbf{C}(P_1, r_f)$ con $z \neq x$ y $x \in r_f$ tal que zP_1x. Es decir, $z = f(P_1', P_2)$ para algún P_2. Luego, tenemos que $f(P_1', P_2)P_1f(P_1, P_2)$, pero ésto contradice la hipótesis, ya que 1 manipula a f. Por lo tanto, $O_2(P_1) \subset \mathbf{C}(P_1, r_f)$.

Paso 5. Si $O_2(P_1)$ es siempre igual a $\mathbf{C}(P_1, r_f)$, entonces f es dictatorial si f es no manipulable, tiene al menos tres alternativas en su rango y está definida en un dominio universal dentro de las preferencias estrictas.

Prueba

Sea $O_2(P_1) = \mathbf{C}(P_1, r_f)$ para todo P_1 y para todo P_2, esto se garantiza por el paso 4 y el hecho de que el rango de f está definido en un dominio universal, y sea f no manipulable. Podemos observar en lo anterior que para todo perfil de preferencia (P_1, P_2) se tiene que $f(P_1, P_2) \in \mathbf{C}(P_1, r_f)$, es decir, la imagen de todo perfil de preferencia bajo f cae siempre dentro del conjunto de las alternativas más preferidas por 1. Por lo tanto, f es dictatorial. ∎

Hemos visto la prueba del teorema de Gibbard-Satterthwaite para preferencias estrictas. Veamos lo siguiente: si un agente es un dictador en una función de elección colectiva sobre preferencias estrictas, tambien lo es sobre preferencias universales, la razón, es porque si dicho agente escoge la mejor alternativa para él en el dominio estricto, tiene la opción de escoger alternativas indiferentes a su mejor en el dominio universal. Por lo tanto, el teorema de Gibbard-Satterthwaite queda probado para funciones de elección colectiva sobre preferencias universales.

En el siguiente capítulo se caracterizan algunas funciones de elección colectiva no manipulables, no dictatoriales y adecuadas para procesos de decisión sobre dominios restringidos.

CAPÍTULO 3

Dominios restringidos y funciones de elección colectiva

Una hipótesis esencial en el estudio de la asignación de recursos por medio de las funciones de elección colectiva es que los agentes tienen derecho a mantener, expresar y hacer valer sus preferencias cualesquiera que sean. El hecho de que las preferencias sean cualesquiera queda reflejado en las definiciones del capítulo anterior, en el estudio de funciones de elección colectiva con dominio universal. Sin embargo, puede haber situaciones en las que, aún cuando los agentes tuviesen derecho a mantener cualquier opinión, las preferencias de los votantes pertenezcan a una pequeña parte de todas las preferencias posibles sobre un conjunto de alternativas. En este caso algunas o muchas de las preferencias de los individuos no tendrían validez. De ese modo es posible que, si las preferencias de los individuos son menos variadas, y estudiamos funciones de elección colectiva definidas en dominios restringidos de preferencias, queden reducidos los incentivos a actuar estratégicamente por parte de los votantes. Por ejemplo, pensemos en un caso donde todos los agentes tengan preferencias idénticas sobre un conjunto de alternativas sin depender de la función de elección colectiva seleccionada, en tal caso, no hay incentivos a manipular. Sin embargo esta situación no concede variabilidad a las preferencias de los agentes. En este capítulo estudiamos tres restricciones de las posibles preferencias de los agentes sobre las cuales existen funciones de elección colectiva inmunes a la manipulación estratégica.

Empezamos el capítulo estudiando funciones de elección colectiva sobre preferencias unimodales, este dominio es el más conocido y más utilizado. En la sección 3.2 estudiamos los problemas de asignación a través de las subastas. Finalmente en la sección 3.3 se caracterizan funciones de elección colectiva no manipulables y no dictatoriales sobre economías de intercambio.

3.1 Preferencias unimodales

A lo largo de ésta sección estudiaremos el dominio restringido para funciones de elección colectiva definidas en preferencias unimodales, ello consiste en suponer que las alternativas pueden ordenarse en una dimensión y que las preferencias de cada agente son unimodales. El hecho de que las preferencias sean unimodales significa que existe una única alternativa que es preferida a las demás. Si los agentes tienen preferencias unimodales se evitan ciclos por mayoría, es decir, siempre va a existir una alternativa más preferida. Como es de esperarse, éste dominio restringido es eficaz para evitar problemas de manipulación, ya que, la estrategia dominante es declarar la verdadera preferencia. Empezamos con algunas definiciones.

Definición 3.1 *Una relación binaria $\geq$ sobre el conjunto de alternativas X es* **un orden lineal** *sobre X si esta es*

1. *reflexiva, es decir, $x \geq x$ para cada $x \in X$.*
2. *transitiva, es decir, $x \geq y$ y $y \geq z$ implica $x \geq z$.*
3. *total, es decir, para cualquiera dos alternativas distintas $x, y \in X$, tenemos que $x \geq y$ o $y \geq x$ pero no ambas.*

El ejemplo más simple de un orden lineal ocurre cuando X es un subconjunto de la recta real, $X \subset \mathbb{R}$, y $\geq$ es el orden natural de los números reales, "mayor o igual que".

Definición 3.2 La relación de preferencia $\Re$ es unimodal *respecto al orden lineal $\geq$ sobre X si existe una alternativa $x \in X$ con la propiedad que $\Re$ es creciente respecto a $\geq$ sobre $\{y \in X : x \geq y\}$ y decreciente respecto a $\geq$ sobre $\{y \in X : y \geq x\}$. Esto es,*

$$si\ x \geq z > y\ entonces\ zPy$$

y

$$si\ y > z \geq x\ entonces\ zPy.$$

La definición anterior nos dice que las alternativas pueden ordenarse linealmente, y una vez que los agentes han fijado su mejor alternativa, cada uno de ellos prefiere a las demás tanto menos cuanto más alejadas estén de aquel ideal, que representa un máximo de satisfacción (así que, en particular, no puede existir algún otro máximo de satisfacción).

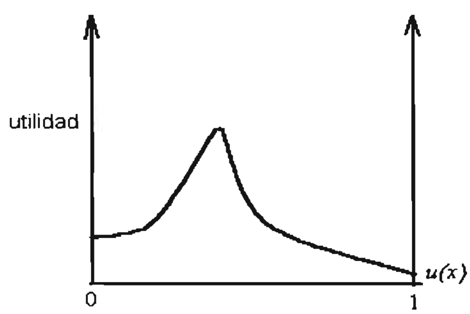

Figura 3.1a: Las preferencias son unimodales con respecto a $\geq$

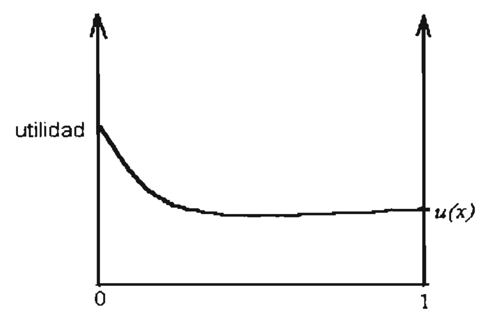

Figura 3.1b: Las preferencias no son unimodales con respecto a $\geq$

Veamos el siguiente ejemplo. Supongamos que $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ y $\geq$ es el orden de los números reales "mayor o igual que". Entonces una relación de preferencia continua $\Re$ sobre X es unimodal con respecto a $\geq$ si y sólo si $\Re$ es estrictamente convexa, es decir, si y solo si, para cada $w \in X$, tenemos $(\alpha y + (1-\alpha)z) \quad P \quad w$ siempre que $y\Re w$, $z\Re w$, $y \neq z$ y $\alpha \in (0,1)$.

Prueba:

1.) Si $\Re$ sobre X es unimodal respecto a $\geq$, entonces $\Re$ es estrictamente convexa. Supongamos que x es un elemento máximo para $\Re$, y sea $x > z > y$. Entonces $x\Re y$, $y\Re y$ y $x \neq y$, hacemos $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ para algún $\alpha \in (0,1)$. Como $\Re$ es unimodal zPy, por lo tanto $\Re$ es estrictamente convexa.

2.) Si $\Re$ es estrictamente convexa, entonces $\Re$ es unimodal respecto a $\geq$. Supongamos que x es un elemento máximo para $\Re$. Por convexidad estricta de $\Re$ tenemos que para cada $y \in X$ se cumple $(\alpha x + (1-\alpha)w)Py$ siempre que $x\Re y$, $w\Re y$, $x \neq w$ y $\alpha \in (0,1)$. En particular tomamos $w = y$ y $z = (\alpha x + (1-\alpha)w)$, puesto que x es máximo para $\Re$, $x\Re z$. De esa manera tenemos $x \geq z > y$. Por lo tanto $\Re$ es unimodal. En la figura 3.1a se representa una función de utilidad para una relación de preferencia sobre $[0,1]$, la cual es unimodal; y la 3.1b representa una función de utilidad para una relación de preferencia sobre $[0,1]$, la cual no es unimodal.

Definición 3.3 *Dado un orden lineal $\geq$ sobre X, denotamos por $\mathbf{R}_{\geq} \subset \mathbf{R}$ la colección de todas las relaciones de preferencias que son unimodales con respecto a $\geq$.*

Dado un orden lineal $\geq$ y un conjunto N de I agentes, de ahora en adelante consideramos el dominio restringido de preferencias $\mathbf{R^I}_{\geq}$. Esto se suma al requerimiento de que todos los agentes tengan preferencias unimodales respecto al mismo orden lineal. Supongamos que definimos preferencias sociales sobre el dominio $\mathbf{R^I}_{\geq}$ por medio de votación por mayoría entre un par de alternativas. Es decir, dado un perfil de preferencia $(\Re_1, ..., \Re_I) \in \mathbf{R^I}_{\geq}$ y cualquier par de alternativas $\{x,y\} \subset X$, hacemos $x\hat{F}(\Re_1, ..., \Re_I)y$, lo que se lee como, "$x$ es socialmente tan bueno como y", si el número de agentes que prefieren estrictamente x a y es más grande o igual al número de agentes que prefieren y a x, es decir, si $\#\{i \in N : xP_iy\} \quad \geq \quad \#\{i \in N : yP_ix\}$.

Notemos que de lo anterior se sigue que para cualquier par de alternativas $\{x,y\}$ tenemos $x\hat{F}(\Re_1, ..., \Re_I)y$ o $y\hat{F}(\Re_1, ..., \Re_I)x$. De esta manera, la votación por mayoría entre un par de alternativas induce una relación de preferencia social completa, en cualquier dominio posible de preferencias.

Consideremos un perfil de preferencia $(\Re_1, ..., \Re_I) \in \mathbf{R^I}_{\geq}$ donde para cada i, $\Re_i$ es unimodal con respecto al orden lineal $\geq$. Para cada i denotamos por $x_i \in X$ la alternativa máxima para $\Re_i$ (decimos que x_i es el " pico de i ").

Definición 3.4 *El agente h es* **un agente mediano** *para el perfil* $(\Re_1, ..., \Re_I) \in \mathbf{R^I}_{\geq}$ *si*

$$\#\{i \in N : x_i \geq x_h\} \geq \tfrac{I}{2} \quad y \quad \#\{i \in N : x_h \geq x_i\} \geq \tfrac{I}{2}.$$

Un agente mediano es aquel que tiene su preferencia máxima justo en medio de los máximos de los otros agentes, es decir, una vez que se han fijado los máximos de todos los agentes, éstos se ordenan linealmente, siempre va a ver un máximo que se encuentra en medio, el agente que ha fijado dicho máximo es el que se conoce como agente mediano, éste siempre existe. La determinación de un agente mediano está ilustrada en la figura 3.2. Si el número I es impar, la definición anterior nos dice que un número $\frac{I-1}{2}$ de agentes tiene máximos estrictamente más pequeños que x_h y otro número $\frac{I-1}{2}$ estrictamente más grande. En este caso el agente mediano es único. Si el número I es par, fijamos una alternativa $p \in X$, y el valor mediano se toma entre los máximos de los agentes y p, ésta alternativa se conoce como valor fantasma y decimos que el agente que ha fijado esa alternativa es un agente fantasma. Entonces el agente mediano existe, pues es él que ha fijado el valor mediano.

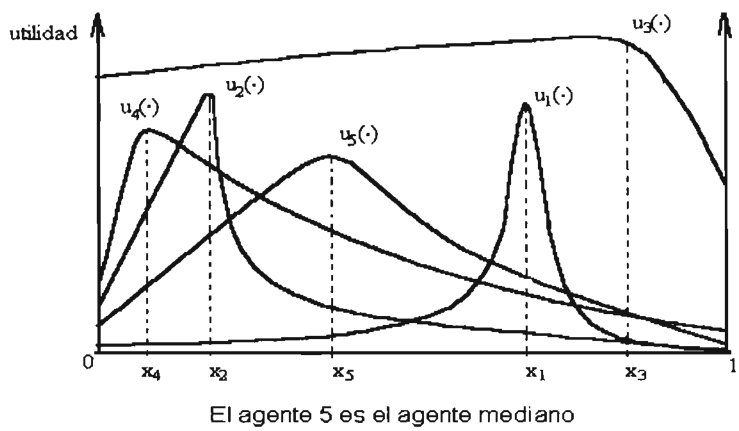

Figura 3.2: Determinación de un agente mediano.

Definición 3.5 *Sea $h \in I$ un agente mediano, si $x_h \hat{F}(\Re_1, ..., \Re_I) y$ para cada $y \in X$, es decir, el pico x_h del agente mediano no puede ser derrotado por votación por mayoría por alguna otra alternativa. x_h es llamado* **un ganador de Condorcet**.

Proposición 3.1 *Sea $\geq$ un orden lineal sobre X, un ganador de Condorcet existe si las preferencias de todos los agentes son unimodales respecto al mismo orden lineal.*

Prueba: Sea h un agente mediano, tomamos cualquier $y \in X$ y suponemos que $x_h > y$. Necesitamos probar que y no derrota a x, es decir, que

$$\#\{i \in N : x_h P_i y\} \quad \geq \quad \#\{i \in N : y P_i x_h\}.$$

Consideramos el conjunto de agentes $S \subset N$ los cuales tienes picos mayores o iguales a x_h, es decir, $S = \{i \in N : x_i \geq x_h\}$. Entonces $x_i \geq x_h > y$ para cada $i \in S$. Por unimodalidad de $\Re_i$ respecto a $\geq$, obtenemos $x_h P_i y$ para cada $i \in S$, es decir, $\#\{i \in N : x_h P_i y\} \geq \#S$. Por otro lado, debido a que el agente h es un agente mediano tenemos que $\#S \geq I/2$ y así $\#\{i \in N : y P_i x_h\} \leq \#(I - S) \leq (I/2) \leq \#S \leq \#\{i \in N : x_h P_i y\}$.

Veamos el caso para $y > x_h$. Consideramos el conjunto $S \subset N$ los cuales tienen picos menores o iguales a x_h, es decir, $S = \{i \in N : x_h \geq x_i\}$. Entonces $y > x_h \geq x_i$ para cada $i \in S$. Por unimodalidad de $\Re_i$ respecto a $\geq$, tenemos $x_h P_i y$ para cada $i \in S$, es decir, $\#\{i \in N : x_h P_i y\} \geq \#S$. Por otro lado, debido a que el agente h es un agente mediano se tiene que $\#S \geq \frac{I}{2}$. De esa manera $\#\{i \in N : y P_i x_h\} \leq \#(I - S) \leq \frac{I}{2} \leq \#S \leq \#\{i \in N : x_h P_i y\}$. ∎

La proposición anterior garantiza que la relación de preferencia $\hat{F}(\Re_1, ..., \Re_I)$ es aciclica, pero puede no ser transitiva. La transitividad se obtiene en el caso especial donde I es impar y, para cada i, la relación de preferencia $\Re_i$ pertenece a la clase $\mathbf{P^I}_{\geq} \subset \mathbf{R^I}_{\geq}$ formado por las relaciones de preferencia estricta P unimodales respecto a $\geq$, con la propiedad de que cualesquiera dos alternativas distintas no pueden ser indiferentes. Notemos que si I es impar y las preferencias están en esa clase, entonces, para cualquier par de alternativas, siempre existe una mayoría estricta para una de ellas en contra de la otra. En ese caso, un ganador de Condorcet necesariamente derrota a cualquier otra alternativa.

Sea I impar y $\geq$ un orden lineal sobre X. La votación por mayoría entre un par de alternativas, genera una función de bienestar social bien definida $F : \mathbf{P^I}_{\geq} \longrightarrow \mathbf{R}$. Es decir, sobre el dominio de preferencias estrictas unimodales respecto a $\geq$.

Proposición 3.2 *Si I es impar y $\geq$ es un orden lineal sobre X, entonces la relación social $\hat{F}(\Re_1, ..., \Re_I)$ generada por la votación por mayoría entre un dos alternativas es completa y transitiva.*

Prueba: Sabemos que $\hat{F}(\Re_1, ..., \Re_I)$ es completa. Falta probar que es transitiva. Supongamos que $x\hat{F}(\Re_1, ..., \Re_I)y$ y $y\hat{F}(\Re_1, ..., \Re_I)z$. Bajo nuestras suposiciones eso significa que x derrota a y y y derrota a z. Consideremos el conjunto $X' = \{x, y, z\}$. Si las preferencias están restringidas a ese conjunto entonces, relativo a X', las preferencias todavía pertenecen a la clase $\mathbf{P^I}_{\geq}$, y entonces existe una alternativa en X' que no es derrotada por alguna otra alternativa en X'. Esa alternativa no puede ser ni y ni z, así tiene que ser x y concluimos que $x\hat{F}(\Re_1, ..., \Re_I)z$, lo que se requiere para la transitividad. ∎

Los siguientes ejemplos muestran funciones de elección colectiva no triviales y no manipulables en el dominio restringido $\mathbf{R^I}_{\geq}$.

Ejemplo 3.1 *Sea $N = \{1, 2, 3\}$ el conjunto de tres agentes y sea $\geq$ el orden de los números reales sobre el conjunto de alternativas $X = [a, b]$. Cada agente tiene preferencias unimodales, la función de elección colectiva consiste en elegir la mejor alternativa para el agente mediano.*

Para ver que ésta regla es no manipulable, consideramos las opciones de un agente, por ejemplo de 1. Supongamos que los agentes 2 y 3 han votado por sus mejores alternativas c y d respectivamente (asumimos sin perder generalidad que $c \leq d$). Entonces, si 1 determina su mejor alternativa entre c y d, el resultado de la función de elección colectiva será la mejor opción para 1; si $c = d$, entonces sea cual sea el voto de 1 el resultado de la función de elección colectiva es $c = d$. Si la alternativa más alta de 1 está en el intervalo de enteros $[c, d]$, entonces 1 obtiene su mejor alternativa sin manipulación. Si su alternativa más alta esta por debajo de c, entonces c es el resultado de la función y, por unimodalidad, esa es mejor para 1 que cualquier resultado en $[c, d]$. Similarmente, si la más alta para 1 esta arriba de d, d es la mejor opción. Notemos que la misma regla podía no ser no manipulable para dominios grandes, permitiendo que las preferencias no sean unimodales.

Ejemplo 3.2 *Existen dos agentes $N = \{1, 2\}$. Fijamos una alternativa $p \in [a, b]$. Cada agente vota por su mejor alternativa, y el mediano de p, x_1*

y x_2 es el resultado de la función de elección colectiva, donde x_1 es el pico del agente 1 *y x_2 es el pico del agente* 2.

El mediano en este caso está bien definido, porque él es tomado de un número impar de valores: dos de ellos son los votos de los agentes, mientras que el tercero es un valor fijo. Como vimos anteriormente p es un valor fantasma.

Ejemplo 3.3 *Cinco amigos quieren irse de vacaciones a las playas de Acapulco. Ellos tienen la opción de elegir un paquete de viaje entre* 20 *diferentes, los cuales están económicamente al alcance de los cinco amigos. Todos los paquetes tienen el presupuesto para* 6 *días y* 5 *noches, y se diferencian por el lujo del hotel, lo que lógicamente produce diferencias en los precios. Pero debido a que dentro del grupo de amigos existen algunos más fresas que otros, se encuentran en el conflicto de elegir un paquete que satisfaga a todos. Para evitar problemas, uno de ellos, el cual estudia economía, ha propuesto emplear una regla de elección no manipulable.*

Para caracterizar la función de elección colectiva a emplear, suponemos que los amigos forman el conjunto de agentes denotado por $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, el conjunto de alternativas está formado por los costos monetarios de los paquetes de viaje, denotado por $X = [a, b] \subset \mathbb{R}_+$. X tiene el orden lineal $\geq$ de los números reales. Cada agente tiene preferencias unimodales sobre X. La función de elección colectiva consiste en elegir el mediano de los cinco votos.

En la siguiente sección estudiamos los problemas de asignación de recursos a través de las subastas de primer y segundo precio. Estas representan métodos de elección colectiva y una de ella resulta no manipulable y no dictatorial.

3.2 Las Subastas

Hemos estudiado en el capítulo 2 como a través de las preferencias individuales bajo funciones de elección colectiva obtenemos una decision social, sin embargo, en muchas situaciones las preferencias de los individuos no son observables publicamente, en este caso, solo los individuos conocen sus verdaderas preferencias. Para obtener un buen funcionamiento de las funciones de elección colectiva los agentes deben revelar dicha información, pero existe la posibilidad de que ellos no lo hagan. Debido a esto nos enfrentamos al problema de diseñar mecanismos que revelen las verdaderas preferencias de los involucrados en los problemas de asignación, de tal forma que estos sean no manipulables. Las subastas de segundo precio son un ejemplo claro de ello, éstas son el punto central de esta sección ya que representan funciones de elección colectiva no manipulables y no dictatoriales. Empezamos con algunas definiciones preliminares a las subastas y con parte de la teoría de mecanismos. Contrario a las subastas de segundo precio, en esta sección también vemos las subastas de primer precio, que resultan manipulables.

Una subasta es un tipo de mercado en el cual existe un solo bien que se quiere asignar entre I compradores potenciales y donde el propietario del bien es el único vendedor que existe en el mercado. Existen dos tipos económicos de subastas estos son las **subastas de valor privado** y las **subastas de valor común**. En una subasta de valor privado, el bien subastado puede tener un valor distinto para cada participante. En una subasta de valor común, el bien subastado vale escencialmente lo mismo para todos los postores, aunque ellos tengan diferentes estimaciones de este valor común. Existen varias reglas para pujar en las subastas, pero solo estudiaremos la **subasta de primer precio** y la **subasta de segundo precio o de Vickrey**.

Consideramos una situación con una sola unidad de un bien privado indivisible y con $I+1$ agentes denotados por $i = 0, 1, ..., I$, donde el agente cero es el vendedor o dueño del bien a subastar y los otros I agentes son los compradores potenciales del bien, o en términos de subastas los pujadores; dichos agentes quieren tomar una elección colectiva sobre un conjunto de posibles alternativas X. Lo importante de la elección es que cada agente i observa privadamente sus preferencias sobre las alternativas, es decir, solo él conoce su orden de preferencia sobre las alternativas en X. Formalmente decimos que el agente i observa privadamente un paramentro o una señal, θ_i, que determina sus preferencias, llamamos a θ_i el tipo del agente i. El conjunto de los tipos posibles para el agente i se denota por Θ_i. Cada agente desea maximizar su utilidad, en este caso la función de utilidad del agente i está dada por $u_i(x, \theta_i)$, donde $x \in X$. La relación de preferencia sobre los pares de alternativas en X asociada con la función de utilidad $u_i(x, \theta_i)$ se denota como $\Re_i(\theta_i)$. El conjunto de todas las posibles relaciones de preferencias sobre X

para el agente i está dado por

$$\Re^i = \{\Re_i : \Re_i = \Re_i(\theta_i) \quad \text{para algún } \theta_i \in \Theta_i\}$$

Denotamos un perfil de tipos de los agentes por $\theta = (\theta_0, \theta_1, ..., \theta_I)$, donde $\theta \in \Theta_0 \times \Theta_1 \times \cdots \times \Theta_I$. Los conjuntos $\Theta_0, \Theta_1, ..., \Theta_I$ y las funciones de utilidad $u_i(\cdot, \theta_i)$ son conocidos publicamente entre los agentes, pero el valor especifico de los tipos de cada agente i es conocido solo por i, a excepción del tipo del agente cero que es conocido publicamente. Debido a esta teoría el concepto de función de elección colectiva visto en el capítulo 2 tiene pequeñas variaciones para este contexto.

Definición 3.6 *Una función de elección colectiva* $f : \Theta_0 \times \Theta_1 \times \cdots \times \Theta_I \longrightarrow X$ *es una función que para todo posible perfil de tipos de los agentes* $(\theta_0, \theta_1, ..., \theta_I)$*, asigna una elección colectiva* $f(\theta_0, \theta_1, ..., \theta_I) \in X$.

La eficiencia Paretiana es un propiedad deseable e importante para una función de elección colectiva, es por eso que damos la siguiente definición.

Definición 3.7 *La función de elección colectiva* $f : \Theta_0 \times \Theta_1 \times \cdots \times \Theta_I \longrightarrow X$ *satisface la eficiencia Paretiana si no hay un perfil* $\theta = (\theta_0, \theta_1, ..., \theta_I)$ *y un* $x \in X$ *tal que* $u_i(x, \theta_i) \geq u_i(f(\theta), \theta_i)$ *para cada* i*, y* $u_i(x, \theta_i) > u_i(f(\theta), \theta_i)$ *para algún* i.

La definición anterior nos dice que una función de elección colectiva cumple la eficiencia Paretiana si a cada perfil $\theta = (\theta_0, \theta_1, ..., \theta_I)$, le asigna una alternativa $f(\theta) \in X$ que es óptimo de Pareto dadas las funciones de utilidad de los agentes. El problema al que se enfrentan los agentes, es que los θ_i con $i \neq 0$, no son conocidos publicamente y eso podría ocasionar que cuando la función de elección colectiva se evalue en el perfil θ, los agentes declaren esa información, o si algún agente encuentra que no obtiene su mayor utilidad si revela su verdadera información, él se verá tentado a declarar algún otro tipo distinto del verdadero dentro de su conjunto de tipos.

Un resultado en este caso puede representarse por un vector $x = (y_0, y_1, ..., y_I, t_0, t_1, ..., t_I)$, donde $y_0 = 0$ en cualquier caso, para $i = 1, ..., I$ $y_i = 1$ si el agente i obtiene el bien, $y_i = 0$ si el agente i no obtiene el bien, y para todo i, $t_i \in \mathbb{R}$ es la transferencia monetaria para i, es decir, $t_i > 0$ si i recibe esa cantidad por el bien y $t_i < 0$ si i paga esa cantidad por el bien. De acuerdo a la información anterior ya podemos especificar cual es el conjunto de alternativas factibles para cada agente. Entonces el conjunto de alternativas factibles es

$X = \{(y_0, y_1, ..., y_I, t_0, t_1, ..., t_I) : y_i \in \{0, 1\}, \quad t_i \in \mathbb{R}$ para todo $i, \quad \sum_i y_i = 1, \ y \ \sum_i t_i \leq 0\}$

Suponemos que la función de utilidad del tipo θ_i toma la forma

$$u_i(x, \theta_i) = \theta_i \cdot y_i + (m_i + t_i),$$

donde m_i es la dotación monetaria inical de i. En este caso, tomamos a $\theta_i \in \mathbb{R}$ como la valoración monetaria del bien por parte del agente i y denotamos el conjunto de posibles tipos o valoraciones de i como $\Theta_i = [\theta_i', \theta_i''] \subset \mathbb{R}$. Como vimos anteriormente, el conjunto de tipos de i es conocido entre los agentes, pero la verdadera valoración de i no se conoce, esto significa que entre los agentes se sabe cuales valores del bien puede tener cada i pero se ignora cuanto es lo que realmente vale el bien para cada agente excepto para $i = 0$.

En esta situación, una función de elección colectiva $f(\theta) = (y_0(\theta), y_1(\theta), ..., y_I(\theta), t_0(\theta), t_1(\theta), ..., t_I(\theta))$ cumple la eficiencia Paretiana si siempre asigna el bien al agente que tenga la valoración más alta, si existen varios agentes que tienen la misma valoración sobre el bien y esa valoración es la más alta, deben establecerce algunas reglas que permitan el desempate entre esos agentes; y si no hay perdida de recursos monetarios, es decir, si para todo $\theta = (\theta_1, ..., \theta_I) \in \Theta_0 \times \Theta_1 \times \cdots \times \Theta_I$,

$$y_i(\theta)(\theta_i - Max\{\theta_0, \theta_1, ..., \theta_I\}) = 0 \text{ para todo } i$$

y

$$\textstyle\sum_i t_i(\theta) = 0$$

Subasta de primer precio

Para ilustrar la situación de la subasta, suponemos que solo hay dos compradores 1 y 2 con valoraciones θ_1 y θ_2 respectivamente. Consideramos la función de elección colectiva $f(\theta) = (y_0(\theta), y_1(\theta), y_2(\theta), t_0(\theta), t_1(\theta), t_2(\theta))$ en la cual

$$y_1(\theta) = 1 \quad \text{si } \theta_1 \geq \theta_2; \quad y_1(\theta) = 0 \quad \text{si } \theta_1 < \theta_2$$

$$y_2(\theta) = 1 \quad \text{si } \theta_1 < \theta_2; \quad y_2(\theta) = 0 \quad \text{si } \theta_1 \geq \theta_2$$

$$y_0(\theta) = 0 \quad \text{para todo } \theta$$

$$t_1(\theta) = -\theta_1 y_1(\theta)$$

$$t_2(\theta) = -\theta_2 y_2(\theta)$$

$$t_0(\theta) = -(t_1(\theta) + t_2(\theta)).$$

En esta función de elección colectiva, el vendedor da el bien al agente con la valoración más alta, y ese comprador paga al vendedor una cantidad igual a su valoración. Esta función cumple la eficiencia Paretiana y maximiza las ganacias del agente cero, ya que él obtendría todos los beneficios de consumo generados por el bien. Para ver si $f(\theta)$ cumple la eficiencia Paretiana supongamos que el agente 1 es aquel para el que el bien tiene el valor más alto y el agente 2 es aquel para el que el bien tiene el valor más bajo. Si el 2 recibe el bien es fácil mejorar el bienestar de las dos personas, esto se hace transfiriendo el bien del 2 al 1 y haciendo que 1 pague a 2 un precio p que se encuentra entre θ_1 y θ_2. Esto contradice el hecho que la asignación sea un óptimo de Pareto, así que asignar el bien a un agente que no sea el que más lo valora no puede ser eficiente en el sentido de Pareto.

Lo siguiente que debemos preguntarnos es que si esta función puede manipularse. Asumimos que los agentes quieren maximizar su utilidad. Si el comprador 2 siempre anuncia su verdadera valoración, ¿el agente 1 obtendría su óptimo haciendo lo mismo? Para cada valor de θ_1, el problema del agente 1 es elegir la valoración θ_1^* que va a anunciar para resolver

$$Max_{\theta_1^*} \ (\theta_1 - \theta_1^*) Prob(\theta_2 \leq \theta_1^*)$$

o

$$Max_{\theta_1^*} \ (\theta_1 - \theta_1^*)\theta_1^*$$

donde *Prob* significa probabilidad. En este caso, θ_2 es la verdadera valoración del agente 2, θ_1 es la verdadera de 1 y θ_1^* es una valoración de 1 menor a la verdadera. El segundo termino de la primera ecuación es la probabilidad de que el postor 1 haga la oferta más alta y el primer termino es el excedente del que disfruta el agente 1 si obtiene el bien. La solución a este problema, es decir, el óptimo es $\theta_1^* = \frac{\theta_1}{2}$. Entonces, podemos observar que si el agente 2 siempre dice la verdad, desir la verdad no es óptimo para el agente 1. Intuitivamente podemos decir que para esta función de elección colectiva, un agente tiene incentivos para mentir sobre su verdadera valoración con tal de obtener el bien haciendo la transferencia más baja posible. El costo para él al hacer esto es que él consiga el bien con menor frecuencia, pero este es un riesgo que se toma con frecuencia. Entonces, podemos concluir que esta es una función de elección colectiva manipulable.

Subasta de segundo precio

Consideremos la misma situación que en el caso anterior, donde solo hay dos compradores 1 y 2 con valoraciones θ_1 y θ_2. Consideramos la función de elección colectiva $f(\theta) = (y_0(\theta), y_1(\theta), y_2(\theta), t_0(\theta), t_1(\theta), t_2(\theta))$ en la cual

$$y_1(\theta) = 1 \quad \text{si } \theta_1 \geq \theta_2; \quad y_1(\theta) = 0 \quad \text{si } \theta_1 < \theta_2$$

$$y_2(\theta) = 1 \quad \text{si } \theta_1 < \theta_2; \quad y_2(\theta) = 0 \quad \text{si } \theta_1 \geq \theta_2$$

$$y_0(\theta) = 0 \quad \text{para todo } \theta$$

$$t_1(\theta) = -\theta_2 y_1(\theta)$$

$$t_2(\theta) = -\theta_1 y_2(\theta)$$

$$t_0(\theta) = -(t_1(\theta) + t_2(\theta))$$

En esta función de elección colectiva el vendedor da el bien al comprador con la valoración más alta, pero dicho comprador solo paga la cantidad igual a la segunda valoración más alta. Ahora consideremos los incentivos del comprador 1 para decir la verdad.

Si el agente 2 anuncia su valoración $\theta_2^* \leq \theta_1$, el agente 1 recibe una utilidad de $(\theta_1 - \theta_2^*) \geq 0$, es decir, debido a que la valoración más alta es θ_1, el agente 1 obtiene el bien y solo paga por él θ_2^*, 1 tiene una ganancia de economías de intercambio. Cabe mencionar que en trabajos anteriores, se ha demostrado que para economías de intercambio sufientemente grandes las funciones de elección colectiva no manipulables y eficientes[6] son dictatoriales. De esta manera, el costo de no manipulabilidad en economías grandes es la eficiencia (Barberá [2001]), en este trabajo no estudiamos dichas economías. La economía de intercambio más simple de analizar con posibilidad de intercambio mutuamente ventajoso, es aquella con dos bienes y dos agentes, en esta sección analizamos dicho caso además del de dos agentes y más de dos bienes. Empezamos con teoría general de economías de intercambio.

Suponemos que existen I consumidores, denotados por $i = 1, ..., I$, y L bienes privados denotados por $l = 1, ..., L$, el vector de consumo del agente i esta dado por $x_i = (x_{1i}, ..., x_{Li})$; es decir, el consumo del agente i del bien l está dado por la cantidad x_{li}. Asumimos que el conjunto de consumo de i es $\mathbb{R}^L_+$ y que él tiene una relación de preferencia $\Re_i$ sobre los vectores de consumo en ese conjunto. Cada consumidor i está dotado inicialmente con una cantidad $\omega_{li} \geq 0$ del bien l. De ésta manera, el vector dotación del agente i es $\omega_i = (\omega_{1i}, ..., \omega_{Li})$, y la dotación total del bien l en la economía está denotado por $\varpi_l = \sum_i \omega_{li}$, vamos a suponer que esa cantidad es estrictamente positiva para todos los bienes, de esta manera la dotación total de bienes en la economía está denotada por el vector $\varpi = (\varpi_1, ..., \varpi_L) \in \mathbb{R}^{IL}_+$.

Una asignación $x \in \mathbb{R}^{IL}_+$ en ésta economía es un reparto de un vector de consumo no negativo para cada agente: $x = (x_1, ..., x_I) = ((x_{11}, ..., x_{L1}), ..., (x_{1I}, ..., x_{LI}))$, para evitar problemas en el futuro acerca de las cantidades de bienes asignadas, trabajaremos solo con asignaciones factibles. Una asignación es factible para la economía si

$$\textstyle\sum_i x_{li} \leq \varpi_l \text{ para } l = 1, ..., L,$$

es decir, si el consumo total de cada bien no es mayor que la dotación total de la economía. Las asignaciones factibles para las cuales se cumple la igualdad anterior, pueden representarse por medio de una caja de Edgeworth, la figura 3.3 representa una caja de Edgeworth para el caso de dos agentes y dos bienes (2×2), dicha caja vive en $\mathbb{R}^2$.

[6]Tomamos eficiencia de funciones en el sentido de Pareto.

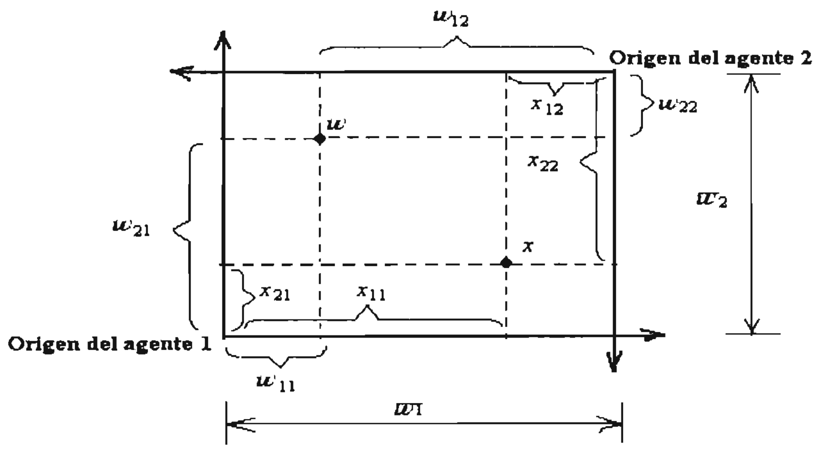

Figura 3.3: Una caja de Edgeworth.

Veamos como se describe una caja de Edgeworth para el caso de 2×2. Las cantidades de los bienes que puede tener el consumidor 1 están medidas en la forma usual, tomando como origen la esquina inferior izquierda, y las cantidades de bienes que puede tener el consumidor 2 están medidas usando la esquina superior derecha como origen. Para ambos consumidores la dimensión vertical mide las cantidades del bien 2, y la dimensión horizontal mide las cantidades del bien 1. La longitud de la caja es la dotación total del bien 1, ϖ_1; la altura de la caja es la dotación total del bien 2, ϖ_2. En general los puntos en una caja de Edgeworth representan todas las asignaciones factibles, cualquier punto en la caja, representa una división de la dotación total entre los consumidores. Las curvas de indiferencia de los agentes se representan en la forma habitual, por ejemplo en el caso de 2×2, para trazar las curvas de indiferencia de 1 tomamos como origen la esquina inferior izquierda, si nos desplazamos hacia la derecha ascendentemente nos trasladamos a las mejores cestas de consumo para 1; para trazar las curvas de indiferencia de 2 tomamos como origen la esquina superior derecha y las trazamos en forma habitual como si voltearamos la caja, si nos desplazamos hacia la izquierda en forma descendente nos trasladamos a las mejores cestas de consumo para 2.

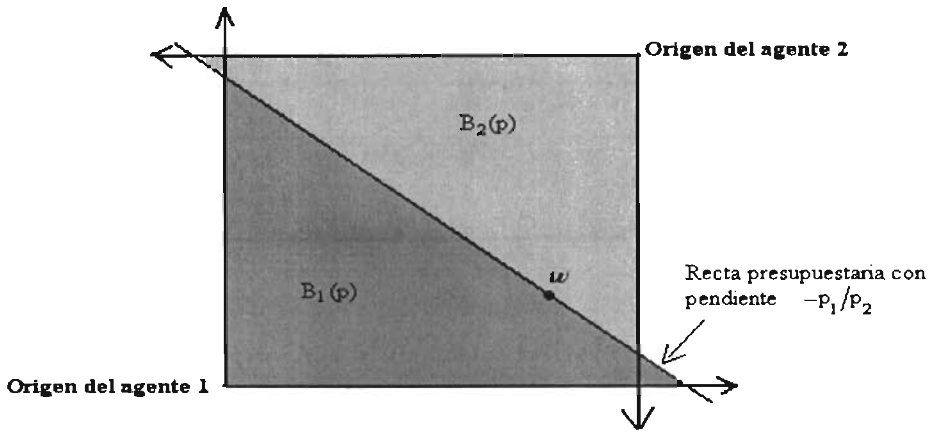

Figura 3.4: Conjuntos presupuestarios

Para cualesquiera precios $p = (p_1, ..., p_L)$, la riqueza o presupuesto del agente i es igual al valor del mercado de sus dotaciones de bienes, y se expresa como $w_i = p \cdot \omega_i = \sum_j p_j \cdot \omega_{ji}$. De esa manera, los niveles de riqueza o presuestos están determinados por los precios de los bienes. Entonces, dado el vector dotación ω_i el conjunto presupuestario de i puede verse como una función de precios:

$$B_i(p) = \{x_i \in \mathbb{R}^l_+ : p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i\}$$

Podemos representar los conjuntos presupuestarios en una caja de Edgeworth, por ejemplo para el caso de 2×2, trazamos la recta presupuestaria que pasa por la dotación inicial de bienes ϖ con pendiente $-(\frac{p_1}{p_2})$, como se muestra en la figura 3.4. El conjunto presupuestario del consumidor 1 está formado por todos los vectores no negativos que están por debajo y a la izquierda de esa recta. El conjunto presupuestario del consumidor 2 está formado por todos los vectores no negativos que se encuentran arriba y a la derecha de esa recta. Dado p, el consumidor demanda su punto más preferido en $B_i(p)$, figura 3.5, el cual puede ser expresado usando su función de demanda $x_i(p, p \cdot \omega_i)$.[7]

[7] $x_i(p, p \cdot \omega_i)$ es la misma función de demanda que se vio en el capítulo 1.

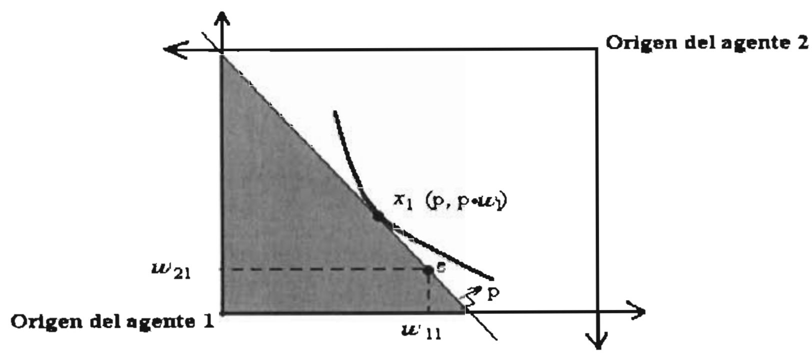

Figura 3.5: Consumo óptimo para el consumidor 1 al precio p.

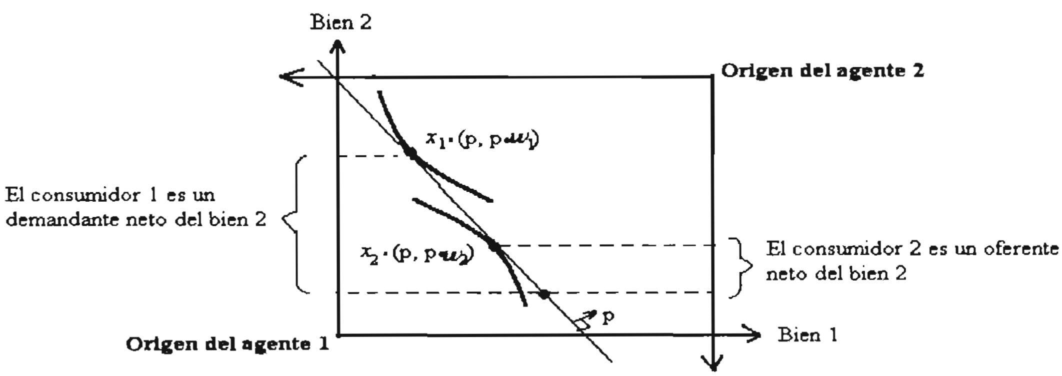

Figura 3.6: Un vector precio con exceso de demanda y oferta para el bien 2.

La figura 3.6 representa las cestas de consumo demandadas por los dos consumidores en algún vector de precio arbitrario p, las cuales no son compatibles. Si la demanda total del bien 2 excede su dotación total ϖ_2, decimos que el bien 2 está en exceso de demanda. En este caso la demanda total para el bien 1 es estrictamente menor que su dotación total ϖ_1, decimos que el bien 1 está en exceso de oferta. El consumidor 1 es un demandante neto del bien 2, en el sentido de que él quiere consumir más que su dotación del bien, y el consumidor 2 quiere ser un oferente neto de ese bien, en el sentido que él quiere consumir menos del bien que su dotación inicial.

En un equilibrio de mercado donde los consumidores son los que toman los precios, el mercado debe ser claro, es decir, los consumidores deberían ser capaces de satisfacer sus compras y ventas de bienes deseadas a los precios de mercado existentes. De esta manera si un consumidor desea ser un demandante neto de algún bien, el otro debería ser un oferente neto de ese bien en exactamente la misma cantidad, es decir, la oferta debería ser igual a la demanda. Esto nos lleva a la definición de equilibrio

Definición 3.8 Un equilibrio para una economía en una caja de Edgeworth *es un vector precio p^* y una asignación x^* en la caja de Edgeworth, denotado por (p^*, x^*) tal que para todo i,*

$$x^*{}_i \Re_i x'{}_i \text{ para todo } x'{}_i \in B_i(p^*)$$

Una cuestion central en la economía son las propiedades de bienestar del equilibrio. Es entonces que nos enfocamos en la eficiencia en el sentido de Pareto como vimos en el capítulo 1.

Definición 3.9 *Una asignación x en una caja de Edgeworth, es* **óptimo de Pareto, o eficiente en el sentido de Pareto**, *si no existe otra asignación x' en la caja de Edgeworth con $x'{}_i \Re_i x_i$ para todo i y $x'{}_i P_i x_i$ para algún i.*

Es decir, una asignación es eficiente en el setido de Pareto si no es posible mejorar el bienestar de un agente sin empeorar el de otro. El conjunto de las asignaciones que son óptimo de Pareto es conocido como conjunto de Pareto, y cualquier asignación de equilibrio en la caja de Edgeworth necesariamente pertenece a éste conjunto (Mas-Collel [1995]).

Ahora nos enfocamos en la caracterización de las funciones de elección colectiva no manipulables en forma general. Empezamos el análisis declarando el conjunto de asignaciones balanceadas como el conjunto de alternativas a elegir, dado por

$$X = \{x \in \mathbb{R}_+^{IL} : \sum_i x_i = \sum_i \omega_i\}$$

Estas son las asignaciones que se encuentran dentro de una caja de Edgeworth. Los agentes tienen preferencias sobre el conjunto de alternativas, es decir, sobre el conjunto de asignaciones completas. En este caso limitamos el estudio a situaciones donde las preferencias son egoistas, es decir, donde a cada agente solo le importa su vector asignación, de esta manera, nos enfocamos en las preferencias sobre el conjunto de vectores de consumo admisibles, que en este caso es $\mathbb{R}_+^L$. Asumimos que las preferencias son estrictamente convexas y monotonas. Pero el hecho de que las preferencias sean egoistas también es una restricción, así que todas éstas restricciones sobre preferencias definen el dominio restringido para el cual discutimos las posibilidades de funciones de elección colectiva no manipulables en economías de intercambio.

Las preferencias del agente i están representadas por una función de utilidad $u^i : \mathbb{R}_+^L \longrightarrow \mathbb{R}$. U denota el conjunto de todas las funciones de utilidad u^i continuas, crecientes y estrictamente cuasiconcavas. Una función de utilidad es creciente si para cualesquiera x_i, y_i donde $x_i \geq y_i$ y $x_i \neq y_i$, se cumple que $u^i(x_i) > u^i(y_i)$, donde $\geq$ indica "mayor o igual a" en todas las coordenadas. Sea $u \in U^I$ que denota el vector $(u^1, u^2, ..., u^I)$, y $(u, u^{i'}) \in U^I$ que denota el vector $(u^1, ..., u^{i-1}, u^{i'}, u^{i+1}, ..., u^I)$. Por comodidad trasladamos la definición de función de elección colectiva y de función de elección colectiva manipulable que estudiamos en el capítulo 2 a este contexto.

Definición 3.10 Una función de elección colectiva *en este caso, es un mapeo que tiene como dominio las funciones de utilidad en U^I y como rango las asignaciones en X, $f : U^I \longrightarrow X$.*

r_f representa el rango de f y $f^i(u)$ representa la asignación del individuo i en u, es decir, la asignación que le corresponde a i después de evaluar la función de elección colectiva en el vector $u \in U^I$.

Definición 3.11 *Una función de elección colectiva es* **no manipulable** *si $u^i(f^i(u)) \geq u^i(f^i(u, u^{i'}))$ para todo i, $u \in U^I$ y $u^{i'} \in U$.*

La definición anterior dice que a pesar de lo que digan los demás agentes, el agente i maximiza su utilidad declarando su verdadera preferencia.

Definición 3.12 *Una función de elección colectiva f* **es racional individualmente** *con respecto a ω si $u^i(f^i(u)) \geq u^i(\omega^i)$ para todo i y $u \in U^I$.*

Esta definición nos dice que cada i obtiene una mayor utilidad cuando realiza una elección colectiva para algún perfil de utilidad que cuando se queda con su dotación inicial.

Dos agentes y dos bienes

Las funciones de elección colectiva que son no manipulables y racionales individualmente en economías de intercambio de dos agentes y dos bienes son aquellas que pueden derivarse del siguiente proceso, conocido como comercio de precio fijo, esto se probará en el teorema 3.3.

Uno de los dos agentes es seleccionado antes de empezar el proceso, por conveniencia suponemos que este es el agente 1. Dos precios están especificados con anterioridad para unidades del primer bien en términos de unidades del segundo. El primer precio el cual debe ser el más bajo, indica el precio al cual el agente 1 puede ofrecer vender el primer bien en términos del segundo, y el segundo precio y más alto, indica el precio al cual el agente 1 puede ofrecer comprar el primer bien en términos del segundo, para casos más generales nos referimos al precio especificado para unidades de un bien en términos del otro, como una proporción positiva de precio, de esta manera, debido a que en este proceso manejamos dos precios, podemos decir que trabajamos con dos proporciones positivas de precios. Los límites pre-especificados indican la mayor cantidad de bienes que el agente 1 puede ofrecer comprar o vender. El precio de venta no es mayor al precio de compra, y los limites establecen que cualquier asignación final es no negativa. Este proceso se establece y se fija antes de que los agentes realicen sus funciones de utilidad. Una vez que las preferencias se han establecido, el agente 1 elige ofrecer comprar o vender el bien 1, y declara cuanto está dispuesto a comprar o vender. Al mismo tiempo, el agente 2 indica cuanto del bien 1 está dispuesto a vender, y cuanto del bien 1 está dispuesto a comprar. (Dado que las funciones de utilidad son estrictamente cuasiconcavas, el agente 1 preferiría comprar o vender, pero no ambas ya que el precio de venta no es mayor al precio de compra. El agente 2 sin embargo, puede estar dispuesto a realizar ambos si los precios no son los mismos.) Si el agente 1 ha ofrecido comprar, entonces los bienes son intercambiados en la cantidad del mínimo de lo que el agente 1 ha declarado que está dispuesto a comprar y lo que el agente 2 ha declarado que está dispuesto a vender. Si el agente 1 ha ofrecido vender entonces las unidades son intercambiadas en la cantidad del mínimo de lo que el agente 1 declaro que está dispuesto a vender y lo que el agente 2 declaro que está dispuesto a comprar. Si ambos agentes tienen exceso de demanda o de oferta del mismo bien, el intercambio no se realiza y la asignación final es la dotación inicial. Gráficamente podemos ver que en la caja de Edgeworth en este caso, existen dos rectas presupuestarias que pasan por la dotación inicial, las cuales se diferencian de sus pendientes que son los dos precios pre-especificados.

Al comerciar a precios fijos se tienen algunos hechos que son escenciales para cualquier regla no manipulable. Otros pueden ser prescindidos, para obtener algún resultado general. Observemos que cualquier recta presupuestaria correspondiente a una proporción positiva de precio define un conjunto diagonal dentro del conjunto de asignaciones, en el siguiente sentido:

Definición 3.13 Un conjunto $B \subset X$ **es diagonal** *si, y solo si, para todo* $x, y \in B$, $(x \neq y)$, $x_i \not\geq y_i$ *y* $y_i \not\geq x_i$.

La diagonalidad de los rangos de las reglas descubre las posibilidades que tiene algún agente i para conseguir más de todos los bienes en una asignación en el rango en lugar de lo que i podría conseguir en otra asignación también en el rango. En nuestro caso, la recta presupuestaria correspondiente a los precios fijos es el rango de nuestra función de elección colectiva. La diagonalidad del rango es necesaria para una función de elección colectiva sobre economías de intercambio de 2×2 que son no manipulables. Veamos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.4 *Veáse la figura* 3.7. *El agente* 1 *está dotado con diez unidades de cada uno de los bienes y el agente* 2 *está dotado con cinco unidades de cada uno de los dos bienes. El agente* 1 *ofrece comprar una unidad del bien* 1 *al precio de* 2, *es decir, él está dispuesto a dar dos unidades del bien* 2 *a cambio de una unidad del bien* 1; *y vender el bien* 1 *al precio de* $(\frac{1}{2})$, *es decir, está dispuesto a recibir media unidad del bien* 2 *a cambio de una unidad del bien* 1.

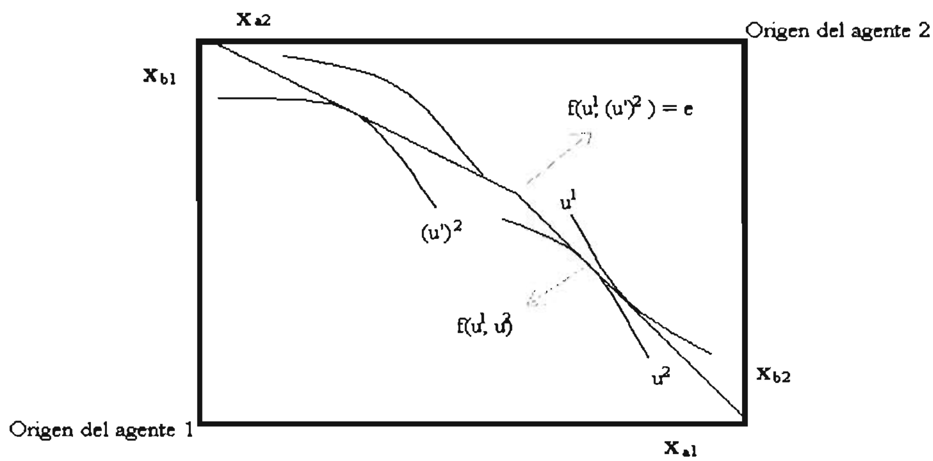

Figura 3.7. Caja de Edgeworth

Dentro de la caja de Edgeworth existen dos rectas presupuestarias que pasan por la dotación inicial $((10,10),(5,5))$ *con pendientes* $(\frac{1}{2})$ *y* 2*, dichos segmentos son el rango de la función de elección colectiva en este ejemplo. Si por ejemplo, el agente* 1 *se da cuenta de que comprando tres unidades del bien* 1 *obtiene su mayor utilidad,* u^1 *en la figura* 3.7*, entonces la estrategia dominante de* 1 *es ofrecer comprar tres unidades del bien* 1*. Si el agente* 2 *tiene la función de utilidad* u^2 *en la figura* 3.7*, entonces su estrategia dominante es ofrecer vender dos unidades del bien* 1 *al precio de* 2*, es decir da dos unidades del bien* 1 *a cambio de cuatro unidades del bien* 2*; y comprar una unidad de bien* 1 *al precio de* $(\frac{1}{2})$*, es decir recibe una unidad de* 1 *a cambio de media unidad de* 2*. En este caso, el resultado del procedimiento de precio fijo ocasionaría que el agente* 2 *venda dos unidades del bien* 1 *al agente* 1 *al precio de* 2*. La asignación final para* $u = (u^1, u^2)$*, es decir, la función de elección colectiva evaluada en u es,* $f^1(u) = (12,6)$ *para el agente* 1 *y* $f^2(u) = (3,9)$ *para el agente* 2*. Si en su lugar, el agente* 2 *tiene la función de utilidad* $(u')^2$ *(vease la figura), entonces él no ofrecería vender el bien* 1*, pero ofrecería comprar dos uidades del bien* 1*. En ese caso, los bienes no se intercambian ya que ambos agentes tendrían exceso de demanda del bien* 1*, y la asignación final es la dotación inicial.*

El ejemplo 3.7 describe implicitamente, una función de elección colectiva no manipulable, referimos al lector a Barberá y Jackson [1995] para ver la demostración. En este ejemplo la regla descrita es racional individualmente y cada agente se puede garantizar, declarando las verdaderas preferencias, que el resultado social será al menos tan bueno como su dotación inicial. Ahora bien, considerando la restricción de que la regla es racional individualmente el proceso de comercio de precio fijo es el único que garantiza la no manipulabilidad en economías de intercambio (Barberá y Jackson [1995]).

Teorema 3.1 *Una función de elección colectiva definida sobre una economía de dos agentes y dos bienes es no manipulable y racional individualmente con respecto a su dotación si, y solo si, este es el resultado de un comercio de precio fijo.*

Referimoa al lector a Barberá y Jackson [1995] para ver la demostración del teorema. Notemos que todas las funciones cubiertas por el teorema tienen rangos muy limtados, y que esas están formadas por precios lineales. Eso es una consecuencia del hecho que el dominio de preferencias incluye todas las funciones de utilidad estrictamente cuasiconcavas y que ambos agentes juegan un papel en la determinación del resultado. La dictadura es excluida por la racionalidad individual.

El contenido del teorema 3.1 es algo vago, por el hecho de que todavía no tenemos una definición precisa de comercio de precio fijo. La definición de comercio de proporción fija, de la cual el comercio de precio fijo es un caso especial para dos bienes, precede al teorema 3.2.

Dos agentes y más de dos bienes

El comercio de precio fijo tiene una extensión al caso de más de dos bienes llamado comercio de proporción fija. En este caso una caja de Edgeworth se ubica en $\mathbb{R}^n$, donde n es el número de bienes y su descripción es análoga a la caja de Edgeworth en $\mathbb{R}^2$. Los precios fijos fueron la clave para el intercambio no manipulable. Pero los precios fijos, cuando existen más de dos bienes, describen conjuntos presupuestarios que tienen como fronteras a hiperplanos. El conjunto de comercios o intercambios posibles se encuentran sobre dichos hiperplanos procedentes de su dotación. El agente i selecciona un punto en r_f sobre uno de los hiperplanos, este punto muestra las cantidades de los bienes que a i le gustaría tener; y simultáneamente el otro agente declara sus demandas a lo largo de cada hiperplano. El intercambio más pequeño solicitado a lo largo del hiperplano identificado por el agente i es la asignación final.

Veamos el siguiente ejemplo para el caso de dos agentes y tres bienes, pero antes de eso definimos lo siguiente

Definición 3.14 *LLamamos a un punto de la forma* $\gamma_1 x_1 + ... + \gamma_k x_k$*, donde* $\gamma_1 + ... + \gamma_k = 1$ *y* $\gamma_i \geq 0$*,* $i = 1, ..., k$*,* **una combinación convexa** *de los puntos* $x_1, ..., x_k$*.*

Una combinación convexa puede verse como una mezcla de los puntos, con γ_i la fracción de x_i en la mezcla.

EJEMPLO 3.5 *Existen dos agentes y tres bienes. Sus dotaciones iniciales son* $\omega_1 = \omega_2 = (5, 5, 5)$ *y la dotación total es* $(10, 10, 10)$*. El agente* 1 *puede comprar unidades de cualquier bien del agente* 2 *al precio de una unidad de cada uno de los otros bienes. De esa manera, el agente* 1 *puede ofrecer multiplos (pero no combinaciones) de las transacciones* $(1, -1, -1)$*,* $(-1, 1, -1)$ *y* $(-1, -1, 1)$*, es decir, si el agente* 2 *acepta la primera transacción significa que el agente* 1 *recibe de* 2 *una unidad del bien* 1 *a cambio de una unidad del bien* 2 *y una unidad del bien* 3*; si se efectúa la segunda transaccón significa que* 1 *recibe de* 2 *una unidad del bien* 2 *a cambio de una unidad del bien* 1 *y una unidad de* 3*; finalmente si se realiza la tercera transacción* 1 *recibe una unidad del bien* 3 *a cambio de una unidad del bien* 1 *y una del bien* 2*. El rango de* f *en términos de la asignación final del agente* 1*, es* $r_f = \{x : \exists \gamma \in [0, 1] \text{ tal que } x_1 = \gamma(5, 5, 5) + (1 - \gamma)(10, 0, 0), \text{ o } x_1 = \gamma(5, 5, 5) + (1 - \gamma)(0, 10, 0), \text{ o } x_1 = \gamma(5, 5, 5) + (1 - \gamma)(0, 0, 10)\}$*. Estas son las combinaciones convexas de la dotación inicial del agente* 1 *y lo que pueda comprar de cada uno de los bienes. Si el punto más preferido para el agente* 1 *en el rango es* $(7, 3, 3)$*, entonces la asignación es el punto más preferido del agente* 2 *del conjunto de combinaciones convexas de* $(5, 5, 5)$ *y* $(7, 3, 3)$*. Las asignaciones están en términos de las asignaciones finales del agente* 1*, de ese modo la asignación del agente* 2 *es* $(10, 10, 10) - x_1$*.*

Notemos que dada la estructura del rango, el agente 1 siempre tiene un único punto más preferido, y que todas las combinaciones convexas de ese punto y la dotación inicial son preferidos a todos los puntos sobre cualquier otro hiperplano. Por ejemplo, supongamos que $(7,3,3)$ es el punto más preferido del agente 1 en el rango. Por cuasiconcavidad estricta y el hecho que $(7,3,3)$ es el más preferido, se sigue que $\frac{5}{7}(7,3,3)+\frac{2}{7}(0,0,10)=(5,\frac{15}{7},5)$ es preferido a $(0,0,10)$, es decir, ya que por cuasiconcavidad $u(\frac{5}{7}(7,3,3)+\frac{2}{7}(0,0,10)) \geq \ Min\{u(7,3,3),u(0,0,10)\}$, y como $u(0,0,10)$ es el mínimo, podemos decir que $(5,\frac{15}{7},5)$ es preferido a $(0,0,10)$. Por monotonicidad $(5,5,5)$ es preferido a $(5,\frac{15}{7},5)$, y así $(5,5,5)$ es preferido a $(0,0,10)$, de la cuasiconcavidad estricta se sigue que cualquier combinación convexa de $(7,3,3)$ y $(5,5,5)$ es preferida a cualquier combinación convexa de $(5,5,5)$ y $(0,0,10)$, por el mismo razonamiento anterior.

Esa propiedad la cual hace que uno de los agentes prodría solo querer comerciar sobre uno de los hiperplanos, hace que el comercio de proporción fija sea no manipulable. La inversa también es cierta: cualquier regla de comercio no manipulable debe tener esa propiedad. Esto es el contenido del teorema 3.2 el cual se cita después de dar una definición precisa de comercio de proporción fija.

Dados los puntos a y b en X, escribimos ab para denotar el conjunto de puntos sobre el segmento de línea con puntos finales a y b, así $ab=\{x \mid \exists\gamma \in [0,1] \text{ tal que } x=\gamma a+(1-\gamma)b\}$. Entonces $c\in ab$ indica que c vive sobre el segmento de línea que conecta a y b. Escribimos $c \geq_i^* ab$ si $c_i \geq \gamma a_i+(1-\gamma)b_i$ para algún $\gamma\in[0,1]$. De esa manera, $c\geq_i^* ab$ indica que c vive sobre o debajo del segmento ab desde la perspectiva del agente i.

Dado un conjunto $B\subset X$ y un perfil de utilidad $u\in U^2$, sea $T^i(B,u)$ que denota el conjunto de asignaciones en B la cuales maximizan u^i. Ese conjunto es no vacío si B es cerrado. Una función t^i, la cual es una selección de T^i es llamada una regla rompe empate. Una regla rompe empate es j-favorable en $B\subset r_f$ si para cualquier $u, t^i(B;u)\neq t^i(B;u^{-j},v^j)$ solo si $v^j(t^i(B;u^{-j},v^j))\geq v^j(t^i(B;u))$.

Definición 3.15 *Una función de elección colectiva f definida sobre una economía de intercambio de dos agentes es el resultado de un comercio de proporción fija si r_f el rango de f, es cerrado, diagonal y contiene a ϖ, y existe un agente i para el cual se cumple lo siguiente:*

1. *Para todo x y y distintos entre si en r_f, $x\in\varpi y$, $y\in\varpi x$ o $\varpi\geq_i^* xy$.*

2. *Existe una regla rompe empate* t^i *y* t^j *tal que* t^i *es* j*-favorable en* r_f *y* t^j *es* i*-favorable en* $\varpi a \cap r_f$*, para todo* $\varpi \in r_f$.

3. $f(u) = t^j(\varpi a \cap r_f, u)$*, donde* $a = t^i(r_f, u)$.

La condición (1) asegura que r_f vive a lo largo de $k \leq l$ segmentos de línea diagonal, cada uno teniendo la dotación como un punto final. Si uno elige x desde un segmento y y desde otro segmento, entonces $\varpi \geq_i^* xy$. La condición (2) establece que la regla de rompe empate es constante o elige en favor de otro agente. Esta condición solo llega dentro del juego si el rango es no conexo, entonces los agentes podrían tener dos posibles elecciones maximizando utilidad. La condición (3) establece que el resultado de f es el punto más preferido en el rango para el agente j, el cual vive entre la dotación y el punto más preferido en el rango del agente i. Podemos ahora declarar.

Teorema 3.2 *Una función de elección colectiva de dos personas es no manipulable y racional individualmente si, y solo si, es el resultado de comercio de proporción fija.*

Referimos al lector a Barberá y Jackson [1995] para ver la demostración del teorema.

CAPÍTULO 4

Conclusiones

Hemos estudiado los problemas de asignación de recursos para diferentes modelos; cada modelo representa alguna familia de situaciones políticas o económicas, donde diversos métodos de asignación pueden ser adoptados. En todo modelo, lo que se busca es asignar de manera eficiente los recursos escasos. A pesar de que existen diversidad de métodos de asignación en este trabajo hemos estudiado los problemas de asignación por medio de los mercados competitivos y de las funciones de elección colectiva.

Bajo la perspectiva del mecanismo de los mercados competitivos, estudiamos los problemas de asignación a través del modelo de equilibrio general, donde las soluciones a los problemas de asignación de recursos se dan en los equilibrios competitivos, en los cuales se da la eficiencia y se obtiene el máximo bienestar social posible; dichas características son las que se desea que tenga un método de asignación de recursos. Sin embargo, las soluciones de equilibrio pueden ser muy injustas debido a que, el resultado final de equilibrio depende de los recursos iniciales de los agentes. Por ejemplo, el consumidor que se encuentre en pobreza o sin derechos de propiedad bien definidos, puede acudir al mercado y optimizar, pero su situación no variará significativamente. Si el objetivo de la economía es lograr la satisfacción de las necesidades y la felicidad de la sociedad obtenemos muy poco si aplicamos solo los mercados a los problemas de asignación. La institución mercado es muy buena cuando se puede aplicar pero solo nos ayuda parcialmente.

Por otro lado, bajo la perspectiva de las funciones de elección colectiva, los problemas de asignación se estudian de manera general. A pesar que las propiedades que pueden exhibir son diversas, nos hemos enfocado en su mayor o menor susceptibilidad a ser distorsionadas, como consecuencia de manipulaciones estratégicas de los agentes. Presentamos un resultado negativo de las funciones de elección colectiva conocido como teorema de Gibbard-Satterthwaite en el cual podemos observar que si las preferencias de los agentes pueden ser cualesquiera, todo método está sujeto a la manipulación. Un resultado positivo se representa a través de dominios muy especificos y bajo ciertas restricciones sobre los cuales se caracterizan funciones de elección colectiva no manipulables y no dictatoriales. Las funciones de elección colectiva generan buenas soluciones a los problemas de asignación; estas soluciones son eficientes y en ellas se representa un resultado que beneficia socialmente a los agentes involucrados, siempre y cuando se definan sobre dominios restringidos. De lo contrario las funciones de elección colectiva podrían solo generan resultados que favorecen a uno o algunos de los agentes involucrados en la asignación, pero no a todos.

Al intentar implementar una forma de asignación, debemos tener en cuenta esta amenaza de manipulación por los agentes, y lograr de alguna forma incorporarla explicitamente como una restricción en las caracterizaciones de funciones de elección colectiva. De cualquier forma la elección de un método de asignación, debe hacerse tomando en cuenta los incentivos de los agentes a la manipulación.

Ningún resultado se presenta como definitivo. No existe aún una fórmula para seleccionar el "mejor" método de asignación. Este hecho genera una problemática abierta a la creación de métodos de asignación, en la cual no debe olvidarse el análisis de los incentivos a la manipulación.

Bibliografía

[1] Barberá, Salvador
"Teoría de la Elección Social: Algunas líneas de desarrollo"
Hacienda Pública Española ♯91. Págs. 221-224. (Énfasis en la sección 4). (1984).

[2] Barberá, Salvador
"An introduction to strategy-proof social choice functions"
Social Choice and Welfare. Págs. 625-629. (2001).

[3] Barberá, Salvador; Jackson, Matthew
"Strategy-Proof Exchange"
Econometrica vol. 41. Págs. 51-87. (1995).

[4] Gibbard, A.
"Manipulation of Voting Schemes: A general result"
Econometrica ♯41. Págs. 587-601. (1973).

[5] Jackson, Matthew
"A crash course in Implementation Theory"
Social Choice and Welfare ♯18. Págs. 655-708. (2001).

[6] Mas-Collel., A.; Whinston, M.; Green, J.
"Microeconomic Theory"
Oxford University Press. Caps. 3, 5, 15, 16, 21 y 23. (1995).

[7] Plata, Leobardo
"Un panorama de resultados y problemas abiertos en la Teoría de la Elección Social"
En Barceinas, et. al. **Tópicos en Economía Matemática y Econometría**, UNAM-UAM. Págs. 47-112. (1999).

[8] Varian, Hal R.
"Microeconomía intermedia"
Universidad de California, Berkeley. Caps. 1-4, 6, 14, 16, 17-19 y 29. (1999).