CARACTERIZACIÓN DEL CONJUNTO DE SALIDAS DE UNA MÁQUINA FINITA

TESIS que para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

presenta

EDGARDO UGALDE SALDAÑA

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ

AGOSTO DE 1992

RESUMEN.

En este trabajo se estudia el espacio de salidas de una máquina finita, las cuales representan trayectorias de un sistema dinámico. El estudio de este espacio, es llevado a cabo introduciendo el concepto de simetría de máquina. A cada uno de estos espacios se le asocia un grupo de transformaciones que forman parte del grupo de simetrías. Con este grupo y un subespacio constructor, se caracteriza el espacio de salidas.

Se realiza el caso concreto de caracterizar el espacio de salidas de una máquina de traslape, en la que resulta haber cierto tipo de renormalización. Se sugieren varias direcciones para subsiguientes aplicaciones de esta técnica.

AGRADECIMIENTOS.

A *Jesús Urías*, asesor de este trabajo y a mis compañeros en el equipo que él dirje: Gelasito y Enciso.

A mija, Delia Cordoba.

A los de mi casa en Rioverde: Rosita Saldaña, Chiqui, Mino y Don Otilio Rivera, jéfe de la familia.

A los institutos IICO e IF con toda su gente.

CAPÍTULO I. PRESENTACIÓN.

La máquina finita es un modelo matemático que abstrae las características esenciales de un sistema dinámico, cuando de él se quiere hacer una descripción finita en tiempo discreto. En este nivel de descripción resulta en general que la dinámica deja de ser determinista, así que para cada paso temporal, el sistema debe elegir una de entre varias posibles evoluciones. El número posible de evoluciones es también finito, recuerde que una evolución debe ser una función del espacio de estados en él mismo y dado que este espacio tiene cardinalidad finita, solo hay un número finito de posibles elecciones para tal función.

Suponga que para un sistema dinámico se hace una descripción finita, en la que solo se considera el conjunto

$$\mathcal{E} = \{E_i \mid 1 \le i \le N\}$$

de posibles estados del sistema y un conjunto finito de posibles evoluciones

$$\{f_j : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \mid 0 \le j \le k\}.$$

En esta descripción el tiempo es discreto. Suponga que en un tiempo n, el sistema se encuentra en el estado E_i, entonces en el tiempo n+1 el sistema se encontrará en alguno de los estados

$$\{f_j(E_i) \in \mathcal{E} \mid 0 \le j \le k\}.$$

Una trayectoria posible del sistema cuando inicialmente se encontraba en el estado E_s, es la secuencia infinita de estados

$$E_{s,0}\ E_{s,1}\ E_{s,2} \cdot \cdot \cdot \ .$$

en la que $E_{s,i+1} = f_j(E_{s,i})$ para alguna j. De modo que para que la secuencia $E_{s,0}\ E_{s,1}\ E_{s,2} \cdot \cdot \cdot \cdot$ de elementos de $\mathcal{E}$, represente una posible trayectoria, es necesario que exista una secuencia de evoluciones

$$f_{i,1}\ f_{i,2} \cdot \cdot \cdot$$

tales que $E_{s,j+1} = f_{s,j+1}(E_{s,j})$ para todo $j \ge 0$.

Se pueden incluir todas las evoluciones en una sola función maestra $\mathcal{F}$, que tome como argumentos el índice de la evolución y uno de los estados en la descripción finita. Tal función maestra se define así:

$$\mathcal{F}: \mathcal{E} \times \{0, 1, \ldots, k\} \longrightarrow \mathcal{E}$$
$$(E_i, j) \longrightarrow \mathcal{F}(E_i, j) = f_j(E_i).$$

La máquina finita retiene solo los elementos esenciales, el conjunto de estados, el conjunto de índices para posibles evoluciones y la función maestra que se acaba de introducir. Las posibles trayectorias del sistema forman el conjunto de secuencias infinitas llamado espacio de salidas de la máquina; el objetivo principal de este trabajo es caracterizar la estructura de este espacio. Para este fin, se definen transformaciones entre secuencias que dejan invariante al conjunto de posibles trayectorias del sistema. Hablar de la estructura de este conjunto, es hablar de la estructura del conjunto de transformaciones que lo dejan invariante.

El problema en concreto es la caracterización por medio de un grupo de simetrías del espacio de salidas de una máquina. Una vez planteado el problema, se tratará el caso particular de una familia de máquinas llamadas de traslape, para las que el problema de caracterización se puede resolver. Las máquinas citadas resultan en la versión aritmética de los autómatas celulares[19] y dieron origen a la tecnica que se desarrolla en este trabajo[20].

MOTIVACIÓN.

La dinámica simbólica[13,14] es una descripción finita de un sistema dinámico. En ella, los estados corresponden a regiones en el espacio fase del que se hace una partición, por ejemplo en cubos de igual tamaño. Lo que se requiere solamente, es que en la descripción se consideren como estados a un número finito de regiones del espacio fase. La trayectoria de un punto es muestreada cada τ unidades de

tiempo y de esta manera se obtiene una secuencia de regiones en la partición del espacio fase de la siguiente forma:
Suponiendo que las regiones son etiquetadas en el conjunto

$$\mathcal{R} = \{R_1, R_2, \ldots, R_N\},$$

entonces la órbita simbólica de un punto x es la secuencia

$$R_{s,0}\ R_{s,1}\ R_{s,2}\ \cdots.$$

donde $x(n\tau) \in R_{s,n}$ y $x = x(0)$.

Los puntos en una misma región del espacio fase pueden evolucionar a regiones diferentes. En la descripción finita, cada una de estas regiones corresponde a un estado del nuevo sistema, de modo que la evolución de los nuevos estados no es determinista. En este caso deben introducirse varias funciones de evolución, en tal forma que se incluyan todas las posibilidades para los puntos en cada región del espacio fase. De esta manera, la dinámica simbólica del sistema, puede simularse por medio de una máquina finita. Lo que se pretende con esto, es que todas las órbitas simbólicas para cada elección del punto en el espacio fase, sean representadas por salidas en la máquina mencionada.

Una posible aplicación del metodo de simetrías de máquina, para la caracterización del espacio de salidas, es el estudio de la complejidad de sistemas dinámicos no lineales[15].

Es frecuente encontrar descripciones finitas en tiempo discreto, de sistemas dinámicos extendidos[16], para los cuales la evolución es desde un principio probabilística.

Una de tales descripciones es el modelo reticular de fracturas[17,18], en el cual los estados son distribuciones finitas de energía en un espacio reticular finito. La energía aumenta por una unidad en un sitio de la retícula elegido aleatoriamente, evento que se repite a intervalos regulares de tiempo. Si la energía de un sitio sobrepasa un valor umbral, se sucede una fractura.

En el modelo, cada posible evolución consiste en la elección de una celda de la rejilla, a la que se agrega una unidad de energía, con la consiguiente fractura en su caso. El modelo comprende los elementos que definen a una máquina finita, o sea, un número finito de estados y un número finito de evoluciones.

ORGANIZACIÓN.

En el capítulo II se van a definir los objetos más importantes, como son: *máquina finita, el espacio de salidas de una máquina, transformación generada localmente y simetría de máquina*, estos servirán de base para el desarrollo de los capítulos subsiguientes. Así mismo se establece una técnica de *caracterización del espacio de salidas de una máquina*.

En el capítulo III se dá introducción al concepto de *máquina de traslape* y se describen sus simetrías. Lo relevante en este capítulo es que las citadas simetrías forman a su vez el espacio de salidas de otra de estas máquinas. En este capítulo se aplicará la técnica establecida para el caso del espacio de salidas de una máquina de traslape.

Los capítulos II y III conforman un primer bloque en el que los resultados requieren solamente del álgebra. En un segundo bloque que requiere del anterior y que abarca el cuarto capítulo, se presentan resultados que además del álgebra hacen uso de conceptos topológicos.

En el capítulo IV se presentan las definiciones de *sistema iterado de funciones* y *espacio de códigos*, estos son los conceptos topológicos fundamentales para el desarrollo del capítulo y requieren ciertos antecedentes que en él mismo se revisan. También se establecen las condiciones para que el espacio de salidas de una máquina pueda verse como un fractal determinista, esto se logra asociando un sistema iterado de funciones en el espacio de códigos con la máquina finita en cuestión.

Las conclusiones están contenidas en el capítulo V.

CONCEPTOS PRELIMINARES.

En el transcurso de la tesis se hace uso de algunos conceptos fundamentales de la teoría de lenguages formales[1,2], estos conceptos se revisan a continuación.

En el contexto de la teoría de los lenguajes formales, un conjunto finito es llamado *alfabeto*.

Sea A un alfabeto, la cadena $a_1a_2\cdots a_n$ con a_i un elemento de A es llamada *palabra en el alfabeto* A. El conjunto formado por todas las palabras en A se denota con A^*, este es el lenguaje formal en A más grande. Cualquier subconjuto L de A^* es llamado *lenguaje formal en el alfabeto* A.

Sea x una cadena en A^*, entonces x_i representa el i-ésimo símbolo de la cadena x. Al subconjunto de A^* formado por todas las palabras con n símbolos se le denota A^n, así $a_0a_1\cdots a_{n-1}$ recorre todas las posibilidades para elementos de A^n cuando cada a_i recorre todas las posibilidades de elementos en A. Se dice que las palabras en A^n tienen *tamaño* n.

Sea x una palabra de tamaño n e y una de tamaño m, la *concatenacion* de x e y es la única palabra z de tamaño $n+m$ tal que:

$$z_i = x_i \text{ si } i < n \text{ y } z_i = y_{i-n} \text{ si } i \geq n.$$

La concatenación de x e y se denota con el símbolo xy.

También hay una concatenación de lenguajes formales. Sean L_1 y L_2 dos lenguajes cualesquiera en A, su concatenación es el conjunto

$$\{x = x^1x^2 \in A^* \mid x^1 \in L_1, x^2 \in L_2\},$$

y se denota con el símbolo L_1L_2. De modo que para cualesquiera i, j enteros, $A^iA^j = A^{i+j}$.

Para cadenas infinitas en A se usa el nombre de *código en el alfabeto* A a diferencia del de palabra en el alfabeto A. El conjunto de todos los códigos en A es llamado en general *espacio de códigos en* A y se le representa con el símbolo $\Sigma(A)$.

Se puede extender el concepto de concatenación de manera que en él puedan intervenir códigos, se puede hablar de la concatenación entre una palabra y un código. Sean x una palabra en A^n y x' un código en $\Sigma(A)$, la concatenación de x con x' es el código y tal que

$$y_i = x_i \text{ si } i < n \text{ y } y_i = x'_{i-n} \text{ si } i \geq n.$$

La concatenación de la palabra x y el código x' se denota con el símbolo xx'. En analogía a lo anterior, si L es un lenguaje y C es un subconjunto del espacio de códigos, la concatenación de L con C es el conjunto

$$\{x = pc \in \Sigma(A) \mid p \in L,\ c \in C\}$$

La concatenación del lenguage L con el subespacio de códigos C se denota como LC.

Sea x una palabra en A^*, toda palabra x^a en A^* para la que existe otra palabra x^p tales que $x = x^a x^p$ es llamada *prefijo de* x. En este caso la palabra x^p que se asocia al prefijo de x^a de esta forma, es llamada *sufijo de* x. Así, para

$$a = a_0 a_1 \cdots a_n \in A^{n+1},$$

cada palabra $a^s = a_0 \cdots a_s \in A^{s+1}$ con $s < n$ es un prefijo de a y todos sus sufijos son palabras del típo $a_{s+1} a_{s+2} \cdots a_n \in A^{n-s}$.

CAPÍTULO II. LAS MÁQUINAS Y SUS SIMETRÍAS.

LAS MÁQUINAS FINITAS.

Las máquinas finitas que se utilizan en este trabajo pertenecen a una subclase de un conjunto más general, sin embargo se referirá a ellas como máquinas finitas sin más adjetivos, pues aquí no se utiliza otro tipo de máquina finita.

Definición(1).

Las máquinas finitas son ternas (B, A, δ) en donde A y B son dos conjuntos finitos y δ es la función de transición,

$$\delta: B \times A \longrightarrow B.$$

Estas máquinas leen códigos en $\Sigma(A)$, encontrandose en un *estado inicial* de entre los elementos de B, que es el conjunto de estados de la máquina. Su respuesta o *salida* es un código en $\Sigma(B)$. Suponga que el código de *entrada*, es decir, el código que lee una de estas máquinas, es

$$s = s_0 s_1 s_2 \cdots s_i \cdots, \; s_i \in A$$

y que el estado en el que se encuentra la máquina es $\mu_0 \in B$. Entonces el código de salida será

$$p = p_0\delta(p_0, s_0)\delta(p_1, s_1)\delta(p_2, s_2)\cdots\delta(p_{k-1}, s_{k-1})\delta(p_k, s_k)\cdots, \quad (1)$$

en donde $p_{i+1} = \delta(p_i, s_i)$ para $i \geq 0$.

El mecanismo es el siguiente:

Primero se coloca a la maquina en alguno de sus estados internos (uno de los elementos de B en este caso).

Luego se alimenta con algún código en el alfabeto de entradas (para la máquina (B, A, δ), un elemento de $\Sigma(A)$).

La respuesta de la máquina es un código en el alfabeto de salidas que es el conjunto de estados internos. El código de salidas se genera de acuerdo a la regla que establece la ecuación(1), es aquí donde interviene la función de transición.

La salida de la máquina $M = (B, A, \delta)$ al leer un código $\sigma \in \Sigma(A)$, encontrandose inicialmente en el estado $p_0 \in B$, se denota con

$$\delta(p_0, \sigma).$$

A pesar de que se denota con el símbolo para la función de transición, el contexto permite discernir que se trata de una salida de la maquina dado que σ es un código de entrada. En forma análoga, si P [illegible] subconjunto de B y Q un subconjunto de $\Sigma(A)$, entonces

$$\delta(P, Q) = \{p = \delta(p_0, \sigma) \mid p_0 \in P, \sigma \in Q\}.$$

Definición(2).

El *espacio de salidas de la máquina* $M = (B, A, \delta)$ es el conjunto de todas sus posibles salidas y se le denota $\delta(M)$, o sea

$$\delta(M) = \{p = \delta(p_0,\sigma) \mid p_0 \in B, \sigma \in \Sigma(A)\}.$$

SIMETRÍAS DE MÁQUINA.

Sea $M = (B, A, \delta)$ según la definición(1), se intenta encontrar biyecciones de $\delta(M)$ a si misma (abreviado de-a $\delta(M)$) inducidas por permutaciones de B. Es decir, transformaciones de $\Sigma(B)$ a $\Sigma(B)$ que son generadas localmente por permutaciones de B.

Definición(3).

Sea C un conjunto finito, una transformación $F: \Sigma(C) \longrightarrow \Sigma(C)$ es *generada localmente por una secuencia* $F = (F_n)_{n=0}^{\infty}$ de transformaciones de-a C si $\forall(i \geq 0, \chi \in \Sigma(C))$ $T(\chi)_i = T_i(\chi_i)$.

El conjunto de todas las transformaciones como las de la definición(3) tiene la cardinalidad del continuo tan solo si $|C| > 1$. Si transformaciones de-a C hay $|C|^{|C|}$, un mapeo F que es localmente la idéntica al menos a partir del sitio n, es decir que

$$T_i(X) = X \ \forall (X \in B, \ i \geq n),$$

puede ser elegido de entre $|C|^{n|C|}$ posibilidades.

A la transformación generada localmente por la secuencia $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ se le denota como $F = F_0F_1 \cdots F_n \cdots$. Se Puede decir que un mapeo de-a $\Sigma(C)$, generado localmente por una secuencia de mapeos de-a C, es un código en $\Sigma(C^C)$, donde C^C es el conjunto de todas las transformaciones de-a C.

Cuando cada uno de los mapeos de la secuencia $F_0F_1\cdots$ es una permutación de C, entonces el mapeo $F\colon \Sigma(C) \longrightarrow \Sigma(C)$ que resulta es una biyección de-a $\Sigma(C)$. Además, toda biyección de-a $\Sigma(C)$ que es generada localmente por una secuencia de mapeos de-a C debe ser generada por una secuencia de permutaciones de C.

Hablando de la máquina $M = (B, A, \delta)$, las biyecciones de-a $\Sigma(B)$ que interesan son aquellas que al restringirse a $\delta(M) \subset \Sigma(B)$ son también biyecciones de-a $\delta(M)$.

Suponga que $T\colon \Sigma(B) \longrightarrow \Sigma(B)$ es generada localmente por la secuencia $T_0T_1\cdots$ de permutaciones de B, o sea que $T = T_0T_1\cdots$. Para empezar, T es una biyección de-a $\Sigma(B)$. Se tratan de encontrar condiciones suficientes para que T sea una biyección de-a $\delta(M)$.

Si se quiere que $T(\beta)$ sea una salida de la maquina M cada vez que β es una salida de M, es decir que

$$\beta \in \delta(M) \Longrightarrow T(\beta) \in \delta(M),$$

entonces así como $\beta = \delta(X, \sigma)$ para alguna $\sigma \in \Sigma(A)$ y $X \in B$, de la misma manera, debe haber alguna $\sigma' \in \Sigma(A)$ tal que $T(\beta) = \delta(T_0(X), \sigma')$. Si σ' existe y la correspondencia que asigna σ' a σ es una biyección de-a $\Sigma(A)$, entonces T será una biyección de-a $\delta(M)$. Si para la máquina M se cumple ésto, entonces T tiene asociada una transformación

$$U: E(A) \longrightarrow E(A)$$

de las entradas, tal que $T(\delta(X, \sigma)) = \delta(T_0(X), U(\sigma))$; lo que garantiza que T es una biyección de-a $\delta(M)$. Esta es una condición suficiente, pero no es constructiva en tanto que no se sabe como depende U de T.

Si al igual que T, se supone que U está generada localmente por permutaciones de A, o sea que $U = U_0 U_1 \cdots$, entonces lo que se debe buscar son las condiciones sobre cada una de las parejas (T_i, U_i) que aseguren que T es una biyección de-a $\delta(M)$. Estas se establecen en la siguiente proposición.

Proposición(I).

Sean $T: \Sigma(B) \longrightarrow \Sigma(B)$ y $U: \Sigma(A) \longrightarrow \Sigma(A)$ [illegible] generadas localmente a partir de las secuencias de biyecciones $(T_i: B \longrightarrow B)_{i=0}^{\infty}$ y $(U_i: A \longrightarrow A)_{i=0}^{\infty}$, respectivamente.

Si $(T_i(X), U_i(a)) = T_{i+1}(\delta(X, a))\ \forall(X \in B, a \in A, i \geq 0)$, entonces:

1) $T(\delta(X, \sigma)) = \delta(T_0(X), U(\sigma))$ y (2)

2) T es una biyección de-a $\delta(M)$.

Prueba.

1) La validez del siguiente enunciado,

$$\delta(T_i(X), U_i(a)) = T_{i+1}(\delta(X, a))\ \forall(X \in B, a \in A, i \geq 0)$$

$$\Longrightarrow T(\delta(X, \sigma)) = \delta(T_0(X), U(\sigma)),$$

se prueba por inducción en los símbolos que forman las salidas.

Para el símbolo cero, i. e., en la raíz,

$$T(\delta(X, \sigma))_0 = T_0(\delta(X, \sigma)_0) = T_0(X) = \delta(T_0(X), U(\sigma))_0.$$

Suponga que $T(\delta(X, \sigma))_k = \delta(To(X), U(\sigma))_k$, para alguna $k > 0$, dado que $\delta(To(X), U(\sigma))_{k+1} = \delta(\ \delta(To(X), U(\sigma))_k, U(\sigma)_k\ )$, entonces

$$\delta(To(X), U(\sigma))_{k+1} = \delta(\ T(\delta(X, \sigma))_k, U(\sigma)_k),$$

que escrito en representación local es de la forma

$$\delta(\ T_k(\ \delta(X, \sigma)_k\ ), U_k(\sigma_k)\ )$$

y por la hipótesis en la proposición(1) se concluye que

$$\delta(T_0(X),\ U(\sigma))_{k+1} = T_{k+1}(\ \delta(\ \delta(X,\ \sigma)_k,\ \sigma_k)\ ),$$

que a fin de cuentas es $T(\ \delta(X,\ \sigma)\ )_{k+1}$.

Hasta aquí se ha probado el primer inciso en las consecuencias de la proposición(1), este inciso implica que $T(\ \delta(M)\ )$ es un subconjunto de las salidas $\delta(M)$.

2) T es además sobreyectiva en $\delta(M)$. Para cualquier salida $\delta(X,\ \sigma)$ existe $\delta(T_0^{-1}(X),\ U^{-1}(\sigma))$ tal que $T(\ \delta(T_0^{-1}(X),\ U^{-1}(\sigma))\ ) = \delta(X,\ \sigma)$.

Es uno a uno también, dado que es generada por una secuencia de permutaciones de B. Esto se verifica de la siguiente manera:

$$\text{Si } T(\delta(X,\ \sigma)) = T(\delta(Y,\ \sigma')) \Longrightarrow T_i(\delta(X,\ \sigma)_i) = T_i(\delta(X',\ \sigma')_i)\ \forall i \geq 0$$

y dado que T_i es una permutación de B para toda $i \geq 0$, entonces

$$\delta(X,\ \sigma)_i = \sigma(X',\ \sigma')_i\ \forall i \geq 0.$$

lo que a su vez implica que $\delta(X,\ \sigma) = \sigma(X',\ \sigma')$.

Solo se consideran transformaciones de este tipo. Es decir, T's generadas localmente y para las que existen U's generadas localmente.

que hacen que la restricción de T sea una biyección de-a $\delta(M)$. Cuando para M existe una pareja $S = (T, U)$ no trivial que cumple con la proposición(1), se dice que S es una simetría de M. Esto se formaliza en la siguiente definición.

Definición(4).

Una *simetría de máquina*, para M, es una secuencia de parejas de permutaciones $S = (\ (S_i^1: B \longrightarrow B,\ S_i^2: A \longrightarrow A)\ )_{i=0}^{\infty}$ tales que

$$\delta(S_i^1(X),\ S_i^2(a)) = S_{i+1}^1(\ \delta(X,\ a)\ )\ \forall(i \geq 0,\ X \in B,\ a \in A). \qquad (3)$$

Equivalentemente, una simetría de máquina S es la pareja de biyecciones

$$(S^1: \Sigma(B) \longrightarrow \Sigma(B),\ S^2: \Sigma(A) \longrightarrow \Sigma(A)\ ).$$

generadas localmente por las secuencias de permutaciones $S^1 = S_0^1 S_1^1 \cdots$ y $S^2 = S_0^2 S_1^2 \cdots$ que cumplen la ecuación(3).

Por la forma en que se define, se asegura que S^1 es una biyeccion de-a $\delta(M)$ tal que

$$S^1(\delta(X,\ \sigma)) = \delta(S_0^1(X),\ S^2(\sigma)). \qquad (2)$$

Esta son las consecuencias en la proposición(1).

En lo que resta, a una simetría se le denota con una letra mayúscula.

por ejemplo X y a las componenetes de la pareja que la definen, se les denota con la misma letra y un superindice para distinguirlas. A la biyección de-a $\Sigma(B)$ se le superindica con 1, en oposición al superindice de la biyección de-a $\Sigma(A)$ el que es 2. En este caso X^1 es la biyección de-a $\Sigma(B)$ y X^2 es la biyección de-a $\Sigma(A)$. Las componentes locales de X^j se denotan X^j_i dado que a X^j misma la podemos considerar como una secuencia o código en un conjunto de mapeos.

A X^1: $\delta(M) \longrightarrow \delta(M)$ se le nombra la *traducción* de las salidas de M *por la simetría* X, pues sería como traducir las palabras dichas por M de acuerdo al diccionario X.

EL GRUPO DE SIMETRÍAS.

Definición(5).

Sea $M = (B, A, \delta)$, al conjunto de todas las simetrías de M se le denota con $\mathscr{S}_M$ y se le dota de una operación binaria $\circ$ definida así:

$$S \circ T = (S^1 \circ T^1, S^2 \circ T^2) \ \forall (S, T \in \mathscr{S}_M).$$

donde $S^j \circ T^j = (S^j_0 \circ T^j_0)(S^j_1 \circ S^j_1) \cdots \ j \in \{1, 2\}$ y $\circ$ es la composicion de funciones.

Proposición(7).

La pareja $\mathscr{S}_M = (\mathscr{S}_M, \circ)$ es un grupo[1], lo que equivale a que se cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

1) La operación $\circledast$ es cerrada en $\mathcal{S}_M$.

2) Existe una simetría identica I tal que $I \circledast S = S \circledast I = S \ \forall \ S \in \mathcal{S}_M$ y

3) A cada simetría $S \in \mathcal{S}_M$ se le puede asociar una simetría $\bar{S} \in \mathcal{S}_M$ tal que $\bar{S} \circledast S = S \circledast \bar{S} = I$.

Se utiliza el mismo símbolo para denotar a ambos, grupo y conjunto, ya que no se define otra operación en el conjunto $\mathcal{S}_M$.

Prueba.

1) Sean S, $T \in \mathcal{S}_M$, entonces

$$\delta(S_i^1(p), S_i^2(a)) = S_{i-1}^1(\delta(p, a)) \ \forall (i, p, a). \qquad (4)$$

Tomando en cuenta que tanto T_i^1 como T_i^2 son permutaciones, puesto que T es una simetría, entonces la ecuación(4) equivale a:

$$\delta(S_i^1(T_i^1(p')), S_i^2(T_i^2(a'))) = S_{i-1}^1(\delta(T_i^1(p'), T_i^2(a'))) \ \forall (i, p', a'). \qquad (5)$$

con $p = T_i^1(p')$ y $a = T_i^2(a')$.

Por ser T una simetría, de la ecuación(5) se sigue que

$$\delta(S_i^1 \circ T_i^1(p'), S_i^2 \circ T_i^2(a')) = S_{i-1}^1 \circ T_{i-1}^1(\delta(p', a')) \ \text{[illegible]}$$

La ecuación(6) define justamente la simetría $S \odot T = (S^1 \circ T^1,\ S^2 \circ T^2)$.

2) La pareja $I = (I^1,\ I^2)$ donde $I^j = I_1^j I_1^j \cdots$ es la secuencia formada por la permutación identica de A si $j = 2$ y la de B si $j = 1$. Esta pareja es una simetría de M pues trivialmente cumple con la ecuación(2) y además $S \odot I = I \odot S = S\ \forall\ S \in \mathcal{S}_M$ debido a la forma que tiene I.

3) Para S, una simetría de M, se cumple

$$\delta(\ S_i^1(p),\ S_i^2(a)\ ) = S_{i+1}^1(\ \delta(p,\ a)\ )\ \forall(i,\ p,\ a). \tag{7}$$

Siendo S_i^1 y S_i^2 biyecciones para cualquier i, entonces la ecuación(7) es equivalente a:

$$\delta(p',\ a') = S_{i+1}^1(\ \delta(\ \bar{S}_i^1(p'),\ \bar{S}_i^2(a')\ )\ )\ \forall(i, a', b'). \tag{8}$$

donde $\bar{S}_k^j = (S_k^j)^{\circ -1}\ \forall(k \geq 0,\ j \in \{1,\ 2\}),\ p' = S_i^1(p)$ y $a' = S_i^2(a)$.

Por otro lado la ecuación(8) es igual a

$$\delta(\bar{S}_i^1(p'),\ \bar{S}_i^2(a')) = (S_{i+1}^1)^{\circ -1}(\delta(p',\ a')) = \bar{S}_{i+1}^1(\delta(p',\ a'))\ \forall(i,\ p', a').$$

lo que define una nueva simetría $\bar{S}$, que por su forma cumple

$$\bar{S} \odot S = S \odot \bar{S} = I$$

Definición(6).

El grupo $\mathcal{S}_M$ es llamado *grupo de simetrías de* M o simplemente *grupo de simetrías*, si no hace falta la referencia a la máquina y en tal caso se denotará con $\mathcal{S}$ simplemente.

A partir de lo anterior, puede verse que las traducciones por simetrías de la máquina M también forman un grupo; esta vez la operación del grupo es la composición de funciones. Es importante poner atención en el grupo así constituido, pues es el que actúa sobre δ(M).

Corolario.

El conjunto $\mathcal{T}_M = \{S^t \mid S \in \mathcal{S}_M\}$, de todas las traducciones por simetrías de M, forma el grupo $\mathcal{T}_M = (\mathcal{T}_M, \circ)$ junto con la composición de funciones.

Definición(7).

Al grupo $\mathcal{T}_M$ se le llama *grupo de traducciones de* M o simplemente *grupo de traducciones* cuando se sobreentienda de que máquina se trata. En este último caso a este grupo se le denota con $\mathcal{T}$

LA CARACTERIZACIÓN.

Para "caracterizar" el conjunto de salidas de la máquina M = (B, A, δ), se necesita conocer el grupo $\mathcal{T}_M$ de traducciones. En este [illegible] estudia la "acción" de las traducciones en $\mathscr{T}_M$ sobre subconjuntos de $\delta(M)$; se intenta encontrar un subconjunto de $\delta(M)$ cuya "órbita" bajo la "acción" de $\mathscr{T}_M$ sea todo $\delta(M)$. Caracterizar, acción y órbita se han puesto entrecomillados debido a que aun no se han definido esos términos.

Definición(8).

Sean $B: \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$ y $x \in \mathfrak{X}$, *la acción de* B *sobre* x es B(x) simplemente. Más general, cuando $\mathcal{B}$ es un conjunto de mapeos de-a $\mathfrak{X}$ y X es un subconjunto de $\mathfrak{X}$, entonces *la órbita de* X *bajo la acción de* $\mathcal{B}$ es el conjunto

$$\mathcal{B}(X) = \{y = B(x) \mid B \in \mathcal{B},\ x \in X\}.$$

¿Cual es la acción de $T \in \mathscr{T}_M$ sobre $r \in \delta(M)$? Esta pregunta ya fue respondida en la ecuación(2) y se repite aquí:

Para toda $T \in \mathscr{T}_M$ $\exists S \in \mathscr{S}_M \ni S^1 = T$, de manera que

$$T(\delta(x,\ a)) = \delta(T_0(x),\ S^2(a)), \tag{2}$$

donde $x \in B$ y $a \in \Sigma(A)$

Si T fuera traducción de dos simetrías S y U a la vez, entonces

$$\delta(T_0(x),\ S^2(a)) = \delta(T_0(x),\ U^2(a))\ \forall (x \in B, a \in \Sigma(A))$$

Al inicio de esta sección se habló de que [illegible] subconjunto de $\delta(M)$ cuya órbita bajo la accion de $\mathcal{T}_M$ fuera $\delta(M)$. Pensando en el grupo $\mathcal{T}_M$ como en un conjunto de operaciones sobre el espacio, lo que se busca es una fracción del espacio que al ser operada por los elementos de $\mathcal{T}_M$ construya el resto del espacio, pero no se trata de encontrar solo alguna, hay que asegurar que ninguna subfracción de ella esté en la misma categoría. Resulta en general (es decir siempre salvo casos triviales) que esta fracción que se busca no es única.

Como primer paso, debe aclararse qué significa la frase "una fracción del espacio que construye el resto cuando sobre ella operan los elementos de $\mathcal{T}_M$".

Definición(9).

Dado un conjunto B de transformaciones de-a $\mathfrak{X}$, un *B-constructor de $\mathfrak{X}$*, es un subconjunto Q de $\mathfrak{X}$ que cumple:

$$\mathfrak{X} = B(Q).$$

Es decir, la orbita de un B-constructor bajo la accion de B es el espacio completo $\mathfrak{X}$.

De entre los B-constructores de $\mathfrak{X}$ los que interesan aquí son los B-constructores minimales.

Definición(10).

Un $\mathcal{B}$-constructor minimal Q es un $\mathcal{B}$-constructor de $\mathcal{X}$, para el cual ningún subconjunto es también $\mathcal{B}$-constructor de $\mathcal{X}$. A tales conjuntos se les denota como *$\mathcal{B}$-comales de $\mathcal{X}$*, por contraer la frase "constructor minimal".

Sea Q un $\mathcal{B}$-comal de $\mathcal{X}$, entonces el conjunto

$$\{\ \mathcal{B}(\{q\}) \subset \mathcal{X} \mid q \in Q\ \}$$

de subconjuntos de $\mathcal{X}$ es una partición de $\mathcal{X}$, (recordemos que $\mathcal{B}(A)$ es la órbita del conjunto A bajo la acción de $\mathcal{B}$) es decir:

1) $\mathcal{X} = \bigcup_{q \in Q} \mathcal{B}(\{q\})$.

2) Sean q, q' $\in$ Q tales que q $\neq$ q', entonces $\mathcal{B}(\{q\}) \cap \mathcal{B}(\{q'\}) = \phi$.

Al conjunto $\{\ \mathcal{B}(\{q\}) \subset \mathcal{X} \mid q \in Q\}$ se le da provisionalmente el nombre de partición de $\mathcal{X}$ por el $\mathcal{B}$-comal Q y se le denota con $\mathcal{B}[q]$.

Cuando $\mathcal{B}$ es un grupo con la composición, se cumple una cosa más

1) Sea P otro $\mathcal{B}$-comal de $\mathcal{X}$, entonces

$$\forall q \in Q\ \exists(b \in \mathcal{B},\ p \in P) \ni b(p) = q.$$

:

y debido a esto $\mathcal{B}(\{q\}) \subset \mathcal{B}(\{p\}) \in \mathcal{B}[P]$.

Por otro lado $\exists \delta' \in \mathcal{B} \ni \delta'(q) = p$, de manera que

$$\mathcal{B}(\{p\}) = \mathcal{B}(\{q\}).$$

Al final resulta que las particiones por $\mathcal{B}$-comales son todas iguales, entonces la partición sí es única, aunque los $\mathcal{B}$-comales sean varios.

Definición(11).

Cuando $\mathcal{B}$ es un grupo de biyecciones de-a $\mathfrak{X}$, a la partición $\mathcal{B}[Q]$ donde Q es cualquier $\mathcal{B}$-comal de $\mathfrak{X}$, se le llama la *$\mathcal{B}$-partición de $\mathfrak{X}$*.

Ya se esta en posibilidad de hablar de la caracterización de $\delta(M)$. Caracterizar algo, se entiende como resaltar ciertas propiedades de ese algo y usarlas para etiquetarlo. Así por ejemplo un espacio topologico se caracteriza por medio de su grupo fundamental[4] y una red cristalina se caracteriza por medio de su celda unitaria y el grupo de isometrías que lo dejan invariante[5] (al cristal).

Definición(12)

Sean $M = (B, A, \delta)$ una maquina finita, *una caracterización de $\delta(M)$* es la pareja $(\mathcal{T}_M, Q)$, donde $\mathcal{T}_M$ es el grupo de traducciones y Q es un $\mathcal{T}_M$-comal de $\delta(M)$.

En estos términos la caracterización no es única pues depende de la elección de O, sin embargo la $\mathcal{T}_M$-partición de $\delta(M)$ es única. Se puede verificar que todos los $\mathcal{T}_M$-comales de $\delta(M)$ se obtienen tomando un representante de cada componente de la $\mathcal{T}_M$-partición, en este sentido *la caracterización* es única.

CAPITULO III, LAS MÁQUINAS DE TRASLAPE.

LA MÁQUINA.

Se puede pensar en la maquina de traslape como en un traductor que toma códigos de $\Sigma(A)$ (A es cualquier alfabeto) y los convierte en códigos de $\Sigma(B)$. Lo característico de estas máquinas es que B tiene $|A|^N$ elementos y cada elemento de B representa una cadena de A^N, es decir, podemos establecer un mapeo biyectivo $A^N \xrightarrow{\eta} B$.

La otra peculiaridad está en la naturaleza de la función de transición τ, que depende de la biyección η y se define así:

$$\tau(\eta)\colon B \times A \longrightarrow B$$

$$(X,a) \longrightarrow \eta(x_1 x_2 \cdots x_{N-1} a), \tag{9}$$

donde $x_0 x_1 x_2 \cdots x_{N-1} = \eta^{-1}(X) \in A^N$.

Dados A, B y la biyección $\eta\colon A^N \longrightarrow B$, entonces $\tau(\eta)$, especificada en la ecuacion(9), junto con A y B definen una maquina finita como las que se han visto, llamada maquina de traslape. Provisionalmente se denotará con [B, A, η] a la maquina de traslape, pues son los objetos entre corchetes los que la determinan. Recuérdese que B es arbitrario hasta su cardinalidad que debe ser $|A|^N$.

Cuando la máquina de traslape está inicialmente en un estado $X_0 \in B$ y se la alimenta con el código $\sigma = a_0 a_1 \cdots a_n \cdots \in \Sigma(A)$, su respuesta es el código

$$\xi = X_0 X_1 \cdots X_{n+1} \cdots \in \Sigma(B).$$

donde $X_i = \eta(a_{i-N} a_{i-N+1} \cdots a_{i-1})$ $\forall i \geq N$.

Las X_k's para $k < N$ se relacionan con σ y X_0 de la siguiente manera:

si $\eta^{o-1}(X_0) = a_{0-N} a_{1-N} \cdots a_{-1} \in A^N$, entonces $X_i = \eta(a_{i-N} \cdots a_{i-1})$ $\forall i \geq 0$.

En un diagrama esto se ve así:

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ & & \boxed{X_2} & \\ \eta(a_{0-N} \cdots a_{-1}) & \eta(a_{1-N} \cdots a_0) & \eta(a_{2-N} \cdots a_1) & \end{array}$$

En una cinta esta escrito el codigo de entrada que la maquina va leyendo y en una segunda cinta estan escribiendose las salidas que la maquina va generando. Estas salidas conforman el codigo de salida para la entrada en cuestion y son al mismo tiempo [illegible] de los estados internos por los que la maquina ha ido pasando.

Como la máquina de traslape es determinada fijando A, B y η: $A^N \longrightarrow B$, entonces para cada elección de A y B hay $|A|^N!$ máquinas. Sin embargo, la estructura de la máquina no depende del nombre que tomen los estados o los elementos del alfabeto de entradas. Después de todo, siempre es posible simular una máquina por medio de la otra cambiando el nombre de los elementos en el alfabeto de entradas y el nombre de los estados.

Suponga que $[B, A, \eta]$ y $[B', A', \eta']$ son dos máquinas de traslape para las que $|A| = |A'|$ y $|B| = |B'| = |A|^N$, entonces existe una biyección $\ell: A \longrightarrow A'$, de hecho la existencia de una biyección entre dos conjuntos establece la igualdad de sus cardinalidades. La biyección ℓ induce otra entre B y B' de la siguiente manera:

1) Se define la biyección $\ell^N: A^N \longrightarrow (A')^N$

$$a_0 a_1 \cdots a_{N-1} \longrightarrow \ell(a_0)\ell(a_1)\cdots\ell(a_{N-1})$$

2) La ℓ induce otra biyección u: $B \longrightarrow B'$ tal que $u(\eta(a)) = \eta'(\ell^N(a))$ para todo $a \in A^N$.

Podemos decir que $[B, A, \eta]$ simula a $[B', A', \eta]$ por medio de ℓ y u, pues

$$\tau(\eta')(B', a') = u(\tau(\eta)(u^{-1}(B'), \ell^{-1}(a'))), \forall B' \in B', a' \in A'.$$

De hecho, si para $M = (B, A, \delta)$ y $N = (D, C, \gamma)$ existen biyecciones

$$\beta: B \longrightarrow D, \ \alpha: A \longrightarrow C$$

tales que $\gamma(Y, b) = \beta(\ \delta(\beta^{\circ -1}(Y), \alpha^{\circ -1}(b))\ )$, se dice que M y N son *máquinas equivalentes*. Esta es la relacion que existe entre $[B, A, \delta]$ y $[B, A, \delta']$, de modo que lo importante aquí es la cardinalidad de A y el valor de N. Sin perdida de generalidad podemos definir a las máquinas de traslape tomando en cuenta solo estas dos cosas.

Definición(13).

La máquina de traslape de tamaño q^N es la terna $(\mathbb{Z}_{q^N}, \mathbb{Z}_q, \delta)$, con

$$\delta: \mathbb{Z}_{q^N} \times \mathbb{Z}_q \longrightarrow \mathbb{Z}_{q^N}$$

$$(p, a) \longrightarrow (qp + a) \bmod q^N.$$

A la máquina de traslape de tamaño q^N se le denota $[q, N]$.

Nota sobre la definición(13).

La biyección $n:(\mathbb{Z}_q)^N \longrightarrow \mathbb{Z}_{q^N}$ entre $(\mathbb{Z}_q)^N$ y $\mathbb{Z}_{q^N}$, que hace válida la ecuación(9) es:

$$n: (\mathbb{Z}_q)^N \longrightarrow \mathbb{Z}_{q^N}$$

$$a_0 a_1 \cdots a_{N-1} \longrightarrow \left(\sum_{i=0}^{N-1} a_i \, q^{N-1-i} \right).$$

Esto se verifica así: $n(p_1 \cdots p_{N-1} a) = \left(\sum_{i=1}^{N-1} p_i \, q^{N-i} \right) + a$ y

$\left(\sum_{i=1}^{N-1} p_i \, q^{N-i} \right) + a = \left(x\, q^N + \left(\left(\sum_{i=1}^{N-1} p_i \, q^{N-i} \right) + a\right) \right) \bmod q^N \ \forall x \in \mathbb{Z}^+.$

entonces

$$n(p_1\cdots p_{N-1}a) = \left(x\, q^N + \left(\left(\sum_{i=1}^{N-1} p_i\, q^{N-i} \right) + a \right) \right) \bmod q^N \;\; \forall x \in \mathbb{Z}^+. \qquad (10)$$

Recuerde que $x \bmod p$ es el residuo de dividir x entre p, donde $x, p \in \mathbb{Z}^+$

Si en el término derecho de la ecuación(10) hacemos $x = x_0$, entonces podemos reescribirla de esta forma:

$$n(p_1\cdots p_{N-1}a) = (qp + a) \bmod q^N = a(p, a),$$

que es a lo que se quería llegar.

LAS SIMETRÍAS DE [q, N].

Una forma de obtener una simetría de [q, N] es proponer una pareja

$$(S^1, S^2)$$

de biyecciones generadas localmente por las secuencias de permutaciones $(S_i^1)_{i=0}^{\infty}$ de Z_{q^N} y $(S_i^2)_{i=0}^{\infty}$ de Z_q. Pidiendo que S sea una simetría de

$$[q, N]$$

se encuentran las relaciones entre las permutaciones locales que generan a S^1 y aquellas que generan a S^2

Sean $p = \left(\sum_{i=0}^{N-1} p_i\, q^{(N-1)-i}\right) \in Z_{q^N}$ y $a = a_0 a_1 a_2 \cdots \in \Sigma(Z_q)$, entonces

$$a(p, a) = X\cdots\left(\sum_{i=1}^{N-n-1} a_{i+n}\, q^{N-i-1} + \text{[illegible]} \right)$$

$$\cdots(\textstyle\sum_{i=0}^{N-1} a_{n+i}\, q^{N-1-i})\cdots,$$

Aquí $(\sum_{i=0}^{N-1} a_{n+i}\, q^{N-1-i})$ ocupa el $(N+n)$-ésimo sitio del código de salida.

Al aplicar sobre este código la biyección S^1, la cadena que resulta esta dada así:

$$S^1(\,\delta(p,\, a)\,) = S_0^1(p)\cdots S_n^1(\,\textstyle\sum_{i=0}^{N-n-1} p_{i+n}\, q^{N-1-i} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, q^{n-1-i}\,)\cdots$$
$$\cdots S_{n+N}^1(\,\textstyle\sum_{i=0}^{N-1} a_{n+i}\, q^{N-1-i}\,)\cdots,$$

Por otro lado, si S va a ser una simetría, es necesario que se cumpla la ecuación(2). Una de las cosas que esta ecuación implica es:

$$S^1(\delta(p,\, a)) = \delta(S_0^1(p),\, S^2(a)). \tag{11}$$

Es necesario entonces conocer a $\delta(S_0^1(p),\, S^2(a))_n$. Digamos que $S_0^1(p)$ codifica a la palabra $p_0'p_1'\cdots p_{N-1}' \in (Z_q)^N$, es decir

$$S_0^1(p) = (\,\textstyle\sum_{i=0}^{N-1} p_i'\, q^{N-1-i}\,) = p'$$

Así las cosas,

$$\delta(S_0^1(p),\, S^2(\sigma)) = p'\cdots(\,\textstyle\sum_{i=0}^{N-n-1} p_{i+n}'\, q^{N-n-i} + \sum_{i=0}^{n-1} S_i^2(a_i)\, q^{n-1-i})\cdots$$
$$\cdots(\,\textstyle\sum_{i=0}^{N-1} S_{n+i}^2(a_{n+i})\, q^{N-1-i}\,)\cdots,$$

el símbolo $(\sum_{i=0}^{N-1} S_{n+i}^2(a_{n+i})\, q^{N-1-i}) \in Z_q N$ ocupa el $(n+N)$-ésimo sitio en la cadena de salidas.

Símbolo a símbolo, la ecuación(11) es:

$$S^1_n\Big(\sum_{i=0}^{N-n-1} p_{i+n}\, q^{N-i-1} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, q^{n-i-1} \Big)$$
$$= \Big(\sum_{i=0}^{N-n-1} p'_{i+n}\, q^{N-n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} S^2_i(a_i)\, q^{n-i-1}\Big) \text{ si } n < N \text{ y} \qquad (12)$$

$$S^1_{N+n}\Big(\sum_{i=0}^{N-1} a_{n+i}\, q^{N-i-1} \Big) = \Big(\sum_{i=0}^{N-1} S^2_{n+i}(a_{n+i})\, q^{N-i-1} \Big) \text{ si } n \geq N. \qquad (13)$$

La ecuación(13), siendo la entrada $a = a_0a_1\cdots a_n\cdots$ un codigo arbitrario, establece parte de la relación entre las permutaciones locales de S^1 y las de S^2, la relación es:

$$S^1_{n+N}\Big(\sum_{i=0}^{N-1} x_i\, q^{N-i-1} \Big)$$
$$= \Big(\sum_{i=0}^{N-1} S^2_{n+i}(x_i)\, q^{N-i-1} \Big)\ \forall(n \geq N,\ x_0x_1\cdots x_{N-1} \in (Z_q)^N). \qquad (14)$$

Esto quiere decir que S^1_n es determinada por las permutaciones locales de S^2 cuando $n \geq N$, de modo que $S^2 = S^2_0S^2_1S^2_2\cdots$ determina casi por completo a su pareja S^1 cuando se pretende que $S = (S^1, S^2)$ sea una simetría de $[q, N]$.

En analogía a las biyecciones generadas localmente como en las de la definición(3), si $T_iT_{i+1}\cdots T_{i+N-1}$ denota a una biyeccion de $(Z_q)^N$ definida así:

$$T_iT_{i+1}\cdots T_{i+N-1}(x_0x_1\cdots x_{N-1}) = T_i(x_0)T_{i+1}(x_1)\cdots T_{i+N-1}(x_{N-1})$$
$$\forall x_0x_1\cdots x_{N-1} \in (Z_q)^N,$$

entonces la dependencia que tiene S^1_n de las permutaciones locales que generan a S^2 es:

$$(n^{o-1} \circ S_n^1 \circ n)(S_{n-N}^2 S_{n-N+1}^2 \cdots S_{n-1}^2) \ \forall n \geq N.$$

Cuando $n < N$, el resto de los mapeos locales de S^1 son determinados por las permutaciones de S^2 y también por S_0^1, la que es arbitraria hasta que no deje de ser permutación de $Z_q{}^N$. Pero aquí hay un problema, la ecuación(12) es:.

$$S_n^1\left(\sum_{l=0}^{N-n-1} p_{l+n}\, q^{N-l-1} + \sum_{l=0}^{n-1} a_l\, q^{n-l-1} \right)$$
$$= \left(\sum_{l=0}^{N-n-1} p'_{l+n}\, q^{N-n-1} + \sum_{l=0}^{n-1} S_l^2(a_l)\, q^{n-l-l} \right) \text{ si } n < N \qquad (12)$$

el problema está en que p'_i, que es la i-esima componente de $n^{o-1}(s^0(p))$, en general depende de todo p y en tal caso S_n^1 no sería independiente de la elección del estado inicial p cuando $n < N$.

El caso extremo es S_{N-1}^1. Sean

$$p = \left(\sum_{l=0}^{N-1} p_l\, q^{N-l-1} \right) \text{ y } S_0^1(p) = \left(\sum_{l=0}^{N-1} p'_l\, q^{N-l-1} \right)$$

como anteriormente; en este caso p'_{N-1} depende de p o sea de la palabra $p_0 p_1 \cdots p_{N-1}$ en $(Z_q)^N$. De acuerdo con la ecuación(12),

$$S_{N-1}^1\left(p_{N-1}\, q^{N-1} + \sum_{l=0}^{N-2} a_l\, q^{N-2-l} \right)$$
$$= \left(p'_{N-1}(p_0 p_1 \cdots p_{N-1})\, q^{N-1} + \sum_{l=0}^{N-2} S_l^2(a_l)\, q^{N-2-l} \right)$$

Para que esto defina una biyección de-a $Z_q{}^N$, es necesario que

$$p'_{N-1} = p'_{N-1}(p_{N-1}).$$

En suma, para que S^1_{N-1} sea una biyección de-a $Z_q{}^N$ independiente de el estado inicial de la máquina, es necesario que

$$S^1_0\left(\sum_{i=0}^{N-1} p_i\, q^{N-1-i} \right) = \left(\left(\sum_{i=0}^{N-2} p'_i\, q^{N-1-i} \right) + S^2_{-1}(p_{N-1}) \right)$$

$$\forall (p_0 p_1 \cdots p_{N-1} \in (Z_q)^N).$$

donde S^2_{-1} es una permutación de Z_q. Tiene que serlo porque si no S^1_{N-1} no sería biyectiva. Note que $\pi^{-1} \circ S^1_{N-1} \circ \pi = S^2_{-1} S^2_0 S^2_1 \cdots S^2_{N-2}$ es una biyección de-a $(Z_q)^N$ y S^2_i es una permutación de Z_q para $i \geq -1$.

Utilizando el mismo argumento, p'_{N-2} debe depender solo de p_{N-2} para que S^1_{N-2} sea un mapeo independiente del estado inicial de la máquina y la dependencia debe de ser una biyección de-a Z_q. Este argumento se usa recursivamente hasta agotar los simbolos en $\pi^{-1}(p')$. La conclusión de estos argumentos se enuncia en la siguiente proposición.

Proposición(3).

Toda simetria $S = (S^1, S^2)$ de la máquina de traslape $[q, N]$ es generada por una secuencia $(S^2_i: Z_q \longrightarrow Z_q)_{i=-N}^{\infty}$ de permutaciones de Z_q en esta forma:

$$S^2 = S^2_0 S^2_1 \cdots S^2_i \cdots \quad y \quad S^1 = S^1_0 S^1_1 S^1_2 \cdots S^1_i \cdots$$

$$\text{donde } S^1_i = \pi \circ S^2_{i-N} S^2_{i+1-N} \cdots S^2_{i-1} \circ \pi^{-1}$$

Al fin, de todas las permutaciones de $Z_q{}^N$, en una simetria de $[q, N]$ solo intervienen las que son de forma

$$n \circ T_0 T_1 \cdots T_{N-1} \circ n^{-1}$$

donde la palabra $T_0 T_1 \cdots T_{N-1}$ denota una biyección de-a $(Z_q)^N$ definida localmente. Esto permite ampliar el rango de validéz de la ecuación(13). Ahora, dado que $S_0^1 = n \circ S_{-N}^2 S_{1-N}^2 \cdots S_{-1}^2 \circ n^{-1}$, la simetría $S=(S^1, S^2)$ es tal que

$$S_i^1\left(\sum_{i=0}^{N-1} x_i \, q^{N-1-i} \right) = \left(\sum_{i=0}^{N-1} S_{i-N}^2(x_i) \, q^{N-1-i} \right). \tag{15}$$

LA MÁQUINA DE SIMETRÍAS DE [q, N].

Cada permutación de $Z_q{}^N$ que interviene en la generación de una simetría de [q, N] es, como ya se vio, del tipo $n \circ T_0 T_1 \cdots T_{N-1} \circ n^{-1}$ donde T_i es una permutación de Z_q para $0 \le i < N$. Se denota con ${}^N S_q$ al conjunto formado por todas las permutaciones de este tipo, por otro lado, al conjunto formado por todas las permutaciones de Z_q se le llama S_q.

Del análisis combinatorio[6] se sabe que existen q! permutaciones de q elementos, por lo tanto $|S_q| = q!$. A partir de esto $|{}^N S_q| = (q!)^N$, pues cada elemento en ${}^N S_q$ resulta de elegir n permutaciones cualesquiera en S_q.

Hay una relación muy natural entre las palabras en $S_q{}^N$ y los elementos de ${}^N S_q$ que se establece en la siguiente biyección

$$N: S_q^N \longrightarrow {}^N S_q$$
$$R_1R_2R_3\cdots R_N \longrightarrow \eta \circ R_1R_2\cdots R_N \circ \eta^{-1}. \qquad (16)$$

Como al principio del capitulo, hacemos una máquina finita con S_q como alfabeto de entradas. ${}^N S_q$ es el conjunto de estados y alfabeto de salidas a la vez y definimos la función de transición $\tau(N)$ abajo:

$$\tau(N): {}^N S_q \times S_q \longrightarrow {}^N S_q$$
$$(\ N(R_1R_2\cdots R_N),\ T\ ) \longrightarrow N(R_2R_3\cdots R_N T). \qquad (17)$$

Definición(14).

La terna $({}^N S_q, S_q, \tau(N))$ es llamada *máquina de simetrías de* $[q, N]$ y se denota $S[q, N]$. Haciendo la analogía entre los elementos que componen la ecuación(17) y sus equivalentes en la ecuación(9), puede identificarse a $S[q, N]$ con la máquina de traslape de tamaño $(q!)^N$.

¿Pero qué de particular tiene $\tau(N)$? De acuerdo con la proposición(2), cuando (S^1, S^2) es una simetría de $[q, N]$ generada por la secuencia $(S_i^2: Z_q \rightarrow Z_q)_{i=-N}^{\infty}$ de permutaciones en S_q, entonces

1) La segunda componente de S es una entrada de $S[q, N]$, es decir que $S^2 \in \Sigma(S_q)$.

2) La relación entre las permutaciones locales de S^1 y S^2 es la

siguiente:

$$S^1_i = N(\ S^2_{i-N}S^2_{i+1-N}\cdots S^2_{i-1}\ )\ \forall i \geq 0. \tag{18}$$

Una ecuación equivalente a la ecuación(18) es:

$$S^1_{i+1} = \tau(N)(\ N(\ S^2_{i-N}S^2_{i+1-N}\cdots S^2_{i-1}\ ),\ S^2_i)\ \forall i \geq 0. \tag{19}$$

$$\text{con } S^1_0 = N(\ S^2_{-N}S^2_{1-N}\cdots S^2_{-1}\ ).$$

De acuerdo con la definición(1), la ecuación(19) representa la salida de $S[q,\ N]$ al leer el código $S^2 \in \Sigma(S_q)$ estando inicialmente en S^1_0.

La importancia de la máquina de salidas de $[q,\ N]$ se resalta en la siguiente proposición.

Proposición(4).

Sea $S[q,\ N]$ como en la definición(14). Toda simetría S de $[q,\ N]$ es una pareja $S = (S^1 = \tau(N)(S^1_0,\ S^2),\ S^2)$.

Proposición(5).

La máquina $S[q,\ N]$ es equivalente a $[q!,\ N]$

Prueba.

Se deben encontrar dos biyecciones υ: $S_q \longrightarrow Z_{q!}$ y α: ${}^N S_q \longrightarrow Z_{(q!)}{}^N$, tales que

$$\Delta(\ u(T),\ \upsilon(U)\ ) = u(\ \tau(N)(T,\ U)\ )\ \forall(T \in {}^{N}S_q,\ U \in S_q) \qquad (20)$$

Sea υ cualquier biyección de S_q a $Z_{q!}$, entonces

$$u: {}^{N}S_q \longrightarrow Z_{(q!)^N}$$
$$T \longrightarrow (\ \textstyle\sum_{i=0}^{N-1} \upsilon\ (\ N^{\circ -i}(T)_i\ )\ (q!)^{N-i-1}\ )$$

es la biyección adecuada para hacer válida la ecuación(19), esto se verifica enseguida. Suponga que

$$T = N(\ s_0 s_1 \cdots s_{N-1}\ ),\ s_i \in S_q.$$

Todos los elementos de ${}^{N}S_q$ son de este tipo, en tal caso

$$u(T) = (\ \textstyle\sum_{i=0}^{N-1} \upsilon\ (s_i)\ (q!)^{N-i-1}\ )$$

y dado que $\Delta(\ u(T),\ \upsilon(U)\ ) = (\ q!u(T) + \upsilon(U)\ ) \bmod (q!)^N$, entonces

$$(\ \textstyle\sum_{i=0}^{N-2} \upsilon\ (s_{i+1})\ (q!)^{N-i-1}\ ) + \upsilon\ (U) =$$
$$u\ (\tau(N)\ (\ N(\ s_1 s_2 \cdots s_{N-1} U)\ )\ ) = u(\delta(T,\ U)\ ).$$

A esto se quería llegar.

Al fin, una biyección υ entre permutaciones de Z_q y números en $Z_{q!}$ establece una equivalencia entre las maquinas $S[q,\ N]$ y $[q!,\ N]$. Esto establece una correspondencia entre la pareja de codigos $(\Delta(p,s),\ s)$, en $\Delta(\ [q!,\ N]\ ) \cdot \Sigma(Z_{q!})$ y una simetría de $[q,\ N]$

EL GRUPO DE SIMETRÍAS DE $[q, N]$.

Se ha establecido la equivalencia de $S[q, N]$ y $[q!, N]$, lo que a su vez ha permitido encontrar una correspondencia biyectiva entre simetrías de $[q, N]$ y parejas $(\sigma(p, a), a)$ en $\sigma([q!, N]) \times \Sigma(\mathbb{Z}_{q!})$, esta correspondencia está determinada por completo por una biyección

$$\varphi: S_q \longrightarrow \mathbb{Z}_{q!}.$$

Recuerde que S_q posee una operación que lo convierte en el grupo de permutaciones de $\mathbb{Z}_q$; a su vez $\mathbb{Z}_{q!}$ es de antemano un grupo (con la suma módulo $q!$). Dado que estos grupos no son isomorfos la biyección φ puede propiciar una confusión, por lo tanto se introduce una nueva notación para los elementos de $\dot{S}_q$ y ${}^{N}S_q$.

Usualmente se representa una permutación $P \in S_q$ con una matriz rectangular[3] $q \times 2$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & q-1 \\ p(0) & p(1) & \cdots & p(q-1) \end{pmatrix}$$

o de manera más corta con el vector renglón

$$P = (P(0)\ P(1)\ \cdots\ P(q-1)).$$

Esta última notación es la que se utiliza en lo subsecuente [illegible] notación, la composición de dos elementos de S_q se puede obtener así:

$$(a_0\ a_1 \cdots a_{q-1}) \circ (b_0\ b_1 \cdots b_{q-1}) = (c_0\ c_1 \cdots c_{q-1}), \qquad (21)$$

donde $c_i = b_{a_i}$, es decir, la a_i-ésima componente del vector $(b_i)_{i=0}^{q-1}$.

Para ${}^{N}S_q$ podría usarse una notación similar, pero ${}^{N}S_q$ no es un subconjunto de S_{q^N} fácil de caracterizar. Recuerdese que los elementos de ${}^{N}S_q$ se relacionan con palabras en $S_q{}^{N}$ por medio de la función biyectiva N que se define en la ecuación(16). En estos términos, cada elemento de ${}^{N}S_q$ está asociado con una yuxtaposición de N vectores en S_q por medio de N. Se intenta utilizar este hecho para encontrar una notación adecuada para los elementos de ${}^{N}S_q$.

Se definen dos operaciones para vectores:

1) $\forall (x \in Z,\ (b_i) \in Z^q) \qquad x(b_i) = (xb_i) \in Z^q.$

2) $\forall ((a_i),\ (b_j) \in Z^q) \qquad (a_i) \oplus (B_j) = (c_k) \in Z^{q^2},$

con $c_k = a_i + b_j$ donde $k = qi + j$.

Estas operaciones permiten establecer la forma de N utilizando la notación de vectores renglon para permutaciones. Se verifica que

$$N((a_i^0)(a_i^1)\cdots(a_i^{N-1})) = (\bigoplus_{j=0}^{N-1} q^{N-1-j}\, (a_i^j)) \in {}^{N}S_q.$$

$$\forall\left((a_i^0)(a_i^1)\cdots(a_i^{N-1}) \in S_q^{\;N} \right).$$

Esta notación se vuelve en todo análoga a la que usa se para $[q, N]$ como se verá enseguida.

Sean $(d_k) = \left(\bigoplus_{j=0}^{N-1} q^{N-1-j} \; (a_i^j) \right)$, $(c_k) = \left(\bigoplus_{j=0}^{N-1} q^{N-1-j} \; (b_i^j) \right) \in {}^{N}S_q$ y $(s_k) \in S_q$, entonces

1) $$(d_k) \circ (c_k) = \left(\bigoplus_{j=0}^{N-1} q^{N-1-j} \left((a_i^j) \circ (b_i^j) \right) \right) \qquad (22)$$

2) $$\tau(N) \left((d_k), (s_k) \right) = \left(\left(\bigoplus_{j=0}^{N-2} q^{N-1-j} \; (a_{i-1}^j) \right) \oplus (s_k) \right) \qquad (23)$$

Haciendo la analogía con la definición(13), puede introducirse la notación

$$\left(q \; (d_k) \oplus (s_k) \right) \mathrm{MOD} q^N$$

para el término derecho de la ecuación(23).

CARACTERIZACIÓN DE $\Delta([q, N])$.

Los elementos de $\mathcal{J}_{[q,N]}$ son salidas de la máquina $S[q, N]$, de modo que para todo elemento P de $\mathcal{J}_N$

$$P = \tau(N)(P_0, A) \text{ con } P_0 \in {}^{N}S_q \text{ y } A \in \Xi(S_q)$$

Además, la simetría a la que pertenece P, en este caso sí es única y es la pareja

$$(P = \tau(N)(P_0, A), A).$$

Por otro lado, cualquier código en $\delta((q, N))$ es de forma $\delta(p_0, a)$ para algún $p \in Z_{q^N}$ y $a \in \Sigma(Z_q)$. La acción de

$$P = \tau(N)(P_0, A)$$

sobre $p = \delta(p, a)$ es:

$$P(p) = (\tau(N)(P_0, A))(\delta(p, a)) = \delta(P_0(p_0), A(a)). \tag{24}$$

Sea $\tau(N)(P_0, \Sigma(S_q))$ con $P_0 \in {}^N S_q$. La órbita de $\delta(p_0, a)$ bajo la acción de $\delta(P_0, \Sigma(S_q))$ es:

$$(\tau(N)(P_0, \Sigma(S_q)))(\{\delta(p_0, a)\}) = \{\delta(P_0(p_0), A(a)) \mid A \in \Sigma(S_q)\}. \tag{25}$$

¿Que forma tiene el conjunto $\{A(a) \mid A \in \Sigma(S_q)\}$ para $a \in \Sigma(Z_q)$?

Sea $a' \in \Sigma(Z_q)$ un código de entrada para (q, N) diferente de a, se elige una permutación $A_i \in S_q$ tal que $A_i(a_i) = a'_i$ para cada $i \geq 0$. La biyección

$$A = A_0 A_1 A_2 \cdots \quad \Sigma(Z_q) \longrightarrow \Sigma(Z_q)$$

generada localmente, es tal que $A(a) = a'$. Siempre se pueden elegir tales A_i's pues S_q contiene a todas las permutaciones de Z_q y naturalmente $A = A_0A_1A_2\cdots$ así construida, es un elemto de $\Sigma(S_q)$. Con la ecuación(25) y usando estos argumentos se puede concluir que:

$$(\ \tau(N)(P_0,\ \Sigma(S_q))\ )(\ \{\delta(p_0,\ a)\}\ ) = \{\delta(P_0(p_0),\ \ a')\mid\ a' \in \Sigma(Z_q)\ \},$$

que se denota como $\delta(P_0(p_0),\ \Sigma(Z_q))$. Ahora se puede encontrar la órbita de $\{\delta(p_0,\ a)\ \}$ bajo la acción de $\mathcal{T}_{[q,N]}$, la cual es:

$$\mathcal{T}_{[q,N]}(\ \{\delta(p_0,\ a)\ \}\ ) = \delta(\ {}^{N}S_q(p_0),\ \Sigma(Z_q)\ ). \tag{26}$$

La ecuación(25) establece relaciones entre ${}^{N}S_q$ y $\mathcal{T}_{[q,N]}$-constructores. Es claro que siendo P un ${}^{N}S_q$-constructor, si para cada elemento p_0 de P elegimos un código $a(p_0) \in \Sigma(Z_q)$, entonces el conjunto

$$\{\ \delta(p_0,\ a(p_0))\mid\ p_0 \in P\ \}$$

será un $\mathcal{T}_{[q,N]}$-constructor. ¿Se extiende esta relación para los comales?. La respuesta es sí y se establece en la siguiente proposición.

Proposición(6).

Sea P un ${}^{N}S_q$-comal de $Z_q{}^N$ y c: $P \longrightarrow \Sigma(Z_q)$ una funcion arbitraria del comal en cuestión al conjunto de codigos de entrada para $[q,\ N]$.

entonces el conjunto de códigos de salida $\{\delta(p_0, c(p_0)) \mid p_0 \in P\}$ es un $\mathcal{T}_{\{q,N\}}$-comal de $\delta(\{q, N\})$ y se demota con $\delta(P)$.

Prueba.

Para empezar, $\delta(P, c(P))$ es al menos un $\mathcal{T}_{\{q,N\}}$-constructor de $\delta(\{q, N\})$ ya que P es ${}^{N}S_{N}$-constructor. Suponga que para p, p' $\in \delta(P, c(P))$ existe $P \in \mathcal{T}_{\{q,N\}}$ tal que $P(p) = p'$. La forma que P, p y p' tienen es:

1) $P = \tau(N)(P_0, A)$ con $P_0 \in {}^{N}S_q$ y $A \in \Sigma(S_q)$,

2) $p = \delta(p_0, a)$ y $p' = \delta(p_0', a')$ con $p_0, p_0' \in P$ y $a, a' \in \Sigma(\mathbb{Z}_q)$.

Con esto y usando la ecuación(24), $P(p) = p'$ equivale a:

$$\delta(\, P_0(p_0), A(a)\,) = \delta(p_0', a'),$$

que en particular implica que $P_0(p_0) = p_0'$. Así que el hecho de que

$$\delta(P, c(P))$$

no sea $\mathcal{T}_{\{q,N\}}$-comal implica que P no sea ${}^{N}S_q$-comal, que es un enunciado equivalente a la proposición(6).

Se ha logrado al fin caracterizar a la máquina de traslape. El resultado final se enuncia en la siguiente proposición.

Proposición(7).

Una caracterización de $\Delta([q, N])$ es la pareja

$$(\tau(N)({}^{N}S_q, \Sigma(S_q)), \Delta(p, a)),$$

para cualesquiera $p \in \mathbb{Z}_{q^N}$, $a \in \Sigma(\mathbb{Z}_q)$.

Prueba.

Solo resta encontrar los ${}^{N}S_q$-comales de $\mathbb{Z}_{q^N}$ y verificar que el conjunto que se propone es uno de ellos. Sean

$$p = (\sum_{i=0}^{N-1} p_i\, q^{N-1-i}),\ r = (\sum_{i=0}^{N-1} r_i\, q^{N-1-i}) \text{ donde } p_i,\ r_i \in \mathbb{Z}_q,$$

dos elementos arbitrarios de $\mathbb{Z}_{q^N}$. Sea por otro lado

$$P = (\biguplus_{j=0}^{N-1} q^{N-1-1}\, A_j) \text{ donde } A_j \in S_q,$$

una permutación, hasta ahora arbitraria, en ${}^{N}S_q$. Como ya se vió

$$P(p) = (\sum_{i=0}^{N-1} A_i(p_i)\, q^{N-1-i}),$$

de modo que se elege a A_i tal que $A_i(p_i) = r_i$, entonces $P(p) = r$. Siempre es posible construir a P en esa forma, de modo que cualquier elemento en $\mathbb{Z}_{q^N}$ genera a los demás al actuar sobre él los elementos de ${}^{N}S_q$, es decir los ${}^{N}S_q$-comales de $\mathbb{Z}_{q^N}$ son conjuntos unitarios.

CAPITULO IV, CARACTERIZACION TOPOLOGICA.

En este capítulo se revisan algunas de las propiedades topológicas que adquiere el espacio de códigos cuando se le dota con una métrica[3].

Se define la distancia entre dos códigos p, p' $\in \Sigma(\mathbb{Z}_q)$:

$$d(p,\ p') = \sum_{i=0}^{\infty} {(1-\delta_{p_i, p'_i})}\big/{3^{|i|}}.$$

con $\delta_{a,b}$ la delta de Kroneker. Así, cuando $p_i = p'_i$, el i-ésimo término en la suma es cero. En particular se cumple que la distancia entre dos puntos p, p' es cero solo cuando $p_i = p'_i \ \forall i \geq 0$, o sea cuando son el mismo punto. Puede demostrarse que esta función cumple con las propiedades para una métrica, o sea:

1) $d(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in \Sigma(B)$, $d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$.

2) $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y \in \Sigma(B)$.

3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(x, z) \ \forall x, y, z \in \Sigma(B)$.

Así la pareja $(\Sigma(B), d)$ resulta ser un espacio metrico llamado *espacio de códigos*, para B un alfabeto finito.

La base de la topología generada por la métrica d es el conjunto formado por todas las bolas abiertas. Una *bola abierta con centro en* x *y radio* ε se define así:

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \Sigma(B) \mid d(x, y) < \varepsilon\},$$

para cualquier $x \in \Sigma(B)$ y $\varepsilon > 0$. Note que la mayor distancia entre dos puntos del espacio de códigos está acotada; no puede ser mayor que

$$\sum_{i=0}^{\infty} 1/3^{i+1} = 1/2.$$

Sea n tal que

$$\frac{1/3^n}{2} < \varepsilon \leq 1/3^n$$

(lo que siempre es posible, dado que ε no es mayor que 1/2), entonces

$$d(x, y) < 1/3^n \ \forall y \in B_\varepsilon(x).$$

Esto significa que $x_i = y_i$ al menos para $0 \leq i < n$; los demás sitios en el código pueden tomar cualquier valor. El caso extremo es que $x_j \neq y_j$ para $j \geq n$, entonces

$$d(x, y) = 1/3^{n+1}\left(\sum_{j=0}^{\infty} 1/3^j \right) = (1/3^{n+1})(3/2) = \frac{1/3^n}{2}$$

En vista de esto, una definicion equivalente de bola abierta es la siguiente. Sea n tal que $2/3^{n+1} < \varepsilon \leq 3^n$, entonces la bola centrada en x y con radio ε es:

$$B_{\varepsilon}(x) = \{y \in \Sigma(B) \mid y_i = x_i \; 0 \leq i < n\}.$$

Hay que notar que $B_{\varepsilon}(x) = B_{1/3^n}(x) = B_{1/3^n}(y)$ para todo $y \in B_{\varepsilon}(x)$.

Un concepto equivalente al de bola abierta, tal y como esta definida aquí, es el de cilindro en el espacio de códigos. Cada palabra α en B^n define el *cilindro de* α, $C(\alpha) = \{x \in \Sigma(B) \mid x_i = \alpha_i\}$. Cuando la palabra α que define el cilindro $C(\alpha)$ es de tamaño n, se dice que el cilindro es de tamaño n. El concepto de cilindro, por lo que se ha visto, es en todo equivalente al de bola abierta, es decir, toda bola abierta es un cilindro y viceversa.

Las bolas abiertas (o cilindros) son también conjuntos cerrados dado que

$$\forall n > 0 \; \Sigma(B) = \bigcup_{y \in B^n} C(y) \Longrightarrow C(\alpha) = \Sigma(B) - \left(\bigcup_{y \in B^n - \{\alpha\}} C(y)\right).$$

Esto significa que $C(\alpha)$ es el complemento de una unión de abiertos, es decir un cerrado. Por esto es imposible una equivalencia topológica entre $\Sigma(B)$ y $\mathbb{R}^N$.

La propiedad de $\Sigma(B)$ que más interesa en esta parte es la "completez". Un espacio métrico (X, d) es *completo* si toda secuencia de Cauchy en X converge a un punto en X. Recordemos que una secuencia $\{x^i\}_{i=0}^{\infty}$ de puntos en X es de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N \in \mathbb{Z}^{+} \ni m, n > N \Longrightarrow d(x^{n}, x^{m}) < \varepsilon.$$

Esta secuencia converge a $x \in X$ siempre que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0$ tal que si

$$n > N \Longrightarrow d(x^{n}, x) < \varepsilon$$

y en tal caso se dice que $x^{i} \longrightarrow x$ si $i \longrightarrow \infty$.

ALGUNOS MAPEOS EN $\Sigma(B)$.

Las biyecciones de-a $\Sigma(B)$ definidas localmente a partir de una secuencia de permutaciones de B resultan ser homemorfismos y más aún equivalencias métricas de-a $\Sigma(B)$. Un *homeomorfismo entre dos espacios topológicos* (X, τ) y (Y, ϑ) es una biyección ϕ: $X \longrightarrow Y$ que induce una biyección entre las topologías, es decir

$$\phi : \tau \longrightarrow \vartheta$$
$$A \longrightarrow \phi(A) = \{y = \phi(x) \mid x \in A\}$$

es una biyección entre las topologías. Note que si ϕ establece una correspondencia biyectiva entre una base de τ y otra de ϑ, entonces el homeomorfismo esta garantizado.

Sea $F = F_0F_1F_2 \cdots F_n \cdots : \Sigma(B) \longrightarrow \Sigma(B)$ una biyección generada localmente por la secuencia $(F_i)_{i=0}^{\infty}$ de permutaciones de B. Note que a más de ser una biyección, dado el cilindro $C(\alpha)$ de $\alpha \in B^n$,

$$F(C(\alpha)) = C(y) \text{ con } y = F_0(\alpha_0)F_1(\alpha_1)\cdots F_{n-1}(\alpha_{n-1}).$$

Es decir, la imagen bajo F de un cilindro es otro del mismo tamaño y de igual forma, la imagen inversa $F^{\circ -1}(C(\alpha))$ de un cilindro es otro $C(\gamma)$ con $\gamma_i = F_i^{\circ -1}(\alpha_i)$ $0 \leq i < n$. Dado que los cilindros son una base de la topología, F generada localmente es un homeomorfismo de-a $\Sigma(B)$.

Por otro lado, *una equivalencia métrica entre dos espacios métricos*

$$(X, d) \text{ y } (Y, d'),$$

es una biyección $\gamma: X \longrightarrow Y$ tal que existen dos constantes $0 < c_1, c_2$ que cumplen:

$$c_1 d'(\gamma(x), (y)) \leq d(x, y) \leq c_2 d'(\gamma(x), \gamma(y)) \ \forall x, y \in X.$$

En el caso de una biyección $F = F_0F_1\cdots$ de-a $\Sigma(B)$ generada localmente por la secuencia $(F_i)_{i=0}^{\infty}$ de permutaciones de B, ambas constantes valen uno y se cumplen las igualdades. Note que

$$d(x, y) = d(F(x), F(y)),$$

puesto que

$$\forall i \geq 0 \ F_i(x_i) = F_i(y_i) \Longleftrightarrow x_i = y_i,$$

ya que cada F_i es una permutación de B.

La equivalencia métrica es una condición más fuerte que la equivalencia topológica (existencia de un homeomorfismo).

Un mapeo χ: $\mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$, con $(\mathfrak{X}, d)$ un espacio métrico, es *contractivo* si existe $0 < s < 1$ tal que $d(\chi(x), \chi(y)) \leq s\, d(x, y)$ $\forall x, y \in \mathfrak{X}$. A la costante s que cumple con lo enunciado se le llama *contractividad de* χ.

Sea
$$pF:\Sigma(B) \longrightarrow \Sigma(B)$$
$$x \longrightarrow pF(x) = pF_0(x_0)F(x_1) \cdot \cdot \cdot ,$$

donde $p \in B^{\cdot}$ y F es una biyección de-a $\Sigma(B)$ generada localmente por la secuencia $(F_n)_{n=0}^{\infty}$. Note que $d\big((pF)(x), (pF)(y)\big) = 1/3\ d(x, y) < d(x, y)$ $\forall x, y \in \Sigma(B)$, por lo tanto pF es un mapeo contractivo.

Los mapeos contractivos generan secuencias de Cauchy de la siguiente manera: Sea $(\mathfrak{X}, d)$ un espacio métrico y χ: $\mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$ un mapeo contractivo con contractividad s, sea también $x \in \mathfrak{X}$, entonces la secuencia $(\chi^{\circ n}(x))_{n=0}^{\infty}$ es una secuencia de Cauchy para toda x.

Proposición(S)[7].

Si $(\mathfrak{X}, d)$ es un espacio métrico completo y χ: $\mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$ es una función contractiva, entonces existe un único punto $x_0 \in \mathfrak{X}$ tal que $\chi(x_0) = x_0$ y $\chi^{\circ n}(x) \longrightarrow x_0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ $\forall x \in \mathfrak{X}$.

A x_0 con estas características se le llama *el punto límite de* χ. Así, el punto límite de $pF: \Sigma(B) \longrightarrow \Sigma(B)$, es el código $pp\cdots p\cdots$.

EL HIPERESPACIO DE $\Sigma(B)$.

Sea $(\mathfrak{X}, d)$ un espacio métrico, se denota con $\mathcal{H}(\mathfrak{X})$ al conjunto formado por todos los subconjuntos compactos en $\mathfrak{X}$. Dada la estructura de $\Sigma(B)$, un compacto ahí es simplemente un subconjunto cerrado de $\Sigma(B)$, de modo que $\mathcal{H}(\Sigma(B)) = \{X \subseteq \mathfrak{X} \mid X \text{ es cerrado}\}$. Así por ejemplo, los clindros $C(\alpha)$ son compactos para cualquier palabra $\alpha \in B^n$.

Se dota a $\mathcal{H}(\mathfrak{X})$ de una métrica cuya definición requiere de dos conceptos.

1) Se define *la distancia de un punto* $x \in \mathfrak{X}$ *a un compacto* $B \in \mathcal{H}(\mathfrak{X})$ de la siguiente manera: $d(x, B) = \min \{d(x, b) \mid b \in B\}$.

2) Con ella *la distancia dirigida desde un compacto hasta otro*, se define así: Sea $A \in \mathcal{H}(\mathfrak{X})$, entonces $d(A, B) = \max\{d(a, B) \mid a \in A\}$.

La existencia de estás cosas esta asegurada por la naturaleza de los elementos de $\mathcal{H}(\mathfrak{X})$.

Se define *la distancia de Hausdorff* $h(d)$ así:

$$h(d): \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$$

$$(A,B) \longrightarrow \max\big(d(A,\ B),\ d(B,\ A)\big).$$

Se prueba que esta función cumple con las tres propiedades de una métrica[8]. Con todo esto, la pareja $(\mathcal{H}(X),\ h(d))$ es un espacio métrico al que se le llama el *hiperespacio de* $(X,\ d)$ o simplemente hiperespacio de X.

Proposición(9)[9].

Cuando el espacio del que se parte es completo, el hiperespacio construido a partir de él resulta ser completo también.

LOS SISTEMAS ITERADOS DE FUNCIONES.

Bajo ciertas restricciones sobre M, una parte de $\delta(M)$ es el atractor de un sistema iterado en el espacio de códigos. El atractor de un sistema iterado de funciones, es un caso especial de punto límite de una función contractiva en un espacio métrico completo.

Definición(15).

Un *sistema iterado de funciones* (SIF) es una colección

$$\{X,\ w_1,\ w_2, \ldots,\ w_N\}.$$

donde $(\mathcal{X}, d)$ es un espacio métrico compacto y w_i: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función contractiva con contractividad s_i, para $i = 1, 2, \ldots, N$.

Con el SIF $\{\mathcal{X};\ w_i:\ i = 1, 2, \ldots, N\}$ se puede construir el mapeo

$$W: \mathcal{H}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathcal{X})$$

$$B \longrightarrow \bigcup_i w_i(B)$$

donde $w_i(B) = \{y = w_i(x) \mid x \in B\}$. El mapeo W está bien definido pues como w_i es contractiva, entonces es continua y por tanto $w_i(B)$ es un conjunto compacto siempre que B sea compacto. Además la unión de compactos es compacto, entonces $W(B) \in \mathcal{H}(\mathcal{X})$. Resulta también que W es un mapeo contractivo con la métrica de Hausdorff[10] y tiene contractividad $s = \max_i(s_i)$, por eso se dice que s es la contractividad del SIF.

Según la proposición(9) $(\mathcal{H}(\mathcal{X}), h(d))$ es un espacio métrico completo cuando $(\mathcal{X}, d)$ es completo, entonces W tiene un único punto límite, dada la proposición(8).

El punto límite de W es el único compacto $\mathcal{A}$ tal que

$$W(\mathcal{A}) = \bigcup_i w_i(\mathcal{A}) = \mathcal{A}, \tag{27}$$

donde B es cualquier compacto en $\mathcal{X}$. La ecuación(27) caracteriza de manera única al punto límite de W dado que W es un mapeo [illegible] un espacio completo. Al límite de W se le llama *atractor del* SIF.

En $\Sigma(B)$, los mapeos contractivos que interesan son los del tipo pF que ya se han definido, con este tipo de mapeos se construirán los sistemas iterados en el espacio de códigos.

Ejemplo.

Sea T = (a, b, c) un alfabeto ternario, P = (a, b, c) la permutación cíclica e I la permutación identica en T. Con estas permutaciones se construyen las biyecciones $F_a = III\cdots$ y $F_b = PPP\cdots$ de-a $\Sigma(T)$. Los mapeos

$$aF_a,\ bF_b\colon \Sigma(T) \longrightarrow \Sigma(T)$$
$$x \longrightarrow aF_a(x),\ bF_b(x)$$

son contractivos y con ellos se puede definir un SIF. La colección

$$(\Sigma(T);\ aF_a,\ bF_b)$$

es un sistema iterado de funciones en el espacio de códigos.

Sea por otro lado $M = (T, Z_2, \tau)$ donde τ se da en la siguiente tabla.

x	$\tau(x, 0)$	$\tau(x, 1)$
a	a	b
b	b	c
c	c	a

Suponga que $\iota\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ es la identica, con ella se forma la identica en el espacio de códigos

$$D = \iota\iota\iota\cdots\colon \Sigma(\mathbb{Z}_2) \longrightarrow \Sigma(\mathbb{Z}_2).$$

Es claro que las parejas (F_a, D) y (F_b, D) son simetrías de M. La pareja (F_a, D) es la simetría identíca y dado que

$$\tau(P(\alpha), a) = P(\tau(\alpha, a))\ \forall(\alpha \in T,\ a \in \mathbb{Z}_2),$$

se verifica entonces que (F_b, I) es una simetría.

Suponga que $\tau(a, \Sigma(\mathbb{Z}_2)) \cup \tau(b, \Sigma(\mathbb{Z}_2))$ es un conjunto compacto en $\Sigma(T)$, siendo un compacto y por tanto un punto en $\mathcal{H}(\Sigma(T))$, se puede revisar su órbita bajo la acción del mapeo contractivo en $\mathcal{H}(\Sigma(T))$ asociado al SIF que estamos tratando en este ejemplo. Tal mapeo es

$$F\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$
$$B \longrightarrow aF_a(B) \cup bF_b(B)\ \forall B \in \mathcal{H}.$$

Como F_a es la identica entonces $F(B) = aB \cup bF_b(B)$.

Digamos que $\tau(a, \Sigma(\mathbb{Z}_2)) \equiv \tau a$ y $\tau(b, \Sigma(\mathbb{Z}_2)) \equiv \tau b$,

entonces $F(\tau a \cup \tau b) = a(\tau a \cup \tau b) \cup b(F_b(\tau a) \cup F_b(\tau b))$.

Dado que $\tau(a, 0) = a$ y $\tau(a, 1) = b$, entonces

$$a(\tau a \cup \tau b) = \tau(a,\ 0\Sigma(\mathbb{Z}_2)) \cup \tau(a,\ 1\Sigma(\mathbb{Z}_2)) = \tau a.$$

Como F_b es simetría de máquina se cumple la ecuación(2), por lo tanto:

$F_b(\tau a) = F_b(\tau(a,\ \Sigma(\mathbb{Z}_2))) = \tau(P(a),\ D(\Sigma(\mathbb{Z}_2))) = \tau(a,\ \Sigma(\mathbb{Z}_2)) = \tau b$ y

$$F_b(\tau b) = F_b(\tau(b,\ \Sigma(\mathbb{Z}_2))) = \tau(P(b),\ D(\Sigma(\mathbb{Z}_2))) = \tau(c,\ \Sigma(\mathbb{Z}_2)) = \tau c.$$

Dado que $\tau(b,\ 0) = b$ y $\tau(b,\ 1) = c$, entonces

$$b(F_b(\tau a) \cup F_b(\tau b)) = b(\tau b \cup \tau c) = \tau(b,\ 0\Sigma(\mathbb{Z}_2)) \cup \tau(b,\ 1\Sigma(\mathbb{Z}_2)) = \tau b.$$

Por lo tanto:

$$F(\tau a \cup \tau b) = \tau a \cup \tau b. \qquad (28)$$

La ecuación(28) caracteriza al único punto límite de F, el atractor del SIF. Además $F_b(\tau b) = \tau c$, entonces $\mathcal{T}_M(\tau a \cup \tau b) = \tau(M)$ (recuerde que $\mathcal{T}_M$ es el grupo de traducciones por simetrías de M y lo que aparece en la ecuación anterior es el resultado de su acción sobre el atractor del SIF). En resumen, para la máquina M de este ejemplo, se ha encontrado un SIF en $\Sigma(T)$ tal que su atractor es un $\mathcal{T}_M$-constructor de $\tau(M)$.

Algunas condiciones sobre M, aseguran que $\delta(M) = J_M(\mathcal{A})$, donde $\mathcal{A}$ es el atractor de un SIF en $\Sigma(B)$.

EL ESPACIO DE SALIDAS COMO ATRACTOR DE UN SIF.

En el ejemplo del capítulo anterior se planteó que $\tau a \cup \tau b$ era un compacto; dada la naturaleza del espacio de códigos, basta con mostrar que $\tau a \cup \tau b$ es un conjunto cerrado en $\Sigma(T)$. Enseguida se mostrará que para la máquina $M = (B, A, \delta)$, el conjunto $\delta(B, \Sigma(A))$ de salidas de la máquina es cerrado, donde B es cualquier subconjunto de $\mathbf{B}$. De hecho basta mostrar que el conjunto $\delta(\mathfrak{b}, \Sigma(A))$ es cerrado para cualquier $\mathfrak{b}$ elemento de $\mathbf{B}$. Una vez hecho esto se buscan condiciones sobre B y $\mathcal{T}_M$ para que $\delta(B, \Sigma(A))$ sea el atractor de un SIF y al mismo tiempo un $\mathcal{T}_M$-constructor.

Definición(16).

Sea $\rho \in \mathbf{B}^n$ el prefijo de tamaño n del código $p = \delta(p_0, a) \in \delta(M)$, entonces $\rho_i = p_i$ $0 \le i < n$. Una forma equivalente de especificar a ρ es dando ρ_0 y la receta $\rho_i = \delta(\rho_{i-1}, a_{i-1})$. Entonces se dice que ρ *es la salida finita de* M *al leer la palabra* $a = a_0a_1 \cdots a_{n-2} \in A^{n-1}$ *con estado inicial* ρ_0 y se denota $\delta(\rho_0, a)$.

En analogía a lo que se vió anteriormente, si $B \subseteq \mathbf{B}$ y $A \subseteq A^{n-1}$, entonces

$$\delta(B, A) = \{ x = \delta(x_0, a) \mid x_0 \in B, a \in A\}$$

denota el conjunto de todas las salidas finitas de M al leer palabras en A, estando inicialmente en algún elemento de B. La salida finita

$$\alpha = \delta(x_0, a)$$

de M define el *cilindro de máquina* $C(\delta(x_0, a))$.

Sea $b \in B$, se denota con $[bn] = \bigcup_{a \in A^{n-1}} C(\delta(b, a))$ al conjunto formado por la unión de todos los cilindros de máquina de tamaño n, que tienen como primer símbolo a b. El conjunto $[bn]$ es un elemento de $\mathcal{H}(\Sigma(B))$ para cada $n \geq 1$, pues es una unión finita de cerrados (A lo mucho $|A|^{n-1}$ cerrados).

De lo que se trata es de asegurar que $\delta(b, \Sigma(A))$ está en $\mathcal{H}(\Sigma(B))$, es decir que es cerrado. Para este fin se usarán los conjuntos $[bn]$.

Proposición(10).

$\delta(b, \Sigma(A))$ es un punto de $\mathcal{H}(\Sigma(B))$, o sea, es un cerrado de $\Sigma(B)$.

Prueba.

Es claro que $\delta(b, \Sigma(B)) \subset [bn]$ $\forall n \geq 1$, entonces

$$\delta(b, \Sigma(B)) \subseteq (\textstyle\bigcap_{n=0}^{\infty} [bn]). \tag{29}$$

Suponiendo que $b' \in (\bigcap_{n=0}^{\infty} [bn])$, entonces

$$b_n = b_0 b_1 \cdots b_{n-1} = \delta(b, a^{n-1}) \; \forall n \geq 1.$$

donde $a^{n-1} \in A^{n-1}$.

Podemos elegir a las a^n's tales que $\forall n \geq 1$ $a^n = a^{n-1}a_n$, donde $a_n \in A^n$. Con todo esto $b = \delta(\mathit{b}, a) \in \delta(\mathit{b}, \Sigma(A)))$, para $a = a_0 a_1 a_2 \cdots \in \Sigma(A)$, que está de acuerdo a lo que viene en la definició(1); así

$$(\textstyle\bigcap_{n=0}^{\infty}[\mathit{b}n]\ ) \subseteq \delta(\mathit{b}, \Sigma(A)\ ). \qquad (30)$$

Las ecuaciones (29) y (30) implican que $\delta(\mathit{b}, \Sigma(A)\ ) = (\ \bigcap_{n=0}^{\infty}[\mathit{b}n]\ )$, el cual es un compacto. De modo que $\delta(\mathit{b}, \Sigma(A)\ ) \in \mathcal{H}(\Sigma(B))$ $\forall \mathit{b} \in B$, con esto $\delta(B, \Sigma(A)\ )$ es cerrado para cualquier $B \subseteq B$, pues es la únion finita de cerrados.

En virtud de que $\delta(B, \Sigma(A)\ )$ es un compacto para cada $B \subseteq B$, se buscan condiciones para B y las simetrías de M, que garanticen la existencia de un SIF del que $\delta(B, \Sigma(B)_{\circ}\ )$ será el atractor. De hecho se propone la forma del SIF, pues debe de involucrar las traducciones por simetrías de M.

Se propone que $\delta(B, \Sigma(A)\ )$ es el atractor de

$$(\Sigma(B);\ \mathit{b}_1F_1,\ \mathit{b}_2F_2,\ \cdots,\ \mathit{b}_sF_s).$$

con $\mathit{b}_i \in B$ y $F_i:\Sigma(B) \longrightarrow \Sigma(B)$ una biyección generada localmente por la secuencia $(F_{i,n})_{n=0}^{\infty}$. Entonces $\delta(B, \Sigma(A)\ )$ es el único punto fijo de

$$F:\ \mathcal{H}(\ \Sigma(B)\ ) \longrightarrow \mathcal{H}(\ \Sigma(B)\ )$$

$$C \longrightarrow \bigcup_{0<i<s+1} \delta_i F_i(C).$$

Así, $F(\ \delta(B,\ \Sigma(A)\ )\ ) = \delta(B,\ \Sigma(A)\ )$, o lo que es lo mismo

$$\bigcup_{0\ <\ i\ <\ s+1} \delta_i F_i(\ \delta(B,\ \Sigma(A)\ )\ ) = \bigcup_{\delta'\ \in\ B} \delta(\delta',\ \Sigma(A)\ ). \tag{31}$$

Por principio de cuentas, esto implica que $\forall i \in \{1,\ 2,\ .\ .\ .\ .\ ,\ s\}$,

$$\delta_i = \delta' \text{ para alguna } \delta' \in B$$

y viceversa, para todo $\delta' \in B$ hay alguna i tal que $\delta' = \delta_i$. Esto quiere decir que $\{\delta_i |\ 0 < i \leq s\ \} = B$, pero puede suceder que $s > |B|$, entonces para cada $\delta \in B$ hay un conjunto

$$\{F_{\delta,i}\colon \Sigma(B) \longrightarrow \Sigma(B) |\ 1 \leq i \leq n\delta,\ n\delta < s\ \}$$

de biyecciones generadas localmente, tales que

$$\delta_i F_i = \delta F_{\delta,k} \text{ cuando } \delta_i = \delta.$$

Aquí $n\delta = |\{i \in \{1,\ 2,\ldots,\ s\}\colon\ \delta_i = \delta\ \}|$), o sea, $n\delta$ es el número de mapeos en el SIF en cuya definición aparece δ. Es decir, con cada elemento de δ estan asociadas varias biyecciones generadas lotalmente y con ellas forma algunos de los mapeos contractivos del SIF, con esto la ecuación(31) queda así:

$$\bigcup_{\delta\ \in\ B} \delta(\delta,\ \Sigma(A)\ ) = \bigcup_{\delta\ \in\ B} (\bigcup_{0\ <\ k\ <\ n\delta+1} \delta F_{\delta,k}(\delta(B,\ \Sigma(A)\ )). \tag{32}$$

Antes se hablaba de que las simetrías de M deben intervenir en el SIF.

se supondrá entonces que para cada $b \in B$ y $k \in \{1, 2, \dots n_b\}$ existe una biyección $G_{b,k}: \Sigma(A) \longrightarrow \Sigma(A)$ generada localmente por la secuencia $(G_{b,k,n})_{n=0}^{\infty}$ de permutaciones de A y que es tal que $(F_{b,k}, G_{b,k})$ es una simetría de M. Esta suposición parece fuerte, pero es necesaria si se quieren introducir las simetrías de máquina aquí. La biyección $F_{b,k}$, siendo una biyección generada localmente, debe producir el sufijo de una salida de M que empieza con b, esto es:

$$bF_{b,k}(x) \in \delta(b, \Sigma(A)) \ \forall x \in \delta(B, \Sigma(A)).$$

Con esta suposición y usando la ecuación(2), la ecuación(32) queda así:

$$\bigcup_{b \in B} \delta(b, \Sigma(A)) = \bigcup_{b \in B} \left(\bigcup_{0 < k < n_b+1} b\, \delta(F_{b,k,0}(B), \Sigma(A))\right). \quad (33)$$

Esta ecuación es válida si se cumple para cada uno de los cilindros, esto es, la ecuación debe seguir siendo válida si a ambos lados los intersectamos con $C(b)$ para cada $b \in B$. Por tanto, una expresión equivalente a la ecuación(33) es:

$$\delta(b, \Sigma(A)) = \bigcup_{0 < k < n_b+1} b\, \delta(F_{b,k,0}(B), \Sigma(A)) \ \forall b \in B. \quad (34)$$

Al conjunto $\{c = \delta(b, a) \in B \mid a \in A\}$ se le llama *la desendencia de b ante* M, para $M = (B, A, \delta)$. A este conjunto se le denota con $\delta(b)$.

El lado izquierdo de la ecuación(34) puede descomponerse en una unión de cilindros de tamaño dos, esto establece una relación entre el

Por otro lado, si las condiciones *1)* y *2)* se cumplen, entonces

$$\delta(B, \Sigma(A))$$

es el atractor del SIF $\{\Sigma(B);\ bF_{b,k}:\ b \in B,\ 0 < k \leq nb\}$.

Prueba.

Lo único que no se ha verificado es la última afirmación, es decir que $\delta(B, \Sigma(A))$ es el atractor del SIF $\{\Sigma(B);\ bF_{b,k}:\ b \in B,\ 0 < k \leq nb\}$. Basta con probar que $\delta(B, \Sigma(A))$ es el punto fijo de F.

La acción de F sobre $\delta(B, \Sigma(A))$ es:

$$F(\delta(B, \Sigma(A))) = \bigcup_{b \in B} \bigcup_{0 < k < nb} b\, F_{b,k}(\delta(B, \Sigma(A))),$$

por la forma en como se definió F y asumiendo que se cumple la condición *1)*. Dado que $F_{b,k}$ es una traducción, entonces

$$F(\delta(B, \Sigma(A))) = \bigcup_{b \in B} \bigcup_{0 < k < nb} b\, \delta(F'_{b,k,0}(B), \Sigma(A)).$$

Por último, dado que se cumple la condición *2)*, que no es más que lo que dice la ecuación (35), entonces

$$F(\delta(B, \Sigma(A))) = \bigcup_{b \in B} b\, \delta(\delta(b), \Sigma(A)) = \delta(B, \Sigma(A)).$$

que es a lo que se quería llegar.

APLICACIÓN A LAS MÁQUINAS DE TRASLAPE.

A continuación se muestra que las máquinas de traslape satisfacen las condiciones *1)* y *2)* de la proposición(11).

Sea $[q, N]$ la máquina de traslape, $\mathbb{Z}_q \subset \mathbb{Z}_{q^N}$ visto como un conjunto de estados y $T_i \in \mathcal{T}_{[q,N]}$ una traducción para cada $i \in \mathbb{Z}_q$. Supongamos que $\Delta(\Sigma(\mathbb{Z}_q), \Sigma(\mathbb{Z}_q))$ es el atractor del SIF $\{\Sigma(\mathbb{Z}_{q^N});\ iF_i:\ i \in \mathbb{Z}_q\}$. Se buscan las condiciones en F_i para se satisfaga el inciso proposición(11). La versión de la ecuación(35) es

$$\Delta(i) = F_{i,0}(\mathbb{Z}_q)\ \forall i \in \mathbb{Z}_q.$$

con $\Delta(i) = \{j = (qi + a) \bmod q^N |\ a \in \mathbb{Z}_N\}$.

Al menos $\delta(i)$ y $F_{i,0}(\mathbb{Z}_q)$ son iguales en cardinalidad; para ambos es q. Suponga que $N > 1$, entonces $\delta(i) = \{\ qi + a|\ a \in \mathbb{Z}_q\}$ que denotamos con $qi + \mathbb{Z}_q$.

Con lo anterior, la versión de la ecuación(35) es $qi + \mathbb{Z}_q = F_{i,0}(\mathbb{Z}_q)$. Si a $F_{i,0}$, que es una permutación en $\mathbb{Z}_{q^N}$, se le pudiera elegir arbitrariamente, entonces se eligiría

$$F_{i,0} = (qi,\ qi+1, \ldots,\ qi+q-1,\ 0,\ 1, \ldots,\ q(i-1)+q-1,\ q(i+1), \ldots\ q^N-1).$$

pero $F_{1,0}$ debe ser una cabeza de la traducción $F_1 \in \mathcal{T}_{[q,N]}$, de modo que solo se le puede elegir de entre el subgrupo ${}^N S_q$ de S_{q^N}.

Esto significa que deben haber N permutaciones $A_0, A_1, \ldots, A_{N-1}$ en S_q, tales que

$$F_{1,0} = \sum_{\ell=0}^{N-1} q^{N-\ell-1} A_\ell.$$

Recordando lo que ya se había visto antes, la relación que existe entre $F_{1,0}$ y las permutaciones que la definen es

$$F_{1,0}(\; n(a_0 a_1 \cdots a_{N-1})) = n(\; A_0(a_0)\; A_1(a_1) \cdots A_{N-1}(a_{N-1})),$$

y las permutaciones A_ℓ sí son arbitrarias. Suponga que

$$A_\ell = (0,\ 1,\ 2, \ldots, q-1) \text{ si } \ell \neq N-2 \text{ y}$$

$$A_{N-2} = (i,\ 1, \ldots, i-1,\ 0,\ i+1, \ldots, q-1),$$

entonces, para cada $k \in \mathbb{Z}_q$,

$$F_{1,0}(k)=F_{1,0}(n(00\cdots 0k))=n(00\cdots ik)=iq+k$$

y por lo tanto $F_{0,1}(\mathbb{Z}_q) = iq + \mathbb{Z}_q$ que era lo que se buscaba.

En conclusión, si para cada i, $A_i=(i,\ 1, \ldots, i-1,\ 0,\ i+1, \ldots, q-1) \in S_q$ y si denotamos con ι a la permutación idéntica en S_q, entonces

$$\Delta(\mathbb{Z}_q,\ \Sigma(\mathbb{Z}_q))$$

es el atractor del sistema iterado $(\Sigma(\mathbb{Z}_q);\ iF_i:\ i \in \mathbb{Z}_q)$ con

$$F_i = \delta\left(\left(\oplus_{\ell=0}^{N-2}\ q^{N-1-\ell}\ \iota \oplus A_i \right),\ A \right)$$

para cualquier $A \in \Sigma(S_q)$. Es decir, el conjunto de las máquinas para las cuales se cumplen las condiciones *1)* y *2)* de la proposición(11) no esta vacio.

Hay otra cosa que decir. Como se vió en el capítulo III, los subconjutos de $\Delta([q,N])$ que tienen un solo elemento son todos los $\mathcal{T}_{[q,N]}$-comales de $\Delta([q,N])$, de tal forma que la órbita de $\Delta(\mathbb{Z}_q,\ \Sigma(\mathbb{Z}_q))$ bajo la acción de $\mathcal{T}_{[q,N]}$ es todo $\Delta([q,\ N])$.

Se podría hablar de otra caracterización de $[q,\ N]$ utilizando el SIF que aquí se construyó y el grupo $\mathcal{T}_{[q,N]}$. De hecho no se necesita a todo el grupo de traducciones, sino a uno de sus subgrupos del cual

$$\Delta(\mathbb{Z}_q,\ \Sigma(\mathbb{Z}_q))$$

sea constructor.

Otro motivo por el que son interesantes estas máquinas con su SIF, es que el SIF tiene siempre asociada una dinámica, el shift, que en este caso corresponderia a lo siguiente:

$$T: \mathcal{O}(\mathbb{Z}_q, \Sigma(\mathbb{Z}_q)) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{Z}_q, \Sigma(\mathbb{Z}_q))$$

$$\mathcal{O}(\alpha, a) \longrightarrow \mathcal{O}(\alpha', a')$$

con $\alpha' = \mathcal{O}(\alpha, a_0)$ y $a = a_0a'$.

T así definido es el mapeo shift y como puede verse está muy relacionado con la forma en como una máquina produce sus cadenas de salida. De hecho, para $x \in \mathcal{O}(\mathbb{Z}_q, \Sigma(\mathbb{Z}_q))$, $T^{\circ n}(x)_0 = x_n$.

Cuando a los mapeos en el SIF se le asignan probabilidades[11], esto induce una medida en $\Sigma(\mathbb{Z}_q)$, entonces se pueden hacer estadísticas sobre la dinámica T, utilizando el teorema de Elton[12].

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS.

El resultado más importante de este trabajo es el haber encontrado las condiciones bajo las cuales el espacio de salidas de una máquina es un fractal determinista en el espacio de códigos. Cuando estas condiciones son satisfechas por una máquina que modela un sistema dinámico que interesa, se simplifica el estudio de la complejidad del sistema y se facilita la estadística.

También es alentador el que las traducciones por simetrías en la máquina de traslape, pertenezcan al espacio de salidas de una máquina de la misma familia. Esto es reminiscente de un proceso de renormalización, que podría ser de utilidad en la realización de cálculos de propiedades del sistema a través de su trayectoria. Se buscaría que en la descripción finita del sistema, la máquina resultante posea esta propiedad; la construcción mostrada en este trabajo, puede contribuir en la búsqueda.

BIBLIOGRAFIA.

1. J. E. Hopcroft and J. D. Ullman, *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, Addison-Wesley, Reading MA, (1979)

2. V. A. Gorbátov, *Fundamentos de la Matemática Discreta*, Editorial Mir, Moscú (1988)

3. A. Clark, *Fundamentos de Álgebra Abstracta*, Editorial Alhambra, Madrid (1974)

4. I. L. Iribarren e I. J. Irigoyen, *Topología de Espacios Métricos*, Editorial Limusa, México (1978)

5. C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, John Wiley and Sons, Inc., New York (1967)

6. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Aplications*, Jonh Wiley and Sons, Inc., New York (1968)

7. M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, Inc., Boston (1988), p. 75

8. *ibidem* p. 34

9. *ibidem* p. 37

10. *ibidem* p. 82

11. *ibidem* p. 334

12. *ibidem* p. 370

13. J. P. Crutchfield and K. Young, *Inferring Statistical Complexity*, Physical Review Letters 63, (1989), 105.

14. E. J. Friedman, *Structure and Uncomputability in One-Dimensional Maps*, Complex Systems 5, (1991), 335.

15. J. Urías and E. Ugalde, Work in Progress.

16. R. Lima, *Bidecomposition in Extended Sistems*, Non-Linear Sciences Submitted, (1992)

17. P. Bak *et al.*, Physical Review Letters 59, (1987), 382

18. M. Creutz, *Abelian Sandpiles*, Computer in Physics, Mar/Apr (1991), 198

19 J. Urías, *One-Dimesional Cellular Automata as Arithmetic Recursions*, Physica D 36, (1989), 109

20- J. Urías and E. Ugalde, *Fractal Spaces for Cellular Automata*, Physica D. Submitted (1991)