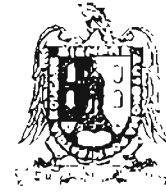


Universidad Autónoma de San Luis Potosí



Instituto de Física



Acoplamiento Consistente de Partículas con Espines Altos al Campo Electromagnético

Fis. Luis Manuel Rico Gutiérrez, IF-UASLP

Asesora: Dra. Mariana Kirchbach (IF-UASLP)

Diciembre 2006

Índice general

1. Introducción	5
2. Descripción matemática de las simetrías del espacio-tiempo	10
2.1. Introducción	10
2.2. Teoría de Grupos	12
2.3. Teoremas y Definiciones	13
2.4. Representación de Grupos	16
2.5. Grupos Continuos	21
3. Descripción actual del campo de espín 3/2	26
3.1. Introducción.	26
3.2. Descripción de Rarita-Schwinger para espines fraccionarios altos	27
3.3. Descripción para el campo libre de espín 3/2	28
3.4. Acoplamiento al campo electromagnético	29
3.5. El problema de Velo-Zwanziger	30
3.5.1. Propagación Ondulatoria de los Campos	34
3.5.2. Acausalidad en la propagación de las soluciones en Rarita-Schwinger	36
4. Rastreo de estados con espín y masa únicos sobre la capa de la masa	40
4.1. Introducción	40
4.2. Construcción del proyector $\mathcal{P}^{(m,s)}$	45
4.2.1. El operador de Pauli-Lubanski y el segundo Casimir del grupo de Poincaré	47
4.2.2. Expresiones particulares de \mathcal{W}^2 para el sector vectorial y el espinorial	50

4.2.3.	Los operadores $K^{(\pm)}$	52
4.2.4.	Obtención del Proyector en función de los operadores $K^{(\pm)}$	53
4.2.5.	Las representaciones de Lorentz con dos sectores invariantes de Poincaré	54
4.2.6.	Más allá de los Projectores Covariantes	56
4.2.7.	Comparación de ambos esquemas	58
4.3.	Conclusión	61
5.	Acoplamiento con el campo magnético y evaluación del criterio de hiperbolicidad	62
5.1.	Introducción	62
5.2.	Acoplamiento mínimo explícito	63
5.3.	Condiciones Auxiliares	65
5.3.1.	Contracción con γ_a	65
5.3.2.	Contracción con π_a	66
5.4.	Cálculo del Determinante Característico	68
5.5.	Conclusiones	70
5.6.	Investigación Posterior	71
6.	Descripción de la “Cascada de Espín”	77
6.1.	Introducción	77
6.2.	Ecuación de onda para la Cascada de Espín	78
6.3.	Conclusiones	82
7.	Conclusiones	83
A.	Convenciones	86
A.1.	Convenciones en QFT	86
A.2.	Indexación para el producto directo	87
A.3.	Identities and Formulas of Utility	88
B.	Expresiones para el Cálculo de $\pi \cdot \zeta^b$	90

C. Rutinas en Maple	92
C.1. Referencia de las rutinas	93
C.1.1. Rutinas de la librería <i>tensor</i> de <i>Maple</i>	94
C.1.2. Rutinas Propias	95
C.2. Listado de Rutinas	100

Capítulo 1

Introducción

La descripción de partículas con espines altos ($s > 1$) es un problema en la física teórica de partículas elementales que tiene mucho tiempo esperando una formulación satisfactoria. El estudio de estos sistemas data de los años sesenta, y desde entonces se han propuesto multitud de esquemas para estudiarlos. Sin embargo, es bien conocido el hecho de que estos esquemas padecen de serias inconsistencias, como la propagación a velocidades mayores que la de la luz ó la incapacidad de propagar. Sistemas con espines mayores a 1 fueron observados por primera vez como resonancias en la dispersión pión-nucleón. La colaboración internacional encargada de la compilación y análisis de los resultados referentes a las propiedades de las partículas elementales e interacciones fundamentales (Particle Data Group) [1], lista más de treinta resonancias bariónicas no-extrañas con espines que van desde $3/2$ hasta $15/2$, y más de veinte del tipo extraños con espines de $3/2$ a $9/2$. Estas resonancias bariónicas han sido extensamente estudiadas en experimentos llevados a cabo en el pasado por el programa Los Alamos Meson Physics Facility (LAMPF), y en el presente [2] están siendo estudiados por el Thomas Jefferson National Accelerator Facility (TJNAF). Estas partículas son de gran importancia en la descripción de procesos como electro-producción y foto-producción de piones, donde estas partículas aparecen como estados intermedios, y a los cuales el Mainz Microtron (MAMI) [3] ha estado dedicado a estudiar. La búsqueda de soluciones con espines altos al Lagrangiano de QCD (Quantum Chromo Dynamics) ha sido recientemente reportada por la colaboración Lattice [4]. Resonancias de mesones con espines enteros altos que van desde 0 hasta 6 pueden ser de importancia en varios procesos que revelan las características fundamentales de QED

(Quantum Electro Dynamics) a altas energías como la producción de pares [5]. Una de las áreas donde son de gran interés e importancia los campos de espín altos, donde surgen como propuestas para la física que hay más allá del modelo estándar, es supergravedad, teoría supersimétrica que incluye un campo sin masa con espín $3/2$, ó gravitino, el compañero supersimétrico del gravitón de espín 2. Ante la ruptura espontánea de supersimetría el gravitino adquiere masa y constituye un campo masivo con espín $3/2$ que requiere una descripción consistente. Para el caso que nos concierne, la fenomenología de partículas elementales dentro del modelo estándar, es deseable tener una teoría consistente en el espacio plano de Minkowski. Esta descripción es necesaria, por ejemplo, para el tratamiento de las resonancias bariónicas, como la $\Delta(1232)$ con espín $3/2$ en dispersión hadrónica a bajas energías [12]. El formalismo de uso estándar para describir partículas con espines fraccionarios altos es conocido como el marco de Rarita-Schwinger [6, 7], en donde un campo de espín $s = j + 1/2$ es representado mediante un tensor simétrico de Lorentz con componentes espinoriales¹ $\psi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j}^{(s)}$. Sin embargo, como previamente lo mencionamos, el tratamiento de espines altos dentro de este formalismo es bastante problemático e inconsistente con la covarianza de Lorentz [9, 10, 11]. Todos estos problemas están íntimamente relacionados con el hecho de que la descripción covariante para un campo con espín alto s por medio de $\psi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j}^{(s)}$, necesariamente contiene la presencia de componentes de espín más bajos, específicamente con espines $(s - 1)$, $(s - 2)$, etc. En otras palabras, el tensor-espinor contiene más grados de libertad que los que son necesarios para describir partículas con espín s (igual $2(2s + 1)$ para partículas masivas y 2 para partículas no masivas); de hecho, las componentes independientes [12] del tensor-espinor son $4(j + 1)(j + 2)(j + 3)/6$. Ordinariamente, estas componentes se consideran grados de libertad no físicos que necesitan ser eliminados de la descripción. En el caso de campo libre, la teoría no presenta dificultades, la formulación estándar esta dada por Lagrangianos que además de proveer con ecuaciones de movimiento tipo Dirac o Proca, adicionalmente proveen ecuaciones de restricción cuyo papel es el de reducir el número de componentes independientes hasta el valor deseado. El verdadero problema surge al querer incluir interacciones con un campo externo. Las componentes extras con espines más bajos, aunque son eliminadas en la formulación del campo libre, en el marco de una interacción (como por ejemplo, con un

¹ (a) es un índice espinorial que por simplicidad omitiremos más adelante

campo electromagnético) algunas de estas componentes pueden acoplarse de una manera no trivial y causar problemas a la propagación del campo. Las restricciones cambian cuando hay una interacción y no son exitosas en eliminar las componentes no deseadas que representan estados no físicos.

El propósito de esta tesis es el de participar en una nueva y robusta propuesta para la descripción libre de anomalías para partículas con espín $3/2$ y contribuir a una solución satisfactoria a todos estos problemas anteriormente mencionados. La naturaleza del problema con la descripción de partículas con espines altos nos ha llevado a plantear dos formas de atacarlo que son fundamentalmente distintas. La primera consiste en insistir en desarrollar una ecuación de movimiento genuina que seleccione el estado más alto de espín y de masa única contenido en el quadri-espinores ψ_μ y proyecte fuera los estados más bajos de espín en su totalidad, de tal forma que al tener un acoplamiento con un campo electromagnético externo este estado propague causalmente y sin los problemas de la descripción de Rarita-Schwinger. Este es el mismo objetivo que pretende la descripción de Rarita-Schwinger pero sin tener éxito. La razón más importante por la cual este formalismo conduce a todas estas contrariedades son los principios y fundamentos básicos en los que se guía para su construcción. Por esta razón, nuestra estrategia en la búsqueda de una ecuación de movimiento exitosa para partículas con espín $3/2$ consiste en revisar los fundamentos teóricos más básicos sobre los que descansa el estudio de las partículas elementales y explotar las herramientas provistas por este marco teórico para la fabricación de dicha ecuación. Estas bases teóricas fueron asentadas por Eugene Wigner alrededor del año 1939, en el artículo [13] que ahora es un clásico, y donde propone que cada partícula "es" una representación irreducible del grupo de todas las simetrías bajo las cuales las leyes de la naturaleza son invariantes. Sin considerar las simetrías internas de la partícula, el grupo de Poincaré, que es el grupo de todas las transformaciones de Lorentz y las translaciones en espacio y tiempo es la representación matemática de las simetrías bajo las cuales las leyes de la naturaleza son invariantes. Las representaciones irreducibles del grupo de Poincaré se caracterizan con dos parámetros que son, ni más ni menos, la masa m y el espín s , que corresponden a los eigenvalores de los dos operadores Casimir con los que nos provee el grupo de Poincaré. Estos operadores juegan un papel central en nuestra estrategia para la obtención de una ecuación de movimiento satisfactoria. Explotando todas las cualidades de estos operadores para la representación que es de interés del grupo

de Poincaré podemos obtener una ecuación para aislar las soluciones con masa única y espín más alto, dejando fuera todas las componentes indeseables con espines más bajos. La segunda solución propuesta a este problema consiste en *no insistir* más en proyectar fuera estas componentes con espines más bajos y describir una propagación del estado con más alto espín junto con otro u otros de más bajo espín. En la literatura existente donde se discute la descripción de espines altos es frecuente toparse con el comentario que las componentes con espines bajos representan grados de libertad redundantes y *no físicos* que *deben eliminarse* de la descripción para que el estado de interés con el más grande espín propague correctamente. Sin embargo, esta aseveración es cuestionable, como es señalado en [14]; si uno considera las observaciones empíricas relativamente recientes de las resonancias bariónicas Λ y Δ .

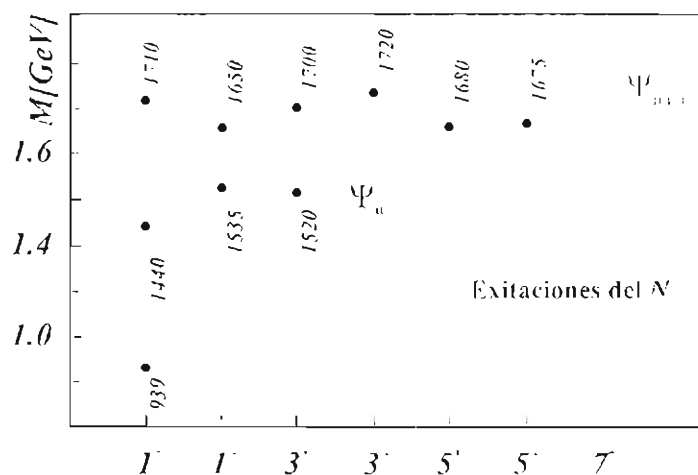


Figura 1.1: Excitaciones del Nucleón

Estas observaciones muestran un agrupamiento (clustering en inglés) de estados de estas partículas en términos de las representaciones $(j/2, j/2) \otimes [(1/2) \oplus (0, 1/2)]$ con $j = 1, 3$ y 5 . Estos clusters corresponden a estados con la *misma masa* y con espines que

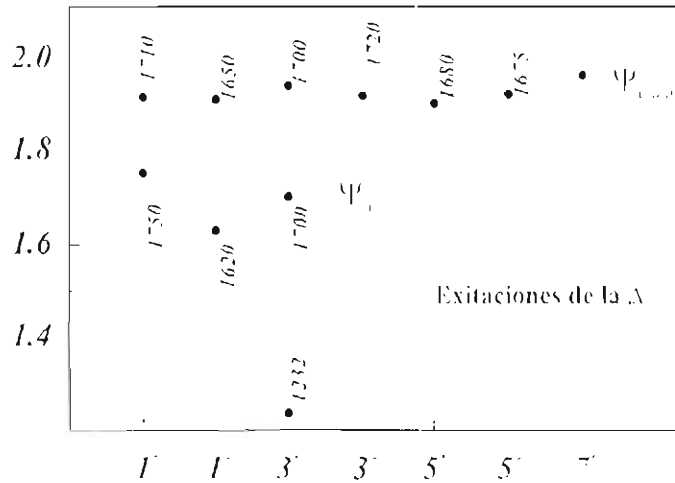


Figura 1.2: Excitaciones de la resonancia Delta

corren de $1/2$ hasta $(j + 1/2)$ que son todos los posibles estados de espín dentro de estas representaciones. El rompimiento de la degeneración de masa para cada uno de los clusters es de alrededor de 5 % y ha sido sugerido que es una consecuencia del tipo de análisis de los datos [15]. En la descripción teórica estándar, por ejemplo, las resonancias $\Delta(1740)$ y $N(1535)$ con espín $1/2$ pero paridades opuestas, no estarían presentes debido a que las ecuaciones auxiliares impuestas sobre estas representaciones las excluyen, infructuosamente, cabe recalcar. Sin embargo, los resultados experimentales son contundentes, estos estados tienen un estatus estadístico de cuatro estrellas y no es fácil obviar su existencia. Los estados $\Delta(1620)$ y $\Delta(1750)$ también están ausentes en la descripción estándar por la misma razón. Estos estados tienen actualmente estatus de cuatro y una estrella respectivamente [1]. En la parte final de esta tesis, consideramos una descripción de los clusters que corresponden a $j = 1$ en la que podemos separar un espín bajo de $1/2$ de la descripción, y mostrar una propagación causal de la solución de la ecuación de onda a nivel clásico que corresponde a la propagación de un cluster con dos espines $1/2$ y $3/2$.

Capítulo 2

Descripción matemática de las simetrías del espacio-tiempo

2.1. Introducción

Una figura o estructura se dice que posee una simetría bajo un mapeo espacial si se transforma en sí misma bajo éste; esto es, la figura es invariante ante el mapeo espacial. Un mapeo es definido siempre que se establezca una correspondencia que asocia con cada punto un punto imagen en el espacio-tiempo. Ejemplos muy claros son rotaciones alrededor de un eje, reflexiones respecto a un plano, traslaciones en una cierta dirección, etc. También existen mapeos no necesariamente espaciales a los cuales se les asocia con una simetría, como por ejemplo la conjugación de carga, donde una estructura poseerá esta simetría si al invertir cargas positivas por negativas y viceversa, la estructura es invariante ante tal transformación.

Veamos ahora cual es el papel que juega el concepto de simetría en la física y la importancia de considerar su estudio. Notemos primeramente que de una manera simplificada, el mundo que nos rodea puede clasificarse en tres categorías principales que reciben atención para su estudio: la materia y energía que residen en el universo, el estado actual de esta materia y energía (condiciones iniciales) y las leyes de la naturaleza a las que obedecen. El hecho de que ciertos procesos en la naturaleza exhiban una simetría común, nos lleva a pensar que estas simetrías son de hecho poseídas por las leyes de la naturaleza mis-

mas. En este caso, las leyes de la naturaleza, expresadas en la forma de una ecuación de movimiento, son entonces invariantes ante tal transformación para la cuál muestra simetría el proceso. Simetría e invarianza son entonces sinónimos en física, el primero mayormente relacionado a la estructura intrínseca de la naturaleza, el último relacionado mayormente con la forma matemática de las ecuaciones de movimiento. Desde luego, si todas las leyes de la naturaleza fuesen conocidas exactamente, un físico infinitamente inteligente sería capaz de resolver las ecuaciones de movimiento, encontrando todas las soluciones e inherentes propiedades, dentro de las cuales se encontrarían también sus simetrías. Es por esta razón que el descubrimiento de un principio de simetría es particularmente interesante cuando las leyes de la naturaleza no han sido reveladas aún. De hecho, el conocimiento de una propiedad de invarianza para un cierto proceso físico restringe grandemente la clase de posibles leyes que gobiernan estos procesos y, consecuentemente, sirven como una guía para descubrir las verdaderas leyes que rigen el comportamiento del proceso. Esta es, ni más ni menos, la situación a la que confrontamos en la física de partículas elementales y es por eso que las consideraciones de simetría, siendo muy fructíferas en proporcionar información física, juegan un papel preponderante en nuestra forma actual de pensar. Habrá que enfatizar, sin embargo, que un principio de simetría no se vuelve obsoleto una vez que la ley de la naturaleza es revelada en su totalidad, como uno pudiera imaginarse. De hecho, muy bien pudiese ser el caso de que es imposible resolver las ecuaciones de movimiento obtenidas. Las consideraciones de simetría vuelven a ser útiles entonces en encontrar cantidades conservadas y de esta forma clasificar las posibles soluciones al problema excluyendo las posibles ocurrencias de ciertas soluciones (reglas de selección). Otras veces pueden ser útiles solamente en dar relaciones entre las probabilidades de transición para diferentes procesos físicos. Algunas veces pueden ser muy útiles como herramientas matemáticas para resolver las ecuaciones de movimiento.

La herramienta matemática usada para describir y estudiar las simetrías son los *grupos*. En este capítulo, utilizaremos la primera parte para introducir brevemente las nociones de la teoría de grupos, propiedades, clasificación y representaciones de estos, además de los teoremas fundamentales. Este material no está planeado para ser riguroso, detallado ó pedagógico, si no meramente como un breviario ó resumen de la teoría de grupos, teniendo en mente que el lector de esta tesis posee un conocimiento estándar de esta teoría.

Evidentemente el resumen abarca el contenido estrictamente necesario utilizado en el

desarrollo de esta tesis; así mismo, contiene implícitamente las convenciones matemáticas usadas por nosotros. Las referencias usadas en este capítulo son [16, 17, 18, 19], cuyo contenido sobre teoría de grupos es más amplio. La segunda parte del capítulo abarca la aplicación de este aparato matemático de Teoría de Grupos a las simetrías que experimentalmente se han verificado que posee el espacio-tiempo. El fruto de la aplicación del formalismo matemático para la física de partículas elementales es abundante y forma la base de nuestro estudio sobre partículas de espín 3/2.

2.2. Teoría de Grupos

El aparato matemático usado para estudiar las simetrías es conocido como Grupo, que es una estructura algebraica que posee las propiedades que intrínsecamente poseen las simetrías de cualquier tipo.

Definición 2.2.1 (Grupo) *Un grupo es un conjunto de distintos elementos, $G = \{a, b, c, \dots\}$, provisto con una operación de composición (como adición, multiplicación, etc.), tal que los siguientes axiomas se satisfacen:*

1. *La composición de cualesquiera dos elementos a y b bajo la operación dada resulta en un elemento que también pertenece al conjunto G . Esto es,*

$$\forall a, b \in G, \quad a \circ b = c, \quad \text{donde } c \in G$$

Esta propiedad es conocida como la propiedad de cerradura.

2. *Existe el elemento identidad $e \in G$ tal que para cualquier elemento a del conjunto,*

$$e \circ a = a \circ e = a$$

3. *Para cualquier elemento a del conjunto existe un único elemento b tal que,*

$$a \circ b = b \circ a = e$$

Este elemento es conocido como el elemento inverso de a y es una práctica común denotarlo como a^{-1} .

4. La operación de composición es asociativa, es decir, para cualquier a, b, c del conjunto,

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

Estos son los axiomas que todo grupo debe satisfacer. Los grupos también suelen clasificarse según el número de elementos y su naturaleza analítica. Los grupos con un número finito de elementos se conocen como *grupos finitos* y los que contienen un número infinito de elementos son llamados *grupos infinitos*. Estos últimos se dividen en dos categorías importantes: *grupos discretos*, que son grupos cuyo número de elementos es infinito pero numerable y los *grupos continuos*, que son grupos cuyo número de elementos es infinito pero no numerable. Muchos de los grupos que tienen importancia física suelen ser grupos infinitos y en nuestro particular caso de estudio, un tipo especial de grupos continuos llamados *grupos de Lie* son la base del estudio matemático de las simetrías del espacio-tiempo. A partir de tan sólo estos cuatro axiomas se ha desarrollado toda la teoría de grupos que es extensa y contiene muchos resultados y teoremas importantes. A continuación resumiremos los resultados más importantes y de mayor interés en la teoría de grupos. Casi todos los resultados son válidos para grupos continuos, incluyendo algunas excepciones que oportunamente se harán notar. Posteriormente, después de exponer estos resultados generales, nos especializaremos en revisar los resultados de la teoría de grupos continuos de Lie, que es la parte de la teoría de grupos que usaremos directamente y en extenso en el estudio de las simetrías del espacio-tiempo, que a su vez, como lo hemos mencionado en la introducción de este capítulo, nos ayudarán a encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema que estaremos estudiando en esta tesis.

2.3. Teoremas y Definiciones

En esta sección incluimos tanto teoremas como definiciones usadas en la teoría de grupos. Algunos de estos resultados no necesitan mayor explicación. Para otros, sin embargo, nos tomaremos la libertad de comentarlos un poco. De ahora en adelante llamaremos a la operación de composición de dos elementos de un grupo simplemente como multiplicación de elementos del grupo.

Definición 2.3.1 (Grupo Abeliiano) Se dice que un grupo G es Abeliiano si la multiplicación de elementos es conmutativa, es decir $ab = ba$ para todo a, b que estén en G .

Definición 2.3.1 (Subgrupo) Un subconjunto H de un grupo G que de acuerdo a los axiomas forma un grupo bajo la misma operación de composición que G se dice que forma un subgrupo de G .

Definición 2.3.1 (Isomorfismo) Dos grupos G y G' se dice que son isomorfos si existe una correspondencia uno a uno entre sus elementos, tal que preserve la multiplicación de la siguiente manera: Si a $g_1 \in G$ le corresponde el elemento $g'_1 \in G'$ y $g_1 g_2 = g_3$, entonces necesariamente $g'_1 g'_2 = g'_3$ y viceversa.

Definición 2.3.1 (Homomorfismo) Un homomorfismo de un grupo G a otro G' es un mapeo, no necesariamente uno a uno, que preserve la multiplicación del grupo. Formalmente,

$$\downarrow f : G \rightarrow G' \text{ (alque si } g'_i \in G' = f(g_i) \text{ y } g_1 g_2 = g_3 \Rightarrow g'_1 g'_2 = g'_3$$

Los elementos de un grupo se pueden clasificar en *clases conjugadas*, ó simplemente clases, y en *cosets*. Estas dos formas constituyen maneras diferentes de ordenar los elementos de un grupo que son muy útiles en el estudio de la estructura de un grupo y en sus representaciones.

Definición 2.3.1 (Elementos Conjugados) Un elemento $b \in G$ se dice que es conjugado de $a \in G$ si existe otro elemento del grupo p tal que $b = pap^{-1}$. Usualmente denotamos esta relación de conjugación como $b \sim a$.

Definición 2.3.1 (Clases) El conjunto de todos los elementos de un grupo que son conjugados uno con otro se dice que forman una clase.

Cada elemento de un grupo pertenece a una y sólo una clase. El elemento identidad forma una clase por sí mismo. El producto de dos elementos que pertenecen a la misma clase no necesariamente pertenecerá a esta misma clase.

Si H es un subgrupo de G y $a \in G$, entonces $H' = \{aha^{-1} | h \in H\}$ también forma un subgrupo de G . H' se dice que es un subgrupo conjugado de H .

Definición 2.3.1 (Subgrupo Invariante ó Subgrupo Normal) *Un subgrupo invariante H de G es aquél subgrupo que es idéntico a todos sus subgrupos conjugados.*

Un subgrupo H es invariante si y solo si contiene elementos de G en clases completas. De ahí que todos los subgrupos de un grupo Abeliiano sean invariantes. No hay que confundir el concepto de *subgrupo invariante* con el de *subespacio invariante*, concepto que es de gran importancia en la teoría de representaciones de los grupos y que en las secciones posteriores lo trataremos.

Todo grupo G tiene al menos dos subgrupos invariantes *triviales*: $\{e\}$ y G mismo. Si el grupo tiene a parte de estos subgrupos invariantes triviales otros subgrupos invariantes, el grupo puede ser en cierta forma “simplificado” o “factorizado” en formas que más adelante comentaremos.

Definición 2.3.1 (Grupos Simples y Semisimples) *Un grupo se dice que es simple si no contiene subgrupos invariantes no triviales. Un grupo es semisimple si no contiene subgrupos invariantes Abelianos.*

Definición 2.3.1 (Cosets ó Clases Laterales) *Sea $H = \{h_1, h_2, \dots\}$ un subgrupo de G y sea p un elemento de G que no este en H , entonces el conjunto de elementos $pH = \{ph_1, ph_2, \dots\}$ es llamado un coset izquierdo. Similarmente $Hp = \{h_1p, h_2p, \dots\}$ es llamado un coset derecho.*

Cualquier cosa que se asevera para los cosets izquierdos tiene su contraparte para los cosets derechos, así que es habitual el exponer resultados para cosets izquierdos solamente. Los cosets no son subgrupos aunque H sea un subgrupo, ya que el coset no contiene a la identidad. Sin embargo, sí forman un grupo bajo la composición $ph_1 \circ ph_2 = p(h_1h_2)$, donde h_1 y h_2 son dos elementos cualquiera de H . Dos cosets izquierdos de un subgrupo H ó coinciden completamente ó no tienen ningún elemento en común, de ahí que sea una forma natural única de particionar el grupo. Cualquier coset izquierdo gH de un subgrupo invariante H es idéntico con el correspondiente coset derecho, es decir $gH = Hg$.

Teorema 2.3.1 (Grupo Cociente ó Grupo Factor) *Si H es un subgrupo invariante de G , el conjunto de cosets $\{F_k | F_k = g_k H \quad \forall g_k \in G\}$ forma un grupo bajo la multiplicación $F_k \circ F_l = g_k H \circ g_l H = (g_k g_l) H$. llamado grupo cociente de G . El grupo factor se denota como G/H y es de orden n_G/n_H .*

El concepto de grupo cociente es muy importante cuando se analiza un grupo que puede ser descrito en base a grupos más simples, como el caso del *producto directo* de dos grupos y la definición del *kernel* o núcleo de un homomorfismo entre dos grupos.

Teorema 2.3.1 *Sea f un homomorfismo de G a G' . Denote con K al conjunto de todos los elementos en G que son mapeados al elemento identidad de G' , es decir, $K = \{a \in G : a^{-1} \cdot a = e' \in G'\}$. Entonces K forma un subgrupo invariante de G y el grupo factor G'/K es isomorfo a G' . El conjunto K es llamado el núcleo ó kernel del homomorfismo.*

Definición 2.3.1 (Producto Directo de Grupos) *Sean H_1 y H_2 dos subgrupos de G con las siguientes propiedades: (i) cualquier elemento de H_1 conmuta con cualquier otro elemento de H_2 ; y (ii) cualquier elemento g de G puede ser escrito de manera única como $g = h_1 h_2$ donde $h_1 \in H_1$ y $h_2 \in H_2$. En este caso se dice que G es el producto directo de H_1 y H_2 ; simbólicamente, $G = H_1 \otimes H_2$.*

Si $G = H_1 \otimes H_2$, entonces H_1 y H_2 son subgrupos invariantes de G . Además se puede probar que el grupo cociente $G/H_2 \cong (G/H_1)$ es isomorfo a $H_1 \cong (H_2)$, es decir $G/H_2 \cong H_1$ ($G/H_1 \cong H_2$). De aquí el porque se usa la notación de “producto” y “cociente”.

2.4. Representación de Grupos

En física clásica, uno está interesado en el efecto de las transformaciones de simetría sobre las soluciones a las ecuaciones diferenciales parciales o ecuaciones integrales de la “matemática física”. En mecánica cuántica, esta conexión es más directa, ya que los espacios lineales vectoriales se postulan como el marco matemático sobre el que se fundamenta la teoría. De aquí que exista un interés primordial en estudiar como las transformaciones de grupo inducen una transformación en el espacio vectorial físico de interés. Esta transformación es lineal y es representada con *operadores lineales* que actúan sobre el espacio vectorial, y aunque existen operadores que no son lineales, no los ocuparemos en esta tesis, así que usaremos los términos *transformación lineal* y *operador* intercambiamente.

Definición 2.4.1 (Representación de un Grupo) *Si existe un homomorfismo de un grupo G a un grupo de operadores $U(G)$ en un espacio vectorial lineal V , decimos que $U(G)$*

forma una representación del grupo G . Una representación es fiel (faithful en inglés) si el homomorfismo es un isomorfismo. Una representación degenerada es una que no es fiel.

Parafraseando esta definición, podemos decir que, tenemos en un espacio vectorial V una representación del grupo G si a cada elemento g , de G lo asociamos con uno (isomorfismo) ó más (homomorfismo) operadores lineales $U(g)$ en V , tal que se preserve el producto del grupo, es decir,

$$\begin{aligned} \text{Si } g_1 \in G &\xrightarrow{U} U(g_1) \\ g_2 \in G &\xrightarrow{U} U(g_2) \\ \text{Y } g_1 g_2 &= g_3 \\ \Rightarrow U(g_1)U(g_2)v &= U(g_1 g_2)v = U(g_3)v \end{aligned}$$

Para todo vector $|u\rangle$ en V . Considere el caso de representaciones en un espacio vectorial de dimensión finita y escoja un conjunto de vectores base $\{|e_i\rangle, i = 1, 2, \dots, n\}$. La actuación de cualquiera de los operadores de grupo $U(g)$ sobre cualquiera de los vectores base se puede llevar a cabo haciendo uso de una matriz de $n \times n$, $D(g)$, de la siguiente forma:

$$U(g)|e_i\rangle = D(g)^j_i |e_j\rangle$$

Donde hemos hecho uso de la notación de sumatoria de Einstein. Uno puede demostrar utilizando esta última ecuación y el hecho de que $\{|e_i\rangle\}$ forma una base en V , que,

$$D(g_1)D(g_2) = D(g_1 g_2) = D(g_3)$$

Donde la multiplicación significa multiplicación matricial y de aquí que $D(G) = \{D(g), g \in G\}$ satisfacen la misma álgebra que $U(G)$ y por tanto forman una *representación matricial* de G .

Teorema 2.4.1 (i) Si el grupo G tiene un subgrupo invariante no trivial H , entonces cualquier representación del grupo factor $K = G/H$ también es una representación del grupo G . Esta representación es degenerada, es decir, no es uno a uno. (ii) Contrariamente, si $U(G)$ es una representación no fiel de G , entonces G tiene al menos un subgrupo invariante H tal que $U(G)$ sí es una representación fiel para el grupo factor G/H .

Una consecuencia interesante de este teorema es que todas las representaciones (excepto la trivial, donde todos los elementos de G se mapean al único elemento del grupo identidad $\{e\}$) de todos los grupos *simples* son uno a uno (fieles).

Un hecho muy importante y cierto para la mayoría de los grupos de interés es que, las posibles representaciones que pueden tener están limitadas y pueden numerarse. De aquí que, una vez especificado el grupo de simetrías de un problema, la estructura de los posibles espacios vectoriales de interés quedan determinados en gran parte. Es entonces importante poder distinguir entre las representaciones que son esencialmente diferentes, ó inequivalentes, de las que son redundantes, ó equivalentes. Una posible redundancia entre representaciones ocurre cuando están relacionadas mediante una transformación de similaridad.

Definición 2.4.1 (Representaciones Equivalentes) Sea $U(G)$ una representación de un grupo G en un espacio vectorial V y sea S un operador invertible en V . Entonces, el conjunto de operadores definidos por $U'(G) = SU(G)S^{-1}$ también forman una representación del grupo. Este tipo de transformación se conoce como transformación de similaridad y se dice que la representación $U'(G)$ es equivalente a la representación $U(G)$.

Esta redundancia surge del hecho de que dos representaciones equivalentes forman una *clase de equivalencia*, en el sentido matemático. Es suficiente con conocer un solo miembro de la clase, los otros pueden ser generados realizando todas las posibles transformaciones de similaridad.

Un segundo tipo de redundancia es la concerniente a la suma directa de dos representaciones. La suma directa de las representaciones $D_1(G)$ y $D_2(G)$, es una tercera representación $D(G)$, denotada como $D(G) = D_1(G) \oplus D_2(G)$. Para alguna elección de base en el espacio V_n , donde actúan estos operadores, los elementos de la suma directa están dados por,

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_2(g) \end{pmatrix}$$

$D(G)$ no contiene mas información que la información ya contenida en $D_1(G)$ y $D_2(G)$. Existe una basta cantidad de resultados en la teoría de grupos para caracterizar a las representaciones esencialmente inequivalentes. A continuación mencionaremos algunos de

los resultados más importantes y que son usados implícitamente en un momento u otro durante la tesis.

Definición 2.4.1 (Subespacio Invariante) Sea $U(G)$ una representación de G en el espacio vectorial V y V_1 un subespacio de V con la propiedad de que si $|x\rangle \in V_1$ entonces $U(g)|x\rangle \in V_1$ para todo $g \in G$. Se dice entonces que V_1 es un subespacio invariante de V respecto de $U(G)$. Un subespacio invariante se dice que es mínimo o propio si no contiene subespacios invariantes él mismo, que sean no triviales.

Es decir, si la acción de cualquier operador de la representación del grupo G sobre cualquier elemento de V_1 se mapea sobre otro elemento que sigue estando en V_1 , entonces V_1 es un subespacio invariante de V .

Definición 2.4.1 (Representaciones Irreducibles) Una representación $U(G)$ en V se dice que es irreducible si no existen subespacios invariantes no triviales en V con respecto de $U(G)$.

Veamos la forma general de las matrices de una representación reducible en V . Como la representación es reducible en V , V tiene al menos un subespacio invariante, llámelo V_1 . Ahora, siempre podemos escoger un conjunto de vectores base $\{|\tilde{e}_j\rangle, j = 1, \dots, n\}$ en V donde los primeros n_1 vectores estén en V_1 . Ya que V_1 es un subespacio invariante, la acción de cualquier elemento del grupo en una representación definida en este subespacio $D_1(g)$ sobre cualquier elemento de este subespacio está dada por,

$$D_1(g) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_{n_1} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

y la acción de cualquier elemento de la representación reducible definida en V sobre cualquier vector en V_1 tiene que ser entonces de la forma,

$$D(g) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_{n_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1(g) & D'(g) \\ \mathbf{0} & D_2(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Donde $D_1(g)$ y $D_2(g)$ son matrices cuadradas de dimensión n_1 y $D'(g)$ una matriz rectangular de $n_1 \times n_2$, donde $n_2 = n - n_1$. Entonces como lo habíamos visto anteriormente, todas las propiedades esenciales ya están contenidas en $D_1(g)$ y $D_2(g)$, de aquí que sea natural enfocar el estudio de las representaciones de grupos sobre representaciones irreducibles únicamente.

Definición 2.4.1 (Representaciones Unitarias) *Si el espacio vectorial de representación de un grupo es un espacio con producto interno, y si los operadores $U(g)$ son unitarios para todos los elementos del grupo, entonces se dice que la representación $U(G)$ es una representación unitaria.*

Teorema 2.4.1 *Toda representación $D(G)$ de un grupo finito definida en un espacio con producto interno es equivalente a una representación unitaria.*

Este teorema sigue siendo válido aún para grupos infinitos (ó grupos continuos que necesariamente son infinitos) si son definidos apropiadamente la integración y la medida de integración sobre elementos del grupo. Grupos que satisfacen esta característica y que aparecen comúnmente en aplicaciones físicas son el grupo de rotaciones en el espacio Euclideo n dimensional, llamado $O(n)$, el grupo unitario $U(n)$ y el grupo especial unitario $SU(n)$.

A continuación exponemos los resultados centrales de la teoría de representaciones.

Teorema 2.4.1 (Primer Lema de Schur) *Sea $U(G)$ una representación irreducible de un grupo G sobre un espacio vectorial V y A un operador arbitrario en V . Si A conmuta con*

todos los operadores del grupo, es decir, $AU(g) = U(g)A$ para todo g , entonces A debe ser un múltiplo del operador identidad, $A = \lambda E$, donde λ es un escalar.

Teorema 2.4.1 (Segundo Lema de Schur) Sean $U(G)$ y $U'(G)$ dos representaciones irreducibles de G en los espacios vectoriales V y V' respectivamente, y sea A una transformación lineal de V' a V que satisface $AU'(g)[x'] = U(g)A[x']$ para todo x' en V' y todo g . Se sigue entonces que, (i) $A = 0$, ó (ii) V y V' son isomorfos y $U'(G)$ es equivalente a $U(G)$.

2.5. Grupos Continuos

En esta sección, como ha sido el estilo de este capítulo, exponemos brevemente las principales definiciones y resultados sobre la teoría de grupos continuos. Se puede consultar a profundidad cualquiera de estos temas en la literatura [16, 17, 18].

En una clasificación muy general de los grupos, podemos dividirlos en grupos finitos y grupos infinitos, según el número de elementos de los que consta el grupo. Los grupos infinitos se dividen además en numerables y no numerables. Estos últimos son los llamados grupos continuos ó grupos infinitamente no denumerables. La gran parte de los resultados que existen sobre grupos infinitos denumerables se pueden aplicar a los grupos continuos, aunque existen importantes excepciones. Prácticamente todos los resultados aplican cuando tenemos un grupo compacto de Lie.

Definición 2.5.1 (Grupo Continuo) Un grupo continuo G es aquel grupo que puede ser caracterizado por un conjunto de parámetros reales (a_1, a_2, \dots, a_n) donde al menos uno de ellos varía continuamente sobre un cierto intervalo.

Prácticamente todos los grupos usados en física tienen todos sus parámetros continuos, entonces se denomina $n = r$, donde r es el número total de parámetros continuos. Usualmente uno se restringe a grupos cuyos elementos pueden ser mapeados en una correspondencia uno-a-uno con los puntos de subconjunto de un espacio métrico real r -dimensional S_r dotado con un producto interno d . Este subconjunto se denomina el *espacio de parámetros*. Este concepto y algunos otros adicionales permiten la introducción de una topología

en el grupo. Sea $P(g)$ el punto de S_r que le corresponde al elemento g del grupo continuo G . Se dice que $P(g)$ es la imagen del elemento g .

Definición 2.5.1 (Conectividad) Sean g_1 y g_2 dos elementos cualquiera del grupo continuo G . Si es posible conectar $P(g_1)$ y $P(g_2)$ por una ó más curvas que residen enteramente en el espacio de parámetros, se dice que el grupo es conexo.

El hecho de que un grupo sea continuo no significa que es conexo. Un caso típico es el grupo $O(3)$, que es el grupo de matrices 3×3 que llevan a cabo rotaciones e inversiones espaciales. El elemento identidad es la matriz identidad que tiene determinante 1, sin embargo la matriz de inversión espacial tiene determinante -1 y no hay forma de pasar continuamente de la identidad a la inversión espacial.

Definición 2.5.1 (Compacidad) Un grupo continuo se dice que es compacto si el espacio de parámetros es un espacio compacto, es decir, que es cerrado¹ y acotado².

La dependencia de los elementos g_1, g_2 , etc. que pertenecen a G con sus r continuos parámetros se puede escribir explícitamente como, $g_1 \equiv g_1(a_1, \dots, a_r)$, $g_2 \equiv g_2(b_1, \dots, b_r)$, etc. Sean $g_1 g_2 = g_3(c_1, \dots, c_r)$ y $g_1^{-1} = g_4(d_1, \dots, d_r)$. Los parámetros de g_3 y g_4 pueden ser expresados como funciones de los parámetros de g_1 y g_2 , es decir,

$$c_i \equiv c_i(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_r), \quad (2.3)$$

$$d_i \equiv d_i(a_1, \dots, a_r), \quad (2.4)$$

para $1 \leq i \leq r$.

Definición 2.5.1 (Grupo de Lie) Se dice que un grupo G es un grupo de Lie si para cualquier par de elementos g_1 y g_2 en G , la funciones c_i y d_i en (2.3) son funciones analíticas.

¹Un conjunto es cerrado si toda secuencia de Cauchy tiene como límite un elemento que pertenece al conjunto.

²Un espacio métrico es acotado si para todo par de elementos x y y en este espacio, su producto interno $d(x, y)$ es menor que un cierto número B .

Si consideramos a los elementos del grupo G como operadores en un espacio vectorial, debido a la naturaleza analítica del grupo, podemos realizar una expansión con respecto a uno de los parámetros alrededor de la identidad,

$$g(0, 0, \dots, a_j, \dots, 0) = g(0, 0, \dots, 0) + a_j \left(\frac{\partial g}{\partial a_j} \right)_{a_j=0} + \dots \quad (2.5)$$

donde se define al operador,

$$J_j = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial g}{\partial a_j} \right)_{a_j=0} \quad (2.6)$$

como el *generador* del grupo con respecto al parámetro a_j , y donde suele tomarse la parametrización del elemento identidad como $g(0, 0, \dots, 0)$. Estos operadores (definiendo un generador por cada parámetro) definen todas las propiedades del grupo a nivel local de cualquier elemento muy cercano a la identidad, ya que el elemento $g(0, 0, \dots, \Delta a_j, \dots, 0)$, donde Δa_j es una cantidad muy cercana a cero y por tanto este elemento está muy cerca de la identidad I , se puede escribir como,

$$g(0, 0, \dots, \Delta a_j, \dots, 0) \approx I + i\Delta a_j J_j \quad (2.7)$$

Con una aplicación sucesiva de la regla del producto del grupo, podemos arivar a un elemento a una distancia finita de la identidad. Tomando $a_j = N\Delta a_j$, donde N es un número entero muy grande y Δa_j una cantidad muy pequeña, entonces,

$$\begin{aligned} g(0, 0, \dots, a_j, \dots, 0) &= [g(0, 0, \dots, \Delta a_j, \dots, 0)]^N \\ &= [I + i\Delta a_j J_j]^N, \\ &= \left[I + \frac{ia_j J_j}{N} \right]^N \end{aligned} \quad (2.8)$$

Si uno permite que N tienda a infinito y Δa_j a cero de forma tal que su producto permanezca siendo a_j , esta última expresión se convierte en,

$$g(0, 0, \dots, a_j, \dots, 0) = e^{ia_j J_j} \quad (2.9)$$

donde se ha hecho uso de la bien conocida identidad algebraica,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N} \right)^N = e^x. \quad (2.10)$$

Este resultado se puede generalizar para un grupo continuo con cualquier número de parámetros. Por ejemplo, para un grupo con dos parámetros, el elemento $g(a_1, a_2)$ que se encuentra a una distancia finita de la identidad se puede escribir como,

$$\begin{aligned} g(a_1, a_2) &= [g(\Delta a_1, \Delta a_2)]^N, \\ &= [I + i\Delta a_1 J_1 + i\Delta a_2 J_2]^N, \\ &= \left[I + \frac{ia_1 J_1 + ia_2 J_2}{N} \right]^N, \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde Δa_1 y Δa_2 son cantidades muy pequeñas pero que están en una razón tal que permitan que $a_1 = N\Delta a_1$ y $a_2 = N\Delta a_2$. Así que, haciendo que N tienda a infinito con Δa_1 y Δa_2 ambos tendiendo a cero pero conservando su proporción relativa, llegamos a

$$g(a_1, a_2) = e^{ia_1 J_1 + ia_2 J_2} \quad (2.12)$$

Estas demostraciones no pretenden ser completamente rigurosas, sin embargo, los resultados así lo son. Para un grupo con r parámetros tenemos la generalización siguiente,

$$g(a_1, a_2, \dots, a_r) = \exp\left(\sum_{j=1}^r ia_j J_j\right) \quad (2.13)$$

Es un resultado muy importante de la teoría de grupos de Lie que el conmutador de cualquier par de generadores está dado por una combinación lineal de los generadores, es decir,

$$[J_i, J_j] = J_i J_j - J_j J_i = \sum_k C_{ij}^k J_k, \quad (2.14)$$

donde a los números C_{ij}^k se les conoce como constantes de estructura. Note que este resultado es una condición suficiente para satisfacer la regla del producto de elementos en el grupo y que lo define completamente, ya que, usando la identidad de Baker-Campbell-Hausdorff,

$$\begin{aligned} g(a_1, \dots, a_r)g(b_1, \dots, b_r) &= \exp\left(\sum_{j=1}^r ia_j J_j\right) \exp\left(\sum_{j=1}^r ib_j J_j\right) = \exp(X) \exp(Y), \\ &= \exp\left(X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{12}[Y, [X, Y]] + \frac{1}{48}[Y, [X, [X, Y]]] + \dots\right), \\ &= \exp\left(\sum_{j=1}^r ic_j J_j\right) = g(c_1, c_2, \dots, c_r), \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde las constantes c_j quedan totalmente definidas si conocemos todos los pares de conmutadores entre generadores. La expresión (2.14) permite definir un *álgebra* de Lie con respecto a los generadores.

Un concepto de gran importancia en la teoría de grupos continuos, y en especial en esta tesis, es el de operador Casimir.

Definición 2.5.1 (Operador Casimir) *Un operador C que conmuta con todos los generadores de un grupo G se conoce como operador Casimir del grupo.*

Un grupo puede tener uno ó más operadores Casimir. Estos operadores juegan un papel muy importante en la caracterización de las representaciones irreducibles de un grupo, ya que, si C conmuta con todos los generadores, entonces conmuta con todos los elementos del grupo y por el primer lema de Schur, debe ser un múltiplo del operador identidad, es decir, $C = \lambda I$, donde la constante λ caracteriza a la representación irreducible en cuestión. Se puede demostrar que uno de los operadores Casimir para un grupo semisimple siempre es de la forma,

$$C = \sum_{i,j} g_{ij} X_i X_j. \quad (2.16)$$

donde g_{ij} es el tensor métrico del espacio donde actúan los elementos del grupo como operadores lineales, y X_i es un generador del grupo. Como g_{ij} es una matriz real y simétrica, puede llevarse a la forma diagonal por una transformación de similaridad, es decir, un cambio de base, y entonces, en una base apropiada tenemos,

$$C = \sum_i g_i X_i^2 \quad (2.17)$$

Capítulo 3

Descripción actual del campo de espín $3/2$

3.1. Introducción.

La descripción de espines altos data de los años 40's en los trabajos [6, 7, 20], y desde entonces se conocen las agudas dificultades que aquejan a estos sistemas, las cuales se presentan en forma de inconsistencias que no han sido resueltas por completo a la fecha. En este capítulo presentamos la descripción estándar usada actualmente para describir espines altos ($s > 1$) y en específico, la usada para describir partículas con espín $3/2$. Así también, expondremos el problema de Velo-Zwanziger [10] para las ecuaciones de movimiento del campo de espín $3/2$, una de las varias inconsistencias que aquejan a la teoría al nivel clásico de las ecuaciones de movimiento. En los siguientes capítulos orientaremos nuestros esfuerzos por tratar de solucionar este problema mediante un aparato teórico consistente de estos sistemas que este basado sobre los principios fundamentales detrás de la descripción de espines altos, los cuales, a nuestro parecer, no son explotados por la descripción actual.

3.2. Descripción de Rarita-Schwinger para espines fraccionarios altos

La formulación de Rarita-Schwinger para espines semi enteros altos es una descripción alternativa a la originalmente propuesta por Fierz y Pauli [6], que contenía algunas desventajas, como por ejemplo, la necesidad de campos auxiliares entre otras cosas. Las ecuaciones para el campo libre de espín $k + \frac{1}{2}$ actúan sobre la función de onda $\psi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}^b$ que tiene las propiedades mixtas de transformación de un cuádris-espinor de Dirac, que operan sobre el índice de Dirac b y las de un tensor simétrico de rango k . En este punto y el resto de la tesis omitiremos el uso de los índices espinoriales de Dirac y usaremos la notación explicada en el apéndice A. La función de onda $\psi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}$ contiene partes que se transforman ante rotaciones espaciales de acuerdo a las representaciones $D_{\frac{1}{2}} \otimes D_0, D_{\frac{1}{2}} \otimes D_1, \dots, D_{\frac{1}{2}} \otimes D_{k-1}, D_{\frac{1}{2}} \otimes D_k$ del grupo espacial de rotaciones. Es entonces el propósito de las ecuaciones de campo libre de Rarita-Schwinger, proyectar el estado de mayor espín contenido en $\psi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}$, es decir, $s = k + \frac{1}{2}$, con un cuádrimomento sobre la capa de la masa. Las ecuaciones de Rarita-Schwinger son,

$$(\gamma^\nu P_\nu - m) \psi_{\mu_1 \dots \mu_k} = 0, \quad (3.1)$$

$$\gamma^\alpha \psi_{\alpha \mu_2 \dots \mu_k} = 0, \quad (3.2)$$

donde $P_\nu = i\partial_\nu$.

La verificación de que tales campos están de hecho asociados con partículas de espín $(k + \frac{1}{2})$, de acuerdo a [7], puede proceder, ya sea, demostrando que el número de soluciones de ondas planas independientes con energía y momento bien definidos son $2(k + \frac{1}{2}) + 1$, o por prueba directa de que el cuadrado del momento angular intrínseco es $(k + \frac{1}{2})((k + \frac{1}{2}) + 1)$. En la siguiente sección particularizamos nuestro estudio para campo con espín 3/2 y el acoplamiento con un potencial electromagnético externo.

3.3. Descripción para el campo libre de espín 3/2

De acuerdo a la prescripción de Rarita-Schwinger para espines semi enteros altos, el campo con espín 3/2 estaría descrito por el cuadrivector-espinores ψ_μ ,

$$\psi_\mu = A_\mu \otimes \psi \simeq \left[\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \oplus \left(\frac{1}{2}, 0 \right) \oplus \left(0, \frac{1}{2} \right) \right] \quad (3.3)$$

donde el símbolo ‘ \simeq ’ significa “se transforma como”. Es decir, ψ_μ es el producto directo del cuadrivector A_μ que se transforma de acuerdo a la representación vectorial del grupo de Lorentz, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, y el espinores de Dirac ψ que se transforma de acuerdo a la representación $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ del grupo de Lorentz.

Consecuentemente, para esta descripción, las ecuaciones de movimiento para el campo de espín 3/2 son,

$$(\gamma^\nu P_\nu - m) \psi_\mu = 0. \quad (3.4)$$

$$\gamma^\alpha \psi_\alpha = 0. \quad (3.5)$$

Estas son las ecuaciones de Rarita-Schwinger para el campo *libre*. La primera de ellas no es más que la declaración explícita de que ψ_μ tiene una parte que se transforma de acuerdo a la representación $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ del grupo de Lorentz, y por tanto, la evolución de esta componente está regida por la ecuación de Dirac. La segunda ecuación se conoce como ecuación auxiliar, subsidiaria ó de restricción. Esta ecuación pretende proyectar fuera las componentes con espín 1/2 y seleccionar únicamente la parte más alta de espín 3/2. La ecuación subsidiaria de la teoría para espines enteros se sigue como consecuencia de estas ecuaciones,

$$\partial_\nu \psi^\nu = 0 \quad (3.6)$$

La tesis pretende hacer un estudio de los problemas que aquejan a la descripción del campo cuando éste se acopla a un potencial electromagnético externo y entonces, contribuir a proponer soluciones. En la siguiente sección estudiamos el marco de Rarita-Schwinger para el campo de espín 3/2 cuando interacciona con un campo electromagnético.

3.4. Acoplamiento al campo electromagnético

La interacción de la partícula de espín 3/2 con un potencial electromagnético externo no puede ser tomada en cuenta mediante el principio de mínimo acoplamiento sobre las ecuaciones (3.4) y (3.5), el cual consiste en hacer la sustitución¹,

$$P_\mu \rightarrow P_\mu + qA_\mu = \pi_\mu \quad (3.7)$$

donde, en esta última ecuación, A_μ es el cuadrivector de potencial electromagnético. Esto debido a que el procedimiento conduce a inconsistencias algebraicas que ya se conocían también de hace mucho tiempo. Para evitar esta dificultad, Fierz y Pauli [6] propusieron un método en el que tanto las ecuaciones de movimiento como las restricciones son derivadas de un Lagrangiano apropiado, cuyas soluciones libres corresponden a partículas libres de única y bien definida masa y espín. La interacción es entonces introducida ahora si mediante la sustitución mínima (3.7). Las inconsistencias algebraicas son evitadas, pero un número de problemas más sutiles aparecen, como la imposibilidad de propagar, reportado por Johnson y Sudarshan [9], así como el resultado de que los frentes de onda de las soluciones a nivel clásico se propagan más rápido que la luz, lo que implica un comportamiento acausal, reportado por Velo y Zwanziger [10, 11], sobre el cuál profundizaremos más adelante.

Las ecuaciones (3.4) y (3.5) son derivables de cualquier conjunto de Lagrangianos obtenidos mediante la familia de densidades dependientes del parámetro libre A ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A) = \bar{\psi}^\kappa & \left((\gamma^\lambda P + m) g_\kappa^\lambda + A(\gamma_\kappa P^\lambda + P_\kappa \gamma^\lambda) \right. \\ & \left. + \left(\frac{3}{2} A^2 + A + \frac{1}{2} \right) \gamma_\kappa \gamma^\lambda \cdot P \gamma^\lambda - (3A^2 + 3A + 1)m \gamma_\kappa \gamma^\lambda \right) \psi_\lambda, \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde A puede tomar cualquier valor real excepto $(-1/2)$. Las ecuaciones (3.4), (3.5) y (3.6) son obtenidas mediante la variación con respecto a ψ_λ en esta densidad Lagrangiana y operando sobre la ecuación resultante con γ^κ y $\bar{\partial}^\kappa$. De manera idéntica se pueden obtener las ecuaciones adjuntas haciendo la variación con respecto de $\bar{\psi}^\kappa$.

Para el caso donde tenemos una interacción con el campo electromagnético debemos buscar un Lagrangiano² que satisfaga los siguientes requerimientos.

¹Vease al apéndice A para las convenciones usadas

²Adoptaremos la convención ampliamente usada de llamar a la densidad Lagrangiana simplemente Lagrangiano

1. Que sea un invariante relativista e invariante bajo transformaciones de la norma (gauge invariant).
2. Para campos electromagnéticos nulos éste debe reducirse a (3.8)
3. Las ecuaciones que de éste se deriven, deben contener tantas condiciones subsidiarias como se necesiten para que la función de onda tenga el mismo número de componentes linealmente independientes como en el caso libre, y que de esta manera, sea apropiada para describir una partícula con el mismo espín y masa.

Como se demuestra en [21], todos estos requerimientos son cumplidos si consideramos (3.8) con la sustitución mínima $P_\mu \rightarrow \pi_\mu$.

A continuación revisaremos el problema de acausalidad encontrado por Velo y Zwanziger que aqueja la descripción de espín 3/2 mediante las ecuaciones obtenidas de Lagrangiano (3.8). Esta sección presenta los resultados contenidos en las referencias [10, 11] y sigue el desarrollo de los artículos muy de cerca.

3.5. El problema de Velo-Zwanziger

Velo y Zwanziger estudian el caso para el que $A = -1$, evidenciando con esto que las propiedades de propagación del campo presentan serios problemas. El Lagrangiano usado por Velo y Zwanziger para $A = -1$ es

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^{\lambda} \left((\gamma \cdot \pi + m) g_{\kappa}^{\lambda} - (\gamma_{\kappa} \pi^{\lambda} + \pi_{\kappa} \gamma^{\lambda}) + \gamma_{\kappa} \gamma^{\lambda} \cdot \pi \gamma^{\lambda} - m \gamma_{\kappa} \gamma^{\lambda} \right) \psi_{\lambda} \quad (3.9)$$

Para propósito de esta sección utilizaremos las convenciones usadas por Velo y Zwanziger en la referencia [10], para una directa comparación con este. Sin embargo, varias de estas convenciones no serán usadas en los próximos capítulos, donde usaremos las nuestras propias (apéndice A).

Rescribimos el Lagrangiano a la Velo-Zwanziger,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^{\lambda} \left((\Gamma \cdot \pi)_{\kappa}^{\lambda} - B_{\kappa}^{\lambda} \right) \psi_{\lambda}. \quad (3.10)$$

donde³

$$\begin{aligned} (I^\nu \cdot \pi)_\kappa^\lambda &= \pi q_\kappa^\lambda - (\gamma_\kappa \bar{\pi}^\lambda + \bar{\pi}_\kappa \gamma^\lambda) + \gamma_\kappa \gamma^\lambda \bar{\pi} \gamma^\lambda \\ &= \gamma_\nu \epsilon^{\nu\lambda\mu} \gamma^\nu \bar{\pi}_\mu. \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} B_\kappa^\lambda &= -m \sigma_\kappa^\lambda \\ &= m(g_\kappa^\lambda - \gamma_\kappa \gamma^\lambda) \end{aligned} \quad (3.12)$$

La segunda expresión que aparece en (3.11), se puede demostrar fácilmente, que es equivalente a la expresión que aparece en el primer renglón de dicha fórmula, mediante el uso de (A.20), tomando en cuenta la convención apropiada. La variación del Lagrangiano con respecto a las 16 componentes independientes de ψ resulta en las ecuaciones de movimiento de Rarita-Schwinger.

$$\left((I^\nu \cdot \pi)_\kappa^\lambda - B_\kappa^\lambda \right) \psi_\lambda = 0, \quad (3.13)$$

de la misma manera se obtiene una ecuación de movimiento para las componentes adjuntas $\bar{\psi}^{\mu} = (\psi^\mu)^\dagger \gamma^0$.

Debido a que las componentes independientes de campo que se necesitan para describir una partícula de espín 3/2 son 8 (4 grados de libertad para partícula y 4 para antipartícula) y en (3.13) tenemos un exceso de ellas (16 en total), algunas de las ecuaciones contenidas en estas expresiones resultarán ser condiciones auxiliares o subsidiarias en el sentido que no son ecuaciones de movimiento, y por tanto, no involucran derivadas con respecto al tiempo, de tal forma que una componente puede ser eliminada en términos de otras. Estas ecuaciones subsidiarias deben ser consecuencia de (3.13), y al ser tomadas en cuenta, deben dejarnos con un número total de 8 componentes linealmente independientes de la función de onda, tal como ha sido requerido en el punto 3 anteriormente mencionado. Podemos ver que cuando $\kappa = 0$, la Ec. (3.13) no contiene derivadas con respecto del tiempo, y en lugar de ser una ecuación de movimiento, resulta ser una ecuación de restricción

³Las convenciones de Velo y Zwanziger son $\gamma_0 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3, \epsilon^{0123} = 1$ y $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)$

primaria, ya que,

$$\begin{aligned} (\Gamma \cdot \pi)_0^\lambda \psi_\lambda &= \gamma^0 \pi \psi_0 - \gamma_0 \pi \cdot \psi + \pi_0 \gamma \cdot \psi + \gamma_0 \bar{\gamma} \cdot \pi \gamma \cdot \psi \\ &= (\gamma_0 \pi^0 - \bar{\gamma} \cdot \bar{\pi}) \psi_0 - \gamma_0 (\pi^i \psi_0 - \bar{\pi} \cdot \psi^i) - \pi_0 (\gamma_0 \psi^0 - \bar{\gamma} \cdot \psi^i) \\ &\quad + \gamma_0 (\gamma^0 \pi_0 - \bar{\gamma} \cdot \bar{\pi}^i) (\gamma_0 \psi^0 - \bar{\gamma} \cdot \psi^i) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$-B_0^\lambda \psi_\lambda = -m \bar{\gamma} \cdot \psi \quad (3.15)$$

donde $\bar{\pi} = (\pi^i)$, $\bar{\gamma} = (\gamma^i)$, $\bar{\psi} = (\psi^i)$ $i = 1, 2, 3$. Tomando en cuenta estas ecuaciones, junto con $\gamma_0 \gamma^0 = \gamma^i \gamma_i = 1$ y $\{\gamma^0, \gamma^i\} = 0$ para $i = 1, 2, 3$, la componente $\psi^0 = 0$ de la Ec. (3.13) resulta ser, después de un poco de algebra,

$$[\bar{\pi} + (\bar{\gamma} \cdot \bar{\pi} - m) \bar{\gamma}] \cdot \psi = 0 \quad (3.16)$$

La Ec.(3.16) es la ecuación primaria de restricción. Note que no contiene derivadas con respecto al tiempo, y que de hecho, la componente ψ^0 nunca aparece en esta ecuación, de tal forma que no podemos eliminarla en favor de las otras componentes mediante el uso de ésta expresión. Más aún, considerando las Ecs.(3.11) y (3.12) podemos observar que $\frac{d}{dt} \psi^0$ nunca aparece en la Ec.(3.13) y no se puede determinar mediante la Ec.(3.16) ya que esta no contiene a ψ^0 . Para obtener una ecuación que contenga ψ^0 debemos diferenciar de una forma covariante la Ec.(3.13). Esto se puede llevar a cabo tomando la sugerencia hecha por Velo y Zwanziger, que consiste en contraer la Ec.(3.13) sucesivamente por γ^κ y π^κ . Tomando la contracción con γ^κ ,

$$\begin{aligned} \gamma^\kappa \left((\Gamma \cdot \pi)_\kappa^\lambda - B_\kappa^\lambda \right) \psi_\lambda &= (\gamma^\lambda \gamma \cdot \psi - (4\pi^\lambda + \gamma \cdot \psi \gamma^\lambda) + 4\bar{\gamma} \cdot \pi \gamma^\lambda + 3m \gamma^\lambda) \psi_\lambda \\ &= 2(\gamma \cdot \pi \gamma - \pi) \cdot \psi + 3m \gamma \cdot \psi = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Para la contracción con π^κ usamos la forma alternativa de expresar $(\Gamma \cdot \psi)$,

$$\begin{aligned} \pi^\kappa \left((\Gamma \cdot \pi)_\kappa^\lambda - B_\kappa^\lambda \right) \psi_\lambda &= (\gamma_5 \epsilon_{\kappa\nu}{}^{\mu\lambda} \gamma^\nu \pi^\mu \pi_\mu - m(\pi^\lambda - \gamma \cdot \pi \gamma^\lambda)) \psi_\lambda \\ &= \left(\gamma_5 \gamma_\nu \epsilon^{\kappa\nu\mu\lambda} \frac{1}{2} (\{\pi_\kappa, \pi_\mu\} - \{\pi_\mu, \pi_\kappa\}) - m(\pi^\lambda - \gamma \cdot \pi \gamma^\lambda) \right) \psi_\lambda \\ &= \left(i \gamma_5 \gamma_\nu \frac{1}{2} \epsilon^{\kappa\nu\mu\lambda} F_{\mu\nu} - m(\pi^\lambda - \gamma \cdot \pi \gamma^\lambda) \right) \psi_\lambda \\ &= m(\gamma \cdot \pi \gamma - \pi) \cdot \psi - i \gamma_5 \gamma \cdot \tilde{F} \cdot \psi = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde en esta última ecuación hemos hecho uso de las siguientes expresiones,

$$\pi_\kappa \bar{\pi}_\mu = \frac{1}{2}([\pi_\kappa, \pi_\mu] + \{\pi_\kappa, \pi_\mu\}), \quad (3.19)$$

$$\tilde{F}^{\lambda\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\lambda\nu\kappa\mu} F_{\kappa\mu}. \quad (3.20)$$

además del hecho de que $[\pi_\kappa, \pi_\mu]$ es un tensor antisimétrico, $\{\pi_\kappa, \pi_\mu\}$ un tensor simétrico y $\epsilon^{\lambda\nu\kappa\mu}$ un tensor antisimétrico en cualquier par de índices. Comparando las Ecs. (3.17) y (3.18) uno encuentra la segunda restricción covariante, es decir, una condición subsidiaria independiente de la restricción primaria que no involucra derivadas con respecto del tiempo,

$$\gamma \cdot \psi = -\frac{2ie}{3m^2} \gamma_5 \gamma \cdot \tilde{F} \cdot \psi. \quad (3.21)$$

Sustituyendo esta última ecuación en la Ec. (3.18) obtenemos la útil relación,

$$\pi \cdot \psi = -(\gamma \cdot \pi + \frac{2}{3}m) \frac{2ie}{3m^2} \gamma_5 \gamma \cdot \tilde{F} \cdot \psi. \quad (3.22)$$

Ahora procedemos a incorporar las ecuaciones (3.21) y (3.22) en (3.13) para obtener un sistema de ecuaciones que representen una verdadera ecuación de movimiento, donde, a diferencia de (3.13), el término $(\partial/\partial t)\psi^0$ este contenido en la misma.

La ecuación resultante es,

$$(\gamma \cdot \pi - m)\psi_\mu + \frac{2ie}{3m^2} (\pi_\mu + \frac{1}{2}m\gamma_\mu) \gamma^5 \gamma \cdot \tilde{F} \cdot \psi = 0 \quad (3.23)$$

que puesta en su forma hermitica tenemos,

$$\begin{aligned} 0 = & (\gamma \cdot \pi - m)\psi_\mu + \frac{2ie}{3m^2} (\pi_\mu + \frac{1}{2}m\gamma_\mu) \gamma^5 \gamma \cdot \tilde{F} \cdot \psi \\ & + \frac{2ie}{3m^2} \tilde{F}_\mu \cdot \gamma \gamma^5 (\pi + \frac{1}{2}m\gamma) \cdot \psi \\ & + \frac{2ie}{3m^2} \tilde{F}_\mu \cdot \gamma \gamma^5 (\gamma \cdot \psi + 2m) \frac{2ie}{3m^2} \gamma^5 \gamma \cdot \tilde{F} \cdot \psi \end{aligned} \quad (3.24)$$

Es pertinente hacer algunos comentarios del desarrollo matemático que nos ha llevado a la ecuación (3.24). La expresión original (3.13) en realidad no es una ecuación de movimiento, porque parece ser un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden pero el término $(\partial/\partial t)\psi^0$ nunca aparece. Esto obviamente es consecuencia de que los grados de

libertad que se necesitan para describir el campo de espín $3/2$ (8 componentes para cuatro proyecciones de espín $\pm 1/2, \pm 3/2$ y dos valores, positivo y negativos, de energía) son menores que el número de componentes de ψ^μ , por lo tanto no todas las componentes de ψ^μ son independientes. Ha sido necesario derivar covariantemente esta ecuación para obtener las relaciones de restricción, que al sustituirlas de regreso en (3.13) obtenemos una verdadera ecuación de movimiento, dígase (3.24). Entonces decimos que el sistema (3.13), que implica ciertas restricciones, y por lo tanto no califica como una verdadera ecuación de movimiento, es equivalente al sistema (3.24), que no implica las restricciones, si no más bien, ya las tiene incluidas, en el sentido de que ambas *tienen las mismas soluciones* y que además preserva la condiciones de restricción en el tiempo, como lo muestran en la Ref. [10], y como ellos mismos lo afirman, contiene *menos* información que la ecuación original de RS porque no implica las restricciones. Sin embargo tenemos la ganancia de que es una verdadera ecuación de movimiento.

Hemos sobrevenido un primer inconveniente de la descripción del campo de espín $3/2$ de Rarita-Schwinger. Sin embargo, el marco de RS sufre de un problema adicional grave que no podemos remediar de alguna manera parecida a lo que hicimos en párrafos anteriores. Para entender este problema adicional de la descripción de RS, detengámonos un poco y recordemos como son descritos matemáticamente los campos que tienen propagación ondulatoria.

3.5.1. Propagación Ondulatoria de los Campos

La propagación ondulatoria esta asociada con sistemas hiperbólicos de ecuaciones diferenciales parciales. Estos sistemas hiperbólicos son uno de los tres tipos principales de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales y se diferencian de los otros dos tipos, elípticos y parabólicos, en que las soluciones en un punto dado dependen sólo de una pequeña parte de los datos en tiempos y posiciones anteriores, mientras que en los sistemas de tipo elíptico las soluciones en cada punto están acopladas a todos y cada uno de los demás puntos del espacio, y en los parabólicos, las soluciones dependen de lo que haya pasado anteriormente en todos los puntos del espacio. Los sistemas hiperbólicos permiten plantear un problema de valor inicial (especificación de condiciones de Cauchy) sobre una clase de superficies "espacialoides" y cuyas soluciones a este problema poseen frentes de

onda que propagan a lo largo de rayos con una velocidad finita. Los rayos que pasan a través de cualquier punto forman un cono de rayos que es enteramente determinado por los coeficientes de las derivadas más altas del sistema de ecuaciones (para sistemas de orden menor o igual que dos). Así que para sistemas hiperbólicos, cuando los acoplamientos ocurran sólo en las derivadas de más bajo orden, el cono de rayos queda intacto y es idéntico al del caso libre. La ecuación de Klein-Gordon y la ecuación de Dirac son un claro ejemplo de sistemas hiperbólicos, y que por tanto, cuando se acoplan a un campo por medio de derivadas de más bajo orden preservan este cono. Para espines mayores a $1/2$, las ecuaciones libres no son hiperbólicas, si no que constituyen un sistema degenerado porque implican restricciones, como en el caso de Rarita-Schwinger para espín $3/2$ como lo acabamos de ver anteriormente en este capítulo. Sin embargo, se demuestra que estos sistemas son equivalentes a un sistema hiperbólico que describe propagación ondulatoria, suplementado con restricciones adicionales que son conservadas en el tiempo, tal y como lo vimos con el caso del formalismo de Rarita-Schwinger. Empero, al introducir un acoplamiento por medio de las derivadas más bajas al caso libre, el sistema resultante cesa de ser un sistema hiperbólico y el cono de rayos ya no coincide con el cono para el caso libre. El criterio específico utilizado para determinar si un sistema de ecuaciones diferenciales parciales permanece hiperbólico es presentado en los artículos de [10, 11] y es común llamarlo criterio de *Courant-Hilbert* debido a que este es mencionado en el libro de métodos matemáticos de los mismos autores [22]. El criterio involucra el cálculo del *determinante característico*, que es el determinante obtenido de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones diferenciales parciales con sólo los términos más altos en las derivadas y reemplazando $i\partial_\mu = P_\mu$ con n_μ . Este determinante denotado como $D(n)$ al igualarlo a cero determina las normales n_μ a las superficies características del sistema de ecuaciones diferenciales parciales, de lo cual se puede deducir si el sistema es hiperbólico ó si tiene incorporadas restricciones.

A modo de ejemplo, aplicamos el criterio de Courant-Hilbert en la ecuación de Dirac acoplada a un campo electromagnético. La ecuación de Dirac acoplada a un campo electromagnético, se lleva a cabo mediante la prescripción mínima donde uno sustituye P_μ por $\pi_\mu = P_\mu + qA_\mu$, donde q es la carga de la partícula y A_μ es el cuadri-potencial electromagnético. Esta prescripción constituye un acoplamiento por medio de la derivada de más bajo orden. Entonces, la ecuación de Dirac libre, después del acoplamiento $P_\mu \rightarrow \pi_\mu$, resulta

en el sistema,

$$(\not{n} - m)\psi = (\gamma_\mu \pi^\mu - m)\psi = (\gamma_\mu p^\mu + q\gamma_\mu A^\mu - m)\psi = 0, \quad (3.25)$$

de tal forma que la matriz de coeficientes que incluye sólo los términos con las derivadas de más alto orden y con la sustitución de $i\partial_\mu$ por n_μ , la cual llamaremos (los índices de Dirac se han suprimido como es acostumbrado) T , es simplemente,

$$T = \gamma_\mu n^\mu \quad (3.26)$$

Por tanto, el determinante característico $D(n) = |\gamma_\mu n^\mu| = 0$ implica,

$$D(n) = ((n^0)^2 - (n^1)^2 - (n^2)^2 - (n^3)^2)^2 = (n \cdot n)^2 = 0 \quad (3.27)$$

El criterio de Courant-Hilbert dice que el sistema de ecuaciones diferenciales parciales, en este caso (3.25), será hiperbólico si las soluciones para n^0 al resolver (3.27) son todas *reales* para cualquier $\mathbf{n} = (n^1, n^2, n^3)$. Como en este caso las soluciones a n^0 están dadas por,

$$n^0 = \pm \sqrt{(n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2}, \quad (3.28)$$

y estas son reales para todo \mathbf{n} , y por lo tanto, (3.25) constituye un sistema de ecuaciones hiperbólico después del acoplamiento.

Después de haber presentado este pequeño ejemplo del criterio de Courant-Hilbert para el caso de la ecuación de Dirac, regresamos al caso descrito por el marco de Rarita-Schwinger y enseguida, en la siguiente subsección aplicamos el criterio de Courant-Hilbert al sistema (3.24) para determinar en que casos es hiperbólico.

3.5.2. Acausalidad en la propagación de las soluciones en Rarita-Schwinger

Es claro que la matriz T_μ^λ contiene sólo los siguientes términos,

$$\begin{aligned} T_\mu^\lambda = & \gamma \cdot n g_\mu^\lambda + \frac{2ic}{3m^2} n_\mu \gamma^5 \gamma \cdot \tilde{F}^\lambda + \frac{2ic}{3m^2} \tilde{F}_\mu \cdot \gamma \gamma^5 n^\lambda \\ & + \left(\frac{2ic}{3m^2}\right)^2 \tilde{F}_\mu \cdot \gamma \gamma^5 (\gamma \cdot \pi) \gamma^5 \gamma \cdot \tilde{F}^\lambda, \end{aligned} \quad (3.29)$$

y la condición característica ($D(u) = 0$) calculada para esta matriz, como lo muestran en [10] y comprobada independientemente con las rutinas en Maple presentadas en el apéndice C, tiene la forma covariante

$$D(u) = (n^2)^4 \left[u^4 + \left(\frac{2v}{3m^2} \right)^2 (k^2 - n)^2 u^2 + 0 \right] \quad (3.30)$$

cuyas soluciones para u^0 son cuatro raíces negativas y cuatro positivas,

$$u^0 \sim \pm \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \quad (3.31)$$

y además otras ocho raíces de la forma,

$$u^0 \sim \pm \frac{\sqrt{(n^2 - k^2(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})^2)(1 - k^2\mathbf{B}^2)}}{k^2\mathbf{B}^2 - 1} \quad (3.32)$$

donde hemos tomado $k = 2v/(3m^2)$ y $n_x = n^1$, $n_y = n^2$, $n_z = n^3$ para mayor claridad en las fórmulas. Claramente todas las ocho raíces en (3.31) son reales para cualquier n . En el caso de las raíces en (3.32), la condición para que sean reales es que el radicando sea positivo. La condición sobre el radicando puede ser expresada como una condición compacta sobre el campo magnético \mathbf{B} si tomamos $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{B}| |\mathbf{n}| \cos \lambda$. Con esta expresión en cuenta el radical tiene la forma,

$$\begin{aligned} \sqrt{(n^2 - k^2(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})^2)(1 - k^2\mathbf{B}^2)} &= \sqrt{(n^2 - (k|\mathbf{B}||\mathbf{n}|\cos\lambda)^2)(1 - k^2\mathbf{B}^2)} \\ &= \sqrt{(n^2)(1 - k^2\mathbf{B}^2\cos^2\lambda)(1 - k^2\mathbf{B}^2)} \end{aligned}$$

Ahora, ya que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \cos^2 \lambda \leq 1, \\ \Rightarrow 0 &\leq k^2\mathbf{B}^2 \cos^2 \lambda \leq k^2\mathbf{B}^2, \\ \Rightarrow 0 &\geq -k^2\mathbf{B}^2 \cos^2 \lambda \geq -k^2\mathbf{B}^2, \\ \Rightarrow 1 &\geq 1 - k^2\mathbf{B}^2 \cos^2 \lambda \geq 1 - k^2\mathbf{B}^2. \end{aligned}$$

entonces, si se cumple que,

$$k^2\mathbf{B}^2 \leq 1. \quad (3.33)$$

ambos factores en el radicando, $(1 - k^2 B^2 \cos^2 \lambda)$ y $(1 - k^2 B^2)$, serán positivos y por tanto las raíces en (3.32) serán todas reales. Esto determina la hiperbolicidad de la nueva ecuación de movimiento de RS (3.24) para regiones del espacio tiempo donde la magnitud del campo es lo suficientemente débil, en el sentido de (3.33). Esta, obviamente no es ninguna propiedad deseable de la ecuación de movimiento. Este segundo problema es considerado no esencial por Velo y Zwanziger, en el sentido de que es posible suponer que siempre existe al menos un marco de referencia donde (3.33) es válida para todo punto del espacio-tiempo; En esta situación, hablamos de que estamos en el caso de "campo débil". Entonces, en el caso de campo débil, el sistema de ecuaciones (3.24) representa un sistema hiperbólico y es apropiado para describir la propagación ondulatoria del campo. Aún en el caso de campo débil, el formalismo de Rarita-Schwinger presenta otro, y más esencial, problema grave. El hecho de que el Lagrangiano sea un escalar de Lorentz, que la ecuación de movimiento tenga una forma covariante y que sea hiperbólica, no garantiza que las soluciones satisfagan la *causalidad*, es decir, se propaguen a velocidades menores que la de la luz en el vacío. Este es el conocido problema de causalidad de Velo-Zwanziger que ellos reportaron junto con las demás situaciones problemáticas que hemos mencionado en este capítulo. Para ver como surge este problema con las ecuaciones de Rarita-Schwinger, recordemos que para ecuaciones hiperbólicas, la máxima velocidad de propagación de las señales es igual a la pendiente de las superficies características. Las superficies características para las ecuaciones de Rarita-Schwinger determinadas mediante la ecuación (3.24) no son todas tangentes al cono de luz, de manera que existen superficies características "espacialoides" que pasan por todos los puntos donde el tensor electromagnético no se anula. Consecuentemente algunas señales son propagadas a velocidades mayores que la de la luz. De hecho, tomando $n_\mu = (1, 0, 0, 0)$, que es una normal "temporaloide", el segundo factor de (3.30) se convierte en,

$$1 - \left(\frac{2e}{3m^2}\right)^2 B^2 = 0, \quad (3.34)$$

y en cualquier punto donde $F_{\mu\nu} \neq 0$, existe un marco de Lorentz en donde esta última expresión se satisface y entonces la superficie cuya normal es $(1, 0, 0, 0)$, es una superficie característica. El cono que tiene como normal al vector $(1, 0, 0, 0)$ es de hecho un cono "colapsado" hasta el plano de las componentes espaciales, y por tanto permite propagación de soluciones a velocidades infinitas. Para que esto no sucediera todas las superficies carac-

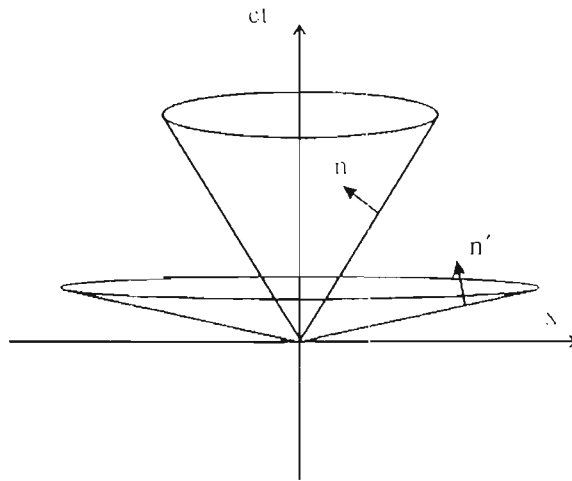


Figura 3.1: Colapso del cono de luz

terísticas deberían ser a lo más tangentes al cono de luz. En la figura 3.1 vemos como un cono que se va colpasando hasta el plano de las componentes espaciales tiene una normal que tiende a $(1, 0, 0, 0)$. En el siguiente capítulo introducimos el formalismo original de esta tesis para el rastreo de estados con espín y masa bien definidos que nos permitirá una descripción de partículas con espín $3/2$ libre de varios de los problemas que aquejan al marco de Rarita-Schwinger.

Capítulo 4

Rastreo de estados con espín y masa únicos sobre la capa de la masa

4.1. Introducción

Habiendo visto la descripción estándar actual del campo de espín $3/2$, llamado *marco de Rarita-Schwinger* y todos sus problemas relacionados en el capítulo anterior, tornamos nuestra atención a los fundamentos teóricos básicos en la descripción de estados físicos de partículas mediante el estudio del grupo de simetrías del espacio-tiempo, el grupo de Poincaré, y a partir de estas bases sólidas proponer una forma de rastrear estados con espín y masa bien definidos sobre la capa de la masa para el campo libre. El estudio del acoplamiento de esta nueva descripción del campo con un potencial electromagnético externo será tema del siguiente capítulo.

Como punto de partida inicial, resumamos los varios problemas que surgen en la descripción del campo de espín $3/2$ en el marco de Rarita-Schwinger.

1. La primera característica negativa que resalta a la vista es que el Lagrangiano de Rarita-Schwinger depende de un parámetro libre A . Es un punto obvio que las propiedades físicas de una partícula *fundamental*, como el tensor de momento energía, no debe depender de un parámetro libre, y de hecho este es el caso. Incluso, se puede demostrar que la matriz de dispersión S no depende del parámetro A [25]. A pesar de esto, el parámetro A aún deja su huella en la forma de otro parámetro

“off-shell”, ε , que entra en varios vértices $(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} - B)$, donde B representa un boson [23, 24, 26, 27], y que introduce un elemento de ambigüedad en la teoría. La libertad que representa el parámetro A refleja la invariancia del Lagrangiano bajo las así llamadas transformaciones puntuales [23, 24], que mezclan los dos sectores con espín $\frac{1}{2}^+$ y $\frac{1}{2}^-$ residentes en el campo de Rarita-Schwinger además del sector con espín $\frac{3}{2}^-$.

2. Los frentes de onda de las soluciones clásicas se propagan a velocidad mayor que la de la luz, problema encontrado por Velo y Zwanziger [10].
3. La cuantización del campo de espín 3/2 resulta ser inconsistente con la covariancia de Lorentz, observación reportada por Johnson y Sudarshan [9].

Debido a esta serie de defectos en el formalismo de Rarita-Schwinger, nos hemos convencido que las Ecs.(3.4) y (3.5) obtenidas mediante el Lagrangiano (3.10) no son apropiadas para describir partículas con espín 3/2. Es por eso que debemos replantear la estrategia usada para conseguir una descripción consistente de tales partículas. Como lo hemos señalado en el capítulo 2, creemos que la mejor guía está en la teoría de grupos, como ya nos lo ha hecho ver así Wigner [13]. Los principios de simetría en la naturaleza son los conceptos más generales de los que se puede partir para encontrar las leyes que la rigen. La lógica dentro de la teoría de grupos prescribe un camino bastante obvio en la obtención de ecuaciones relativistas de movimiento para un campo *libre*, como es mencionado en [16]:

1. Obtener un Lagrangiano para el caso libre, el cual tenga como consecuencia una ecuación de movimiento de la forma,

$$\Pi \left(m \frac{1}{i} \partial \right)_{\alpha}^{\beta} \psi^{\beta}(x) = 0, \quad (4.1)$$

donde Π es un operador diferencial lineal (usualmente del primer ó segundo orden en $\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$) y es una matriz respecto de los índices de Lorentz de la función de onda. Esta ecuación diferencial de onda puede ser transformada en una ecuación algebraica mediante una transformada de Fourier y obtener,

$$\Pi(m, p)_{\beta}^{\alpha} \Phi^{\beta}(p) = 0. \quad (4.2)$$

donde tanto ψ como Φ se transforman de acuerdo a la misma representación del grupo de Lorentz. Esta ecuación de onda debe satisfacer las siguientes propiedades

a) Ser relativísticamente covariante, es decir, debe garantizar,

$$\Pi(m, \Lambda^{-1}p)^\alpha_\beta \Phi^\beta(\Lambda^{-1}p) = 0, \quad (4.3)$$

donde Λ es una transformación propia del grupo de Lorentz.

b) Cada componente de las soluciones a esta ecuación debe cumplir la condición de la "capa de la masa",

$$(p^2 - m^2)\Phi^\alpha = 0 \quad (4.4)$$

c) Si Φ se transforma de acuerdo a la representación (u, v) del grupo de Lorentz, entonces tiene un contenido de momento angular igual a $|u - v|$ (o $u + v$), y si u y v son los dos distintos de cero, la función de onda $\Phi(p)$ tiene contenido multiespín como ya lo habíamos señalado anteriormente. Para que las soluciones a la ecuación de movimiento correspondan a partículas con estados con único espín (ó helicidad si la partícula no tiene masa), $\Pi(m, p)$ debe actuar como una matriz de proyección [16] para seleccionar las componentes deseadas de $\Phi(p)$.

2. Posteriormente, el acoplamiento con un campo electromagnético externo es llevado a cabo mediante la sustitución mínima $P^\mu \rightarrow \pi^\mu$, como es prescrito en electrodinámica cuántica [28], para encontrar la ecuación de movimiento en interacción con el campo del fotón,

$$\Pi(m, \pi)^\alpha_\beta \Phi^\beta(p) = 0. \quad (4.5)$$

En caso de que esta última ecuación no represente una ecuación de movimiento genuina, debe derivarse covariantemente para obtener las condiciones auxiliares necesarias que al ser incorporadas produzcan una verdadera ecuación de movimiento.

Aparentemente, esta prescripción es llevada a cabo en el formalismo de Rarita-Schwinger, ya que cumple con los puntos señalados al construir la ecuación libre, pero después del

acoplamiento no describe una propagación causal de la componente con espín 3/2, ya que las componentes con espín 1/2 no son proyectadas fuera totalmente, y en la presencia del campo electromagnético tienen un acoplamiento no trivial que interfiere con la buena propagación de la componente de espín 3/2. La construcción del marco de Rarita-Schwinger sigue parcialmente los mismos pasos llevados a cabo en la descripción de espines más bajos y por esta razón no resulta igual de exitoso que estos. Existen muchas razones a las que uno le pudiera atribuir los defectos en el marco de Rarita-Schwinger. En esta tesis retomamos la idea presentada en [29] que el defecto más importante reside en el principio que guía la obtención de $\Pi(m, p)$ como un correcto proyector sobre el estado de espín deseado según lo indicado en el tercer inciso de la prescripción lógica para la obtención de una ecuación de movimiento covariante. Si el campo ψ se transforma de acuerdo a la representación (u, v) de Lorentz, la ecuación de movimiento (4.1) debe tener la forma,

$$\mathcal{P}^{(m, s_N)} \psi = \psi, \quad (4.6)$$

donde $\mathcal{P}^{(m, s)}$ es un operador, en general matricial (hemos omitido todos los índices por simplicidad), que proyecta el estado de espín deseado, s_N , que está contenido en la representación. Generalmente uno está interesado en el estado con más alto espín dentro de la representación, pero también podemos considerar proyectores para el resto de los estados que corresponden a todo el "espectro" de espín $|u - v| \leq s \leq (u + v)$ contenido en la representación (u, v) . Las características principales de estos operadores, que son llamados proyectores covariantes, son:

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}^{(m, s)}]^2 &= \mathcal{P}^{(m, s)}, \\ \sum_s \mathcal{P}^{(m, s)} &= 1, \\ \prod_s \mathcal{P}^{(m, s)} &= 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde el 1 en la segunda propiedad es el operador identidad apropiado en el espacio de representación y además, por simplicidad, hemos omitido los índices matriciales que pueden llevar estos operadores. En los casos de las ecuaciones para espín 0 y espín 1, que corresponden a la ecuación de Klein-Gordon y a la de Dirac, respectivamente, el contenido de espín es único y no hay nada que proyectar con lo que respecta a este. Estas ecuaciones se pueden poner en la forma (4.6). Sin embargo, el significado del proyector es muy distinto

en cada una. La ecuación de Klein-Gordon para espín 0, es una ecuación de movimiento que proyecta un estado de masa única,

$$\begin{Bmatrix} P^2 \\ m^2 \end{Bmatrix} \psi = \psi, \quad (4.8)$$

y la ecuación de Dirac para fermiones con espín 1/2, proyecta un estado con paridad única para partículas y antipartículas,

$$\begin{cases} \not{P} + m \\ m \end{cases} u = u \\ \begin{cases} \not{P} - m \\ m \end{cases} v = v \end{cases} \quad (4.9)$$

Para el caso de espín 1, descrito por la ecuación de Proca, el espacio de representación de Lorentz es $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y tiene un contenido de espín 0 y 1, por lo tanto, la ecuación en este caso si debe servir para proyectar el estado con espín 1, y como es mostrado en [30], la ecuación de Proca se puede poner de la forma,

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}^{(m, s=1)} A^\nu = \mathcal{P}^{(m)} \mathcal{P}_{\mu\nu}^{(s=1)} A^\nu = A^\mu, \quad (4.10)$$

donde $\mathcal{P}^{(m)}$ es el proyector sobre la masa m y $\mathcal{P}^{(s=1)}$ el proyector sobre el estado con espín 1. En el caso de espín 3/2 también tenemos una degeneración de espín en la representación, sin embargo, la ecuación de movimiento de Rarita-Schwinger no tiene la forma (4.6). Esto lo podemos ver fácilmente si reescribimos la ecuación de Rarita-Schwinger, como lo hecho en [27], usando los proyectores $\mathbf{P}^{(3/2)}$, $\mathbf{P}_{11}^{(1/2)}$ y $\mathbf{P}_{22}^{(1/2)}$, y los así llamados operadores "switch", $\mathbf{P}_{12}^{(1/2)}$ y $\mathbf{P}_{21}^{(1/2)}$, de la forma,

$$\left[(\mathbf{P}^{(3/2)} - 2\mathbf{P}_{11}^{(1/2)}) (\not{p} - m) - \sqrt{3}m (\mathbf{P}_{12}^{(1/2)} + \mathbf{P}_{21}^{(1/2)}) \right] \psi = 0 \quad (4.11)$$

El operador $\mathbf{P}^{(3/2)}$ es el proyector de estados con espín 3/2 y el operador $\mathbf{P}^{(1/2)} = \mathbf{P}_{11}^{(1/2)} + \mathbf{P}_{22}^{(1/2)}$ es el proyector sobre estados con espín 1/2. En forma explícita, todos estos operadores es-

tán dados por [27],

$$P_{\mu\nu}^{(3/2)} = g_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\gamma_\mu\gamma_\nu - \frac{1}{3p^2}(\not{p}\gamma_\mu\not{p} + \not{p}\gamma_\nu\not{p}) \quad (4.12)$$

$$P_{11}^{(1/2)}{}_{\mu\nu} = -\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - \frac{1}{3}\gamma_\mu\gamma_\nu + \frac{1}{3p^2}(\not{p}\gamma_\mu\not{p} + \not{p}\gamma_\nu\not{p}) \quad (4.13)$$

$$P_{22}^{(1/2)}{}_{\mu\nu} = -\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \quad (4.14)$$

$$P_{12}^{(1/2)}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{3}p^2}(p_\mu p_\nu - \not{p}\gamma_\mu\not{p}) \quad (4.15)$$

$$P_{21}^{(1/2)}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{3}p^2}(-p_\mu p_\nu + \not{p}\gamma_\nu\not{p}) \quad (4.16)$$

Si uno insiste en dejar fuera las dos componentes con espín $1/2$ presente en el campo de Rarita-Schwinger de tal manera que aún en presencia del campo externo estas sigan quedando proyectadas fuera, debemos obtener una ecuación de movimiento para el caso libre que, al ser acoplada, no permita que los estados con espines más bajos entren en juego y destruyan la causalidad de la propagación. Requerimos que esta ecuación de onda tenga la forma (4.6) y cumpla todas las propiedades anteriormente descritas. En las siguientes secciones obtendremos el proyector covariante sobre masa única y espín $3/2$, $\mathcal{P}^{(m,s)}$ y la ecuación de movimiento correspondiente deseada que aparecen en [30] pero mediante un desarrollo alternativo. Este desarrollo tendrá una consecuencia muy importante al considerar ecuaciones de movimiento para espines mayores que $3/2$, siendo esta consecuencia un resultado original de la tesis. En el siguiente capítulo acoplaremos el campo de espín $3/2$ a un campo electromagnético externo y estudiaremos la propagación de las soluciones a nivel clásico.

4.2. Construcción del proyector $\mathcal{P}^{(m,s)}$

Aunque el tema de la tesis se centra en el estudio de partículas con espín $3/2$ descritas por el cuadrin-espinor ψ_μ que se transforma de acuerdo a la representación del grupo de Lorentz $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \otimes [(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})]$, en este capítulo consideraremos frecuentemente la consecuencia de la teoría para espines fraccionarios aún más altos descritos por el tensor de Lorentz totalmente simétrico de rango k con espinores de Dirac como componentes, $\psi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}$ y buscaremos la forma general que debe tener el operador, $\mathcal{P}^{(m,s)}$ en la

ecuación

$$\mathcal{P}^{(m, s_N)} \psi = \psi \quad (4.17)$$

para proyectar sobre la capa de la masa el estado con espín más grande contenido en $\psi_{\mu, \nu, \rho, \sigma}$. En esta ecuación, ψ representa un estado que se transforma de acuerdo a la representación.

$$\left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right) \supset \left[\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)\right]$$

pero cuyo contenido de masa y espín son únicos, específicamente m y s_N . Como ya lo habíamos visto anteriormente, este tipo de representaciones del grupo de Lorentz que consisten en productos tensoriales de representaciones utilizadas para describir espines más bajos, contienen al estado con espín más alto de interés, $s_N = k + \frac{1}{2}$, pero también estados con espines más bajos ($s_N - 1$), ($s_N - 2$), etc. Es la labor del proyector $\mathcal{P}^{(m, s_N)}$ de dejar fuera estas componentes. Pero también es tarea de este operador seleccionar la correcta masa del estado, es decir, también es un proyector respecto de la masa. Consideremos el caso de interés para espín 3/2 descrito por ψ_{μ} , este cuadri-espinores se transforma de acuerdo a la representación de Lorentz.

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \otimes \left[\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)\right] = \left(1, \frac{1}{2}\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right) \oplus \left(\frac{1}{2}, 1\right) \oplus \left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad (4.18)$$

El lado derecho de esta expresión nos indica el contenido reducible de representaciones de Lorentz dentro de ψ_{μ} . Cada representación dentro de esta suma directa es irreducible. Recordemos que cualquier representación irreducible del grupo de Lorentz, (s_L, s_R) , es etiquetada por los así llamados espín izquierdo (s_L) y espín derecho (s_R), que son los eigenvalores de los dos operadores Casimir del grupo, $S_L^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{J} + i\mathbf{K})^2$ y $S_R^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{J} - i\mathbf{K})^2$, donde \mathbf{J} y \mathbf{K} son los generadores de rotaciones y de transformaciones puras de Lorentz (boost) que actúan en el espacio que sirve como base para la representación (s_L, s_R) . El contenido de espín en una representación irreducible de Lorentz (s_L, s_R) va desde $|s_L - s_R|$ hasta $|s_L + s_R|$. De aquí que la representación con respecto a la cual se transforma ψ_{μ} contiene estados con espín 1/2 y 3/2. Considerando las paridades de los estados de la representación de la parte vectorial y espinorial, los que aparecen específicamente en la representación $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \otimes \left[\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)\right]$ son $1/2^+$, $(1/2)^-$ y $(3/2)^-$, ya

que la parte vectorial con paridad natural corresponde a un cuadrivector polar con espines $(0^1, 1^-)$ y para la parte espinorial tomamos un estado con paridad positiva.

Una vez encontrado el operador $\mathcal{P}^{(m, s_N)}$, la ecuación (4.17) se convierte en una ecuación de movimiento para el estado con espín s_N . En el caso de campos con espines bajos ($s = 0$ y $s = 1/2$), estas ecuaciones de movimiento han sido obtenidas basándose simplemente en la acción del primer operador Casimir del grupo de Poincaré que es P^2 . Por ejemplo, la ecuación de Klein-Gordon para partículas con espín 0 no es otra cosa que el problema de eigenvalores de P^2 ,

$$P^2\phi = m^2\phi, \quad (4.19)$$

y la ecuación de Dirac resulta de linearizar la ecuación de Proca,

$$P^2\phi = (E - \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p})(E + \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p})\phi = m^2\phi, \\ \Rightarrow (E - \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi = m\phi, \quad (4.20)$$

$$(E + \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p})\psi = m\chi \quad (4.21)$$

en donde $\chi = (E + \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p})\psi$ y estas ecuaciones tienen como consecuencia la ecuación de Dirac $(E\gamma_0 - \vec{\Gamma} \cdot \mathbf{p})\psi = m\psi$, como es bien sabido. Sin embargo, P^2 no es el único operador Casimir del grupo de Poincaré; existe un operador Casimir más, el operador \mathcal{W}^2 que se conoce como el *cuadrado del operador de Pauli-Lubanski*. Se puede decir que este operador tiene codificada más información acerca del momento angular intrínseco de la partícula que el operador P^2 como se argumentará en la siguiente sección donde introducimos a éste operador \mathcal{W}^2 .

4.2.1. El operador de Pauli-Lubanski y el segundo Casimir del grupo de Poincaré

La definición matemática del operador de Pauli-Lubanski es,

$$\mathcal{W}_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}M^{\nu\alpha}P^\beta, \quad (4.22)$$

donde el tensor $M^{\nu\alpha}$ es la forma compacta de escribir los generadores de rotación y *boost* del grupo de Lorentz, que, junto con los generadores de traslaciones, P^β , conforman todos

los generadores para el grupo de Poincaré. El estructura específica de $M^{\mu\nu}$ en base a los generadores de rotaciones, \vec{J} , y a los generadores de *boost*, \vec{K} , es la siguiente

$$M_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -K_x & -K_y & -K_z \\ K_x & 0 & J_z & -J_y \\ K_y & -J_z & 0 & J_x \\ K_z & J_y & -J_x & 0 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Se puede demostrar que (4.22) satisface las siguientes relaciones de conmutación:

$$[M_{\mu\nu}, \mathcal{W}_\alpha] = -i(g_{\alpha\mu}\mathcal{W}_\nu - g_{\alpha\nu}\mathcal{W}_\mu) \quad (4.24)$$

$$[\mathcal{W}_\alpha, P_\mu] = 0, \quad (4.25)$$

$$[\mathcal{W}_\alpha, \mathcal{W}_\beta] = -i\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\mathcal{W}^\mu P^\nu. \quad (4.26)$$

es decir, el operador de Pauli-Lubanski se transforma como un cuadrivector bajo transformaciones de Lorentz. Más aún, el cuadrado de este operador, es decir,

$$\mathcal{W}^2 = \left(\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} M^{\mu\nu} P^\beta \right) \left(\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\lambda\gamma\eta} M^{\lambda\gamma} P^\eta \right). \quad (4.27)$$

conmuta con todos los generadores del grupo de Poincaré, por lo que es un operador invariante de grupo u operador Casimir. Por tanto, cualquier estado cuántico de una partícula debe ser eigenvector tanto de P^2 como de \mathcal{W}^2 , ya que estos operadores conmutan con todos los generadores de las simetrías del espacio-tiempo. Un estado puro de una partícula debe adicionalmente estar etiquetado con los eigenvalores de un conjunto máximo de operadores mutuamente conmutantes. La elección de este conjunto no es única, sin embargo, el conjunto más apropiado para estudiar las representaciones del grupo de Poincaré es aquél en el que, además de etiquetar a los estados con los eigenvalores de P^2 y \mathcal{W}^2 , se utilizan los eigenvalores del operador de cuadrimomento P^μ y del operador de helicidad $\mathbf{J} \cdot \mathbf{P}/p$, donde \mathbf{J} es el generador de rotaciones, \mathbf{P} es la parte espacial del cuadrimomento ó momento lineal y p la magnitud del eigenvalor de este último para el estado que se estudia. Estos cuatro operadores son mutuamente conmutantes, ya que, se puede demostrar trivialmente a partir del algebra de los operadores de Poincaré que,

$$[\mathbf{J} \cdot \mathbf{P}, P^\mu] = [J_1 P_1 + J_2 P_2 + J_3 P_3, P^\mu] = 0 \quad (4.28)$$

Además los dos Casimires conmutan con $\mathbf{J} \cdot \mathbf{P}$ y con P^μ . Por lo tanto las etiquetas que puede llevar un estado puro en esta base son la masa m que es el eigenvalor de P^2 , s que es proporcional al eigenvalor de \mathcal{W}^2 (como haremos ver más adelante). λ que es el eigenvalor de $\mathbf{J} \cdot \mathbf{P}/p$ y p^0, p^1, p^2, p^3 que son los eigenvalores correspondientes a los operadores P^0, P^1, P^2 y P^3 . Sin embargo, como estamos estudiando en este momento partículas libres, estas deben satisfacer el requerimiento relativista que se lee,

$$P^2 = (P^0)^2 - (P^1)^2 - (P^2)^2 - (P^3)^2 = m^2 \quad (4.29)$$

Así que de los 5 operadores P^0, P^1, P^2, P^3 y P^2 , sólo 4 son independientes. Elegimos a $\mathbf{P} = \langle P^1, P^2, P^3 \rangle$ y a P^2 como los 4 operadores independientes para etiquetar los estados. En conclusión, un estado puro en la base que hemos seleccionado con el conjunto máximo de operadores mutuamente conmutantes anteriormente mencionados, se especifica como,

$$|m, s; \mathbf{p}, \lambda\rangle \quad (4.30)$$

Aún falta ver como el espín s de la partícula está asociado con el eigenvalor de \mathcal{W}^2 como se acertó previamente. Para una partícula que tiene una helicidad definida y que se encuentra en su marco de reposo, el estado cuántico en el que se encuentra se especifica como $|m, s; 0, \lambda\rangle = |0, \lambda\rangle$, por simplicidad. En este marco de reposo se cumple,

$$P^\mu |0, \lambda\rangle = |0, \lambda\rangle p^\mu, \quad p^\mu = (m, \mathbf{0}) \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\mu |0, \lambda\rangle &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} M^{\nu\alpha} P^{\beta\mu} |0, \lambda\rangle \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha 0} M^{\nu\alpha} P^{\beta\mu} |0, \lambda\rangle \\ &= \frac{1}{2} m \epsilon_{\mu\nu\alpha 0} M^{\nu\alpha} |0, \lambda\rangle \\ &= \begin{cases} 0, & \mu = 0 \\ m J_\mu |0, \lambda\rangle, & \mu = 1, 2, 3 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.32)$$

En el marco de reposo el único momento angular que puede poseer la partícula es el intrínseco ó espín. De tal forma y por (4.32),

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^2 |0, \lambda\rangle &= m^2 |0, \lambda\rangle \\ &= -m^2 \mathbf{J}^2 |0, \lambda\rangle \\ &= -m^2 s(s+1) |0, \lambda\rangle \end{aligned} \quad (4.33)$$

Para tener una mayor familiaridad con los eigenvalores que etiquetan a los estados, se prefiere usar s en lugar de w^2 , ya que son proporcionales. Sin embargo, este uso, da pie normalmente a malinterpretaciones. Por ejemplo, esta convención da la sensación de que s seguirá siendo el eigenvalor de \mathbf{J}^2 si al estado $|0, \lambda\rangle$ se le aplica un *boost*, poniéndolo en "vuelo". No es el caso, ya que \mathbf{J}^2 no conmuta con los generadores K_m de *boost*. una transformación general de Lorentz (una rotación y un *boost*) tenderá a producir un estado que es una mezcla con diferentes valores para el momento angular \mathbf{J}^2 . Sin embargo, como \mathcal{W}^2 conmuta con todos los generadores, *cualquier estado, ya sea en reposo ó en movimiento, tendrá el mismo eigenvalor w^2* . Esto es una gran diferencia. Otra malinterpretación resulta cuando se está tratando a partículas sin masa. Para estas partículas *no existe un marco inherente de reposo* como bien se sabe de la relatividad especial, es por eso que estos estados no se pueden etiquetar con una s que se pueda interpretar como espín ó momento angular intrínseco. Para estas partículas por supuesto el eigenvalor de \mathcal{W}^2 ya no es $-m^2s(s+1)$. Para las partículas que se conocen sin masa como por ejemplo el fotón ó el neutrino, se suele decir coloquialmente que tienen *espín 1* y *espín 1/2*, lo cual es realmente desastrozo, en realidad ± 1 y $-1/2$ son los eigenvalores que el operador helicidad puede tomar para cada una de estas partículas, es decir, corresponden al valor de λ y no de s que de hecho no tiene ningún sentido en este contexto.

4.2.2. Expresiones particulares de \mathcal{W}^2 para el sector vectorial y el espinorial

En el caso de espín $s = 3/2$, uno busca ecuaciones de movimiento en el espacio de representación formado por el producto directo de los espacios de representación para espín $1/2$ y para espín 1 , como se trabaja en el marco de Rarita-Schwinger. El nuevo formalismo de rastreo de espines altos se basa en utilizar el segundo Casimir del grupo de Poincaré, \mathcal{W}^2 , por tanto, es indispensable conocer expresiones explícitas para los operadores \mathcal{W}_μ de los espacios de representación vectorial y espinorial.

En el caso del espacio de representación espinorial $[(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})]$ los generadores del grupo de Lorentz están dados por,

$$M_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}i[\gamma_\mu\gamma_\nu - g_{\mu\nu}] = \frac{1}{4}i[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (4.34)$$

Por lo tanto, utilizando (4.22) y después de un poco de álgebra, el cuadrado del vector de Pauli-Lubanski en el espacio de representación espinorial es,

$$\mathcal{W}^2 = -\frac{3}{4} \mathbf{1}_{4,4} P^2 \quad (4.35)$$

En cuanto al espacio de representación vectorial $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, los generadores del grupo de Lorentz están dados por,

$$[M_{\mu\nu}]_{\alpha\beta} = i(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}) \quad (4.36)$$

Nuevamente, usando (4.22) y un poco de álgebra, llegamos a la forma explícita del cuadrado del operador de Pauli-Lubanski para este espacio de representación,

$$[\mathcal{W}^2]_{\alpha\beta} = -2(g^{\alpha\beta} P^2 - P_{\beta} P^{\alpha}) \quad (4.37)$$

En lo que resta de esta tesis, estamos interesados en obtener una ecuación de onda genuina para la *función de onda* de partículas con espines altos. Así que en lugar de trabajar con estados $|m, s\rangle$ físicos de la partícula, trabajaremos con la función de onda $\psi^{(m,s)}$, donde por supuesto, el tratamiento es equivalente. Además, haremos uso de la siguiente notación más económica,

$$\psi^{(m,s)} \rightarrow \{m, s\} \quad (4.38)$$

En esta notación, es importante recalcar la acción de los dos operadores Casimir del grupo de Poincaré, que tienen el mismo efecto sobre las funciones de onda,

$$P^2 \{m, s\} = m^2 \{m, s\}, \quad (4.39)$$

$$\mathcal{W}^2 \{m, s\} = -m^2 s(s+1) \{m, s\} \quad (4.40)$$

Como ya se ha mencionado anteriormente, la Ec.(4.39) ha sido ampliamente usada en la formulación de Lagrangianos para partículas libres en los casos de espines bajos, no así la condición de espín (4.40). Nosotros tomaremos en cuenta los dos operadores sobre bases iguales, sin preferir a uno de ellos para la obtención de un proyector covariante sobre un estado definido de masa y espín. En la siguiente sección comenzamos nuestra búsqueda para construir el proyector $\mathcal{P}^{(m,s)}$

4.2.3. Los operadores $K^{(s')}$

Para construir el proyectador $\mathcal{P}^{(m, s')}$ que rastrea el estado $\{m, s'\}$ mediante la ecuación $\mathcal{P}^{(m, s')}\{m, s'\} = \{m, s'\}$, basta con considerar primeramente operadores más simples, $K^{(s')}$, que tienen la propiedad no de proyectar un estado con espín s , si no más bien *anularlo*, de tal forma que el proyectador $\mathcal{P}^{(m, s')}$ pueda ser construido como un producto de todos los operadores $K^{(s')}$ que anulen los espines no deseados y conserven el estado con espín s . Llamaremos a estos operadores *anuladores*.

La definición del operador K es

$$K^{(s')}\{m, s\} = \begin{cases} 0 & \text{si } s' \neq s \\ C_{s, m, s'}\{m, s\} & \text{si } s' = s \end{cases} \quad (4.41)$$

donde $C_{s, m, s'}$ es una constante que depende de s', m, s y que *no es cero*.

Resulta ser que el operador $K^{(s')}$ se puede escribir como una expresión sencilla en base a los dos operadores casimir \mathcal{W}^2 y P^2 , y es precisamente la razón por la que se consideran. Proponiendo la estructura más sencilla que puede tener $K^{(s')}$ en base a los Casimires,

$$K^{(s')} = A_{s'}\mathcal{W}^2 + B_{s'}P^2 \quad (4.42)$$

donde $A_{s'}$ y $B_{s'}$ son constantes que *solamente* dependen de s' . La condición de que el operador anule estados con $s' \neq s$ impone una condición sobre $A_{s'}$ y $B_{s'}$,

$$\begin{aligned} K^{(s')}\{m, s\} &= [A_{s'}\mathcal{W}^2 + B_{s'}P^2]\{m, s\} \\ &= [-m^2s(s+1)A_{s'} + m^2B_{s'}]\{m, s\} \\ &= 0, \\ \therefore \frac{B_{s'}}{A_{s'}} &= s(s+1), \end{aligned}$$

así que,

$$C_{s, m, s'} = A_{s'}m^2[s'(s'+1) - s(s+1)]$$

Como el operador K es de nuestra entera inspiración (así lo es su definición también), estamos en derecho de asignar el valor de $C_{s, m, s'}$. Obviamente no lo vamos a hacer de una forma totalmente arbitraria, si no, una que sirva a nuestros propósitos de rastrear los estados deseados.

La opción más sencilla que tenemos para terminar de definir $C_{s', m, s}$ y respetar el hecho de que A_s sólo depende de s , es hacer A_s igual a uno. Así entonces tenemos,

$$K^{(s')} = \mathcal{W}^2 + s'(s' + 1)P^2 \quad (4.43)$$

$$C_{s', m, s} = m^2 [s'(s' + 1) - s(s + 1)] \quad (4.44)$$

Haremos uso de estos operadores anuladores para formar el proyector covariante sobre un estado deseado de masa y espín en la siguiente sección.

4.2.4. Obtención del Proyector en función de los operadores $K^{(s)}$

Ahora, haremos uso de los operadores K para rastrear estados de espín sobre una representación genérica de Lorentz con N sectores invariantes de Poincaré, y espines que difieren por una unidad, s_1, s_2, \dots, s_N . Para esto, consideremos la siguiente ecuación covariante en el espacio de representación,

$$\left[\prod_{j \neq i} K^{(s_j)} \right] \{m, s\} = \left[\prod_{j \neq i} C_{s_j, m, s_j} \right] \{m, s\}. \quad (4.45)$$

Esta ecuación tiene las peculiaridades siguientes:

1. El estado $\{m, s\}$ es solución de esta ecuación, donde m , representa una masa específica prefijada.
2. Los estados $\{m, s\}$ *nunca* son soluciones si $s_1 \leq s_2 \leq s_N$ y $s_i \neq s_j$, independientemente del valor m .

Reescribimos (4.45) como,

$$\left[\frac{\prod_{j \neq i} K^{(s_j)}}{\prod_{j \neq i} C_{s_j, m, s_j}} \right] \{m, s\} = \{m, s\} \quad (4.46)$$

y hacemos la identificación del operador en el lado izquierdo de esta última ecuación con el proyector covariante sobre la masa m y espín s_i , es decir,

$$\left[\frac{\prod_{j \neq i} K^{(s_j)}}{\prod_{j \neq i} C_{s_j, m, s_j}} \right] = \mathcal{P}^{(m, s_i)} \quad (4.47)$$

Usando la base de eigenestados de V^2 , es fácil comprobar que estos operadores cumplen todas las propiedades para proyectar los estados específicos de espín en la representación en cuestión. Tales propiedades son,

$$\mathcal{P}^{m, s_1} | \dots \rangle = \mathcal{P}^{m, s_1} | \dots \rangle, \quad (4.48)$$

$$\prod_s \mathcal{P}^{m, s_1} = 0 \quad (4.49)$$

$$\sum_s \mathcal{P}^{m, s_1} = 1 \quad (4.50)$$

La ecuación (4.46) tiene todas las propiedades deseadas anteriormente en una ecuación de movimiento para un estado con masa m , y espín s , proyectado de entre los demás estados que están en la misma representación. Sin embargo, es de notar que el grado más grande con el que aparecen W y P en (4.46) es de $2(N-1)$, lo que significa que en el espacio de posiciones, esta ecuación representa un sistema de ecuaciones diferenciales de orden $2(N-1)$ y sólo en el caso de que haya dos sectores invariantes de Poincaré ($N=2$), la ecuación será de segundo orden. Este resultado obviamente predice ecuaciones diferenciales de 4to orden, 6to, etc para los proyectores dentro de una representación con 3 sectores invariantes, 4 sectores, etc. Por múltiples razones que se mencionaran más adelante, esto es un inconveniente. Sin embargo, también más adelante nos encontraremos con una forma alternativa de rastrear estados deseados de espín y masa que permanezcan como ecuaciones diferenciales cuadráticas para cualquier número de sectores invariantes.

4.2.5. Las representaciones de Lorentz con dos sectores invariantes de Poincaré

El caso más sencillo y particular de una representación genérica de Lorentz que es de interés para nosotros, es aquella que contiene sólo dos sectores invariantes de Poincaré. En este caso llamamos $s_2 = s$ y $s_1 = s - 1$, y como lo hemos mencionado anteriormente, estamos interesado en proyectar el estado con el espín más alto, como lo es en el caso en que la representación es $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = [(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})]$, donde el estado de interés es el que tiene un valor de espín $3/2$.

Haciendo uso de (4.43) y (4.44) podemos encontrar el proyector \mathcal{P}^{m, s_1} para el espín más

alto:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}^{(m,s)} &= \frac{K^{(s-\frac{1}{2})}}{C_{s-\frac{1}{2},s}} \\
 &= \frac{W^2 - (s-1)P^2}{m^2[(s-1)(s) + (s)(s+1)]} \\
 &= \frac{1}{2s} \left(\frac{W^2}{m^2} + s(s-1) \frac{P^2}{m^2} \right) \quad (4.51)
 \end{aligned}$$

Este proyector covariante para rastrear el estado con espín más alto de una representación que contiene sólo dos sectores invariantes de Poincaré, lo usaremos para proyectar el estado con espín $3/2$ en la representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \oplus [(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})]$ considerando la forma particular de W^2 y P^2 para esta representación en el siguiente capítulo.

Uno desearía que la única solución a (4.45) fuera el estado $\{m, s_1\}$, pero no es así. A pesar de que los estados en los restantes sectores invariantes de Poincaré no son solución, sí existen otras soluciones de la forma $\{m, s\}$, pero con espines s que no están en la representación en la que estamos trabajando. Es fácil verlo, ya que (4.45) se puede convertir en una ecuación algebraica al hacer actuar todos los operadores K , y mediante esta ecuación característica buscar soluciones a (4.45).

$$\begin{aligned}
 \left[\prod_{j \neq i} C_{s_j, m, s} \right] \{m, s\} &= \left[\prod_{j \neq i} C_{s_j, m, s_1} \right] \{m, s\} \\
 \Rightarrow \prod_{j \neq i} C_{s_j, m, s} &= \prod_{j \neq i} C_{s_j, m, s_1} \quad (4.52)
 \end{aligned}$$

La expresión (4.52) es una ecuación algebraica para dos incógnitas m y s , y tiene en general un número infinito de soluciones. Aunque, por lo señalado anteriormente, *ningún* estado $\{m, s\}$ es solución cuando s caracteriza a alguno de los sectores invariantes de Poincaré en la representación que estamos estudiando, excepto, claro, $s = s_1$, uno espera que esto no sea impedimento alguno, debido a que el resto de soluciones que acepta (4.45) simplemente no están en la representación en la que estamos trabajando y los operadores K en (4.45) son operadores que *actúan sólo sobre la representación en cuestión*. Es, en cierta manera, un poco desalentador saber que la ecuación diferencial de onda para rastrear un estado específico en una representación con más de dos sectores invariantes

será mayor de segundo orden como se vió en la sección anterior. En la siguiente sección proponemos una forma de rastrear el estado más alto de la representación sin usar el esquema de los proyectores covariantes, dicho formalismo permite tener siempre una ecuación de segundo orden independientemente del número de sectores invariantes que haya en la representación.

4.2.6. Más allá de los Proyectores Covariantes

Hemos señalado que en la búsqueda de una ecuación de onda para campos con espín alto, busquemos ecuaciones de onda que tengan la forma,

$$\mathcal{P}^{(m;s)}\psi = \psi, \quad (4.53)$$

ya que este tipo de ecuaciones ha dado buenos resultados para la descripción de espines más bajos. Sin embargo, el orden de la ecuación que resulta depende del número de sectores invariantes y sólo para el caso en que tenemos dos sectores invariantes obtenemos una ecuación de segundo orden en las derivadas. Es natural preguntarse si podemos obtener una ecuación de onda para el estado con espín más alto, s_N , de una representación con N sectores invariantes de Poincaré que no se base en un operador de proyección, si no que sea una ecuación que tenga como *solución* el estado más alto de espín y que sea siempre de *segundo* orden.

A continuación, nos encontraremos con otra forma de rastrear estados con cierto espín, que difiere sustancialmente de (4.45) cuando tenemos más de dos sectores invariantes de Poincaré. Esta forma alterna es utilizable cuando uno busca rastrear *el estado más alto de espín en la representación de interés*.

Considere la ecuación,

$$K^{(s_N-1)}\{m, s\} = C_{s_N-1, m_N, s_N}\{m, s\} \quad (4.54)$$

Obviamente $\{m_N, s_N\}$ satisface esta condición y es por eso que la hemos considerado pero si además de aceptar este estado como solución, aceptáramos otros estados presentes en la representación no tendría ningún atractivo para nosotros. De manera sorprendente, encontramos que no es el caso y que (4.54) no admite al resto de los sectores invariantes de Poincaré como soluciones, es decir, estados $\{m, s\}$ con $(s < s_N)$ no son solución de

(4.54).

Nuevamente hacemos uso de la ecuación característica algebraica de (4.54) para demostrar que estados con $s < s_N$ no son solución. Contrariamente al caso de la ecuación (4.45), aquí no es evidente que esto sea cierto.

La ecuación característica algebraica es,

$$C_{s_N-1, m, s} = C_{s_N-1, m_N, s_N}$$

Como $s_{N-1} = s_N - 1$, esta última ecuación se lee,

$$m^2 [(s_N - 1)s_N - s(s + 1)] = -2s_N m_N^2$$

La ecuación característica es una ecuación algebraica para dos variables, (m, s) . Es conveniente hacer un cambio de variables para estudiar las soluciones. Utilizamos en lugar del par (m, s) , el par (k, s) , donde $k = (m_N/m)^2$. Así que, rescribiendo la ecuación característica algebraica en términos de k , encontramos la condición que debe satisfacer el estado (k, s) para que sea solución de (4.54):

$$k = \frac{s^2 + s - s_N^2 + s_N}{2s_N} \quad (4.55)$$

Entonces, cualquier estado $\{m, s\}$ al que le corresponden las variables (k, s) , que satisfagan (4.55), será solución de (4.54). Por la forma en que se definió k debemos hacer notar que $k > 0$. No puede ser igual a cero debido a que $m_N \neq 0$.

Retomemos la demostración que estamos tratando de probar, que ahora en función de las variables k y m , lo que queremos demostrar es que si $s \leq s_N - 1$, no existe una k tal que (k, s) satisfaga (4.55).

Esta demostración es muy simple, ya que $s_N \geq 1$ (Suponemos al menos dos sectores invariantes de Poincaré) y $s \geq 0$, entonces:

$$0 \leq s \leq s_N - 1 \Rightarrow s + \frac{1}{2} \leq s_N - \frac{1}{2} \Rightarrow (s + \frac{1}{2})^2 \leq (s_N - \frac{1}{2})^2$$

$$\therefore s^2 + s - s_N^2 + s_N \leq 0 \Rightarrow \frac{s^2 + s - s_N^2 + s_N}{2s_N} \leq 0 \Rightarrow k \leq 0.$$

Este último desarrollo muestra pues que, si los estados con espín $s < s_N$ han de ser solución de la ecuación (4.54), necesariamente deben tener un valor para k menor ó igual a

cero, lo que a su vez significa un cociente de masas m_N/m imaginario, lo cual excluye a estos estados, desde una perspectiva física, de ser soluciones a la ecuación (4.54). Entonces, (4.45) y (4.54) comparten las mismas soluciones. La gran diferencia es que en la primera, \mathcal{W} y P aparecen con grado $2(N-1)$ y en la última aparecen con grado 2, independientemente de cuántos sectores invariantes de Poincaré existan en la representación usada. Es de notar que para el caso en que tenemos sólo dos sectores invariantes de Poincaré, (4.45) y (4.54) *son la misma ecuación*. La ecuación (4.54) escrita explícitamente en términos de los Casimires \mathcal{W}^2 y P^2 es,

$$\left(\frac{K^{(s_N-1)}}{s_N-1} \right)_{m_N, s_N} \{m, s\} = -\frac{1}{2s_N} \left(\frac{\mathcal{W}^2}{m_N^2} + s_N(s_N-1) \frac{P^2}{m_N^2} \right) \{m, s\} - \{m, s\}. \quad (4.56)$$

donde hemos tomado $s_{N-1} = s_N - 1$ como es el caso para representaciones del tipo $\left(\frac{K}{2}, \frac{K}{2}\right) \otimes \left[\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)\right]$. La ecuación (4.56), obtenida a partir de los anuladores, podemos decir abusando del lenguaje, es una ecuación *universal* para describir y proyectar el más alto espín con una masa única en los espacios de representación, como el anteriormente mencionado, donde tenemos un número finito de estados con espines que difieren por una unidad. Esta ecuación, volvemos a recalcar, es siempre de segundo orden en las derivadas, debido a que en el espacio de posiciones, los Casimires están dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^2 &= \mathcal{W}_\mu \mathcal{W}^\mu = \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\delta\epsilon\eta} \epsilon^\mu{}_{\nu\sigma\lambda} M^{\delta\epsilon} M^{\nu\sigma} (\gamma\partial_\nu)(\gamma\partial_\lambda), \\ P^2 &= (\gamma\partial_\mu)(\gamma\partial^\mu) \end{aligned} \quad (4.57)$$

El hecho de que la ecuación de movimiento sea de segundo orden tiene ventajas tanto matemáticas como físicas.

4.2.7. Comparación de ambos esquemas

En esta sección hacemos una comparación de los dos esquemas para rastrear el estado más alto de la representación, por un lado con la ecuación (4.45) y por otra parte con la ecuación (4.54). En este ejemplo consideramos el caso de una representación con 4 sectores invariantes de Poincaré que es el caso de la representación $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \otimes \left[\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)\right]^2$, donde el contenido de espín va desde 1/2 hasta 7/2, y uno desea describir el estado con el espín más alto 7/2. La ecuación (4.45) para rastrear el estado con espín 7/2 y masa m_N

sería,

$$\left(\mathcal{W}^2 + \frac{3}{4}P^2\right) \left(\mathcal{W}^2 + \frac{15}{4}P^2\right) \left(\mathcal{W}^2 + \frac{35}{4}P^2\right) \{m, s\} = -1260(m_N^2)^{1/3} \{m, s\} \quad (4.58)$$

que obviamente es una ecuación diferencial de sexto orden en el espacio de las posiciones. Sin embargo, la ecuación (4.56) para este caso es,

$$\left(\mathcal{W}^2 + \frac{35}{4}P^2\right) \{m, s\} = -7m_N^2 \{m, s\}, \quad (4.59)$$

que sería una ecuación diferencial de segundo orden como ya lo hemos mencionado. En esta sección queremos hacer la comparación explícita de las soluciones físicas y no físicas que ambas ecuaciones tienen, además de verificar que las dos tienen como solución al estado $\{m_N, 7/2\}$. Para ver esto, basta con revisar las condiciones algebraicas a las que se reducen estas ecuaciones en el espacio de representación. Para la primera ecuación tenemos,

$$\left(\frac{m_N}{m}\right)^6 \{m, s\} = \frac{1}{1260} \left(s(s+1) - \frac{35}{4}\right) \left(s(s+1) - \frac{15}{4}\right) \left(s(s+1) - \frac{3}{4}\right) \{m, s\} \quad (4.60)$$

de manera que,

$$k_1 = \left(\frac{m_N}{m}\right)^6 = \frac{1}{1260} \left(s(s+1) - \frac{35}{4}\right) \left(s(s+1) - \frac{15}{4}\right) \left(s(s+1) - \frac{3}{4}\right), \quad (4.61)$$

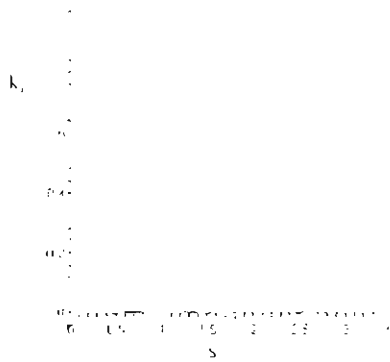
y entonces, cualquier estado que tenga espín s y masa $m = m_N/(k_1)^{1/6}$ que satisfagan esta ecuación algebraica, será solución de la ecuación (4.58). Para la ecuación de segundo orden, obtenemos la siguiente expresión algebraica,

$$\left(\frac{m_N}{m}\right)^2 \{m, s\} = \frac{1}{7} \left(s(s+1) - \frac{35}{4}\right) \{m, s\}, \quad (4.62)$$

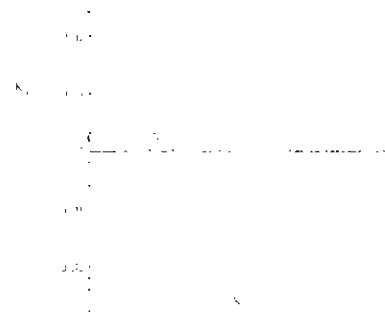
así que en este caso,

$$k_2 = \left(\frac{m_N}{m}\right)^2 = \frac{1}{7} \left(s(s+1) - \frac{35}{4}\right) \quad (4.63)$$

y los estados con espín s y masa $m = m_N/k_2^{1/2}$ que sean solución de esta ecuación algebraica, serán solución de la ecuación (4.58). A continuación graficamos estas dos funciones algebraicas $k_1(s)$ y $k_2(s)$,



(a) Intervalo de $s = 0$ a $s = \frac{7}{2}$



(b) Intervalo de $s = 0$ a $s = \frac{7}{2}$

Figura 4.1 Gráfica de la Función $k_1(s)$

En los dos casos, a cualquier espín s_i le corresponde un valor de k_i tal que el estado $\{m_i, s_i\}$ es solución de la ecuación característica algebraica (4.58) ó de (4.59), ya sea que $m_i = m_N/(k_i)^{1/6}$ ó $m_i = m_N/(k_i)^{1/2}$, respectivamente. Sin embargo, todas estas soluciones excepto una, son soluciones de la ecuación diferencial respectiva. Esto se debe a que en el espacio de la representación que estamos trabajando hay solo un conjunto finito de valores que puede tomar la variable s , además, para algunos valores de s que sí están en la representación, el valor de k implica una masa infinita ó masa imaginaria. Específicamente para el espacio de representación de este ejemplo, los valores posibles de espín son $7/2$, $5/2$, $3/2$ y $1/2$, y como muestra la figura 4.1, los estados con $s = 5/2$, $s = 3/2$ y $s = 1/2$ deben tener un valor $k_1(s) = 0$ para ser solución de la ecuación (4.58), sin embargo, este valor de k_1 implica una masa infinita para estos estados, por lo tanto no son soluciones físicas de la ecuación. De la misma manera, podemos notar en la figura 4.2 que los estados con espín $s = 1/2$ y $s = 3/2$ no son soluciones a la ecuación diferencial (4.59) ya que estos estados tienen masas imaginarias puesto que $k_2(s) < 0$. El estado con $s = 5/2$ tampoco es una solución física ya que, igual que en el caso de la otra ecuación, la masa del estado es infinita. Es fácil constatar que, para ambas ecuaciones la única solución física es el estado $\{m_N, s = 7/2\}$.



Figura 4.2. Gráfica de la Función $k_2(s)$

4.3. Conclusión

Los resultados principales de este capítulo son las dos ecuaciones que hemos obtenido para rastrear el estado con espín más alto en una representación del grupo de Poincaré, la ecuación (4.45) que esta basada en el concepto de proyectores covariantes, y la ecuación (4.54) que esta basada en el concepto de los operadores K ó anuladores. Hemos señalado que la principal ventaja de ésta última ecuación es la de ser de segundo orden para cualquier representación, sin embargo, como en lo que resta de la tesis nos enfocaremos explícitamente al rastreo de espín 3/2 en una representación que cuenta con solo dos sectores invariantes, los dos formalismos producen la misma ecuación diferencial de segundo orden, de tal forma que no estaremos investigando las consecuencias de preferir uno u otro formalismo al acoplar la ecuación de movimiento a un campo electromagnético. Como se menciona en el párrafo anterior, el siguiente paso es acoplar la ecuación de movimiento a un campo electromagnético y determinar si sus soluciones no sufren del problema de Velo-Zwanziger, que de hecho es el caso bajo una ligera modificación a la ecuación, haciendola una más adecuada descripción de campos elementales de espín 3/2 que el formalismo de Rarita-Schwinger, este acoplamiento y su estudio se lleva a cabo en el siguiente capítulo de la tesis.

Capítulo 5

Acoplamiento con el campo magnético y evaluación del criterio de hiperbolicidad

5.1. Introducción

En este capítulo consideramos la ecuación de movimiento para el estado con espín $3/2$ dentro de la representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \otimes [(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})]$ cuando interactúa con un campo electromagnético externo. El procedimiento prescrito por la electrodinámica cuántica para obtener dicha ecuación, como ya lo hemos mencionado, es utilizar la ecuación para el campo libre y hacer la sustitución $P_\mu \rightarrow \pi_\mu = P_\mu + eA_\mu$ (Véase el Apéndice 1). Como el espacio de representación contiene dos sectores invariantes de Poincaré con espín $1/2$ y $3/2$, la ecuación para el estado con el más alto espín en la formulación libre es,

$$-\frac{1}{3m^2} \left[\mathcal{W}^2 + \frac{3}{4} 1_{4 \times 4} P^2 \right]^\alpha_\beta \psi^\beta = \psi^\alpha, \quad (5.1)$$

que simplemente es la ecuación (4.51) encontrada en el capítulo anterior con $s = 3/2$. La función de onda para este espacio de representación es el cuadri-vector-espinoz formado del producto directo del cuadvectoaz A^μ que se transforma de acuerdo a la representación vectorial $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, con un espinoz de Dirac ψ ,

$$u^\mu = A^\mu \otimes \psi. \quad (5.2)$$

Lógicamente el proyector es un operador en este espacio de representación. Para obtener la forma explícita de esta ecuación de movimiento en función del momento, es necesario

considerar el cuadvivector de Pauli-Lubanski con detalle en esta representación

5.2. Acoplamiento mínimo explícito

La sustitución $P_\mu \rightarrow \pi_\mu$, hecha sobre una cantidad la vamos a representar con un circunflejo sobre la misma, de forma,

$$\widehat{f}(P_\mu) \rightarrow f(\pi_\mu) = f(\pi_\mu) \quad (5.3)$$

Así entonces, acoplando (5.1) tenemos,

$$\left[\mathbb{1}\mathbb{V}^2 + \mathbb{1}_{4 \times 4} \left(\frac{3}{4} P^2 + 3m^2 \right) \right]_{\alpha\beta} \psi^\beta = 0 \rightarrow \left[\mathbb{W}^2 + \mathbb{1}_{4 \times 4} \left(\frac{3}{4} \pi^2 + 3m^2 \right) \right]_{\alpha\beta} \psi^\beta = 0 \quad (5.4)$$

Vamos a desarrollar explícitamente $\widehat{\mathbb{W}}^2$. Partiendo desde la definición del cuadvivector de Pauli-Lubanski según la expresión (4.22),

$$\begin{aligned} [\widehat{\mathbb{W}}^2]_{\alpha\beta} &= [\widehat{\mathbb{W}}^\mu \widehat{\mathbb{W}}_\mu]_{\alpha\beta} = \left[\left(\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} M^{\mu\nu} \pi^\lambda \right) \left(\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\lambda} M^{\sigma\lambda} \pi^\mu \right) \right]_{\alpha\beta} \\ &= \frac{i}{4} \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} \epsilon_{\mu\nu\sigma\eta} \left[(M_\nu^{\mu\sigma} \otimes \mathbb{1}_{4 \times 4} + \mathbb{1}_{4 \times 4} \otimes M_\nu^{\mu\sigma}) (M_\sigma^{\delta\epsilon} \otimes \mathbb{1}_{4 \times 4} + \mathbb{1}_{4 \times 4} \otimes M_\sigma^{\delta\epsilon}) \pi^\lambda \pi^\eta \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} \epsilon_{\mu\nu\sigma\eta} \left[(M_\nu^{\mu\sigma} M_\lambda^{\delta\epsilon}) \otimes \mathbb{1}_{4 \times 4} + M_\nu^{\delta\epsilon} \otimes M_\lambda^{\mu\sigma} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + M_\nu^{\sigma\tau} \otimes M_\lambda^{\delta\epsilon} + \mathbb{1}_{4 \times 4} \otimes (M_\nu^{\mu\sigma} M_\lambda^{\delta\epsilon}) \right] \right]_{\alpha\beta} \pi^\lambda \pi^\eta \\ &= [\widehat{\mathbb{1}\mathbb{1}^2}]_{\alpha\beta} + \widehat{w}^2 [g]_{\alpha\beta} - \left[\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\eta} M_\nu^{\delta\epsilon} \right]_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} M_\lambda^{\nu\sigma} \right) \pi^\lambda \pi^\eta \\ &\quad + \left[\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} M_\nu^{\mu\sigma} \right]_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\eta} M_\lambda^{\nu\sigma} \right) \pi^\lambda \pi^\eta \\ &= [\widehat{\mathbb{1}\mathbb{1}^2}]_{\alpha\beta} + \widehat{w}^2 [g]_{\alpha\beta} + w^\mu [W_\mu]_{\alpha\beta} + [W^\mu]_{\alpha\beta} w_\mu, \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde en esta última ecuación hemos tomado en cuenta que todos los elementos de matriz de los generadores de la parte vectorial *conmutan* con todos los elementos de matriz de los generadores de la parte espinorial. La última expresión anterior la reescribimos de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} [\mathbb{V}^2]_{\alpha\beta} &= [\widehat{\mathbb{1}\mathbb{1}^2}]_{\alpha\beta} + \widehat{w}^2 [g]_{\alpha\beta} + [W^\mu]_{\alpha\beta} w_\mu, \\ [\widehat{\mathbb{1}\mathbb{1}^2}]_{\alpha\beta} &+ \widehat{w}^2 [g]_{\alpha\beta} + [\widehat{\mathcal{F}}]_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Al término $[\tilde{T}]^{\alpha}_{\beta}$, lo denominaremos como *término de interferencia* entre la parte vectorial y la parte espinorial en el cuadrivector de Pauli-Lubanski. Resulta útil expresar $[\tilde{T}]^{\alpha}_{\beta}$ de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
 [\tilde{T}]^{\alpha}_{\beta} &= (u^{\alpha} - W^{\alpha} + W^{\alpha} - u^{\alpha})^{\rho}_{\sigma} \\
 &= \left(\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \pi^{\mu} \pi^{\nu}\right) (\epsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} \pi^{\alpha} \pi^{\beta}) + (\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \pi^{\mu} \pi^{\nu}) \left(\frac{1}{2} \epsilon_{\gamma\delta\mu\nu} \pi^{\gamma} \pi^{\delta}\right) \\
 &= -\frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \left[\epsilon_{\mu\nu\gamma\delta} \pi^{\mu} \pi^{\nu} + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \pi^{\mu} \pi^{\nu} \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \left[\epsilon_{\mu\nu\gamma\delta} \pi^{\mu} \pi^{\nu} + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \pi^{\mu} \pi^{\nu} \right] \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

Insertamos el desarrollo para $\widehat{W}^{\alpha\beta}$ en función del término de interferencia en la ecuación (5.4), y así obtener nuestra ecuación de movimiento para el campo de espin 3/2 acoplado al campo magnético.

$$\left\{ [\widehat{W}^{\alpha\beta}]^{\gamma}_{\delta} + u^{\alpha} [g]^{\gamma}_{\delta} + [\tilde{T}]^{\alpha}_{\beta} + \left(\frac{3}{4} \pi^2 + 3m^2\right) [g]^{\alpha}_{\beta} \right\} w^{\beta} = 0, \quad (5.8)$$

y usando las expresiones (4.35) y (4.37) para el cuadrado de los cuadrivectores de Pauli-Lubanski tanto de la parte fermiónica como la bosónica,

$$\left\{ -2(\pi^2 [g]^{\alpha}_{\beta} - \pi_{\beta} \pi^{\alpha}) + \left(-\frac{3}{4} \pi^2 + \frac{ie}{4} \gamma_{\alpha} \gamma_{\lambda} F^{\lambda\eta}\right) [g]^{\alpha}_{\beta} + [\tilde{T}]^{\alpha}_{\beta} + \left(\frac{3}{4} \pi^2 + 3m^2\right) [g]^{\alpha}_{\beta} \right\} w^{\beta} = 0 \quad (5.9)$$

Finalmente, simplificando un poco esta última expresión,

$$\left\{ (-2\pi^2 + 3m^2) [g]^{\alpha}_{\beta} + 2\pi_{\beta} \pi^{\alpha} + [\tilde{T}]^{\alpha}_{\beta} + \frac{ie}{4} \gamma_{\alpha} \gamma_{\lambda} F^{\lambda\eta} [g]^{\alpha}_{\beta} \right\} w^{\beta} = 0 \quad (5.10)$$

Esta última expresión es nuestra ecuación de movimiento acoplada al campo magnético. Sería una bonita sorpresa que esta última ecuación no fuese aquejada por el problema de Velo-Zwanziger. Sin embargo, si uno toma el determinante, cuyas entradas son los términos que contienen las derivadas más altas tomando la sustitución $i\partial_{\mu} \rightarrow u_{\mu}$, tal y como lo hicimos en el capítulo anterior, encontramos que,

$$D(n) = |\Gamma^{\alpha}_{\beta} n^{\beta}| = 0, \quad \forall n \quad (5.11)$$

Así que, todas las superficies en el espacio-tiempo son superficies características de la ecuación, por tanto, no es un sistema genuino de ecuaciones diferenciales y esto como

ya lo hemos visto con el caso de Rarita-Schwinger, señala la presencia de restricciones en la ecuación. De tal forma que (5.10), tal cual, no es apropiada para describir el campo de espín 3/2. Obviamente, gracias a la experiencia ganada al estudiar el Lagrangiano de Rarita-Schwinger, tenemos una forma de intentar remediar este defecto. Procederemos a encontrar las ecuaciones auxiliares de forma análoga a lo que hicimos con la ecuación de movimiento para Rarita-Schwinger.

5.3. Condiciones Auxiliares

Siguiendo el tratamiento de forma paralela al que se usó para las ecuaciones de Rarita-Schwinger, procederemos a encontrar expresiones para $\gamma_\mu \psi^\mu$ y $\pi_\mu \psi^\mu$ que son ecuaciones auxiliares que al incorporarlas en (5.10), esperamos obtener un sistema *genuino* de ecuaciones diferenciales.

5.3.1. Contracción con γ_α

Obtenemos en primer término la contracción $\gamma_\alpha [\widehat{T}]^{\alpha\beta}$. Haciendo uso de (A.22) podemos escribir,

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha [\widehat{T}]^{\alpha\beta} &= -\frac{i}{2} \gamma_\alpha \gamma_\beta [\epsilon^{\mu\alpha}{}_{\beta\sigma} \gamma^\mu \gamma^\sigma + \epsilon^{\mu\alpha}{}_{\beta\rho} \gamma_\mu \gamma_\sigma] \pi^\rho \pi^\sigma \\ &= \frac{i}{2} \gamma_\beta [\epsilon_{\sigma\alpha\mu\beta} \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\sigma + \epsilon_{\rho\alpha\mu\beta} \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma_\rho] \pi^\rho \pi^\sigma \\ &= i [\sigma_{\lambda\beta} \gamma_\nu + \sigma_{\nu\beta} \gamma_\lambda] \pi^\nu \pi^\lambda \\ &= [g]_{\lambda\beta} \gamma_\nu + [g]_{\nu\beta} \gamma_\lambda - (\gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\beta + \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\lambda) \pi^\nu \pi^\lambda \end{aligned} \quad (5.12)$$

Si utilizamos (A.23) en el término que contiene la suma de triple productos de matrices gama en la expresión anterior, podemos expresar la contracción en la forma compacta,

$$\gamma_\alpha [\widehat{T}]^{\alpha\beta} = 2\pi^2 \gamma_\beta - 2\pi \pi_{\beta\gamma} \epsilon^{\gamma\lambda} \gamma_\lambda \quad (5.13)$$

Ahora procedemos a contraer la ecuación de movimiento acoplada al campo magnético (5.10), haciendo uso del último resultado obtenido

$$\begin{aligned}
 & \gamma_\alpha \left\{ (-2\pi^2 + 3m^2)(q^{l\alpha}{}_\beta + 2\pi^\alpha \pi^\beta + \tilde{F}^{\alpha\beta}) + \frac{u}{4} \gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\alpha} q^{\nu\beta} \right\} \psi^\beta \\
 &= \left\{ (-2\pi^2 + 3m^2)\gamma_\alpha + 2\gamma_\alpha(\pi^\beta \pi_\beta + u F_{\lambda\lambda}) + \gamma_\alpha \tilde{F}^{\alpha\beta} + \frac{u}{4} \gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\alpha} \right\} \psi^\beta \\
 &= \left\{ (-2\pi^2 + 3m^2)\gamma_\alpha + 2\gamma_\alpha(\pi^\beta \pi_\beta + u F_{\lambda\lambda}) \right. \\
 &\quad \left. + 2\pi^2 \gamma_\alpha + 2\pi \pi_\alpha + u \gamma_\lambda F^{\lambda\alpha} + \frac{u}{4} \gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\alpha} \right\} \psi^\beta \\
 &= \left\{ 3m^2 \gamma_\alpha + u \gamma_\alpha F_{\lambda\lambda} + \frac{u}{4} \gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\alpha} \right\} \psi^\beta \tag{5.14}
 \end{aligned}$$

Usamos la expresión (A.21) para describir el término que contiene la contracción de dos matrices gama con el tensor electromagnético como,

$$\frac{u}{4} \gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\alpha} = \frac{u}{2} \gamma_\lambda F^{\lambda\alpha} - \frac{u}{2} \gamma_\mu \gamma^\lambda \tilde{F}_{\lambda\alpha} \tag{5.15}$$

Finalmente, sustituyendo esta expresión en la ecuación de movimiento encontramos la primera condición auxiliar,

$$\gamma_\alpha \psi^\alpha = \frac{u}{6m^2} \gamma^\lambda \left\{ 2F_{\lambda\beta} - \gamma_5 \tilde{F}_{\lambda\beta} \right\} \psi^\beta \tag{5.16}$$

Esta última expresión es la primera ecuación auxiliar que usaremos para crear un sistema de ecuaciones genuino que describa al campo de espín 3/2. En la siguiente sección obtenemos la segunda ecuación auxiliar que necesitamos para estos propósitos.

5.3.2. Contracción con π_α

La obtención de la segunda restricción, $\pi \cdot \psi$, es bastante menos trivial y necesita de desarrollos algebraicos más extensos. Es por eso que una gran parte de los cálculos los relegaremos al apéndice B, con el propósito de mantener esta sección lo más clara y concisa posible.

Primeramente, sustituimos la expresión (B.2) para $\tilde{F}_{\lambda\alpha}$ en la ecuación (5.16) y reorganizamos todos los términos. De esta forma, obtenemos la siguiente expresión equivalente para

la ecuación de movimiento:

$$\left\{ (\pi^2 - m^2)g^{\alpha\beta} + i\omega F^{\alpha\beta} + \frac{i\epsilon}{6}\gamma^\alpha\gamma^\beta F_{\beta\alpha} + \frac{i\epsilon}{12}\gamma^\lambda\gamma_\mu F^{\lambda\mu}g^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}(\gamma^\nu\boldsymbol{\pi} - 4\pi^\alpha)\pi_\beta + \frac{1}{3}\left(\pi^\alpha\boldsymbol{\pi} - \gamma^\alpha\pi^2 + \frac{i\epsilon}{2}\gamma_\nu F^{\alpha\nu}\right)\gamma_\beta \right\} \psi^j = 0 \quad (5.17)$$

Tomamos la contracción de esta última ecuación con π_α para obtener

$$\left\{ -m^2\pi_\beta + i\epsilon\pi_\alpha F^{\alpha\beta} + \frac{i\epsilon}{6}\boldsymbol{\pi}\gamma^\alpha F_{\beta\alpha} + \frac{i\epsilon}{12}\pi_\beta\gamma_\lambda\gamma_\mu F^{\lambda\mu} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\gamma_\mu\gamma_\nu F^{\mu\nu}\right)\pi_\beta + \frac{1}{3}\left([\pi^2, \boldsymbol{\pi}] - \frac{i\epsilon}{2}\pi^\alpha F_{\alpha\nu}\gamma^\nu\right)\gamma_\beta + [\pi_\beta, \pi^2] \right\} \psi^j = 0 \quad (5.18)$$

Necesitamos conservar como única contribución que contenga a la contracción del cuadrimomento canónico π con el cuádrispinor ψ a él primer término de esta última ecuación, de manera que podamos despejar $\pi \cdot \psi$ y encontrar la segunda restricción. Usando las expresiones (B.4) y (B.6) para el cuarto y quinto término de esta última ecuación, obtenemos,

$$\begin{aligned} & \left\{ -m^2\pi_\beta + i\epsilon\pi_\alpha F^{\alpha\beta} + \frac{i\epsilon}{6}\boldsymbol{\pi}\gamma^\alpha F_{\beta\alpha} \right. \\ & - \frac{\epsilon}{12}\gamma_5[\gamma^\lambda\tilde{F}_{\beta\lambda}, \boldsymbol{\pi}] + \frac{i\epsilon}{12}\{\boldsymbol{\pi}, \gamma^\mu F_{\beta\mu}\} - \frac{1}{6}[\pi_\beta, \pi^2] + \frac{1}{12}[\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}^2]\gamma_\beta \\ & - \frac{\epsilon}{6}\gamma_5[\gamma^\lambda\tilde{F}_{\beta\lambda}, \boldsymbol{\pi}] - \frac{i\epsilon}{6}\{\boldsymbol{\pi}, \gamma^\mu F_{\beta\mu}\} + \frac{1}{6}[\boldsymbol{\pi}, \pi^2]\gamma_\beta \\ & \left. + \frac{1}{3}\left([\pi^2, \boldsymbol{\pi}] - \frac{i\epsilon}{2}\pi^\alpha F_{\alpha\nu}\gamma^\nu\right)\gamma_\beta + [\pi_\beta, \pi^2] \right\} \psi^j = 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Finalmente, desarrollando algunos de los conmutadores y anticonmutadores, podemos re-arreglar términos en esta última ecuación para hallar la segunda ecuación de restricción,

$$\pi \cdot \psi = \frac{i\epsilon}{6m^2} \left\{ (5F_{\beta\alpha}\pi^\alpha - \pi^\alpha F_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\pi}, \gamma^\mu F_{\beta\mu}] + \frac{3i}{2}\gamma_5[\boldsymbol{\pi}, \gamma^\lambda\tilde{F}_{\lambda\beta}] + \frac{1}{2}[\pi^\lambda, \gamma^\mu F_{\mu\lambda}]\gamma_\beta \right\} \psi^j \quad (5.20)$$

Usando las dos ecuaciones auxiliares obtenidas en las últimas dos secciones, podemos construir un conjunto de ecuaciones genuinas que describan el campo de espín 3/2, y es precisamente lo que haremos a continuación en la siguiente sección, además de determinar si estas ecuaciones son hiperbólicas ó no y si sus soluciones están libres del problema de Velo-Zwanziger.

5.4. Cálculo del Determinante Característico

Tal y como lo hicimos en el caso de Rarita-Schwinger, sustituimos las ecuaciones de restricción (5.16) y (5.20) en la ecuación de movimiento, con el propósito de generar un sistema de ecuaciones diferenciales genuino. Usaremos la expresión (5.17) para la ecuación de movimiento y en ella haremos la sustitución de las condiciones obtenidas para $\gamma \cdot \not{x}$ y $\pi \cdot \not{\psi}$. De esta sustitución extraemos los únicos términos que contribuyen al determinante característico, que son todos aquellos que contienen las derivadas de más alto orden, es decir, segundo orden y términos mixtos de segundo orden. Los términos a incluir en el determinante característico, Γ^{α}_{β} , son,

$$\pi^2 \not{x}^{\alpha} - n^{\alpha} \not{x}^{\alpha} \quad (5.21)$$

que es el único término que contribuye de los primeros cuatro términos en (5.17). De la expresión que contiene a $\gamma \cdot \not{x}$ en (5.17), los términos que contribuyen son,

$$\frac{1}{3}(\pi^{\alpha} \not{x} - \gamma^{\alpha} \pi^2) \left(\frac{k}{6} \gamma^{\lambda} |F_{\lambda\beta} - \gamma_{\beta}^{\lambda} \tilde{F}_{\lambda\beta}| \right) \rightarrow \frac{1}{3}(n^{\alpha} \not{\psi} - \gamma^{\alpha} n^2) \left(\frac{k}{6} \gamma^{\lambda} |F_{\lambda\beta} - \gamma_{\beta}^{\lambda} \tilde{F}_{\lambda\beta}| \right) \quad (5.22)$$

donde hemos definido,

$$k = \frac{e}{m^2} \quad (5.23)$$

La parte que contiene a $\pi \cdot \not{\psi}$ en (5.17) contribuye con la mayoría de términos para el determinante característico, por lo tanto los desglosaremos para su presentación. Estos son,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(\gamma^{\alpha} \not{x} - 4\pi^{\alpha}) \frac{ik}{6} (5F_{\beta\lambda} \pi^{\alpha} - \pi^{\alpha} F_{\beta\lambda}) &\rightarrow \frac{1}{3}(\gamma^{\alpha} \not{\psi} - 4n^{\alpha}) \frac{ik}{6} (4n^{\alpha} F_{\beta\lambda}) \\ \frac{1}{3}(\gamma^{\alpha} \not{x} - 4\pi^{\alpha}) \frac{ik}{6} \left(\frac{1}{2} |\not{x}^{\lambda} \gamma^{\mu} F_{\mu\lambda}| \right) &\rightarrow \frac{1}{3}(\gamma^{\alpha} \not{\psi} - 4n^{\alpha}) \frac{ik}{6} \left(\frac{1}{2} |\not{\psi}^{\lambda} \gamma^{\mu} F_{\mu\lambda}| \right) \\ \frac{1}{3}(\gamma^{\alpha} \not{x} - 4\pi^{\alpha}) \frac{ik}{6} \left(\frac{3i}{2} \gamma_{\alpha} \not{x}^{\lambda} \gamma^{\lambda} \tilde{F}_{\lambda\beta} \right) &\rightarrow \frac{1}{3}(\gamma^{\alpha} \not{\psi} - 4n^{\alpha}) \frac{ik}{6} \left(\frac{3i}{2} \gamma_{\alpha} \not{\psi}^{\lambda} \gamma^{\lambda} \tilde{F}_{\lambda\beta} \right) \\ \frac{1}{3}(\gamma^{\alpha} \not{x} - 4\pi^{\alpha}) \frac{ik}{6} \left(\frac{1}{2} |\not{x}^{\lambda} \gamma^{\mu} F_{\mu\lambda}| \gamma_{\beta} \right) &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Recordemos que la matriz Γ^{α}_{β} contiene solo los términos con las derivadas de más alto orden y donde cada una de estas derivadas $\partial_{x^{\mu}}$ se sustituye por una cantidad *algebraica*

n_x , respectiva, y estas cantidades algebraicas conforman el cuadrivector (n_0, n_x, n_y, n_z) que representa a las normales de las superficies características del conjunto de ecuaciones diferenciales de movimiento y que mediante la condición característica se pueden determinar dichas normales. Considerando todos los términos en la matriz $\Gamma^{\alpha\beta}$, obtenemos el determinante de ésta, denominado $D(n)$. La ecuación $D(n) = 0$ determinará las superficies características a la ecuación, y con ello, la hiperbolicidad y causalidad en la propagación de sus soluciones, tal y como fue el caso en las ecuaciones de Rarita-Schwinger. El determinante $D(n)$, es el determinante de una matriz de 16×16 y cuyas entradas son expresiones algebraicas complicadas, más específicamente multinomios complejos en las variables n_0, n_x, n_y, n_z y en las 6 componentes del campo electromagnético, el cual evidentemente es totalmente impráctico de llevar a cabo manualmente, así que el determinante es calculado con ayuda de una computadora usando las rutinas creadas en Maple que están presentadas en el apéndice C. Como era de esperarse, esta tarea es formidablemente complicada aún para una computadora debido al gran número de términos algebraicos intermedios que se deben calcular para realizar el determinante. La complejidad para calcular el determinante de una matriz de $n \times n$ sobre un campo abstracto \mathbf{K} es de $O(n^3)$ operaciones en \mathbf{K} . Sin embargo, para campos más concretos como $\mathbf{K}[x]$, el efecto sobre la complejidad del cálculo debido al tamaño de los datos ó el orden de los polinomios es mucho menos conocido. Comparado con $O(n^3)$ se considera típicamente que la complejidad aumenta por un factor extra n multiplicado por el orden del polinomio si estamos hablando de $\mathbf{K}[x]$, es decir una complejidad de $O(d \cdot n^3)$ para calcular el determinante de una matriz de $n \times n$ con entradas polinomiales en la variable x . Para matrices con entradas multinomiales, como en nuestro caso, no se tiene una guía precisa sobre la complejidad que nos permita determinar el orden de tiempo que le tomará a la computadora calcular semejante determinante.

Es por eso que aquí son de utilidad las rutinas en *Maple* mostradas en el apéndice C. El resultado del cálculo del determinante característico muestra que la ecuación de movimiento (5.17) con las ecuaciones de restricción incluidas, padece el problema de Velo-Zwanziger al igual que las ecuaciones de Rarita-Schwinger. Basta mencionar que una de las soluciones para n_0 cuando consideramos una normal a las superficies características

del tipo $n = (n_x, n_y, 0, n_z)$ en un campo magnético dirigido en la dirección z -es,

$$\frac{\sqrt{(k^2 B_z^2 - 4) \pm \sqrt{(k^2 B_z^2 - 324)m^2 + (81k^2 B_z^2 - 324)m}}}{9(k^2 B_z^2 - 4)} \quad (5.25)$$

lo cuál muestra que existen normales con $\tilde{n} = (n_x, 0, n_z)$ que producen un solución compleja n_0 para la condición característica, y como ya lo habíamos mencionado en el caso de Rarita-Schwinger, esto implica la no hiperbolicidad en algunos marcos de referencia y por tanto la no covariancia de las ecuaciones. Además se puede mostrar que algunas soluciones propagan acausalmente. A pesar de este resultado inesperado, cabe decir que no es la última palabra por decir para el uso de los Casimires del grupo de Poincaré para rastrear partículas con espines altos, ya que, recientemente, en [30] han logrado obtener una ecuación de movimiento para el campo de espín 3/2 con acoplamiento al campo electromagnético que es perfectamente causal. En la siguiente sección damos un breve resumen de la ecuación y deducción de esta, que han encontrado en la referencia citada.

5.5. Conclusiones

Hemos encontrado que el acoplamiento de la ecuación libre (4.51) que proyecta perfectamente al estado con espín 3/2 sobre la capa de la masa con un campo electromagnético externo mediante la sustitución mínima, la cuál nos lleva a la ecuación (5.10), no produce un sistema de ecuaciones genuino como primer punto a mencionar. Siguiendo el mismo procedimiento que es usado en las ecuaciones de Rarita-Schwinger para tratar de generar un sistema de ecuaciones diferenciales genuino, obtuvimos las condiciones de restricción (5.16) y (5.20) que posteriormente incorporamos en la ecuación de movimiento (5.17). El resultado no ha sido alentador a este nivel, el cálculo del determinante característico muestra que este sistema de ecuaciones no es hiperbólico y que algunas de sus soluciones pueden propagar acausalmente. Sin embargo, ésta no es la última palabra por decir en cuanto a estas ecuaciones, ya que la investigación posterior al trabajo hecho en esta tesis ha demostrado que se puede generar una ecuación de movimiento libre de estas patologías si tomamos en cuenta que existen algunos elementos de ambigüedad en la forma en que se ha planteado originalmente el problema.

5.6. Investigación Posterior

En el capítulo anterior dedujimos una ecuación covariante para proyectar el estado más alto de espín en una representación de Lorentz con varios sectores invariantes de Poincaré para *el campo libre*. En las secciones pasadas de este capítulo hemos sido testigos de que el acoplamiento al campo electromagnético mediante la sustitución mínima, aparentemente, no genera una ecuación de movimiento satisfactoria para el campo en interacción a partir de la ecuación de movimiento del campo libre, ya que sufre de patologías similares a las de las ecuaciones de Rarita-Schwinger, como lo es la propagación acausal de sus soluciones. Entonces, una vez hecho el acoplamiento, la ecuación que proyectaba el estado deseado de más alto espín en el caso libre, *no es* una ecuación que proyecte los mismos estados de espín en la presencia de un campo electromagnético. Una pista sobre lo que parece que hemos estado obviando viene de observar que un término como $2\pi_{\beta}\pi^{\alpha}$ en la ecuación de movimiento (5.10), presenta una ambigüedad al realizar la sustitución mínima. Este término antes del acoplamiento simplemente es $2P_{\beta}P^{\alpha}$, y en este caso podemos manipular este término conmutando los momentos y la ecuación de onda libre permanecería inalterada ya que $[P_{\mu}, P_{\nu}] = 0$. Sin embargo, aunque $2P_{\beta}P^{\alpha} = 2P^{\alpha}P_{\beta}$, estos dos términos producen resultados distintos al ser acoplados; el primero sería $2\pi_{\beta}\pi^{\alpha}$ y el segundo $2\pi^{\alpha}\pi_{\beta} = \pi_{\beta}\pi^{\alpha} + i\epsilon F^{\alpha}_{\beta}$, es decir, difieren por el término $i\epsilon F^{\alpha}_{\beta}$. Si las ecuaciones de movimiento fueran genuinas y no fuese necesario generar ecuaciones auxiliares, los dos términos llevarían a la misma matriz Γ^{α}_{β} y consecuentemente las condiciones de hiperbolicidad serían las mismas ya que solo se ven involucrados los términos con las derivadas más altas. Sin embargo, como en nuestro caso, si las ecuaciones resultantes no son genuinas, la conmutación previa de términos antes del acoplamiento, como $\pi^{\alpha}\pi_{\beta}$, pueden modificar sustancialmente las condiciones auxiliares y con ello igualmente los elementos de Γ^{α}_{β} , modificando las condiciones de hiperbolicidad para el caso acoplado. Aparentemente, el marco usado para generar las ecuaciones libres puede producir resultados muy distintos e incluso excluyentes cuando se aplica la sustitución mínima sobre estas ecuaciones, es por eso que uno debe aceptar que las ecuaciones de movimiento resultantes del uso de los operadores Casimir para el caso libre no pueden darnos toda la información necesaria para formar las ecuaciones de movimiento en el caso de un acoplamiento con un campo electromagnético externo. Sin embargo, es una guía invaluable, ya que, sean cuales

sean las ecuaciones de movimiento para el caso acoplado, estas se deben reducir a las ecuaciones para el campo libre aquí obtenidas cuando la magnitud del campo magnético tiende a cero. El trabajo de investigación que prosiguió a los avances hechos en esta tesis culminó felizmente con un resultado regocijante: Una ecuación de movimiento hiperbólica con soluciones causales para el caso acoplado. Este resultado cumbre es presentado en la referencia [30], donde los autores han obtenido una ecuación perfectamente causal y libre de las patologías de Velo Zwanziger, notando que los Casimires solo logran fijar una parte de la ecuación de movimiento. Esta parte es fijada por estos operadores de tal forma que en ausencia de un campo electromagnético, recuperemos una ecuación que proyecte perfectamente el estado con espín 3/2 sobre la capa de la masa. La otra parte que no puede fijar \mathcal{W}^2 y P^2 mediante su inclusión en la ecuación de movimiento, se puede fijar mediante argumentos físicos. Para presentar la idea fundamental que han propuesto los autores en [30], es necesario desglosar la ecuación de movimiento en dos partes, una que contiene la contracción de un tensor simétrico con $\pi^\mu \pi^\nu$ y otro término con la contracción de un tensor antisimétrico con $\pi^\mu \pi^\nu$. Entonces, la ecuación de movimiento acoplada al campo electromagnético,

$$\left\{ -\frac{3}{2}(\pi_\beta \pi^\alpha - \pi^2 g^\alpha_\beta) - \frac{e}{12} \gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\nu} - \frac{1}{3} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \pi^\beta \pi^\gamma - m^2 g^\alpha_\beta \right\} \psi^\beta = 0 \quad (5.26)$$

puede ser reescrita como,

$$\left\{ \Gamma^S_{\beta\mu\nu} \pi^\mu \pi^\nu - m^2 g^\alpha_\beta \right\} \psi^\beta = 0 \quad (5.27)$$

$$\Gamma^S_{\beta\mu\nu} = [\Gamma^\gamma]^\alpha_{\beta\mu\nu} + [\Gamma^A]^\alpha_{\beta\mu\nu} \quad (5.28)$$

donde Γ^S es un tensor simétrico en los índices μ y ν , y Γ^A es un tensor antisimétrico en el mismo par de índices. De aquí en adelante toda referencia a simetría y antisimetría se entenderá que es sobre el par de índices μ y ν . Todos los términos individuales que aparecen en la ecuación de movimiento y que contribuyen al tensor $\Gamma^\alpha_{\beta\mu\nu}$, son simétricos ó antisimétricos, excepto un simple término, el cual es dividido en su parte simétrica y en

su parte antisimétrica

$$\begin{aligned}
 -\frac{2}{3}(\dot{\gamma}_\nu \pi^\nu - \pi^\lambda g^\lambda{}_\nu) &= -\frac{2}{3}(\underbrace{g^\nu{}_\nu g_{\beta\mu}}_{\text{Simétrica}} - \underbrace{g^\nu{}_\nu g_{\mu\nu}}_{\text{Simétrica}}) \pi^\lambda \pi^\lambda \\
 &= -\frac{2}{3} \left[\frac{1}{2}(g^\nu{}_\nu g_{\beta\mu} + g^\nu{}_\mu g_{\nu\beta}) - \frac{1}{2}(g^\nu{}_\nu g_{\beta\mu} - g^\nu{}_\mu g_{\nu\beta}) - g^\nu{}_\nu g_{\beta\mu} \right] \pi^\lambda \pi^\lambda
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

$$-\frac{4i}{12} \gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{12} \underbrace{[\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu]}_{\text{Antisimétrico}} \pi^\mu \pi^\nu \tag{5.30}$$

$$-\frac{1}{3} \dot{\gamma}^\alpha{}_\beta = \frac{1}{6} \gamma^\alpha{}_\lambda \underbrace{(\epsilon^{\lambda\mu}{}_\nu \dot{\gamma}^\lambda \gamma^\mu + \epsilon^{\lambda\mu}{}_\nu \dot{\gamma}^\mu \gamma^\lambda)}_{\text{Simétrico}} \pi^\nu \pi^\nu \tag{5.31}$$

Este último término de interferencia puede ser reescrito completamente usando la identidad (A.21) en términos simples de matrices gama y el tensor métrico.

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{3} \dot{\gamma}^\alpha{}_\beta &= \frac{1}{6} \gamma^\alpha (g_{\beta\nu} \gamma^\nu + g_{\beta\mu} \dot{\gamma}^\mu) + \frac{1}{6} (g^\nu{}_\nu \gamma_\mu + g^\nu{}_\mu \dot{\gamma}^\nu) \gamma^\alpha \\
 &= \frac{1}{3} g^\alpha{}_\nu g_{\beta\mu} - \frac{1}{3} g^\alpha{}_\mu g_{\beta\nu} + \frac{1}{3} g^\alpha{}_\nu g_{\mu\nu} - \frac{1}{3} g_{\mu\nu} \dot{\gamma}^\alpha \gamma^\nu
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

consecuentemente, la parte simétrica y la parte antisimétrica del tensor Γ están dadas por:

$$[\Gamma^A]^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{3} [g^\alpha{}_\mu g_{\beta\nu} - g^\alpha{}_\nu g_{\beta\mu} - \frac{2}{3} \sigma_{\mu\nu} \dot{\gamma}^\alpha] \tag{5.33}$$

$$\begin{aligned}
 [\Gamma^S]^\alpha{}_{\beta\mu\nu} &= g^\nu{}_\beta g_{\mu\nu} - \frac{2}{3} (g^\alpha{}_\nu g_{\beta\mu} + g^\nu{}_\mu g_{\beta\nu}) \\
 &\quad + \frac{1}{6} (g^\nu{}_\nu \gamma_\mu + g^\nu{}_\mu \dot{\gamma}^\nu) \gamma^\alpha \\
 &\quad + \frac{1}{6} \gamma^\alpha (g_{\beta\nu} \gamma^\nu + g_{\beta\mu} \dot{\gamma}^\mu) \\
 &\quad - \frac{1}{3} g_{\mu\nu} \dot{\gamma}^\alpha \gamma^\nu
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Utilizando estas expresiones para las partes simétricas y antisimétricas en la ecuación de movimiento (5.27) no aparece el tensor electromagnético $F^{\mu\nu}$ explícitamente, de tal forma que uno puede recuperar la ecuación de onda libre haciendo simplemente $\pi^\mu = -\dot{I}^\mu$

En este caso el término $[\Gamma^A]^\alpha_{\beta\mu\nu} P^\mu P^\nu$ es cero ya que estamos contrayendo un tensor antisimétrico con uno simétrico. La ecuación de onda para el campo libre sería.

$$\{([\Gamma^S]^\alpha_{\beta\mu\nu} P^\mu P^\nu - m^2 g^\alpha_\beta)\psi^{\beta\gamma} = 0\} \quad (5.35)$$

Pero, si a partir de esta última ecuación queremos obtener la ecuación de movimiento acoplada al campo electromagnético usando la sustitución mínima $P^\mu \rightarrow \pi^\mu$, no recuperaremos la parte antisimétrica que teníamos originalmente en la ecuación acoplada. Este es un punto muy importante a considerar en la búsqueda de una ecuación de movimiento para una partícula que proyecte el estado deseado de espín y masa cuando ésta es libre y que esta *misma* ecuación proyecte los *mismos* estados aún cuando haya acoplamiento con el campo externo, como lo han hecho ver en [30]. Cualquier término que agreguemos a la ecuación de onda libre (5.35), ó equivalentemente un término apropiado en el Lagrangiano, de la forma $[\Omega^A]^\alpha_{\beta\mu\nu} P^\mu P^\nu$, donde el tensor Ω^A es un tensor antisimétrico cualquiera en los índices μ y ν , *no cambia los estados* que está proyectando la ecuación de onda libre (ya que es idénticamente cero). Sin embargo, cuando es acoplada la ecuación libre al campo electromagnético externo, estos términos se "encienden" y son determinantes para la proyección de los estados apropiados de masa y espín, así como para la correcta propagación de los mismos. Los autores en [30] han considerado el tensor antisimétrico $[\Omega^A]^\alpha_{\beta\mu\nu}$ más general que depende de cinco parámetros, que ellos han denominado $g, g', c, d, y f$ y la ecuación de movimiento,

$$\{([\Gamma^S]^\alpha_{\beta\mu\nu} + [\Omega^A(g, g', c, d, f)]^\alpha_{\beta\mu\nu}) \pi^\mu \pi^\nu - m^2 g^\alpha_\beta\} \psi^{\beta\gamma} = 0. \quad (5.36)$$

donde la parte simétrica queda fijada por la ecuación libre y es simplemente la expresión (5.34). Para determinar la parte antisimétrica, los autores imponen diversas condiciones físicas, de esta manera logran fijar uno por uno todos estos parámetros, de modo que la ecuación no presente ninguna ambigüedad debido a estos. Algunos de los requerimientos son la hermiticidad de los términos en el tensor antisimétrico, la supresión de transiciones $\frac{3}{2} \leftrightarrow \frac{1}{2}$ como es requerido por cálculos perturbativos, igualdad de factores giromagnéticos en la parte vectorial y la parte fermiónica para tener un acoplamiento bien definido de la partícula con espín 3/2 al campo electromagnético, y el requerimiento de que la ecuación sea hiperbólica y sus soluciones propaguen causalmente. Este último requerimiento impone que el factor giromagnético con el cuál se acopla el campo de espín 3/2 al campo

electromagnético sea de $g_{3/2} = 2$. Este resultado está en acuerdo con el teorema de Weinberg [31] que establece que una amplitud de dispersión de Compton bien comportada para una partícula que no interactúa fuertemente y que tiene espín mayor que $1/2$ requiere que su factor giromagnético sea $g_s = 2$.

El fruto final de la investigación iniciada en esta tesis y culminada posteriormente en el artículo [30] es plenamente gratificante: *Una ecuación de movimiento de segundo orden para el campo fundamental de espín $3/2$ acoplado a un campo electromagnético externo cuyas soluciones propagan de manera causal incondicionalmente.* Finalmente se tiene una prescripción para describir este campo sin los problemas encontrados por Velo-Zwanziger hace ya más de 60 años para el marco de Rarita-Schwinger que es la descripción comúnmente usada y que ningún otro esquema hasta la fecha había podido evitar los problemas de propagación superluminal en el campo de espín $3/2$ bajo acoplamiento. Sin embargo, esto es apenas el principio de un largo trayecto de investigación derivado a partir de estas ecuaciones, a continuación será necesario calcular procesos bien estudiados en el marco de Rarita-Schwinger y/o experimentalmente para comparar resultados, además no se sabe *a priori* si estas ecuaciones constituyen una descripción adecuada del campo bajo segunda cuantización, lo cual requerirá de una investigación posterior extensa y cuidadosa. Es importante señalar que no se ha encontrado experimentalmente partículas de espín $3/2$ fundamentales (sin estructura interna) que son las partículas que describiría apropiadamente estas nuevas ecuaciones de movimiento, y de hecho, las partículas compuestas de espín $3/2$ que se han encontrado experimentalmente aparecen acompañadas de otras con espines más bajos que parecen constituir una estructura integral, como una especie de *cluster* cuyas componentes encajan perfectamente en el esquema de estados de una representación del tipo Rarita-Schwinger $(j/2, j/2) \otimes [(1/2) \oplus (0, 1/2)]$ como el caso de las resonancias barónicas delta donde los estados reportados se agrupan con los valores $j = 1, 3$ y 5 . La descripción de estos estados fuera del marco de reposo no se tiene claro como debe hacerse; si estos estados no constituyen un cluster de Rarita-Schwinger, entonces, simplemente se lleva a cabo un boost a cada uno de los estados independientemente de los otros hasta el marco inercial de interés: de ser así, en el caso de $j = 1$ habría que hacerlo individualmente para los dos estados con espín $1/2$ de paridades opuestas utilizando la teoría de Dirac y para el estado con espín $3/2$, teniendo que utilizar la descripción presentada en este capítulo. Sin embargo, el ajuste tan preciso de los datos experimentales a los

clusters de RS llevan a pensar que estos se propagan como un todo, y que por tanto no puede llevarse a cabo el boost de manera individual. En el siguiente capítulo proponemos ecuaciones de movimiento para el caso en que consideramos el cluster de RS con $J = 1$, estas ecuaciones de movimiento también tienen la ventaja de no presentar el problema de Velo-Zwanziger a nivel clásico.

Capítulo 6

Descripción de la “Cascada de Espín”

6.1. Introducción

El término “Cascada de Espín” ha sido acuñado recientemente pero hace referencia a un fenómeno observado por M. Kirchbach hace ya un par de años atrás en las referencias [14, 32]. En estos artículos, se demostró que un análisis de Breit-Wigner para las masas de las resonancias observadas en la dispersión Pión-Nucleón (πN), revelan un notable agrupamiento en espín y paridad. Específicamente, es mostrado que los números cuánticos de las resonancias que pertenecen a un particular agrupamiento, encajan en las representaciones del grupo de Lorentz del tipo Rarita-Schwinger (RS).

$$\left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right) \cong \left[\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)\right] \quad (6.1)$$

Al notar que tanto la parte bosónica como la parte fermiónica de estos campos de RS son construidos en base a campos con paridades mezcladas, uno puede tomar y considerar, por concretes, el acoplamiento de un fermión de Dirac con paridad positiva a un bosón que está compuesto de estados con paridad natural ($\eta = +$) ó paridad no natural ($\eta = -$). Estos estados bosónicos, que se pueden ver como degenerados en masa. Llevan todos los momentos angulares internos l , con $l = 0, 1, \dots, k$, como ya lo hemos mencionado anteriormente en la tesis. Así que en el acoplamiento de la parte fermiónica que tiene paridad positiva con la parte bosónica, el espín (J) y paridad (P) de las resonancias bariónicas que

son creadas, tienen los valores,

$$J^P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right), \dots, \left(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad (6.2)$$

Esta distribución de espín y paridad es la misma que uno encuentra en los datos experimentales como se ha señalado en [14, 32], lo que nos muestra que la Naturaleza favorece fuertemente la producción de bariónes, no como estados aislados con espines altos, si no, como excitaciones agrupadas completamente en un cluster de RS. A estos agrupamientos de estados con misma masa y con los valores de espín y paridad dados por (6.2) es a lo que le damos el nombre de cascadas de espín. De manera que el conjunto de estados con los espines más bajos dentro de una representación de RS, que ante la sugerencia de Weinberg [20] era considerarlos como estados redundantes y no físicos que había que proyectar fuera, toman relevancia física inmediata al considerar el análisis de los datos experimentales de los espectros de resonancias bariónicas como el Nucleón (N) y la resonancia Delta (Δ). En el capítulo anterior vimos que la investigación reciente ha permitido la descripción de estados aislados de espín $3/2$ dentro de la representación de Rarita-Schwinger libre de problemas de acausalidad, y esta descripción es apropiada para partículas *fundamentales* aisladas con este valor de espín. Pero también necesitamos una forma de describir estas cascadas de espín que son observadas experimentalmente, y es precisamente el propósito de este capítulo el de contribuir con una ecuación de movimiento para cascadas de espín. Los desarrollos de este capítulo siguen estrechamente los pasos señalados en la referencia [33] que es un artículo que ha producido la investigación en esta tesis.

6.2. Ecuación de onda para la Cascada de Espín

Para hallar una ecuación que describa a la cascada de espín de interés, recordemos que esta cascada es descrita por el tensor-espinores totalmente antisimétrico de rango k , que se transforma de acuerdo a un producto directo de k representaciones tensoriales y una espinorial del grupo de Lorentz,

$$\psi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} = \text{Spin} \left(\frac{1}{2} \right)_1 \otimes \left(\frac{1}{2} \right)_2 \otimes \dots \otimes \left(\frac{1}{2} \right)_k \otimes \left[\left(\frac{1}{2}, 0 \right) \otimes \left(0, \frac{1}{2} \right) \right], \quad (6.3)$$

que consiste en el marco de reposo de k dobletes de paridad con contenido de espín que va desde $\frac{1}{2}$ hasta $(k - \frac{1}{2})$; mientras que el espín más alto $s = k + \frac{1}{2}$ es un singlete de

paridad,

$$\psi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \rightarrow \frac{1^+}{2} \cdot \frac{1^-}{2} \cdot \frac{3^+}{2} \cdot \frac{3^-}{2} \dots \left(k - \frac{1}{2}\right)^+ \cdot \left(k - \frac{1}{2}\right)^- \cdot \left(k - \frac{1}{2}\right)^l, \quad (6.4)$$

donde $l = (-1)^k$ para tensores, y $l = (-1)^{k+1}$ para pseudo-tensores. Esta última ecuación nuevamente ilustra el significado de una cascada de espín, que es una descripción mediante el tensor-espínor $\psi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}$ que tiene un contenido multi-espín con una distribución simétrica de paridades con respecto a los estados más bajos y una paridad única para el estado con más alto espín, y todos estos estados poseen *la misma masa*. Es para nosotros de interés el tensor-espínor de rango más bajo, el cuadrivector-espínor ψ_μ , que como ya hemos visto es usado para la descripción de espín 3/2, en donde uno encuentra la cascada de espín con el menor número de componentes.

$$\psi_{\mu_1 \mu_2 \dots \nu_k} = \frac{1^+}{2} \cdot \frac{1^-}{2} \cdot \frac{3}{2} \quad (6.5)$$

donde en esta última expresión hemos usado el cuadrivector espínor polar por concretes, es decir, hemos tomado la parte bósónica con paridad natural. El cuadrivector-espínor se transforma de acuerdo al producto directo de la representación vectorial $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y a la representación espínorial $[(\frac{1}{2}, 0) : (0, \frac{1}{2})]$ del grupo de Lorentz, y la descripción de estados que se transforman bajo cada una de estas representaciones por separado son muy bien conocidas y han sido exitosas en describir los espines más bajos, 0 y 1. Las ecuaciones de onda respectivas para estas componentes son, para la parte vectorial, la ecuación de Proca, junto con su condición suplementaria,

$$\{(P^2 - m^2)[g]^\nu_\mu - P_\mu P^\nu\} A^\mu = 0, \quad (6.6)$$

$$P_\mu A^\mu = 0, \quad (6.7)$$

donde la condición suplementaria implica que los grados de libertad de la cascada de espín¹ $(0^+, 1^-)$ en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ han sido reducidos a tres y están asociados con espín 1 en el marco de reposo, como lo han demostrado en [34]. Escribiremos la Ec.(6.6) como,

$$(\mathcal{P}_{Feynman})^\nu_\mu A^\mu = 0, \quad (6.8)$$

¹Abusando del lenguaje hemos llamado también a A^μ como una cascada de espín aunque no se transforme como un campo de RS.

donde, obviamente, el operador $(\mathcal{P}_{Proca})^\nu_\mu = (P^2 - m^2)\{g^\nu_\mu - P_\mu P^\nu\}$.
 La parte espinorial $[(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})]$ obedece a la ecuación de Dirac,

$$(\mathcal{P} - m)\psi = 0 \quad (6.9)$$

donde hemos omitido los índices espinoriales como ha sido la convención en esta tesis.
 Escribimos la ecuación de Dirac simplemente como,

$$(\mathcal{P}_{Dirac})\psi = 0 \quad (6.10)$$

Ahora consideramos una ecuación de onda para la cascada de espín $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ observando que las relaciones,

$$(\mathcal{P}_{Proca})^\nu_\mu A^\mu = 0, \quad (\mathcal{P}_{Dirac})\psi = 0 \quad (6.11)$$

implican una ecuación *natural* para describir a la cascada $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ por medio de $\psi^\mu = A^\mu \otimes \psi$,

$$[(\mathcal{P}_{Proca})^\nu_\mu \otimes (\mathcal{P}_{Dirac})]\psi^\mu = 0 \quad (6.12)$$

ya que, recordando la acción de un operador que se forma como el producto directo de dos operadores que actúan sobre espacios de Hilbert disjuntos sobre el producto directo de vectores en estos espacios, tenemos que,

$$\begin{aligned} [(\mathcal{P}_{Proca})^\nu_\mu \otimes (\mathcal{P}_{Dirac})]\psi^\mu &= [(\mathcal{P}_{Proca})^\nu_\mu \otimes (\mathcal{P}_{Dirac})_1](A^\mu \otimes \psi) \\ &= [(\mathcal{P}_{Proca})^\nu_\mu A^\mu] \otimes [(\mathcal{P}_{Dirac})\psi] = 0 \quad |0\rangle = 0, \end{aligned} \quad (6.13)$$

de forma explícita, esta última ecuación la escribimos como,

$$[(P^2 - m^2)\{g^\nu_\mu - P_\mu P^\nu\}A^\mu] \otimes [(\mathcal{P} - m)\psi] = 0 \quad (6.14)$$

Es común expresar este tipo de ecuaciones en la literatura de física como,

$$[(P^2 - m^2)\{g^\nu_\mu - P_\mu P^\nu\}(\mathcal{P} - m)\psi^\mu] = 0, \quad (6.15)$$

en el entendido de que esta ecuación en realidad significa,

$$\{[(P^2 - m^2)\{g^\nu_\mu - P_\mu P^\nu\}] \otimes (\mathcal{P} - m)\}(A^\mu \otimes \psi) = 0 \quad (6.16)$$

El inverso de la ecuación (6.16) tiene la ventaja de proveer un propagador:

$$\Pi_{(1/2, 3/2)}(p) = \frac{1}{2m} \left(\frac{g_{\mu\nu} - \frac{1}{m^2} p_\mu p_\nu}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right) (\not{p} + m) \quad (6.17)$$

que es consistente con los proyectores para la ecuación de Proca y la ecuación de Dirac. La ecuación (6.16) es una ecuación apropiada para describir la cascada de espín *libre*. Nos concierne enormemente saber si tendremos propagación causal en el caso en el que la cascada de espín interactúa con un campo electromagnético externo. Ayudados de las mismas herramientas de análisis que utilizamos para el formalismo de Rarita-Schwinger y el formalismo que utiliza los Casimires del grupo de Poincaré, procederemos a indagar en esta cuestión.

Acoplamos la Ec.(6.16) al potencial electromagnético externo y obtenemos,

$$[(\pi^2 - m^2)g^{\nu\mu} - \pi_\nu \pi^\nu] (\not{\pi} - m) \psi^\mu = 0 \quad (6.18)$$

Ahora, si uno calcula el determinante característico de esta última ecuación $|V_{\nu\mu}|$, que es el determinante de la matriz que tiene como elementos las derivadas más altas del operador que actúa sobre ψ^μ en la Ec. (6.18) con $i\partial_\mu$ reemplazado por π_μ , se encuentra que es idéntico a cero. Como ya hemos visto, esto significa que la Ec. (6.18) tiene restricciones incluidas que ocasionan que el sistema de ecuaciones diferenciales que representan no sea genuino. Usando la experiencia ganada con los formalismos anteriores, procedemos a contraer la Ec.(6.18) con π_ν , de lo cuál obtenemos el resultado,

$$\begin{aligned} [\pi_\mu (\pi^2 - m^2) - (\pi_\mu \pi_\nu + i\nu F_{\nu\mu}) \pi^\nu] (\not{\pi} - m) \psi^\mu &= 0 \\ [m^2 \pi_\mu + i\nu F_{\nu\mu} \pi^\nu] (\not{\pi} - m) \psi^\mu &= 0 \\ m^2 \pi_\mu (\not{\pi} - m) \psi^\mu &= i\nu F_{\mu\lambda} \pi^\lambda (\not{\pi} - m) \psi^\mu \end{aligned} \quad (6.19)$$

Para poder incorporar esta condición suplementaria en la ecuación de onda, conmutamos el par de momentos canónicos en la Ec. (6.18),

$$\begin{aligned} [(\pi^2 - m^2)g^{\nu\mu} - (\pi^\nu \pi_\mu + i\nu F_{\mu}^{\nu})] (\not{\pi} - m) \psi^\mu &= 0 \\ \{(\pi^2 - m^2)g^{\nu\mu} (\not{\pi} - m) - \pi^\nu \pi_\mu (\not{\pi} - m) - i\nu F_{\mu}^{\nu} (\not{\pi} - m)\} \psi^\mu &= 0 \\ \left\{ (\pi^2 - m^2)g^{\nu\mu} - \frac{i\nu}{m^2} \pi^\nu F_{\mu\lambda} \pi^\lambda + i\nu F_{\mu}^{\nu} \right\} (\not{\pi} - m) \psi^\mu &= 0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

ya incorporada la ecuación auxiliar, notemos que los únicos términos que contribuyen al determinante característico son,

$$\pi^2 \not{x} [g]_{\mu}^{\nu} + \frac{\hbar^2}{m^2} F^{\nu} F_{\lambda\rho} \pi^{\lambda} \not{x} = 1^{\nu}_{\mu} = n^{\lambda} \not{x} [g]_{\mu}^{\nu} + n^{\nu} \frac{\hbar^2}{m^2} F_{\lambda\rho} n^{\lambda} \not{x} \quad (6.21)$$

Es fácil ver que la última expresión se puede reescribir como,

$$[\Gamma^{\nu}_{\mu}] = n^{\lambda} \not{x} [g]_{\mu}^{\nu} + n^{\nu} \frac{\hbar^2}{m^2} F_{\lambda\rho} n^{\lambda} \not{x} = \left[\left(n^{\lambda} [g]_{\mu}^{\nu} + n^{\nu} \frac{\hbar^2}{m^2} F_{\lambda\rho} n^{\lambda} \right) \not{x} (\not{x}) \right], \quad (6.22)$$

que no es otra cosa más que el producto directo de las matrices utilizadas para calcular la condición característica de las ecuaciones de onda para espín 1 (Proca) y espín 1/2 (Dirac). Debido al reemplazo $n^{\lambda} = n_{\lambda}$, la matriz 1^{ν}_{μ} tiene componentes algebraicas, por tanto podemos hacer uso del teorema en álgebra lineal sobre el determinante del producto directo de dos matrices, que nos dice, si A y B son dos matrices de dimensionalidad n y g respectivamente, entonces, el determinante del producto directo de estas dos matrices está dado por,

$$|A \otimes B| = |A \otimes B|^n \quad (6.23)$$

podemos obtener fácilmente $[\Gamma^{\nu}_{\mu}]_{\text{Proca} \otimes \text{Dirac}}$ usando los resultados para espines 1 y 1/2,

$$[\Gamma^{\nu}_{\mu}]_{\text{Proca}} = (n^2)^4 \quad [\Gamma^{\nu}_{\mu}]_{\text{Dirac}} = (n^2)^2, \quad (6.24)$$

con estos últimos resultados encontramos finalmente que,

$$[\Gamma^{\nu}_{\mu}]_{\text{Proca} \otimes \text{Dirac}} = (n^2)^{24} \quad (6.25)$$

6.3. Conclusiones

Hemos encontrado que el producto de Kronecker (producto directo) de una ecuación de Proca con una ecuación de Dirac permite una propagación causal de los frentes de onda de las soluciones asociadas con este producto. Dichas soluciones, al tener índices separados de Lorentz y de Dirac, son naturalmente acopladas a los sistemas pión-nucleón, ó fotón-nucleón y describen cascadas de espín. Las correspondientes ecuaciones de movimiento proveen propagadores que son consistentes con los proyectores sobre los estados y esperamos que esta característica facilite el procedimiento de cuantización. Las cascadas de espín como (1/2, 3/2) y (0, 1, 2) podrían ser de mucho interés en espectroscopia de partículas y en gravitación.

Capítulo 7

Conclusiones

Esta tesis se ha avocado al estudio e investigación de dos principales temas, el primero, la construcción de una ecuación de movimiento para una partícula fundamental de espín $3/2$ que produzca soluciones totalmente causales bajo la presencia de un campo electromagnético externo y segundo, la construcción de una ecuación de movimiento para la cascada de espín que consta de un sector de Proca y uno de Lorentz. Los principales resultados de esta tesis son presentados a continuación.

- Las ecuaciones de Rarita-Schwinger utilizadas en la literatura para describir fermiones con espín $3/2$ no representan, en general, un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas en el caso cuando se acoplan a un campo electromagnético externo; Solo son hiperbólicas en algunos marcos de referencia en donde la magnitud del campo magnético está en el rango débil según lo visto en el capítulo 3. Al parecer, el precio que pagan estas ecuaciones por ser lineales en el momento es el acoplamiento no trivial de las componentes con más bajos espines cuando están en presencia de un campo electromagnético externo.
- El rastreo covariante de estados con masa y espín bien definidos sobre la capa de la masa, dentro de una representación de Lorentz que contiene varios sectores invariantes de Poincaré, se puede llevar a cabo mediante una ecuación que involucre a

los proyectores covariantes,

$$\left[\prod_{l \neq i} K^{l, i} \right] \{m, s\} = \left[\prod_{j \neq i} C^{j, m, s} \right] \{m, s\}$$

que en el espacio de posiciones es en general un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de orden $2(N - 1)$, donde N es el número de estados independientes con distinto espín de la representación en la que se hace el rastreo. Es posible también rastrear dicho estado usando la ecuación covariante,

$$-\frac{1}{2s_N} \left(\frac{\mathcal{W}^2}{m^2} + s_N(s_N - 1) \frac{P^2}{m_N^2} \right) \{m, s\} = \{m, s\}$$

que en el espacio de posiciones es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden independientemente del número de sectores invariantes de Poincaré que contenga la representación en cuestión. Esto es una contribución original de la tesis. Cuando tenemos una representación con un contenido de espín de sólo dos estados, ambos esquemas son totalmente equivalentes

- La ecuación de movimiento que se obtiene para la representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \otimes [(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})]$ usando el esquema de los proyectores invariantes, cuando es acoplada al campo electromagnético mediante la prescripción mínima, puede ser puesta en la forma:

$$[\Gamma_{\mu\nu} \pi^\mu \pi^\nu - m^2] \psi = 0, \quad (7.1)$$

donde $\Gamma_{\mu\nu}$ es un tensor independiente de los momentos canónicos y que puede escribirse como la suma de una parte simétrica y otra antisimétrica,

$$\Gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\Gamma_{\mu\nu}^{(S)} + \Gamma_{\mu\nu}^{(A)}].$$

Esta ecuación de movimiento tiene sus orígenes en los operadores Casimir \mathcal{W}^2 y P^2 como lo hemos visto en la tesis. Sin embargo, estos Casimires sólo logran fijar con precisión la parte simétrica del tensor $\Gamma_{\mu\nu}$ para que haya consistencia en límite en el que el campo electromagnético desaparece, es decir, el caso libre. En este caso, $\Gamma_{\mu\nu}^{(A)} P^\mu P^\nu = 0$ y no hay nada que pueda ser fijado con respecto a este tensor. Esta inhabilidad de \mathcal{W}^2 y P^2 para fijar la parte antisimétrica es directamente responsable

que esta ecuación de movimiento padezca el problema de Velo-Zwanziger, al igual que la ecuación de movimiento de Rarita-Schwinger. Sin embargo, esto no representa un fracaso para el esquema que involucra rastrear estados con espín de estado mediante los Casimires del grupo de Poincaré. Recientemente en la referencia [30] se presenta una forma de determinar el tensor antisimétrico más general que puede considerarse y que depende de 5 parámetros arbitrarios. A partir de consideraciones físicas, se pueden fijar estos parámetros y de esta forma obtener una teoría consistente para el acoplamiento del campo de espín $3/2$ con el campo electromagnético. Un resultado muy impactante de este artículo es que, para que la ecuación (7.1) tenga soluciones que propaguen causalmente y sea un sistema de ecuaciones hiperbólicas, el factor giromagnético de acoplamiento del campo elemental de espín $3/2$ con el campo electromagnético debe ser igual a 2. Este resultado está de acuerdo con el teorema de Weinberg [20] que establece que una bien comportada amplitud de una dispersión de Compton hacia adelante para una partícula con espín $s > 1/2$ que no interactúa fuertemente, requiere que su factor giromagnético sea igual a $g_s = 2$.

- El agrupamiento en multipletes de espín paridad en los espectros bariónicos pueden ser descritos mediante representaciones de RS del tipo,

$$\left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right) \cong \left[\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)\right], \quad (7.2)$$

y cuyo contenido de espín corresponde uno a uno con todos los estados presentes en los espectros mencionados. Estos multipletes se denominan cascadas de espín. Hemos visto que podemos describir el acoplamiento de la cascada de espín más baja que corresponde a $k = 1$ y a un contenido de espín paridad igual a $(1/2)^+$, $(1/2)^-$ y $(3/2)^-$ con el campo electromagnético mediante la ecuación (6.20). Las soluciones de esta ecuación de movimiento son la cascada de espín $(1/2)^+ - (3/2)^-$ que propagan causalmente en conjunto. Además de la propagación causal, la ecuación de movimiento tiene la ventaja de proveer un propagador consistente con los proyectores para la ecuación de Dirac y la ecuación de Proca.

Apéndice A

Convenciones

En este apéndice resumimos todas las convenciones que hemos usado en esta tesis. Al final del mismo también se resumen un conjunto de fórmulas e identidades de mucha utilidad para el manejo algebraico de varios desarrollos usados. Cabe hacer notar que varias de las convenciones no son las usadas en varios de los artículos a los que hacemos referencia, así, prevenido queda el lector.

A.1. Convenciones en QFT

$$\epsilon^{0123} = 1, \quad \epsilon_{0123} = -1 \quad (\text{A.1})$$

$$\hbar = c = 1 \quad (\text{A.2})$$

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (\text{A.3})$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & -1_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad i = \{1, 2, 3\} \quad (\text{A.5})$$

$$\sigma^{\mu\nu} = i[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (\text{A.6})$$

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 \quad (\text{A.7})$$

A.2. Indexación para el producto directo

Considere el producto directo de dos matrices cuadradas ($n \times n$), \widehat{M} y \widehat{N} , denotado como $(\widehat{M} \otimes \widehat{N})$. Es una necesidad tener una forma de indexar las componentes de esta matriz así como tenemos una forma de indexar a las matrices \widehat{M} y \widehat{N} . $(\widehat{M} \otimes \widehat{N})$, es una matriz de $n^2 \times n^2$, por lo tanto la forma "normal" de indexar esta matriz sería tal cuál indexamos \widehat{M} y \widehat{N} ,

$$[\widehat{M} \otimes \widehat{N}]_{AB} = [\widehat{M}]_{\overline{A}\overline{B}}[\widehat{N}]_{\underline{A}\underline{B}}. \text{ Donde } \begin{cases} \overline{A} = [(A-1) \operatorname{div} n] + 1 \\ \underline{A} = (A-1) \bmod n + 1 \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

$(a \operatorname{div} b)$ es el cociente que resulta de dividir a por b , y $(a \bmod b)$ es el residuo que resulta de dividir a por b .

En esta tesis manejamos otra forma de indexación que es comunmente usada y que no involucra expresiones como las usadas para \overline{A} y \underline{A} , esta indexación es,

$$[\widehat{M} \otimes \widehat{N}]_{\alpha\beta} = [\widehat{M}]_{\alpha_i}[\widehat{N}]_{\beta_j} \quad (\text{A.9})$$

Ahora, note que esta forma de indexación no hace referencia a un elemento en particular de la matriz de $(n^2 \times n^2)$ como la anterior forma de indexar, si no que, estamos haciendo referencia a un bloque de $(n \times n)$ del producto directo. El interés principal que tenemos en esta forma de indexar es simplemente el de tener una notación para el producto directo que nos permita manipular expresiones con estas matrices, principalmente multiplicaciones. Así, usando esta forma, la multiplicación de dos matrices que están en el producto directo sería,

$$[(\widehat{M} \otimes \widehat{N})(\widehat{\Gamma} \otimes \widehat{\Sigma})]_{\alpha\beta} = [\widehat{M} \otimes \widehat{N}]_{\alpha_i}[\widehat{\Gamma} \otimes \widehat{\Sigma}]_{\beta_j} = ([M]_{\alpha_i}[\widehat{N}]_{\beta_j}) \cdot ([\Gamma]_{\alpha_i}[\widehat{\Sigma}]_{\beta_j}) \quad (\text{A.10})$$

Si todos los elementos de $\tilde{\Gamma}$ conmutan con todos los elementos de \tilde{X} , obtenemos la clásica fórmula del álgebra lineal elemental para la multiplicación de dos matrices que están en el producto directo.

$$[(\tilde{M} \quad \tilde{X}; \tilde{\Gamma} \quad \tilde{X})]_{(m, n)} \cdot [(\tilde{M} \quad \tilde{\Gamma}) \cdot (\tilde{X} \quad \tilde{X})]_{(n, r)} \quad (\text{A.11})$$

A.3. Identidades y Fórmulas de Utilidad

La interacción de una partícula cargada, que es descrita mediante un campo cuántico y una ecuación de movimiento correspondiente, con un campo electromagnético se lleva a cabo mediante la sustitución de las derivadas "normales" ∂_μ por $\partial_\mu - iqA_\mu$, donde A_μ es el cuadripotencial electromagnético y q es el valor absoluto de la carga de la partícula. Esta prescripción es el resultado de que el campo electromagnético es un campo de norma (gauge field) al que se debe acoplar la partícula para que su Lagrangiano de interacción posea la simetría local $U(1)$, tal y como la posee el Lagrangiano libre. La convención en esta tesis, sin embargo, es la misma que la usada en [10], donde, en lugar de usar la carga de la partícula q usamos e , que no es la carga del electrón en este contexto, es más bien, $e = -q$, de tal forma que la prescripción usada para la interacción con el campo magnético sea cambiar $i\partial_\mu$ por $i\partial_\mu + eA_\mu$. Usando la identificación cuántica $i\partial_\mu = P_\mu$, el momento canónico en el acoplamiento es definido como $\pi_\mu = P_\mu + eA_\mu$. Con esta convención, algunas identidades y fórmulas de gran utilidad que contienen al tensor de campo electromagnético $F^{\mu\nu}$ y/o el momento canónico π_μ , son resumidas a continuación.

$$[\pi^\alpha, \pi^\beta] = ieF^{\alpha\beta}, \quad (\text{A.12})$$

$$[\pi^\mu, \not{x}] = ie\gamma_\nu F^{\mu\nu}, \quad (\text{A.13})$$

$$[\not{x}^{-1}, \pi^2] = ie(\pi_\mu F^{\mu\nu} + F^{\mu\nu} \pi_\mu), \quad (\text{A.14})$$

$$\not{x}^2 = \pi^2 - \frac{ie}{2}\gamma_\nu\gamma_\mu F^{\mu\nu} \quad (\text{A.15})$$

$$\{\not{x}^{-1}, \not{x}\} = 2\pi^2, \quad (\text{A.16})$$

$$\{\gamma_5, \not{x}\} = 0. \quad (\text{A.17})$$

$$\sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = i\gamma_5 \not{F} \quad (\text{A.18})$$

$$\sigma_{\beta\lambda} \gamma_\mu F^{\lambda\alpha} = \gamma_\mu \sigma_{\lambda\alpha} F^{\lambda\beta} - i\gamma_5 F^{\alpha\beta} \quad (\text{A.19})$$

Existe una identidad muy útil para el tensor de Levi-Civita que permite obtener varias fórmulas que incluyen contracciones de este tensor con las matrices de Dirac y otras tantas. Esta identidad es:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{4 \times 4} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = & -i\gamma_5 (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta - \gamma^\mu \gamma^\nu g^{\alpha\beta} - \gamma^\mu \gamma^\alpha g^{\nu\beta} \\ & - \gamma^\mu \gamma^\beta g^{\alpha\nu} + \gamma^\nu \gamma^\beta g^{\alpha\mu} - \gamma^\nu \gamma^\alpha g^{\beta\mu} \\ & - \gamma^\alpha \gamma^\beta g^{\mu\nu} + g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \mathbf{1}_{4 \times 4} - g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} \mathbf{1}_{4 \times 4} - g^{\mu\nu} g^{\beta\alpha} \mathbf{1}_{4 \times 4}) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Las fórmulas derivadas de esta identidad de mayor uso para nosotros son,

$$\gamma_\mu \hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_\lambda = g_{\mu\nu} \hat{\gamma}_\lambda - g_{\mu\lambda} \hat{\gamma}_\nu + g_{\nu\lambda} \hat{\gamma}_\mu + i\gamma_5 \epsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} \hat{\gamma}^\alpha \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \sigma^{\nu\rho} = \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \hat{\gamma}^\nu \hat{\gamma}^\rho = i\gamma_5 \sigma_{\mu\sigma} \quad (\text{A.22})$$

Finalmente, otras tantas identidades de utilidad que involucran a las matrices de Dirac son:

$$\gamma_\lambda \gamma_\beta \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\lambda = 2[g_{\lambda\beta} \gamma_\nu + g_{\nu\beta} \gamma_\lambda - g_{\lambda\nu} \gamma_\beta] \quad (\text{A.23})$$

$$\gamma_\beta \gamma_\lambda \gamma_\nu = \gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\beta - 2\gamma_\lambda g_{\beta\nu} + 2g_{\beta\lambda} \gamma_\nu \quad (\text{A.24})$$

$$\sigma_{\mu\nu} \sigma^\mu{}_\rho = 2\gamma_\nu \gamma_\rho + g_{\nu\rho} \quad (\text{A.25})$$

$$[\gamma_\beta, \sigma_{\lambda\alpha}] = 2i(g_{\beta\lambda} \gamma_\alpha - g_{\beta\alpha} \gamma_\lambda) \quad (\text{A.26})$$

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2g^{\alpha\beta} \mathbf{1}_{4 \times 4} \quad (\text{A.27})$$

$$\{\gamma_5, \gamma^i\} = 0. \quad (\text{A.28})$$

$$(\gamma_5)^2 = \mathbf{1}_{4 \times 4}. \quad (\text{A.29})$$

Apéndice B

Expresiones para el Cálculo de $\pi \cdot \psi$

El término de interferencia $[\tilde{I}]^{\alpha}_{\beta}$ puede ser rescrito totalmente sin la necesidad de usar explícitamente los tensores de Levi-Civita. Utilizando la expresión (A.21) un par de veces en el término:

$$[\tilde{I}]^{\alpha}_{\beta} = -\frac{i}{2} \gamma_{\beta} [\epsilon_{\mu}^{\alpha} \omega^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma_{\nu} + \epsilon^{\mu\alpha} \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma^{\nu}] \gamma^{\nu} \pi^{\nu} \quad (\text{B.1})$$

de manera de conmutar el índice β hasta el lado derecho de cada expresión, obtenemos,

$$[\tilde{I}]^{\alpha}_{\beta} = \gamma^{\alpha} \pi^2 \gamma_{\beta} - \frac{1}{2} \{ \not{x}, \pi^{\alpha} \} \gamma_{\beta} - \frac{i\epsilon}{2} \gamma^{\alpha} \gamma^{\rho} F_{\beta\rho} + 2\pi^{\alpha} \pi_{\beta} - i\omega F^{\alpha}_{\beta} - \gamma^{\alpha} \not{x} \pi_{\beta} - \pi^2 \not{q}^{\alpha} \gamma_{\beta}. \quad (\text{B.2})$$

Otras identidades de importancia para el cálculo de $\pi \cdot \psi$ son las que conciernen a $\{ \pi_{\beta}, \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} F^{\mu\nu} \}$ y a $\{ \pi_{\beta}, \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} F^{\mu\nu} \}$. Si se considera la expresión,

$$[\pi_{\beta}, F^{\lambda\nu}] = [\pi_{\beta}, \frac{1}{i\omega} \{ \pi^{\lambda}, \pi^{\nu} \}] = -F^{\lambda}_{\beta} \pi^{\nu} + F^{\nu}_{\beta} \pi^{\lambda} - \pi^{\lambda} F^{\nu}_{\beta} + \pi^{\nu} F^{\lambda}_{\beta}, \quad (\text{B.3})$$

que es el resultado de realizar las distintas conmutaciones requeridas, podemos contraerla con $\gamma_{\lambda} \gamma_{\nu}$ y obtener,

$$\frac{i\epsilon}{2} [\pi_{\beta}, \gamma_{\lambda} \gamma_{\nu} F^{\lambda\nu}] = i\omega \gamma^{\lambda} F_{\lambda\beta} \not{x} + i\omega \not{x} \gamma^{\lambda} F_{\lambda\beta} - [\pi_{\beta}, \pi^2] \quad (\text{B.4})$$

Utilizando la expresión (A.21) en el término $i\gamma^{\mu} \gamma_{\nu} \omega \gamma^{\alpha} \gamma_{\beta}$ y posteriormente volviendo a usar esta misma expresión (A.21) para el término que va como $\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\lambda} \gamma_{\rho}$, podemos

contraer la expresión con $\pi^\lambda \pi^\alpha$ y obtener,

$$\begin{aligned}
 i\gamma_5 \epsilon^{\mu\nu\lambda\alpha} \gamma^\mu \gamma^\nu \pi^\lambda \pi^\alpha &= \gamma_\mu \not{x} \pi_\nu + \gamma_\mu \gamma_\nu \pi^2 - \epsilon \gamma_\mu \gamma^\nu \not{L}_{\nu\mu} - g_{\mu\nu} \pi^2 - \frac{i}{2} \epsilon^{\lambda\alpha\beta\gamma} L^{\lambda\alpha} g_{\mu\nu} \\
 2\pi_\mu \pi_\nu &= \pi_\mu \not{x} \gamma_\nu
 \end{aligned}
 \tag{B.51}$$

Finalmente, contrayendo esta expresión con π^μ y reorganizando términos, obtenemos la segunda identidad de gran utilidad,

$$\frac{i}{2} \{ \gamma_\lambda \gamma_\alpha L^{\lambda\alpha} \pi_\nu \} = \epsilon \gamma_5 [\not{x} \gamma^\beta L_{\nu\beta}] + [\not{x}, \pi^2] \gamma_\nu + [\pi^2, \pi_\nu]
 \tag{B.6}$$

Apéndice C

Rutinas en Maple

Maple es un popular y poderoso programa de computación algebraica simbólica que se ha convertido entre otros, como *Mathematica*, en una herramienta de suma utilidad en cálculos que normalmente serían muy difíciles ó tediosos de hacer a mano. Es evidente que el programa ha comprobado ser una gran herramienta para el desarrollo de esta tesis debido a la necesidad de computar cálculos algebraicos diversos con matrices de hasta 16×16 , determinantes de estas matrices, algebra de tensores y cálculos de todo tipo en general.

Se utilizó *Maple* para dos tareas principales en esta tesis:

1. La investigación que se hace al trabajar con el cuádrí-espinor $v_\mu = A_\mu \in v$ que esta en la representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cong [(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})]$ del grupo de Lorentz inherentemente implica el manejo de operadores matriciales que son compuestos por un *producto directo* ó *producto tensorial* de operadores matriciales que actúan en los espacios $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $[(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})]$. Los índices de los operadores matriciales de la representación vectorial son índices de Lorentz, es decir, estos operadores son tensores de Lorentz y es necesario contar con las rutinas apropiadas para el manejo de estos tensores como por ejemplo, bajar y subir índices. Estas rutinas las provee *Maple* mediante la librería *tensor*. Sin embargo, esta librería no permite que las componentes de los tensores sean matrices u otros tensores, siendo esta una desventaja para nuestro caso ya que debido a la forma de indexar el producto directo, todo operador en el espacio $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cong [(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})]$ es tratado como un tensor de Lorentz

con componentes matriciales que actúan sobre espinores de Dirac. Consideremos, por ejemplo, el operador identidad en este espacio, T^{α}_{β} , que actúa sobre ψ^{α} ,

$$T^{\alpha}_{\beta} = \begin{cases} 0_{4 \times 4} & \text{si } \alpha \neq \beta \\ I_{4 \times 4} & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$$

donde $0_{4 \times 4}$ y $I_{4 \times 4}$ son una matriz nula 4×4 y la matriz identidad 4×4 respectivamente. Este operador, y ningún otro que tenga como componentes matrices, puede ser manejado mediante la librería *tensor* de *Maple*. Así que fue necesario programar unas pequeñas rutinas para manejar este tipo de objetos y realizar operaciones algebraicas con ellos. En la siguiente sección se da una referencia detallada de cada rutina programada y el listado de la librería así generada.

2. Un cálculo realizado en esta tesis que juega un papel central es el cálculo del determinante característico. Este determinante permite establecer si la ecuación $\Gamma^{\alpha}_{\beta}(\pi)\psi^{\alpha} = 0$ describe una propagación causal de las soluciones para ζ^{α} . Este cálculo consiste en tomar el determinante de la matriz que resulta de utilizar sólo los elementos con las más altas derivadas covariantes en $\Gamma^{\alpha}_{\beta}(\pi)$ y con la sustitución $\pi_{\mu} \rightarrow n_{\mu}$. Debido a que Γ^{α}_{β} es un tensor de Lorentz con componentes matriciales, también es necesario incluir en el programa un forma de convertir este tensor a una matriz de 16×16 de la que *Maple* pueda calcular el determinante con la instrucción *det()*.

C.1. Referencia de las rutinas

Aunque algunas de las rutinas de la librería *tensor* no son aplicables a nuestras necesidades, el tipo de dato fundamental para representar un tensor sí resulta adecuado y por tanto lo adoptamos también. La rutina principal que lleva a cabo la contracción de un par de índices entre dos tensores en *Maple* no es utilizable con tensores que tienen como componentes otros tensores (matrices). Sin embargo, hay un par de rutinas más dentro de la librería que son reutilizables. A continuación describimos brevemente los tipos de datos y rutinas que utilizamos de la librería *tensor*.

C.1.1. Rutinas de la librería *tensor* de *Maple*

tensor type

El tipo de dato fundamental para representar un tensor en *Maple* es el *tensor type*, que es una tabla con dos entradas. La primer entrada se conoce como *index_char* y es una lista donde se especifica la naturaleza de los índices del tensor, es decir, si son covariantes o contravariantes. Un 1 en la lista significa que el índice correspondiente a la posición en la lista es de tipo contravariante. Un -1 es un índice covariante. La segunda entrada es conocida como *compts* y es un arreglo apropiado para representar las componentes del tensor. La creación de un tensor con componentes escalares puede ser llevada a cabo con la instrucción *create* de la librería *tensor*. Para crear el tensor métrico $g^{\mu\nu}$ con índices contravariantes, por ejemplo, se podría hacer de la siguiente forma,

```
> g:=create('tensor',1,1,array([1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1]),1,1,1,1,1,1,1,1,1,1);
```

Sin embargo, para la creación de un tensor con componentes matriciales, como por ejemplo $\tau_{\mu\nu}$, este comando ya no es utilizable y se tendría que hacer de la siguiente manera,

```
> G1:=array([1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1]),(0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1);
> G2:=array([1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1]),(0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1);
> T1:=array([1,0,0,0],[0,0,1,0],[0,1,0,0],[0,0,0,1]),(0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1);
> T2:=array([1,0,0,0],[0,0,1,0],[0,0,1,1],[1,0,0,0]),(0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1);
> T3:=array([0,0,0,0],[0,0,0,0],[0,0,0,0],[0,0,0,0]),(0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1);
```

Levi_Civita (detg, dim, cov_LC, con_LC)

Este comando crea un tensor de Levi-Civita covariante y otro contravariante y los almacena en *cov_LC* y en *con_LC* respectivamente. Los parámetros *detg* y *dim* son el determinante del tensor métrico y la dimensión del espacio. Para crear el tensor de Levi-Civita usado en relatividad especial *detg*=-1 y *dim*=4.

```
> Levi_Civita(-1,4,LeviCov,LeviCon);
> LeviC; (c:=1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1);
```

1

esto quiere decir que *Maple* produce $\epsilon^{1234} = -1$

prod (A, B, [a1,b1], [a2,b2], ...)

El comando *prod()* realiza el producto interno entre los tensores A y B contrayendo el índice a1 de A con el índice b1 de B, contrayendo el índice a2 de A con el índice b2 de B, etc. Este comando no funciona con tensores con componentes matriciales. La contracción $g_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, con $P^\nu = (P_0, P_x, P_y, P_z)$, que resulta en $P_\mu = (P_0, -P_x, -P_y, -P_z)$ se haría de la siguiente forma,

```

S = tensor('g', (1, 1, 1), axes=[(1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)], dtype='float64', device=-1)
S = tensor([[[[ 1, 0, 0, 0],
               [ 0, 1, 0, 0],
               [ 0, 0, 1, 0],
               [ 0, 0, 0, 1]]]])
S = S.transpose(0, 2, 1, 3)

```

lower (covariant_metric_tensor, A, i1, i2, ...)

El comando *lower* 'baja' los índices i1, i2, etc. del tensor A. Se le tiene que proporcionar el tensor métrico covariante como primer parámetro.

raise (covariant_metric_tensor, A, i1, i2, ...)

El comando *lower* 'sube' los índices i1, i2, etc. del tensor A. Se le tiene que proporcionar el tensor métrico covariante como primer parámetro.

C.1.2. Rutinas Propias

En esta sección documentamos las estructuras de datos y rutinas que fueron programadas específicamente para llevar a cabo los cálculos y manipulaciones algebraicas en esta tesis.

g

El tensor métrico de relatividad especial con índices contravariantes

gcov

El tensor métrico de relatividad especial con índices covariantes.

Gamma

Un tensor con un índice contravariante que tiene como componentes las matrices gamma de Dirac, γ^μ . La componente `Gamma [comp:s] [1]` corresponde a γ^0 , `Gamma [comp:s] [2]` corresponde a γ^1 , etc.

Gamma_cov

Un tensor con un índice covariante que tiene como componentes las matrices, γ_{μ} .

g5

Un tensor de rango 0, que es un escalar, pero como componente contiene la matriz definida como $\gamma_5 = i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0$.

epsilon

En esta tesis hacemos uso de la definición del tensor de Levi-Civita como $\epsilon^{1234} = 1$, es decir, con el negativo de la definición que tiene *Maple* para este tensor, así que el tensor `epsilon` en esta acorde a nuestra definición con `epsilon[compts][1, 2, 3, 4] = 1`.

epsilon_cov

El tensor de Levi-Civita covariante de acuerdo a nuestras convenciones. Es decir, `epsilon_cov[compts][1, 2, 3, 4]` es igual a 1.

sigma

Es un tensor de rango 2 que representa al tensor $\sigma^{\mu\nu} = \gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}$.

sigma_cov

El tensor covariante correspondiente a `sigma`.

&x

Uso: (c)&x(A).

Este operador es una rutina que devuelve la multiplicación de un escalar c por un tensor A. El escalar c puede ser un tensor de rango 0 o un número. Ejemplo,

```
> (5) &x (Gamma);
```

$$\text{table} \left(\left[\begin{array}{l} \text{index_char} = 1, \text{compts} = \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array} \right] \right)$$

&.

Uso: (A)&(B).

Este operador realiza el producto interno de dos tensores de rango 1, es decir, de dos vectores. Si A representa al tensor A^{μ} y B representa al tensor B^{ν} , entonces el resultado de esta operación es $A^{\mu} B_{\mu}$. Los dos tensores pueden ser covariantes o contravariantes, la rutina se encarga de tomar correctamente el producto interno. Ejemplo,

```
> (Gamma) &. (Gamma);
```

$$\text{table} \left(\left[\begin{array}{l} \text{index_char} = 1, \text{compts} = \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \end{array} \right] \right)$$

&++

Uso: (A)&++(B).

Este operador realiza la suma componente a componente de dos tensores compatibles del mismo rango. Si A representa al tensor A^{μ} y B representa al tensor B^{μ} , entonces el resultado de la operación es un tensor que representa a $A^{\mu} + B^{\mu}$. Ejemplo,

```
> (Gamma) &++ (2&x (Gamma));
```

$$\text{table} \left(\left[\begin{array}{l} \text{index_char} = 1, \text{compts} = \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array} \right] \right)$$

&-

Uso: $(\mathbf{A})\&-(\mathbf{B})$.

En todos aspectos este operador es idéntico que $\&++$ excepto que en lugar de devolver la suma de los tensores, lleva a cabo la resta $A^{\mu\nu} - B^{\mu\nu}$.

&==

Uso: $(\mathbf{A})\&==(B)$.

Este operador devuelve un valor booleano verdadero si los dos tensores son idénticos y un valor falso en caso contrario. En el caso negativo, se crea una variable global *noeq* que contiene la lista de índices de los elementos que no coinciden entre ambos tensores. Este comando es útil para comparar dos tensores cuyas componentes son matrices. Para tensores que tienen componentes escalares se debe usar el comando *compare()* de la librería *tensor*.

```
> (Gamma) &= (Gamma);
```

true

simplificar()

Uso: *simplificar(A)*.

Ésta rutina mapea el comando *simplify()* de *Maple* a todas las componentes del tensor *A*. Esta pensada para simplificar las componentes matriciales de un tensor que sea de este tipo.

cte()

Uso: *cte(c)*.

Crea un tensor de rango cero con componente igual a *c* que puede ser un número ó una matriz

```
> cte(array([[1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1]]));
```

$$\text{table} \left(\left[\left[\text{index_char} = \{\}, \text{compts} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \right] \right)$$

get_tens_dim()

Uso: *get_tens_dim(A)*.

Devuelve la dimensión del tensor **A**, es decir, el número de componentes que tiene por cada índice. En el caso de trabajar con relatividad especial todos los tensores son de dimensión 4.

contraer()

Uso: *contraer(A,B,ind)*.

Realiza la contracción de dos índices especificados en **ind**, donde **ind** es una lista con el índice de **A** y el índice de **B** que se van a contraer respectivamente. Ejemplo,

```
> n:=create([-1],array([n0,-nx,-ny,-nz]));
```

```
table([index_char = {-1},compts = [n0,-nx,-ny,-nz]);
```

```
> contraer(n,Gamma,[1,1]);
```

$$\text{table} \left(\left[\left[\text{index_char} = \{\}, \text{compts} = \begin{pmatrix} n0 & 0 & -nz & nx + Iny \\ 0 & n0 & nx - Iny & nz \\ nz & nx - Iny & -n0 & 0 \\ nx + Iny & -nz & 0 & -n0 \end{pmatrix} \right] \right] \right)$$

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100


```
end of loop do
  # ...
end
```

```
end of loop do
```

```
end
```

```
# ...
end of loop do
  # ...
end
```

```
end of loop do
```

```
end
```

```
end of loop do
```

```
# ...
end of loop do
  # ...
end
```

```
end of loop do
```

```
end
```

```
# ...
end of loop do
  # ...
end
```

```
end of loop do
```

```
# ...
end of loop do
  # ...
end
```

```
end of loop do
```

```
end
```

```
# ...
end of loop do
  # ...
end
```

```
end of loop do
```

```
# ...
end of loop do
  # ...
end
```

```
end of loop do
```

```
end
```

Bibliografía

- [1] Particle Data Group, S. Eidelman et al., Phys. Lett. B **592**, 1 (2004)
- [2] V.D. Burkert, T. S. H. Lee, Int. J. Mod. Phys. E **13**, 1035 (2004).
- [3] L. Tiator, D. Drechsel, S. Kamalov, M. M. Giannini, E. Santopinto, A. Vassallo, Eur Phys. J. A **19**, 55 (2004).
- [4] CSSM Lattice collaboration (J. M. Zanotti et al), Phys. Rev. D **68**, 054506 (2003).
- [5] S. I. Kruglov, Rad. Phys. Chem. **75**, 723 (2006).
- [6] M. Fierz, W. Pauli, Proc. Roy. Soc. (Londres) A **173**, 211 (1939).
- [7] W. Rarita, J. Schwinger, *On a Theory of Particles with Half-Integral Spin*, Phys. Rev. B **60**, 61 (1941).
- [8] S. Weinberg, Phys. Rev. B **133** 1318 (1964).
- [9] K. Johnson, E. C. Sudarshan, Annals of Physics **13**, 126 (1961).
- [10] G. Velo, D. Zwanziger, Phys. Rev. *Propagation and quantization of Rarita-Schwinger Waves in an External Electromagnetic Potential*, **186**, 1337 (1969)
- [11] G. Velo, D. Zwanziger, Phys. Rev. *Noncausality and Other Defects of Interaction Lagrangians for Particles with Spin One and Higher*, **188**, 2218 (1969)
- [12] V. Pascalutsa, R. Timmermans, *Field Theory of Nucleon to Higher-Spin Baryon Transitions*, Phys. Rev. C **60**, 042201 (1999).

- [13] E. Wigner, *On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group*, Annals of Mathematics **4**, 149 (1939).
- [14] M. Kirchbach, *Degeneracy Symmetry of Baryon Spectra*, Nucl. Phys. A **689**, 157 (2001).
- [15] G. Hohler, in: H. Schopper (Ed.), *Pion-Nucleon Scattering*, Springer, Heidelberg, 1983.
- [16] Wu-Ki Tung, *Group Theory in Physics*, World Scientific, Singapore, 1985.
- [17] A. W. Joshi, *Elements of Group theory for Physicists*, John Wiley Eastern Limited, India, Tercera Edición, 1983.
- [18] Morton Hamermesh, *Group Theory and its Application to Physical Problems*, Addison-Wesley Publishing Company, INC., USA, 1964.
- [19] Jean Hladik, traducido por J. Michael Cole, *Spinors in Physics*, Springer-Verlag, N.Y., 1999.
- [20] S. Weinberg, Phys. Rev. **133**, B1318 (1964).
- [21] P. A. Moldauer, K. M. Case, Phys. Rev. **102**, 279 (1956).
- [22] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Wiley-Interscienci, Inc., N.Y., 1962, Vol. 2, pag. 590.
- [23] L. M. Nath, B. Etemadi, J. D. Kimel, Phys. Rev. D **3**, 2153 (1971).
- [24] M. Napsuciale, J. L. Lucio, Phys. Lett. B **384**, 227 (1996).
- [25] S. Kamefuchi, L. O'Rai feartaigh, A. Salam, Nucl. Phys. **28**, 529 (1961).
- [26] M. El Amiri, G. Lopez Castro, J. Pestieau, Nucl. Phys. A **543**, 673 (1992).
- [27] M. Benmerrouche, R. M. Davidson, N. C. Mukhopadhyay, Phys. Rev. C **3**, 2339 (1989).
- [28] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, USA, 1985.

- [29] M. Kirchbach, *Foundations of Physics* **33**, 781 (2003).
- [30] M. Napsuciale, M. Kirchbach, S. Rodriguez, *Spin-3/2 Beyond the Rarita-Schwinger Framework*, *Eur. Phys. J. A* **29**, 289-306 (2006)
- [31] S. Weinberg, in S. Deser Ed., *Lectures on elementary particles and quantum field theories*, Proc. of the Brandeis Summer Institute 1970 (Brandeis Univ. MIT Press, Cambridge, MA, 1970), Vol. 1.
- [32] M. Kirchbach, *Mod. Phys. Lett. A* **12**, 2373 (1997); *Few Body Syst. Suppl.* **11**, 47 (1999).
- [33] L. M. Rico, M. Kirchbach, *Mod. Phys. Letters A*, (2006) (Aceptado)
- [34] Bertha Elizabeth Rodríguez Milla, *Excitaciones Bariónicas como Multipletes de Espín Paridad*, (Tesis, UAZ, Zacatecas, Mex., 2001)

EX LIBRIS



SISTEMA DE
BIBLIOTECAS
U.A.S.L.P.

No. DE REG.