Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Facultad de Ciencias

# Algebroides de Lie y supervariedades

Tesis que presenta

Sergio Arturo Torres Tirado

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias Aplicadas

en la Especialidad de

Matemáticas

Director de la Tesis

Dr. José Antonio Vallejo Rodríguez

San Luis Potosí, S. L. P., Agosto 2009

# Índice general


**1. Introducción** **5**

**2. Preliminares** **9**
2.1. Álgebras graduadas . . . . . 9
2.2. Haces . . . . . 10
2.3. Prehaces . . . . . 14
2.4. Fibrados vectoriales . . . . . 22
2.5. Módulos y haces . . . . . 25

**3. Estructuras de Poisson** **29**
3.1. Estructuras de Poisson . . . . . 29
3.2. Estructuras de Poisson graduadas . . . . . 30

**4. Algebroides de Lie** **41**
4.1. Algebroides de Lie . . . . . 41
4.2. Álgebra de Gerstenhaber asociada a un algebroide de Lie . . . . . 46

**5. Supervariedades de Poisson y algebroides de Lie** **49**
5.1. Supervariedades . . . . . 49
5.2. Supervariedades de Poisson y algebroides de Lie . . . . . 51

# Capítulo 1

# Introducción

Esta tesis trata con dos conceptos fundamentales: el de supervariedad y el de algebroide de Lie. En este capítulo introductorio trataremos de explicar el significado y la relevancia de ambos, así como su relación.
Las supervariedades aparecieron en los 70s, como una construcción geométrica que permitía la unificación en el tratamiento de los sistemas que en Física se denominan bosónicos y fermiónicos. El problema que plantea la existencia de tales sistemas en que un caso (bosones) su descripción se realiza mediante la maquinaria habitual en Física de operadores en espacios de Hilbert, pero en el otro (fermiones) es posible probar que las magnitudes asociadas al sistema deben cumplir la propiedad de anticonmutatividad (esto es, $ab = -ba$). Los físicos, inicialmente, modelaron tales sistemas en un espacio fásico similar al clásico, pero añadiendo a las coordenadas habituales otras de carácter anticonmutante. Así, sustituyeron las cartas locales euclideas por modelos locales $A\otimes\langle\zeta^1,\ldots,\zeta^n\rangle$, donde $A \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto y $\{\zeta^1,\ldots,\zeta^n\}$ son los generadores de un álgebra real con las propiedades

$$\zeta^i\zeta^j = -\zeta^i\zeta^j,\ i \neq j$$
$$(\zeta^i)^2 = 0\ \forall i \in \{1,\ldots,n\}.$$

Esto conduce de manera inmediata a la consideración de "superfunciones" en la variedad clásica $M$, objetos de la forma ($x = (x_1,,\ldots,x_m)$)

$$f(x) = f_0(x) + f_i(x)\zeta^i + \cdots + f_n(x)\zeta^1\cdots\zeta^n.$$

La intuición parecía asegurar que de esta manera se podría reconstruir todo el cálculo diferencial habitual y hacer física sobre estos nuevos "superespacios". Sin embargo, pronto se vió que esta construcción era matemáticamente inconsistente (por ejemplo, no era posible definir un espacio tangente en un punto con las propiedades que cabía esperar). La formalización del concepto físico de "superespacio" es obra de F. Berezin [2] y B. Kostant [4] (en forma independiente pero equivalente), quienes introdujeron las supervariedades procediendo por analogía con la construcción de los espacios geométricos en Geometría Algebraica [1]. En esta aproximación, lo que uno toma como objetos fundamentales

no son las cartas locales, sino los anillos locales de gérmenes de funciones diferenciables. Todos los objetos de la geometría diferencial se contruyen entonces a partir de estos anillos mediante el uso de la teoría de haces (así, por ejemplo, el fibrado tangente se construye como el haz de derivaciones, el fibrado cotangente como el haz dual de las derivaciones, etc.). En esencia, una supervariedad puede verse como una variedad ordinaria en la que el haz de álgebras conmutativas de gérmenes de funciones $\mathcal{C}^{\infty}_{M}$ se ha remplazado por un haz de superálgebras (i.e, álgebras con una gradación en sus elementos de manera que $ab = (-1)^{|a||b|}ba$, con $|a|$ el grado de $a \in \mathcal{A}$).
Naturalmente, esta manera de proceder aunque es muy natural desde el punto de vista formal, extraña una gran dificultad técnica. Este es el motivo de la existencia de una serie de resultados que podríamos calificar de "folklore"[1]. Algunos de ellos se han probado incorrectos con el tiempo (un ejemplo lo da la creencia, por un tiempo extendida, de que no era posible desarrollar una teoría de integración de supercampos vectoriales en este contexto análoga a la clásica [6]); otros, son de uso habitual. Precisamente, a uno de tales resultados queremos referirnos en este trabajo: al que habla de la correspondencia existente entre supervariedades y algebroides de Lie.
Los algebroides de Lie, aunque introducidos por J. Pradines en los 60s [7], se han estudiado intensivamente desde hace relativamente poco tiempo, fundamentamente ligados a la idea de integrabilidad de los grupoides de Lie en conexión con algunas ideas de la dinámica en variedades de Poisson [3], [9]. Informalmente, podemos pensar en un algebroide de Lie $(E, q_E, M)$ como el remplazo del fibrado tangente a una variedad $M$ ($TM$, que tiene rango igual a la dimensión de la variedad) por un fibrado vectorial $E$ (de rango arbitrario). Este reemplazo no es arbitario : las secciones de $E$ deben estar dotadas con un corchete de Lie $[\![\ ,\ ]\!] : \Gamma E \times \Gamma E \to \Gamma E$ de manera que exista un morfismo de álgebras de Lie $q_E : (\Gamma E, [\![\ ,\ ]\!]) \to (\Gamma TM, [\ ,\ ]_M)$, donde $[\ ,\ ]_M$ es el corchete de campos vectoriales sobre $M$. Claramente, sobre un algebroide de Lie se ofrece la posibilidad de hacer una dinámica de "campos vectoriales" (secciones $A \in \Gamma\Lambda E$) análoga a la de los verdaderos campos (secciones $X \in \Gamma\Lambda TM$), pero esta vez valorados en cualquier fibrado $E \to M$, no necesariamente el tangente (este enfoque, por ejemplo, es la base del estudio de las teorías de campos en Física).
La existencia de la aplicación $q_E : \Gamma E \to \Gamma TM$ (llamada ancla) hace posible extender la definición del corchete $[\![\ ,\ ]\!]$ sobre $\Gamma E$ a un par $(A, f)$, con $A \in \Gamma E$ y $f \in C^{\infty}(M)$. Basta con tomar

$$[\![A, f]\!] := q_E(A)(f).$$

Dado que $E$ y $C^{\infty}(M)$ generan el fibrado exterior $\Lambda E$, es posible extender el corchete original $[\![\ ,\ ]\!]$ a todo $\Gamma\Lambda E$: se obtiene así la llamada álgebra de Gerstenhaber del algebroide de Lie, que resulta admitir una estructura natural de álgebra de Poisson graduada (la extensión de $[\![\ ,\ ]\!]$ a $\Gamma\Lambda E$ es un corchete de Poisson $\mathbb{Z}$-graduado).

[1] Resultados mencionados en la literatura pero de los cuales no se ofrecen demostraciones explícitas.

La conexión con las supervariedades viene entonces de la observación, debida a Batchelor, de que si $\mathcal{A}$ es el haz de superálgebras de la supervariedad, existe un fibrado vectorial $E \to M$ tal que $\mathcal{A}$ es isomorfo (aunque no de manera canónica) al haz de secciones $\Gamma\wedge E$. Surge entonces la pregunta: ¿bajo qué condiciones una supervariedad es tal que su haz estructural $\mathcal{A}$ es isomorfo al algebra de Gerstenhaber de un algebroide de Lie?.
En esta tesis, daremos una respuesta detallada basándonos en las ideas de Vaintrob [8] y Koszul [5]: existe una correspondencia biyectiva entre supervariedades $(M, \Gamma\wedge E)$ tales que el haz dual $\Gamma\wedge E^*$ admite una derivación impar con cuadrado cero y algebroides de Lie sobre $M$, $E \to M$.
La principal aportación de esta tesis debe verse como la recolección de todas las ideas previas necesarias para la prueba , su enunciado en términos precisos y la demostración explícita y detallada de la anterior correspondencia, con pruebas elementales y autocontenidas de todos los prerrequisitos y la presentación de ejemplos ilustrativos.
Se pretende así que este trabajo sirva como referencia fundamental en futuras investigaciones relacionadas con tópicos de la teoría de supervariedades y algebroides de Lie.

# Capítulo 2

# Preliminares

## 2.1. Álgebras graduadas

Recordemos algunas definiciones sobre estructuras $\mathbb{Z}$-graduadas.

**Definición 1.** *1. Una $\mathbb{K}$-álgebra es un espacio vectorial $A$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, con una aplicación $\mathbb{K}$-bilineal,*

$$A \times A \to A, \ (x, y) \mapsto xy, \ \text{donde } x, y \in A.$$

*2. Una $\mathbb{K}$-álgebra es asociativa si la aplicación es asociativa, i.e., si para todo $x, y, z \in A$,*

$$x(yz) = (xy)z.$$

*3. Sea $(G, +)$ un grupo abeliano. Un espacio vectorial $E$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es $G$-graduado si existe una familia $\{E^g\}_{g \in G}$ de subespacios de $E$, tal que*

$$E = \oplus_{g \in G} E^g.$$

*Para cada $g \in G$, un elemento $x \in E$ se dice ser homogéneo de grado $g$ si $x \in E^g$.*

*4. Una $\mathbb{K}$-álgebra es $G$-graduada si $A = \oplus_{g \in G} A^g$ es $G$-graduada como espacio vectorial y si además, para todo $g, h \in G$, $x \in A^g$ e $y \in A^h$,*

$$xy \in A^{g+h}.$$

*Una $\mathbb{K}$-álgebra $G$-graduada con $G = \mathbb{Z}_2$, se denomina superálgebra y cuando $G = \mathbb{Z}$ se llamará $\mathbb{K}$-álgebra graduada . Notemos que toda $\mathbb{K}$-álgebra graduada $E = \oplus_{g \in \mathbb{Z}} E^g$, es una superálgebra, tomando la siguiente $\mathbb{Z}_2$-graduación:*

$$E^0 = \oplus_{q\in\mathbb{Z}} E^{2q} \text{ y } E^1 = \oplus_{q\in\mathbb{Z}} E^{2q+1}.$$

5. *Una $\mathbb{K}$-álgebra graduada es conmutativa graduada si para todo $p, q \in \mathbb{Z}$, $x \in A^p$ e $y \in A^q$,*

$$xy = (-1)^{pq} yx.$$

*y es anticonmutativa graduada si para todo $p, q \in \mathbb{Z}$, $x \in A^p$ e $y \in A^q$,*

$$xy = -(-1)^{pq} yx.$$

6. *Sean $E = \oplus_{p\in\mathbb{Z}} E^p$ y $F = \oplus_{p\in\mathbb{Z}} F^p$ espacios vectoriales graduados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Una aplicación $\mathbb{K}$-lineal $f : E \to F$ es homogénea de grado $d$ si para cada $p \in \mathbb{Z}$,*

$$f(E^p) \subset F^{p+d}.$$

*Un endomorfimo es una aplicación $\mathbb{K}$-lineal $f : E \to F$, con $E = F$.*

7. *Sean $A = \oplus_{p\in\mathbb{Z}} A^p$ una $\mathbb{K}$-álgebra graduada y $\theta : A \to A$ un endomorfismo del espacio vectorial graduado $A$. Sea $d \in \mathbb{Z}$. El endomorfismo es una derivación de grado $d$ del álgebra graduada $A$ si*

   *i) como endomorfismo de espacios vectoriales graduados, $\theta$ es homogéneo de grado $d$,*

   *ii) para cada $p \in \mathbb{Z}$, $x \in A^p$ e $y \in A$*

$$\theta(xy) = \theta(x)y + (-1)^{dp} x\theta(y).$$

## 2.2. Haces

Sea $X$ un espacio topológico.

**Definición 2.** *Un **haz** (de conjuntos) sobre $X$ es un par $(F, \pi)$ donde $F$ es un espacio topológico y $\pi : F \to X$ es un homeomorfismo local. Es decir: para todo $x \in F$ existe un abierto $U$ con $x \in U$, tal que $\pi(U)$ es abierto en $X$ y $\pi|_U : U \to \pi(U)$ es homeomorfismo . Dado $x \in X$, llamamos a $\pi^{-1}(x) := F_x$ la fibra sobre $x$.*

**Proposición 1.** *Todo homeomorfismo local es continuo y abierto. También, la composición de homeomorfismos locales es homeomorfismo local y la restricción de un homeomorfismo local a un abierto del dominio es homeomorfismo local.*

*Demostración.* Para cada $x \in F$ existe $U_x$ con $x \in U_x$, tal que $\pi(U_x)$ es abierto en $X$ y $\pi|_{U_x} : U_x \to \pi(U_x)$ es homeomorfismo. Por tanto $X = \cup_{x\in F} U_x$. Ahora si $V \subset X$, notemos que $\pi^{-1}(V) = \cup_{x\in F}(U_x \cap \pi^{-1}(V)) = \cup_{x\in F}(\pi^{-1}|_{U_x}(V))$ , ahora por ser $\pi|_{U_x}$ homeomorfismo tenemos que $\pi^{-1}|_{U_x}(V)$ es abierto en $U_x$ en particular es abierto en $X$. Por tanto $\pi$ es continuo.

Sea $A \subset F$ abierto. Si $x \in A$, sea $U$ abierto en $F$ con $x \in U$, tal que $\pi(U)$ es abierto en $X$ y $\pi|_U : U \to \pi(U)$ homeomorfismo, por tanto $A \cap U$ es un abierto con $x \in A \cap U$ y $\pi(A \cap U) \subset \pi(A)$ es abierto y por tanto $\pi(A)$ es abierto.
Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son homeomorfismos locales y $x \in X$, sean $U$ un abierto en $X$ con $x \in U$, tal que $f(U)$ es abierto en $Y$ y $f|_U : U \to f(U)$ es homeomorfismo y $V$ un abierto en $Y$ con $f(x) \in V$, tal que $g(V)$ es abierto en $Z$ y $g|_V : V \to g(V)$ es homeomorfismo. Sea $W = U \cap f^{-1}(V)$, por tanto $f(W) \subset V$, $(g \circ f)(W)$ es abierto y $g \circ f : W \to (g \circ f)(W)$ es homeomorfismo.
Si $A \subset X$ abierto, la inclusión $i$ es un homeomorfismo local por tanto $f \circ i = f|_A$ lo es. □

Si no hay ambigüedad, denotaremos el haz por $F$.

**Definición 3.** *Sean $(F_1, \pi_1)$, $(F_2, \pi_2)$ haces sobre $X$. Un morfismo de haces es una aplicación $\phi : F_1 \to F_2$ tal que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow{\phi} & F_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & \swarrow{\scriptstyle \pi_2} & \\ X & & \end{array}$$

*es decir*

$$\pi_2 \circ \phi = \pi_1.$$

**Proposición 2.** *$\phi$ es homeomorfismo local.*

*Demostración.* Sea $x \in F_1$. Para $x \in F_1$ existe $U_x$ abierto con $x \in U_x$, tal que $\pi_1(U_x)$ es abierto en $X$ y $\pi_1|_{U_x} : U_x \to \pi(U_x)$ es homeomorfismo. Por la condición de morfismo de haces tenemos que $(\pi_2 \circ \phi)(U_x) = \pi_1(U_x)$. Ahora para cada $y \in \phi(U_x)$ existe $V_y$ abierto con $y \in V_y$, tal que $\pi_2(V_y)$ es abierto en $X$ y $\pi_2|_{V_y} : V_y \to \pi_2(V_y)$ es homeomorfismo. Notemos primero que $(\pi_2|_{V_y})^{-1}(\pi_2(V_y) \cap \pi_2(\phi(U_x))) = V_y \cap \phi(U_x)$ es abierto en $V_y$, por tanto abierto en $F_2$. Luego $\phi(U_x) = \cup_{y \in \phi(U_x)} V_y \cap \phi(U_x)$ es abierto en $F_2$. Nada mas nos falta probar que es inyectiva lo cual es inmediato, ya que si $m, n \in U_x$ y $\phi(m) = \phi(n)$ entonces se tiene que $(\pi_2 \circ \phi)(m) = (\pi_2 \circ \phi)(n)$ y por ser $(\pi_2 \circ \phi)|_{U_x} = \pi_1|_{U_x}$ homeomorfismo se tiene que $m = n$, por lo tanto $\phi$ es homeomorfismo local. □

**Definición 4.** *Un **subhaz** $F'$ de un haz $F$ es un subespacio tal que $(F', \pi|_{F'})$ es un haz y la inclusión*

$$j : F' \hookrightarrow F$$

*es un morfismo de haces.*

**Nota 1.** *Para que $F' \subset F$ sea subhaz la condición necesaria y suficiente es que $F'$ sea abierto en $F$.*

El concepto más importante asociado a un haz es el de sección.

**Definición 5.** *Sea $(F, \pi)$ un haz sobre $X$, y sea $U \subset X$. Se llama* ***sección local*** *del haz $F$ sobre $U$ a toda aplicación continua $s : U \to F$ tal que*

$$\pi \circ s = id_U.$$

**Nota 2.** *Si $U \subset X$ es abierto, entonces $s(U)$ también lo es y $s$ es homeomorfismo sobre la imagen $s : U \simeq s(U)$.*

Si las fibras $\pi^{-1}(x) := F_x$ tienen para toda $x \in X$ alguna estructura adicional (son grupos, anillos, etc), decimos que se tiene un haz con esa estructura.

**Ejemplo 1.**

1. *Si $U \subset X$ es un abierto, se tiene la inclusión $j : U \hookrightarrow X$ y la proyección $\pi : j(U) \to U$, que es un haz. Para este haz, $j$ es una sección global.*

2. *Sea $X$ un espacio topológico y $A$ un espacio topológico discreto. Entonces $X \times A$ es un haz sobre $X$ llamado* ***haz trivial*** *de fibra $A$.*
*Cuando un haz $F$ sobre $X$ es isomorfo al haz trivial se dice que el haz es* ***trivializante*** *y que un isomorfismo $\phi : F \to X \times A$ es una trivialización de $F$.*

3. *Sean $(F_1, \pi_1)$, $(F_2, \pi_2)$ haces sobre $X$. Se llama* ***haz producto fibrado*** *de $F_1$ y $F_2$ al haz*

$$F := \{(u, v) \in F_1 \times F_2 | \pi_1(u) = \pi_2(v)\}.$$

*Claramente, se puede definir sin ambigüedad*

$$\begin{array}{cccc} \pi : & F & \to & X \\ & (u,v) & \mapsto & \pi(u,v) = \pi_1(u) = \pi_2(v). \end{array}$$

*Si $(u, v) \in F \subset F_1 \times F_2$, por ser $F_1$ y $F_2$ haces existen $U_u$ y $V_v$ abiertos en $F_1$ y $F_2$ respectivamente con $u \in U_u$ y $v \in V_v$, tales que $\pi_1(U_u)$, $\pi_2(V_v)$ son abiertos en $X$ y $\pi_1|_{U_u} : U_u \to \pi_1(U_u)$ y $\pi_2|_{V_v} : V_v \to \pi_2(V_v)$ son homeomorfismos. Tomamos $W = (U_u \times V_v) \cap F$, tenemos que $\pi(W) = \pi_1(U_u) \cap \pi_2(V_v)$ es abierto en $X$ y $\pi|_W : W \to \pi(W)$ es homeomorfismo, por tanto $\pi$ es un homeomorfimo local. Como consecuencia de esto, $(F, \pi)$ es un haz. Fijémonos en que las fibras son*

$$F_x = F_1 \times_x F_2.$$

**Ejemplo 2** (Ejemplos de haces con estructura). *Sea $\pi : F \to X$ un haz sobre $X$ .*

1. *Recordemos que un magma sobre un conjunto $A$ es una operación binaria $\cdot : A \times A \to A$, donde $\cdot(a, b) \mapsto a \cdot b$. Diremos que $F$ es un haz de magmas si $\forall x \in X$, $F_x$ es un magma, y la aplicación*

$$\begin{array}{ccc} F \times_x F & \to & F_x \\ (a,b) & \mapsto & ab \end{array}$$

*es continua.*

2. *Un semigrupo sobre $A$ es un magma asociativo. $F$ es un haz de semigrupos si $F_x$ es un semigrupo $\forall x \in X$ y*

$$\begin{array}{ccc} F \times_x F & \longrightarrow & F_x \\ (a,b) & \longmapsto & ab \end{array}$$

*es continua.*

3. *Un monoide sobre $A$ es un semigrupo con elemento neutro $e \in A$. Diremos que $F$ es un haz de monoides si lo es de semigrupos y $F_x$ es un monoide $\forall x \in X$. Si $e_x$ es el neutro de $F_x$, impondremos que la aplicación*

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & e_x \in F_x \end{array}$$

*sea una sección del haz.*

4. *Un grupo sobre $A$ es un monoide donde todo elemento $a \in A$ tiene inverso. Se dice que $F$ es un haz de grupos si $\forall x \in X$, $F_x$ es un grupo y la aplicación*

$$\begin{array}{ccc} F \times_x F & \longrightarrow & F_x \\ (a,b) & \longmapsto & ab^{-1} \end{array}$$

*es continua. Fijémonos en que aquí no hemos pedido que $F$ fuese haz de monoides.*

Procediendo de la misma forma que en estos ejemplos, se definen haces de estructuras más generales anillos, espacios vectoriales, álgebras, etc.

**Nota 3.** *En general, el espacio total de un haz $F$ como espacio topológico no es Hausdorff.*

**Ejemplo 3.** *Consideremos el haz de gérmenes de funciones diferenciables en una variedad. Sea $M$ variedad diferencial y $x_0 \in M$. Definimos una relación binaria de equivalencia sobre $C^\infty(M)$ en la siguiente forma:*

$$f \sim_{x_0} g \text{ sii existe } U \text{ abierto con } x \in U \text{ tal que } f|_U = g|_U.$$

*La clase de una $f \in C^\infty(M)$ se denota por $[f]_{x_0} = \tilde{f}_{x_0}$ y se denomina el germen de $f$ en $x_0$. El conjunto cociente*

$$C^\infty_{x_0} = C^\infty(M)/\sim_{x_0},$$

*se llama espacio de gérmenes en $x_0$. $C^\infty_{x_0}$ tiene estructura de anillo con la suma y producto de funciónes, de $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma de funciones y el producto por un escalar y de $\mathbb{R}$-álgebra con las tres operaciones.*
*Para cada $U \subset M$ abierto, consideremos*

$$C^\infty_U := \cup_{x \in U} C^\infty_x \subset \mathcal{F} := \sqcup_{x \in M} C^\infty_x.$$

*de manera que $\mathcal{F}$ es el espacio total de un haz y los $C_U^\infty$ forman una base de la topología de $F$. Naturalmente se tiene una proyección.*

$$\begin{array}{rccl} \pi: & \mathcal{F} & \longrightarrow & M \\ & [f]_x & \longmapsto & \pi[f]_x := x \end{array}$$

*que es continua por la propia definición de la topología en $F$ ($\pi^{-1}(U) = C_U^\infty$ que es abierto). Al haz $(\mathcal{F}, \pi, M)$ se le llama haz estructural de $M$. A veces, se escribe $\mathcal{F} = C_M^\infty$. Como espacio topológico, $\mathcal{F} = C_M^\infty$ no es Hausdorff. En efecto, si tomamos $M = \mathbb{R}$ y las funciones $f(x) = 0$ y*

$$g(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ x^2 & si\ x \geq 0 \end{cases},$$

*resulta que tomando sus gérmenes en $x = 0$ ($[f]_0$ y $[g]_0$) obtenemos dos puntos que no pueden separarse mediante abiertos de $C_M^\infty$.*

## 2.3. Prehaces

**Definición 6.** *Un prehaz de conjuntos $\mathcal{F}$ sobre $X$ un espacio topologico está dado por las siguientes asignaciones:*

1. *Para cada conjunto abierto $U \subset X$, un conjunto $\mathcal{F}(U)$ llamado conjunto de secciones de $\mathcal{F}$ sobre $U$.*

2. *Para cada par de subconjuntos abiertos $V \subset U$ de $X$ una aplicación restricción $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ tal que:*
   - *Para todo abierto $U$, $\rho_U^U = id_U$.*
   - *Si $W$ es abierto y $W \subset V \subset U$ ($V$,$U$ abiertos), $\rho_W^U = \rho_W^V \circ \rho_V^U$.*

**Ejemplo 4.** *Todo haz $F$ sobre $X$ tiene asociado un prehaz canónico, llamado el **prehaz de secciones** de $F$. La construcción es la siguiente:*

*Si $F$ es haz sobre $X$ y $U \in \tau$(topología en $X$), definimos $F(U)$ como*

$$F(U) := \{\sigma : U \to F \text{ secciones locales de } F \text{ sobre } U\}.$$

*Si $U, V \in \tau$, $U \subset V$ se tiene que*

$$\begin{array}{rccl} \rho_V^U : & F(U) & \longrightarrow & F(V) \\ & \sigma & \longmapsto & \rho_V^U(\sigma) = \sigma|_V \end{array}$$

*Si el haz tiene alguna estructura adicional, entonces $F(U)$ hereda la estructura de $F$. Por ejemplo, si $F$ es un haz de grupos (con operación $*$), $U \in \tau$, sobre $F(U)$ definimos la operación siguiente: si $a, b \in F(U)$,*

$$\begin{array}{rccl} a * b & U & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & a * b(x) = a(x) * b(x). \end{array}$$

*puntualmente. Además, $a * b$ es una aplicación continua de $U$ en $F$ por serlo $a, b$ y $*$.*

**Ejemplo 5.** *Denotemos por $\mathbb{K}$ cualquiera de los cuerpos conmutativos $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un prehaz de $\mathbb{K}$-álgebras conmutativas graduadas sobre $X$ es un prehaz $\mathcal{F}$ de conjuntos tal que:*

1. *Cada $\mathcal{F}(U)$ tiene estructura de $\mathbb{K}$-álgebra conmutativa graduada.*
2. *Cada restricción $\rho_V^U$ es un morfismo par de $\mathbb{K}$-álgebras conmutativas graduadas.*

*En términos de categorías: un prehaz de $\mathbb{K}$-álgebras conmutativas graduadas $\mathcal{F}$ sobre $X$ un espacio topológico es un funtor covariante de la categoría $Top^{op}$ (donde $Top$ es la categoría de los subconjuntos abiertos de $X$, con morfismos las inclusiones) a la categoría $\mathbb{K}$-álgebras conmutativas graduadas, (con morfismos los morfismos de $\mathbb{K}$-álgebras conmutativas graduadas).*

**Definición 7.** *Un morfismo de prehaces sobre $X$, $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, está dado por aplicaciones $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ (para cada abierto $U$ de $X$) tales que siempre y cuando $V \subset U$ son abiertos en $X$, se tiene que*

$$\rho'^U_V \phi(U) = \phi(V)\rho^U_V,$$

*donde $\rho, \rho'$ son los morfismos restricción de $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ respectivamente.*

Si $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ son prehaces de $\mathbb{K}$-álgebras conmutativas graduadas, para que $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ sea morfismo de prehaces también se requiere que cada $\phi(U)$ sea un morfismo par de $\mathbb{K}$-álgebras conmutativas graduadas.
Volvamos al estudio de los prehaces en general.
La idea que se quiere analizar es el recíproco del ejemplo 4, queremos construir un haz a partir de un prehaz. Antes de nada, tendremos que disponer de alguna noción en prehaces que sea equivalente a la de fibra en un haz.
La noción correspondiente en prehaces es la de tallo sobre un punto $x \in U \subset X$.
Para definir lo que es un tallo, hay que introducir algunos conceptos previos.
Sea $I$ un conjunto parcialmente ordenado $(I, \leq)$. Sea $\Lambda = \{\Lambda_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos indicados por $I$. Supongamos que se da una familia de morfismos $F = \{f_{ij}\}_{i,j \in I}$ doblemente indicada por $I$

$$f_{ij} \quad \Lambda_i \to \Lambda_j,$$

con $i \leq j$ para cada par $(i, j) \in I \times I$ con las propiedades siguientes:

1. $f_{ii} = id_{\Lambda_i}$.
2. $f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$ $\forall i, j \in I$ (condición de cociclo).

**Definición 8.** *Al par $(\Lambda, F)$ se le denomina **sistema dirigido** sobre $I$.*

Supongamos $(\Lambda, F)$ un sistema dirigido. Cosideremos la unión disjunta $A = \sqcup_{i \in I}\{\Lambda_i\}$. En este conjunto $A$ definimos una relación binaria de equivalencia $\sim$

$$x_i \sim x_j \text{ sii } \exists k \in I, f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j).$$

Intuitivamente $x_i \in \Lambda_i$, $x_j \in \Lambda_j$ son considerados iguales si eventualmente coinciden en el sistema dirigido.

**Definición 9.** *Se llama* ***límite inductivo*** *del sistema dirigido* $(\Lambda, F)$ *a*

$$\varinjlim_{i,j \in I} (\Lambda_i, f_{ij}) := \sqcup_{i \in I} \Lambda_i / \sim = A/\sim .$$

De manera natural, cuando se tiene un límite inductivo se tiene una proyección

$$p : A \to A/\sim$$

Habitualmente, excepto en casos patológicos, si los $\Lambda_i$ tienen alguna estructura, es posible inducirla tambień en $A/\sim$.

Veamos como aparece la noción de límite inductivo de manera natural cuando tenemos un prehaz sobre un espacio topológico.
Sea $x \in X$. Consideremos el conjunto de los entornos abiertos de $x$, $\xi(x)$. Este conjunto $\dot{\xi}(x)$ va a jugar el papel de conjunto de índices $I$. Para esto, consideramos el orden parcial

$$U \leq V \text{ sii } V \subset U.$$

Por hipótesis, tenemos una colección de morfismos $\rho_U^V : \mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(V)$ si $U \leq V$. Para concordar con las definiciones anteriores $\rho_U^V = \rho_{UV}$. Resulta con esto que $(\mathcal{A}(x) := \sqcup_{U_x \in \dot{\xi}(x)} \mathcal{A}(U_x), \rho = (\rho_{U_x V_x}))$.

**Definición 10.** *Al límite inductivo*

$$\varinjlim_{\dot{\xi}(x)} (\mathcal{A}(x), \rho) := \mathcal{A}_x$$

*se le llama el* ***tallo*** *del prehaz sobre* $X$.

Veamos el significado de los tallos, en el caso del prehaz canónico asociado a un haz. Dado un $U \subset X$ abierto con $x \in X$, $\mathcal{A}(U)$ determina una clase de equivalencia en el límite inductivo $\varinjlim_{\dot{\xi}(x)}(\mathcal{A}(x), \rho)$, $[\mathcal{A}(U)]_\sim$, de tal manera que dos elementos $\sigma_W \in \mathcal{A}(W)$, $\sigma_V \in \mathcal{A}(V)$ determinan la misma clase sobre $x \in X$ si y sólo si existe un $U \subset X$ abierto tal que $W, V \leq U$ y $\rho_U^W(\sigma_W) = \rho_U^V(\sigma_V)$, es decir $\sigma_W$ y $\sigma_V$ son equivalentes si y sólo si existe un abierto $U$ con $U \subset W$ y $U \subset V$ tal que $\sigma_W|_U = \sigma_V|_U$.

Veamos un ejemplo de esta construcción.

**Ejemplo 6.** *Sea $M$ una $\mathbb{R}$-variedad diferencial. Se tiene un haz canónicamente asociado a $M$ y que se denomina haz estructural, que denotaremos $C_M^\infty$.*
*Como variedad, $C_M^\infty = M \times \mathbb{R}$ con la estructura producto. La proyección $\pi : M \times \mathbb{R} \to M$ es una submersión. Las secciones son aplicaciones continuas $\sigma : U \to M \times \mathbb{R}$ tales que $\pi \circ \sigma = id_U$. Sin pedir nada más, por ser $\pi$ submersión, $\sigma$ es automáticamente diferenciable.*
*Si $x \in M$, la fibra sobre $x$ es $\pi^{-1}(x) = \{x\} \times \mathbb{R} = (C_M^\infty)_x \simeq \mathbb{R}$ con isomorfismo canónico de $\mathbb{R}$-álgebras conmutativas. Por tanto, el haz estructural $C_M^\infty$ es un haz de $\mathbb{R}$-álgebras conmutativas.*

*Este haz tiene asociado un prehaz canónico. Como este prehaz se construye a partir de las secciones del haz, vamos a ver primero qué propiedades tienen estas secciones. Consideremos un abierto $U \subset M$ y las secciones locales sobre $U$ del haz*

$$\Gamma_U \mathcal{C}^\infty_M = \{\sigma : U \to \mathcal{C}^\infty_M, \pi \circ \sigma = id_U\}.$$

*Como $\pi \circ \sigma = id_U$ se tiene que, dado $x \in U$, $\sigma$ toma la forma local $\sigma(x, s(x))$. Como $\sigma$ es diferenciable, esto implica que $s : M \to \mathbb{R}$ es diferenciable. Con esto, vamos a ver que $\Gamma_U \mathcal{C}^\infty_M \simeq C^\infty(U)$ como $\mathbb{R}$-álgebras conmutativas.*
*Primero definamos la estructura de $\mathbb{R}$-álgebras conmutativa de $\Gamma_U \mathcal{C}^\infty_M$. Si $a, b \in \Gamma_U \mathcal{C}^\infty_M$ y $k \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned}(a+b)(x) &:= (x, a(x) + b(x)),\\ (ka)(x) &:= (x, ka(x))),\\ (ab)(x) &:= (x, a(x)b(x)).\end{aligned}$$

*El morfismo*

$$\begin{array}{ccc}\Gamma_U \mathcal{C}^\infty_M & \to & C^\infty(U)\\ a & \mapsto & s\end{array}$$

*si $a(x) = (x, s(x))$, con $s \in C^\infty(U)$, es claramente una biyección. Por tanto*

$$\Gamma_U \mathcal{C}^\infty_M \simeq C^\infty(U).$$

*Con esta identificación en mente, vamos ahora si a construir el prehaz canónico asociado a $\Gamma_U \mathcal{C}^\infty_M$. Asignamos a cada $U \subset M$ abierto, el conjunto $\Gamma_U \mathcal{C}^\infty_M \simeq C^\infty(U)$. Los morfismos restricción se definen como sigue : si $V \subset U$, entonces*

$$\begin{array}{cccc}\rho^U_V : & \Gamma_U \mathcal{C}^\infty_M \simeq C^\infty(U) & \to & \Gamma_V \mathcal{C}^\infty_M \simeq C^\infty(V)\\ & f & \mapsto & \rho^U_V(f) = f|_U.\end{array}$$

*Con esto tenemos el prehaz asociado. Sea ahora $x \in M$, vamos a construir el tallo sobre $x$. Consideremos todos los entornos abiertos de $x \in M$, es decir, todos los $U \subset M$ abiertos con $x \in U$. Para cada $U$, tenemos $C^\infty(U)$. Formamos*

$$\sqcup_{U \in \xi(x)} \Gamma_U \mathcal{C}^\infty_M \simeq \sqcup_{U \in \xi(x)} C^\infty(U),$$

*y aquí tenemos la relación binaria de equivalencia del límite inductivo: dos secciones $a$ y $b$ son equivalentes si y sólo si existe un $W \subset M$ abierto con $W \subset U \cap V$, tal que*

$$a|_W = b|_W.$$

*En definitiva, cada clase de equivalencia $[a]$ en el límite inductivo, o lo que es lo mismo, cada elemento del tallo sobre $x \in M$, $(\Gamma \mathcal{C}^\infty_M)_x$, es un germen de función diferenciable en $x$.*

**Nota 4.** *Por esta razón, el tallo sobre $x$ a veces se le llama conjunto de gérmenes sobre $x$.*

Recordemos (véase el ejemplo 3) que denotábamos el conjunto de gérmenes de funciones diferenciables en $x \in M$ por $\mathcal{C}^\infty_x$. Así, lo que se ha visto es que

$$(\Gamma\mathcal{C}^\infty_M)_x = \mathcal{C}^\infty_x.$$

Ahora veamos como podemos construir un haz a partir de un prehaz.
Sea $\mathcal{A}$ un prehaz sobre el espacio topológico $X$. Vamos a ver como podemos obtener un haz con estos datos. Lo primero es definir el espacio total.

**Definición 11.** *Si $\mathcal{A}$ es un prehaz sobre $X$, se llama* ***espacio étale*** *del prehaz a*

$$\tilde{\mathcal{A}} := \sqcup_{x\in X}\mathcal{A}_x,$$

*donde $\mathcal{A}_x$ es el tallo del prehaz sobre $x$.*

Asociado al espacio étale $\tilde{\mathcal{A}}$ se tiene una proyección canónica

$$\begin{array}{cccc} \tilde{\pi}: & \tilde{\mathcal{A}} & \longrightarrow & X \\ & [f]_x = f_x & \longmapsto & \tilde{\pi}(f_x) := x. \end{array}$$

Fijémonos en que $\tilde{\pi}^{-1}(x) = \mathcal{A}_x$ es el tallo del prehaz sobre $X$.
El espacio étale de un prehaz con su proyección canónica es casi un haz. Faltan detalles como darle una topología sobre $\tilde{\mathcal{A}}$ y que $\tilde{\pi}$ sea continua.
Definamos una topología sobre $\tilde{\mathcal{A}}$ dando una base. Dado $U \subset X$ abierto y $f \in \mathcal{A}(U)$, denotamos:

$$B(f) := \{f_x : x \in U\} = \{[f]_x | x \in U\} \subset \sqcup_{x\in U}\mathcal{A}_x,$$

con esto construimos

$$\mathcal{B} := \{B(f) : f \in \mathcal{A}(U), U \subset X\}$$

$$\mathcal{B} = \cup_{\substack{U\subset X \\ f\in\mathcal{A}(U)}} B(f)$$

y resulta que el espacio étale $\tilde{\mathcal{A}}$ de un prehaz es un espacio topológico y además es un haz.

**Proposición 3.** *Sea $\mathcal{A}$ un haz sobre un espacio topológico, con proyección $\pi : \mathcal{A} \to X$. Sea $U \mapsto \mathcal{A}(U)$ el prehaz asociado. Entonces, se cumple:*

1. *(Principio de identidad local). Si $U \subset X$ es abierto y $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es un recubrimiento abierto de $U$ tal que si $\sigma, \tau$ son secciones locales sobre $U$ cumpliendo*

$$\sigma|_{U_\alpha} = \tau|_{U_\alpha},$$

*entonces*

$$\sigma = \tau.$$

2. *(Lema de pegado). Si $U \subset X$ es abierto y $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es un recubrimiento abierto de $U$ tal que $\forall\alpha \in \Lambda$, $\exists\sigma_\alpha : U_\alpha \to \mathcal{A}$ de manera que $\forall\alpha, \beta \in \Lambda$ se tiene que*

$$\sigma_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} = \sigma_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta},$$

*entonces existe una sección $\sigma : U \to \mathcal{A}$ tal que*

$$\sigma|_{U_\alpha} = \sigma_\alpha.$$

*Demostración.*

1. Supongamos que $U \subset X$ es abierto y que $\sigma, \tau$ son secciones locales sobre $U$. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un recubrimiento abierto de $U$ y supongamos también que

$$\sigma|_{U_\alpha} = \tau|_{U_\alpha}, \forall\alpha \in \Lambda.$$

Si $x \in U$ , tenemos que existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $x \in U_{\alpha_0}$. Pero entonces

$$\sigma|_{U_{\alpha_0}}(x) = \tau|_{U_{\alpha_0}}(x).$$

Por tanto

$$\sigma = \tau.$$

2. Sea $U \subset X$ es abierto y $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un recubrimiento abierto de $U$ con secciones $\sigma_\alpha : U_\alpha \to \mathcal{A}$. La condición

$$\sigma_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} = \sigma_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta},$$

quiere decir que $\sigma_\alpha$ y $\sigma_\beta$ determinan el mismo germen en los puntos de dominio común $(\sigma_\alpha)_x = (\sigma_\beta)_x$ $\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$. Definimos

$$\begin{array}{rccl} \sigma : & U & \to & \mathcal{A} \\ & x & \mapsto & \sigma(x) = (\sigma_\alpha)_x, \end{array}$$

si $x \in U_\alpha$. Claramente, $\pi \circ \sigma = id_U$ y $\sigma$ es continua. Además

$$\sigma|_{U_\alpha} = \sigma_\alpha.$$

□

**Definición 12.** *Se llama **prehaz canónico** a todo prehaz que cumple el principio de identidad local y el lema de pegado.*

**Teorema 1.** *Todo prehaz canónico es isomorfo al prehaz asociado de su espacio étale.*

*Demostración.* Sea $U \mapsto \mathcal{A}(U)$ el prehaz sobre el espacio topológico $X$. Denotemos por $\tilde{\mathcal{A}}$ su espacio étale y sea $U \mapsto \Gamma_U(\tilde{\mathcal{A}})$ el prehaz asociado de $\tilde{\mathcal{A}}$. Se tiene un morfismo natural de prehaces

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \Gamma_U(\tilde{\mathcal{A}}) & & & & \\ \sigma & \mapsto & \phi_U(\sigma): & U & \to & \tilde{\mathcal{A}} & \\ & & & x & \mapsto & (\phi_U(\sigma))(x) := \sigma_x. & \end{array}$$

Lo que hay que comprobar es que $\phi_U$ para cada $U$ es una biyección.

(a) (Inyectividad). Sean $\sigma, \tau \in \mathcal{A}(U)$ tales que $\phi_U(\sigma) = \phi_U(\tau)$. Esto quiere decir que $\forall x \in U$, $\sigma_x = \tau_x$ y esto a su vez significa que $\exists W \subset U \cap U = U$ tal que

$$\sigma|_W = \tau|_W \text{ (esto es, } \rho^U_W(\sigma) = \rho^U_W(\tau)).$$

Esto es válido para cada $x \in U$. Podemos formar un recubrimiento abierto de $U$ como $\{U_x\}_{x \in U}$. Entonces, ocurre que para cada abierto $U_x$ del recubrimiento

$$\rho^U_{U_x}(\sigma) = \sigma|_{U_x} = \tau|_{U_x} = \rho^U_{U_x}(\tau).$$

Por el principio de identidad local:

$$\sigma = \tau$$

(b) (Sobreyectividad). Sea $s \in \Gamma_U(\tilde{\mathcal{A}})$, de manera que $s : U \to \tilde{\mathcal{A}}$ y $\pi \circ s = id_U$, así que $s(x)$ debe ser un germen sobre $x$, $s(x) = s_x$.
Los gérmenes son clases bajo una cierta relación binaria de equivalencia que tiene asociada una proyección canónica que es sobreyectiva. Así , existen $V \in \xi(x)$ y $\sigma \in \mathcal{A}(V)$ tal que

$$\sigma_x = s_x, \text{ es decir } (\phi_V(\sigma))(x) = s_x.$$

Es importante observar que esto no resuelve el problema pues $\sigma \in \mathcal{A}(V)$ y queremos encontrar una antiimagen de $s$ en $\mathcal{A}(V)$. Aunque en general $U \neq V$, lo que sí ocurre es que $x \in U \cap V$.
Fijémonos en que $s$ y $\phi_V(\sigma)$ son secciones de $\tilde{\pi}$ en $\tilde{\mathcal{A}}$ que coinciden en el punto y determinan el mismo germen en un punto, de manera que existe un abierto $W_x \subset X$ con $x \in W$ en el que coinciden :

$$s|_{W_x} = \phi_V(\sigma)|_{W_x} = \phi_{W_x}(\rho^V_{W_x}(\sigma))$$

Esto sucede para cada $x \in U$. Como antes, podemos considerar el recubrimiento abierto de $U$ dado por $\{W_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. Lo que tenemos entonces es que para cada $W_\alpha$ de este recubrimiento, existen secciones $\sigma_\alpha \in \mathcal{A}(W_\alpha)$ tales que

$$\phi_{W_\alpha}(\sigma_\alpha) = s|_{W_\alpha}$$

Además, claramente

$$\phi_{W_\alpha}(\sigma_\alpha) = \phi_{W_\beta}(\sigma_\beta).$$

y en $W_\alpha \cap W_\beta$:

$$\rho^{W_\alpha}_{W_\alpha \cap W_\beta}(\sigma_\alpha) = \rho^{W_\beta}_{W_\alpha \cap W_\beta}(\sigma_\beta).$$

Esta propiedad permite aplicar el lema de pegado y, así, existe una sección del prehaz $t \in \mathcal{A}(U)$ tal que al restringirla a $W_\alpha$ coincide con $\sigma_\alpha$:

$$\rho^U_{W_\alpha}(t) = \sigma_\alpha.$$

Por tanto:

$$\phi_U(t)|_{W_\alpha} = \phi_{W_\alpha}(\rho^U_{W_\alpha}(t)) = \phi_{W_\alpha}(\sigma_\alpha) = s|_{W_\alpha},$$

y por el principio de identidad local $\phi_U(t) = s$.

□

A menudo, se dice que un prehaz que verifica el principio de identidad local y el lema de pegado, o sea un prehaz canónico, es un haz. No todo prehaz es haz. Veamos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 7.** *Sea $X = \{x, y\}$ con la topología discreta $\tau = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}\}$. Definimos un prehaz sobre $X$ mediante*

$$\begin{array}{ccl} \emptyset & \mapsto & \mathcal{A}(\emptyset) = 0 \\ \{x\} & \mapsto & \mathcal{A}(\{x\}) = \mathbb{R} \\ \{y\} & \mapsto & \mathcal{A}(\{y\}) = \mathbb{R} \\ X & \mapsto & \mathcal{A}(X) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \end{array}$$

*Los morfismos restricción son:*

$$\begin{array}{cccc} \rho^{\mathcal{A}(X)}_{\{x\}} & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (a, b, c) & \mapsto & a \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \rho^{\mathcal{A}(X)}_{\{y\}} & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (a, b, c) & \mapsto & b \end{array}$$

*Tomemos como $U$ el propio $X$ y el recubrimiento $U_1 = \{x\}$, $U_2 = \{y\}$. Sean $\sigma = (1, -2, 27)$, $\tau = (1, -2, 3)$, dos secciones en $\mathcal{A}(X)$, que cumplen que*

- $\sigma|_{\mathcal{A}(\{x\})} = \rho^{\mathcal{A}(X)}_{\{x\}}(\sigma) = 1$
  $\tau|_{\mathcal{A}(\{x\})} = \rho^{\mathcal{A}(X)}_{\{x\}}(\tau) = 1$

- $\sigma|_{\mathcal{A}(\{y\})} = \rho^{\mathcal{A}(X)}_{\{y\}}(\sigma) = -2$
  $\tau|_{\mathcal{A}(\{y\})} = \rho^{\mathcal{A}(X)}_{\{y\}}(\tau) = -2$

*Sin embargo $\sigma \neq \tau$.*

Mediante los haces, se puede introducir de manera sencilla una clase de espacios geométricos (llamados espacios anillados) que generalizan las variedades diferenciales.

**Definición 13.** *Un espacio anillado reducido es un par $(X, \mathcal{O}_X)$ donde $\mathcal{O}_X$ es un haz de anillos sobre $X$, llamado haz estructural, de manera que $\mathcal{O}_X$ es un subhaz de $\mathcal{C}_X$ (el haz de funciones continuas $f : M \to \mathbb{R}$).*

**Definición 14.** *Sea $X$ un espacio anillado reducido y $\mathcal{O}_X$ su haz estructural. Sea $\mathcal{A}$ un haz sobre $X$ tal que para cada abierto $U \subset X$, $\mathcal{A}(U)$ tiene estructura de $\mathcal{O}_X(U)$-módulo Se dice que el haz de módulos $\mathcal{A}$ es* ***localmente libre*** *si para cada $p \in X$ existe un $U_p \in \overset{\circ}{\xi}(U)$ tal que $\mathcal{A}(U_p)$ es un $\mathcal{O}_X(U_p)$-módulo libre.*
*Por construcción, esto es equivalente a pedir que el tallo $\mathcal{A}_p$ sea libre como $\mathcal{O}_X(U_p)$-módulo. Si además, $\mathcal{A}(U_p)$ es de rango finito (es decir, su base $B$ tiene cardinal finito $k$) se dice que el haz de módulos $\mathcal{A}$ es* ***localmente libre y finitamente generado de rango $k$***.

Más adelante, definiremos el concepto de supervariedad. Podemos adelantar aquí que este concepto, escencialmente, consiste en un espacio anillado con un haz de superálgebras conmutativas como haz estructural.

## 2.4. Fibrados vectoriales

**Definición 15.** *Sea $M$ una variedad diferencial n-dimensional real. Un* ***fibrado*** *sobre $M$ es una submersión sobreyectiva $\pi : E \to M$ (donde $E$ es una variedad diferencial). A $E$ se le llama espacio total, a $\pi$ proyección y $M$ espacio base. El fibrado se escribe $(E, \pi, M)$.*

**Nota 5.** *La condición de que $\pi$ sea submersión significa que $\forall e \in E$, $\pi_{*e} : T_eE \to T_{\pi(e)}M$ es sobreyectiva. En particular esto significa que*

$$dimE = dimT_eE \geq dimT_{\pi(e)}M = dimM.$$

Se llama **fibra** sobre $m \in M$ al conjunto $E_m = \pi^{-1}(m) \subset E$. Por el teorema de la función implícita, $E_m = \pi^{-1}(m)$ es una subvariedad regular de $E$ (y por tanto, variedad diferencial).
Dado un abierto $U \subset M$, se llama **sección local** (sobre $U$) del fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$, a toda aplicación diferenciable $\sigma : U \to E$ tal que $\pi \circ \sigma = id_U$.

**Observación 1.** *Si $E \xrightarrow{\pi} M$ es un fibrado, a veces también se dice que $E$ es una variedad fibrada sobre $M$. Sin imponer alguna condición adicional, las fibras pueden tener cualquier estructura.*

**Definición 16.** *Sea $M$ una variedad diferencial. Un fibrado sobre $M$, $E \xrightarrow{\pi} M$, se dice que es* ***localmente trivial*** *con fibra típica $F$ si existe una variedad* *diferencial $F$ y un recubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de $M$ tal que para cada $i \in I$, existe un difeomorfismo local*

$$h_i : \pi^{-1}(U_i) \subset E \to U_i \times F,$$

*tales que hacen conmutativo el diagrama.*

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) \subset E & \xrightarrow{h_i} & U_i \times F \\ & \searrow & \downarrow_{pr_1} \\ & & U_i \end{array}$$

*Es decir, los difeomorfismos $h_i$ cumplen*

$$pr_1 \circ h_i = \pi \qquad \forall i \in I. \tag{2.1}$$

*A la colección $\{h_i\}_{i\in I}$ se le llama colección de* ***morfismos (o funciones) trivializantes****.*

El nombre viene del hecho de que un ejemplo de construcción de un fibrado localmente trivial consiste en tomar $U \subset M$ abierto, $F$ variedad y $U \times F$ el producto cartesiano. A $(U, pr_1, U \times F)$ se le llama **fibrado trivial** de fibra $F$. La condición de trivialidad local dice que cada punto $m \in M$, existe un abierto $m \in U_i$ de manera que el fibrado restringido a ese abierto $\pi^{-1}(U_i)$ es difeomorfo a un fibrado trivial $U \times F$.

Ahora, vamos a estudiar lo que ocurre en las intersecciones $U_i \cap U_j$, $i, j \in I$. Tenemos dos difeomorfismos

$$h_i : \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \to (U_i \cap U_j) \times F,$$

$$h_j : \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \to (U_i \cap U_j) \times F.$$

Podemos considerar otro difeomorfismo

$$h_{ij} := h_i \circ h_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times F \to (U_i \cap U_j) \times F.$$

La condición (2.1) nos permitirá decir algo más acerca de $h_{ij}$. Sea $(m, v) \in (U_i \cap U_j) \times F$. Hacemos actuar $h_{ij}(m, v) \in (U_i \cap U_j) \times F$, y el resultado tiene que ser del tipo

$$h_{ij}(m, v) = (s, t). \tag{2.2}$$

Haciendo actuar $pr_1$ a ambos miembros de (2.2) resulta:

$$pr_1 \circ h_{ij}(m, v) = pr_1(h_i(h_j^{-1}(m, v))) = \pi(h_j^{-1}(m, v)) =: m,$$

Es decir, $s = m$ y $t$ será una función de $v$ para cada punto $m$, que podemos escribir como $(g_{ij})_m$. Así:

$$h_{ij}(m, v) = (m, (g_{ij})_m(v)).$$

De esta manera, dados $i, j \in I$ para cada $m \in M$ se tiene un difeomorfismo $(g_{ij})_m : F \to F$.
Esto define unas aplicaciones

$$\begin{array}{rccc} g_{ij}: & (U_i \cap U_j) & \to & Diff(F) \\ & m & \mapsto & (g_{ij})_m \end{array}.$$

que se denominan **funciones de transición** del fibrado (localmente trivial) $(E, \pi, M)$, subordinadas al recubrimiento **trivializante** $\{U_i\}_{i \in I}$.

**Ejemplo 8.** *Consideremos $M$ y $F$ variedades diferenciales y el fibrado trivial $(M \times F, pr_1, M)$. Tomamos el recubrimiento $\{M\}$. Observamos que $\pi^{-1}(M) = M \times F$ y sólo hay una $h : \pi^{-1}(M) = M \times F \to M \times F$, $h = id$. Sólo hay una función de transición*

$$\begin{array}{rccc} g: & M & \to & Diff(F) \\ & m & \mapsto & g_m = id. \end{array}$$

**Definición 17** (Morfismos de fibrados). *Sean $E_1 \xrightarrow{\pi_1} M$, $E_2 \xrightarrow{\pi_2} M$ fibrados sobre la misma variedad $M$. Un morfismo de fibrados con base $M$ es una aplicación diferenciable $\phi : E_1 \to E_2$ tal que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ & U_i \end{tikzcd}.$$

*En otras palabras, $\phi$ conserva la fibra $\phi(\pi_1^{-1}(p)) \subset \pi_2^{-1}(p)$.*

**Definición 18** (Pull-back de un fibrado). *Sean $M, N$ variedades diferenciales y $f : M \to N$ aplicación diferenciable. Supongamos que tenemos un fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$. El **pull-back** de $(E, \pi, M)$ es el fibrado $f^*(E)$ sobre $M$, con espacio total*

$$f^*(E) = \{(m, e) \in M \times E | f(m) = \pi(e)\},$$

*y con proyección $f^*(E) \xrightarrow{\pi^*} M$, tal que $\pi^*(m, e) = m$.*

**Definición 19** (Fibrados vectoriales). *Sea $M$ variedad diferencial. Un fibrado sobre $M$, $(E, \pi, M)$, se dice que es **vectorial** si para cada punto $m \in M$, la fibra $E_m = \pi^{-1}(m)$ es un espacio vectorial y, además, las funciones de transición valoran en $GL(V)$:*

$$\begin{array}{rccc} g_{ij}: & M & \to & GL(V) \\ & m & \mapsto & (g_{ij})_m \quad V \to V \end{array}$$

*Si $(E, \pi, M)$ es un fibrado vectorial localmente trivial con fibra típica $V$, entonces $E_m \simeq V \ \forall m \in M$. Si $dim V = k$, se dice que el fibrado $(E, \pi, M)$ es de rango $k$.*

**Nota 6.** *Por el teorema de la función implícita en variedades y por resultados básicos del álgebra lineal se tiene que, en ese caso, $dim E = dim M + k$.*

**Ejemplo 9.** *Si $M$ es variedad diferencial $n$-dimensional, el fibrado tangente $(TM, \pi, M)$ es un fibrado vectorial localmente trivial de rango $n$.*

## 2.5. Módulos y haces

Consideraremos un anillo $R$ conmutativo y con unidad $1_R$. Trabajaremos en la categoría de los $R$-módulos $R - Mod$.

**Definición 20.** *Un $R$-módulo $M$ se dice que es* **libre** *si existe un subconjunto $B \subset M$ tal que $B$ genera a $M$, es decir, para todo elemento $v \in M$ existe un número finito de elementos de $B$ $\{b_1, \ldots, b_v\}$ y unos elementos $\{r_1, \ldots, r_v\} \subset R$ tales que*

$$v = r_1 b_1 + \ldots + r_v b_v,$$

*de manera única. En este caso, se dice que $B$ es una base (libre) de $M$.*

**Ejemplo 10.** *Si $R = \mathbb{K}$ un cuerpo entonces un $R$-módulo es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y éstos siempre tienen base.*

**Proposición 4.** *Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ es un fibrado vectorial de rango $n$ sobre $M$. Entonces, $\Gamma E$ forma un $\mathcal{C}^\infty(M)$-módulo libre si y sólo si el fibrado es trivial.*

*Demostración.* Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado vectorial de rango $n$ sobre la variedad $M$. Si $E$ es trivial, entonces, escribimos $E = M \times \mathbb{R}^n$ y $B = \{s_i\}_{i=1}^n$ donde

$$\begin{array}{rccc} s_i : & M & \longrightarrow & M \times \mathbb{R}^n \\ & m & \longmapsto & (m, e_i) \end{array},$$

para $1 \geq i \geq n$. $B$ es una base, porque toda sección $s_i$ debe tener la forma $s(x) = (x, f_1(x), \ldots, f_n(x))$, con $f_i : M \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^\infty(M)$, pero entonces

$$s = f_1 s_1 + \ldots + f_n s_n.$$

Ahora, probemos el recíproco, sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado vectorial de rango $n$ sobre $M$, tal que $\Gamma E$ forma un $\mathcal{C}^\infty(M)$-módulo libre, con base $B$. Distinguiremos dos casos:

(i) $card(B) \geq n$
Por reducción al absurdo, supongamos que $card(B) = k < n$. Sea $B = \{s_1, \ldots, s_k\}$ base de $\Gamma E$. Si $s \in \Gamma E$, existen $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tal que $s = f_1 s_1 + \ldots + f_k s_k$. Dado un punto $x \in M$, se tiene que $\{s_1(x), \ldots, s_k(x)\}$ es un subconjunto de $\pi^{-1}(x) = E_x$. Entonces $\langle\{s_1(x), \ldots, s_k(x)\}\rangle \subset \pi^{-1}(x) = E_x$ es un subespacio vectorial de $E_x$ con dimensión $k < n$. Por tanto, existe algún $v \in E_x - \langle\{s_1(x), \ldots, s_k(x)\}\rangle$ y, en particular, $v \neq 0$. Sea $t \in \Gamma E$ tal que $t(x) = v$. Entonces no se puede expresar $t = f_1 s_1 + \ldots + f_k s_k$ para ningunas $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Esto contradice el hecho de que $B$ sea base.

(ii) $card(B) = n$
Notemos primero que si $x \in M$, existe $U_x$ entorno abierto de $x$ tal que $\pi^{-1}(U_x) \equiv U_x \times \mathbb{R}^n$ por trivialidad local. Si se elige una base $B_x =$

$\{u_1, \ldots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ podemos escribir $v \in \pi^{-1}(x) = \{x\} \times \mathbb{R}^n$ como $v = (x, v^1 u_1 + \ldots + v^n u_n)$. Definimos la sección local

$$\begin{array}{rccl} \tilde{t}: & U_x & \longrightarrow & \pi^{-1}(U_x) \equiv U_x \times \mathbb{R}^n \\ & y & \longmapsto & \tilde{t}(y) = (y, v^1, \ldots, v^n). \end{array}$$

Esto es una sección local en $U_x \subset M$. Para convertirla en una sección global, utilizaremos una función meseta. Sea $V \in \xi(x)$ tal que $x \in V \subset ad(V) \subset U_x$ y una función $\phi$ . $M \to \mathbb{R}$ tal que $\phi|_{ad(V)} = 1$ y $sop\phi \subset U_x$. La sección $t = \phi \circ \tilde{t} \in C^\infty(M, E)$. Ahora sea $R = \{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento por abiertos de $M$, y sea $\{\phi_i\}_{i \in I}$ una partición de la unidad subordinada a $R$:

$$(\sum_{i \in I} \phi_i)(x) = 1.$$

Supongamos que $card(B) = k \geq n$. Exactamente con el argumento anterior, para cada abierto $U_i$, tendríamos una sección global $t^i_j = \phi^i \circ s_j$, con $i \in I$ y $j \in \{1, \ldots, k\}$.
Por tanto, $\{s_1(x), \ldots, s_k(x)\}$ es un sistema de $k$-vectores linealmente independientes en $E_x = \pi^{-1}(x)$, luego tiene que ser $k = n$.
Hemos probado que existen $\{s_1, \ldots, s_k\}$ secciones globales tales que para todo $t \in \Gamma E$, existen $f_1, \ldots, f_n \in C^\infty(M)$ con $t = \sum_{i=1}^n f_j s_j$. Esto implica que $E = M \times \mathbb{R}^n$.

□

Consideremos ahora la siguiente cuestión. Dado un fibrado vectorial $E \xrightarrow{\pi} M$ que no es globalmente trivial (sino localmente trivial, por ejemplo, la banda de Möebius). ¿Cuál es la estructura algebraica del espacio de secciones $\Gamma E$ ?.
Ya sabemos que $\Gamma E$ es un $C^\infty(M)$-módulo. Por la proposición anterior, nunca va a ser libre. Lo que ocurre es que $\Gamma E$ es un $C^\infty(M)$-módulo localmente libre.

**Proposición 5.** *Existe una correspondencia uno a uno entre los fibrados vectoriales localmente triviales de rango k y los haces de $C^\infty(M)$-módulos localmente libres y finitamente generados de rango k*

*Demostración.* Dado un fibrado vectorial $E$, definimos un haz $\mathcal{A}$ como sigue: $U \mapsto \mathcal{A}(U) = \Gamma_U E$ (el conjunto de las secciones de $E$ sobre $U$). Este conjunto tiene una estructura natural de $C^\infty(U)$-módulo, además, si $x \in M$, existe $U_x$ subconjunto de $M$ tal que $\pi^{-1}(U_x) \simeq U_x \times \mathbb{R}^k$ por la trivialidad local del fibrado vectorial, esto hace que $\mathcal{A}(U_x)$ sea libre y finitamente generado de rango $k$ y, por tanto, $\mathcal{A}$ es un haz de $C^\infty(M)$-módulos localmente libres y finitamente generados de rango $k$.
Vamos a ver el recíproco: cómo dado un haz $\mathcal{A}$ de $C^\infty(M)$-módulos localmente libre y finitamente generado de rango $k$, podemos construir un fibrado vectorial $\pi : E \to M$ sobre $M$ tal que $\Gamma E \simeq \mathcal{A}$.
Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento por abiertos de $M$ de manera que para cada $i \in I$, $\mathcal{A}(U_i)$ es un $C^\infty(M)$-módulo libre de rango $k$. Esto implica que

$$\mathcal{A}(U_i) \simeq C^\infty(U_i) \oplus \overset{k}{\ldots} \oplus C^\infty(U_i) \simeq C^\infty(U_i)^k$$

Consideremos ahora dos abiertos del recubrimiento $U_i$, $U_j$. Por tanto, $U_i \cap U_j \subset M$ es abierto, y le corresponde un $\mathcal{C}^\infty(M)$-módulo $\mathcal{A}(U_i \cap U_j) \simeq \mathcal{C}^\infty(U_i \cap U_j)^k$. Llamando a los isomorfismos

$$\phi_i : \mathcal{A}(U_i) \simeq \mathcal{C}^\infty(U_i)^k,$$

y a las restricciones

$$g_i := \phi_i|_{\mathcal{A}(U_i \cap U_j)} : \mathcal{A}(U_i \cap U_j) \simeq \mathcal{C}^\infty(U_i \cap U_j)^k,$$

podemos construir unos automorfismos

$$g_{ij} := g_i \circ g_j^{-1} : \mathcal{C}^\infty(U_i \cap U_j)^k \to \mathcal{C}^\infty(U_i \cap U_j)^k,$$

que matricialmente (en una base local) se escriben:

$$g_{ij}(x) \equiv \begin{pmatrix} g_{ij}^{11}(x) & \dots & g_{ij}^{1k}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{ij}^{k1}(x) & \dots & g_{ij}^{kk}(x) \end{pmatrix}.$$

Ahora hacemos lo siguiente: para cada índice del recubrimiento $i \in I$, formamos $U_i \times \mathbb{R}^k$ y la unión disjunta

$$\sqcup_{i \in I} U_i \times \mathbb{R}^k.$$

A partir de $\sqcup_{i\in I} U_i \times \mathbb{R}^k$ formamos un espacio de identificación pegando a lo largo de las aplicaciones

$$\begin{array}{rccc} \phi_{i,j} : & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k & \to & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k \\ & (x, v) & \mapsto & (x, g_{ij}(x)(v)). \end{array}$$

O sea, definimos

$$E := \sqcup_{i \in I} U_i \times \mathbb{R}^k / \{\phi_{i,j} : ij \in I\}$$

con proyección

$$\begin{array}{rccc} \pi . & E & \to & M \\ & [(x, v)] & \mapsto & x \end{array}$$

por lo tanto $\pi^{-1}(x) = \{x\} \times \mathbb{R}^k$, y $E$ es un fibrado vectorial localmente trivial de rango $k$. $\square$

# Capítulo 3

# Estructuras de Poisson

## 3.1. Estructuras de Poisson

**Definición 21.** *Sea $A$ una $R$-álgebra. Un* **corchete de Poisson** *sobre $A$, es una aplicación*

$$\{\ ,\ \} : A \times A \to A,$$

*tal que, si $f, g, h \in A$:*

1. *$\{f, g\} = -\{g, f\}$ (antisimetría).*
2. *$\{\ ,\ \}$ es $R$ bilineal.*
3. *$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$ (identidad de Leibniz).*
4. *$\{f, \{g, h\}\} = \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\}$ (identidad de Jacobi).*

**Ejemplo 11.** *Sea $A = C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ y $R = \mathbb{R}$. En $\mathbb{R}^{2n}$ tomamos las coordenadas cartesianas $\{p^i, q_j\}_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$ y definimos*

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p^i} - \frac{\partial f}{\partial p^i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right).$$

*Este corchete es el que se usa en la formulación local de la mecánica clásica.*

**Definición 22.** *Una* **estructura de Poisson** *sobre una variedad diferencial $M$ es un corchete de Poisson donde $A = C^\infty(M)$ y $R = \mathbb{R}$.*

La propiedad de Leibniz nos permite definir un morfismo

$$\begin{array}{rcl} C^\infty(M) & \to & \mathfrak{X}(M) \\ f & \mapsto & X_f := \{f, \_\}, \end{array}$$

donde en $\mathfrak{X}(M)$ se considera el corchete de Lie de campos vectoriales.
Se tiene la siguiente proposición.

**Proposición 6.** *El morfismo anterior es un morfismo de álgebras de lie.*

*Demostración.* Para todas $f, g, h \in C^{\infty}(M)$,

$$\begin{aligned}[X_f, X_g](h) =& X_f(X_g(h)) - X_g(X_f(h)) \\ =& \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} \\ =& \{\{f, g\}, h\} \\ =& X_{\{f,g\}}(h).\end{aligned}$$

Luego $[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$. □

En este contexto a $f$ se le denomina Hamiltoniano (o función Hamiltoniana) y a $X_f$ campo vectorial Hamiltoniano de energía $f$.

**Definición 23.** *Una* ***variedad de Poisson*** *es una variedad diferencial $M$ con una estructura de Poisson sobre $M$.*

## 3.2. Estructuras de Poisson graduadas

**Definición 24.** *Sea $\mathfrak{A} = \oplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathfrak{A}^p$ un álgebra $\mathbb{Z}$-graduada sobre un anillo $R$. Un* ***corchete de Poisson graduado*** *sobre $A$, de grado $k \in \mathbb{Z}$ es una aplicación*

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{A},$$

*tal que*

1. $[\mathfrak{A}^p, \mathfrak{A}^q] \subset \mathfrak{A}^{p+q+k}$.
2. $[A, B] = -(-1)^{(a+k)(b+k)}[A, B]$ *(antisimetría graduada), donde $A \in \mathfrak{A}^a$ y $B \in \mathfrak{A}^b$.*
3. $[\ ,\ ]$ *es $R$-bilineal.*
4. $[A, BC] = [A, B]C + (-1)^{(a+k)b}B[A, C]$ *(Leibniz graduado), donde $A \in \mathfrak{A}^a$, $B \in \mathfrak{A}^b$ y $C \in \mathfrak{A}^c$.*
5. $(-1)^{(a+k)(c+k)}[A, [B, C]] + (-1)^{(b+k)(a+k)}[B, [C, A]] + (-1)^{(c+k)(b+k)}[C, [A, B]] = 0$ *(Jacobi graduado), donde $A \in \mathfrak{A}^a$, $B \in \mathfrak{A}^b$ y $C \in \mathfrak{A}^c$.*

**Ejemplo 12** (Corchete de Schouten Nijenhuis). *Sea $M$ una variedad diferencial y $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$. Construimos el fibrado exterior $\wedge TM$, que tiene estructura de $\mathbb{Z}$-álgebra la cual llamaremos $A(M)$:*

$$A(M) = \oplus_{p \in \mathbb{Z}} A^p(M)$$

*donde $A^{-p}(M) = \{0\}$ para todo $p \in \mathbb{N}$, $A^0(M) = C^{\infty}(M)$ y $A^1(M) = \mathfrak{X}(M)$.*

*Definimos un corchete $[\ ,\ ]_{SN} : A(M) \times A(M) \to A(M)$ de grado $-1$ de la siguiente manera:*

*Si $A \in A^p(M)$ $(A = A_1 \wedge \ldots \wedge A_p)$, $B \in A^q(M)$ $(B = B_1 \wedge \ldots \wedge B_q)$, $[A, B]_{SN} \in A^{p+q-1}(M)$*

1. $[A, B]_{SN} :=$

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} (-1)^{p-i+j-1} A_1 \wedge \ldots \wedge \hat{A}_i \wedge \ldots \wedge A_p \wedge [A_i, B_j] \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge \hat{B}_j \wedge \ldots \wedge B_q.$$

2. *Si* $f \in A^0(M) = C^\infty(M)$

$$[f, A]_{SN} := \sum_{1\leq i\leq p} (-1)^{i-1} A_i(f) A_1 \wedge \ldots \wedge \hat{A}_i \wedge \ldots \wedge A_p.$$

**Proposición 7.** *El corchete de Schouten Nijenhuis es un corchete corchete de Poisson graduado de grado* $-1$

*Demostración.* Consideremos la siguiente notación:
Si $A = A_1 \wedge \ldots \wedge A_p \in A^p(M)$, entonces escribiremos $\hat{A^k} := A_1 \wedge \ldots \wedge \hat{A}_k \wedge \ldots \wedge A_p$ y $\hat{A^{kl}} := A_1 \wedge \ldots \wedge \hat{A}_k \wedge \ldots \wedge \hat{A}_k \wedge \ldots \wedge A_p$ con $k < l$.
Sean $A = A_1 \wedge \ldots \wedge A_p \in A^p(M)$, $B = B_1 \wedge \ldots \wedge B_q \in A^q(M)$ y $C = C_1 \wedge \ldots \wedge C_r \in A^r(M)$.

1. Antisimetría graduada

$$\begin{aligned}
[A, B]_{SN} &= \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} (-1)^{p-i+j-1} \hat{A^i} \wedge [A_i, B_j] \wedge \hat{B^j} \\
&= -\sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} (-1)^{q-i+j-1} (-1)^{(p-1)(q-1)} \hat{B^j} \wedge [B_j, A_i] \wedge \hat{A^i} \\
&= (-1)^{(p-1)(q-1)} [B, A]_{SN}.
\end{aligned}$$

2. Leibniz graduada

$$\begin{aligned}
[A, B \wedge C]_{SN} &= \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} (-1)^{p-i+j-1} \hat{A^i} \wedge [A_i, B_j] \wedge \hat{B^j} \wedge C \\
&\quad + \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq r}} (-1)^{p-i+q+j-1} \hat{A^i} \wedge [A_i, C_j] \wedge B \wedge \hat{C^i} \\
&= [A, B]_{SN} \wedge C + \\
&\quad + \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq r}} (-1)^{p-i+j-1} (-1)^{(p-1)q} B \wedge \hat{A^i} \wedge [A_i, C_j] \wedge \hat{C^j} \\
&= [A, B]_{SN} \wedge C + (-1)^{(p-1)q} B \wedge [A, C]_{SN}.
\end{aligned}$$

3. Jacobi graduada

$$
\begin{aligned}
&[A,[B,C]_{SN}]_{SN} = \\
&\quad = [A, \sum_{\substack{1\leq i\leq q\\ 1\leq j\leq r}} (-1)^{q-i+j-1} \hat{B}^i \wedge [B_i, C_j] \wedge \hat{C}^j] \\
&\quad = \sum_{\substack{1\leq i\leq q\\ 1\leq j\leq r}} (-1)^{q-i+j-1} \Big( \sum_{\substack{1\leq k\leq p\\ 1\leq l< i}} (-1)^{p-k+l-1} \hat{A}^k \wedge [A_k, B_l] \wedge \hat{B}^{li} \wedge [B_i, C_j] \wedge \hat{C}^j \\
&\qquad + \sum_{\substack{1\leq k\leq p\\ i< l\leq q}} (-1)^{p-k+l} \hat{A}^k \wedge [A_k, B_l] \wedge \hat{B}^{il} \wedge [B_i, C_j] \wedge \hat{C}^j \\
&\qquad + \sum_{1\leq k\leq p} (-1)^{p-k+q-1} \hat{A}^k \wedge [A_k, [B_i, C_j]] \wedge \hat{B}^i \wedge \hat{C}^j \\
&\qquad + \sum_{\substack{1\leq k\leq p\\ 1\leq l< j}} (-1)^{p-k+q+l-1} \hat{A}^k \wedge [A_k, C_l] \wedge \hat{B}^i \wedge [B_i, C_j] \wedge \hat{C}^{lj} \\
&\qquad + \sum_{\substack{1\leq k\leq p\\ j< l\leq r}} (-1)^{p-k+q+l} \hat{A}^k \wedge [A_k, C_l] \wedge \hat{B}^i \wedge [B_i, C_j] \wedge \hat{C}^{jl} \Big).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{(p-1)(r-1)}[A,[B,C]_{SN}]_{SN} = \\
&\quad = \sum_{\substack{1\leq i\leq q\\ 1\leq j\leq r}} \Big( \sum_{\substack{1\leq k\leq p\\ 1\leq l< i}} (-1)^{r(p-1)+q-i+j-k+l-1} \hat{A}^k \wedge [A_k, B_l] \wedge \hat{B}^{li} \wedge [B_i, C_j] \wedge \hat{C}^j \\
&\qquad + \sum_{\substack{1\leq k\leq p\\ i< l\leq q}} (-1)^{r(p-1)+q-i+j-k+l} \hat{A}^k \wedge [A_k, B_l] \wedge \hat{B}^{il} \wedge [B_i, C_j] \wedge \hat{C}^j \\
&\qquad + \sum_{1\leq k\leq p} (-1)^{r(p-1)-i+j-k-1} \hat{A}^k \wedge [A_k, [B_i, C_j]] \wedge \hat{B}^i \wedge \hat{C}^j \\
&\qquad + \sum_{\substack{1\leq k\leq p\\ 1\leq l< j}} (-1)^{r(p-1)-i+j-k+l-1} \hat{A}^k \wedge [A_k, C_l] \wedge \hat{B}^i \wedge [B_i, C_j] \wedge \hat{C}^{lj} \\
&\qquad + \sum_{\substack{1\leq k\leq p\\ j< l\leq r}} (-1)^{r(p-1)-i+j-k+l} \hat{A}^k \wedge [A_k, C_l] \wedge \hat{B}^i \wedge [B_i, C_j] \wedge \hat{C}^{jl} \Big).
\end{aligned}
$$

Análogamente se tiene:

$$
\begin{aligned}
&[B,[C,A]_{SN}]_{SN} = \\
&\qquad =[B, \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} (-1)^{p-i+j-1}\hat{C}^i \wedge [C_i, A_j] \wedge \hat{A}^j] \\
&\qquad = \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} (-1)^{p-i+j-1}( \sum_{\substack{1\leq k\leq r\\ 1\leq l< i}} (-1)^{r-k+l-1}\hat{B}^k \wedge [B_k, C_l] \wedge \hat{C}^{li} \wedge [C_i, A_j] \wedge \hat{A}^j \\
&\qquad\quad + \sum_{\substack{1\leq k\leq r\\ i< l\leq p}} (-1)^{r-k+l}\hat{B}^k \wedge [B_k, C_l] \wedge \hat{C}^{il} \wedge [C_i, A_j] \wedge \hat{A}^j \\
&\qquad\quad + \sum_{1\leq k\leq r} (-1)^{r-k+p-1}\hat{B}^k \wedge [B_k,[C_i, A_j]] \wedge \hat{C}^i \wedge \hat{A}^j \\
&\qquad\quad + \sum_{\substack{1\leq k\leq r\\ 1\leq l< j}} (-1)^{r-k+r+l-1}\hat{B}^k \wedge [B_k, A_l] \wedge \hat{C}^i \wedge [C_i, A_j] \wedge \hat{A}^{lj} \\
&\qquad\quad + \sum_{\substack{1\leq k\leq r\\ j< l\leq q}} (-1)^{r-k+p+l}\hat{B}^k \wedge [B_k, A_l] \wedge \hat{C}^i \wedge [C_i, A_j] \wedge \hat{A}^{jl}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{(q-1)(p-1)}[B,[C,A]_{SN}]_{SN} = \\
&\qquad = \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} ( \sum_{\substack{1\leq k\leq r\\ 1\leq l< i}} (-1)^{r(p-1)-i+j-k+l-1}\hat{A}^j \wedge [A_j, C_i] \wedge \hat{B}^k \wedge [B_k, C_l] \wedge \hat{C}^{li} \\
&\qquad\quad + \sum_{\substack{1\leq k\leq r\\ i< l\leq p}} (-1)^{r(p-1)-i+j-k+l}\hat{A}^j \wedge [A_j, C_i] \wedge \hat{B}^k \wedge [B_k, C_l] \wedge \hat{C}^{il} \\
&\qquad\quad + \sum_{1\leq k\leq r} (-1)^{r(p-1)-i+j-k-1}\hat{A}^j \wedge [B_k,[C_i, A_j]] \wedge \hat{B}^k \wedge \hat{C}^i \\
&\qquad\quad + \sum_{\substack{1\leq k\leq r\\ 1\leq l< j}} (-1)^{p(q-1)-i+j-k+l-1}\hat{B}^k \wedge [B_k, A_l] \wedge \hat{C}^i \wedge [C_i, A_j] \wedge \hat{A}^{lj} \\
&\qquad\quad + \sum_{\substack{1\leq k\leq r\\ j< l\leq q}} (-1)^{p(q-1)-i+j-k+l}\hat{B}^k \wedge [B_k, A_l] \wedge \hat{C}^i \wedge [C_i, A_j] \wedge \hat{A}^{jl}),
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
&[C,[A,B]_{SN}]_{SN} = \\
&\quad =[C, \sum_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le p}} (-1)^{r-i+j-1}\widehat{C}^{i} \wedge [C_i, B_j] \wedge \widehat{B}^{j}] \\
&\quad = \sum_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le p}} (-1)^{r-i+j-1}\Big( \sum_{\substack{1\le k\le q\\ 1\le l<i}} (-1)^{q-k+l-1}\widehat{C}^{k} \wedge [C_k, B_l] \wedge \widehat{A}^{li} \wedge [A_i, B_j] \wedge \widehat{B}^{j} \\
&\qquad + \sum_{\substack{1\le k\le q\\ i<l\le r}} (-1)^{q-k+l}\widehat{C}^{k} \wedge [C_k, A_l] \wedge \widehat{A}^{il} \wedge [A_i, B_j] \wedge \widehat{B}^{j} \\
&\qquad + \sum_{1\le k\le q} (-1)^{q-k+r-1}\widehat{C}^{k} \wedge [C_k, [A_i, B_j]] \wedge \widehat{A}^{i} \wedge \widehat{B}^{j} \\
&\qquad + \sum_{\substack{1\le k\le q\\ 1\le l<j}} (-1)^{q-k+r+l-1}\widehat{C}^{k} \wedge [C_k, B_l] \wedge \widehat{A}^{i} \wedge [A_i, B_j] \wedge \widehat{B}^{lj} \\
&\qquad + \sum_{\substack{1\le k\le q\\ j<l\le p}} (-1)^{q-k+r+l}\widehat{C}^{k} \wedge [C_k, B_l] \wedge \widehat{A}^{i} \wedge [A_i, B_j] \wedge \widehat{B}^{jl}\Big).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{(r-1)(q-1)}[C,[A,B]_{SN}]_{SN} = \\
&\quad = \sum_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le p}} \Big( \sum_{\substack{1\le k\le q\\ 1\le l<i}} (-1)^{p(q-1)-i+j-k+l-1}\widehat{B}^{j} \wedge [B_j, A_i] \wedge \widehat{C}^{k} \wedge [C_k, B_l] \wedge \widehat{A}^{li} \\
&\qquad + \sum_{\substack{1\le k\le q\\ i<l\le r}} (-1)^{p(q-1)-i+j-k+l}\widehat{B}^{j} \wedge [B_j, A_i] \wedge \widehat{C}^{k} \wedge [C_k, B_l] \wedge \widehat{A}^{li} \\
&\qquad + \sum_{1\le k\le q} (-1)^{r(p-1)-i+j-k-1}\widehat{A}^{i} \wedge [C_k, [A_i, B_j]] \wedge \widehat{B}^{j} \wedge \widehat{C}^{k} \\
&\qquad + \sum_{\substack{1\le k\le q\\ 1\le l<j}} (-1)^{r(p-1)+q-i+j-k+l-1}\widehat{A}^{i} \wedge [A_i, B_j] \wedge \widehat{B}^{lj} \wedge [B_l, C_k] \wedge \widehat{C}^{k} \\
&\qquad + \sum_{\substack{1\le k\le q\\ j<l\le p}} (-1)^{r(p-1)+q-i+j-k+l}\widehat{A}^{i} \wedge [A_i, B_j] \wedge \widehat{B}^{lj} \wedge [B_l, C_k] \wedge \widehat{C}^{k}\Big).
\end{aligned}
$$

Ahora, si sumamos estos términos y hacemos unos cambios de índice adecuados tenemos que

$$(-1)^{(p-1)(r-1)}[A,[B,C]_{SN}]_{SN} + (-1)^{(q-1)(p-1)}[B,[C,A]_{SN}]_{SN}$$
$$+(-1)^{(r-1)(q-1)}[C,[A,B]_{SN}]_{SN} = 0.$$

□

**Definición 25.** *Un álgebra graduada $\mathfrak{A}$ con un corchete de Poisson graduado $[\ ,\ ]$ con grado $k=-1$, se denomina **álgebra de Gerstenhaber** $(\mathfrak{A},[\ ,\ ])$*

**Ejemplo 13** (Corchete de Koszul- Schouten). *Supongamos que $M$ es una variedad de Poisson. Consideremos $\mathfrak{A}=\Omega(M)$ (las formas diferenciales) con el producto exterior. Vamos a definir un corchete de Poisson graduado $[\ ,\ ]$ de grado $k=-1$ sobre $\Omega(M)$ :*

*(a) Si $f,g\in C^\infty(M)$, $[f,g]=0$.*

*(b) Si $f\in C^\infty(M)$, $dg\in\Omega^1(M)$, $[f,dg]=\{f,g\}$.*

*(c) Si $df,dg\in\Omega^1(M)$, $[df,dg]=d\{f,g\}$.*

*Se extiende a todo $\Omega(M)$ por $\mathbb{R}$-bilinealidad y pidiendo la propiedad de antisimetría graduada y la propiedad de Leibniz graduado:*

$$[\alpha,\beta\gamma]=[\alpha,\beta]\gamma+(-1)^{(|\alpha|-1)\beta}\beta[\alpha,\gamma].$$

**Proposición 8.** *El corchete definido anteriormente es un corchete de Poisson graduado $[\ ,\ ]$ de grado $k=-1$ sobre $\Omega(M)$.*

*Demostración.* Con las propiedades anteriores definamos un corchete de Poisson graduado $[\ ,\ ]_{KS}$ de grado $k=-1$ sobre $\Omega(M)$ como sigue:

(a) Si $A=A_1\wedge\ldots\wedge A_p$, $B=B_1\wedge\ldots\wedge B_q\in\Omega(M)$, con $A_i=df_i$ $B_j=dg_j$ y $f,g\in C^\infty(M)$
$[A,B]_{KS}:=$

$$\sum_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le q}}(-1)^{p-i+j-1}A_1\wedge\ldots\wedge\hat{A}_i\wedge\ldots\wedge A_p\wedge[A_i,A_j]\wedge B_1\wedge\ldots\wedge\hat{B}_j\wedge\ldots\wedge B_q.$$

(b) $[f,A]_{KS}:=\sum_{1\le i\le p}(-1)^{i-1}[f,A_i]A_1\wedge\ldots\wedge\hat{A}_i\wedge\ldots\wedge A_p$.

(c) $[df,dg]_{KS}=[df,dg]=d\{f,g\}$

Una prueba idéntica a la del ejemplo anterior nos dice que $[A,B]_{KS}$ es un corchete de Poisson graduado de grado $k=-1$ sobre $\Omega(M)$.

Ahora, lo que se probará en seguida es que $[\ ,\ ]=[\ ,\ ]_{KS}$.

(i) Si $A = df$ y $B = B_1 \wedge B_2$, con $B_i = dg_i$

$$\begin{aligned}[A,B] =& [A,B_1] \wedge B_2 + (-1)^{(|A|-1)|B_1|} B_1 \wedge [A,B_2] \\ =& [A,B_1]_{KS} \wedge B_2 + (-1)^{(|A|-1)|B_1|} B_1 \wedge [A,B_2]_{KS} \\ =& [A,B]_{KS}.\end{aligned}$$

(ii) Por inducción tenemos

$$[A,B] = [A,B]_{KS},$$

para $A = df$ y $B^{\bullet} = B_1 \wedge \ldots \wedge B_r$, con $B_i = dg_i$.

(iii) Si $A = A_1 \wedge A_2 = df_1 \wedge df_2$ y $B = B_1 \wedge \ldots \wedge B_r$, con $B_i = dg_i$

$$\begin{aligned}[A,B] =& -(-1)^{(|A|-1)(|B|-1)}[B,A] \\ =& -(-1)^{(|A|-1)(|B|-1)}([B,A_1] \wedge A_2 + (-1)^{(|A_1|-1)|B|} A_1 \wedge [B,A_2]) \\ =& -(-1)^{(|A|-1)(|B|-1)}([B,A_1]_{KS} \wedge A_2 + (-1)^{(|A|-1)|B|} A_1 \wedge [B,A_2]_{KS}) \\ =& -(-1)^{(|A|-1)(|B|-1)}[B,A]_{KS} \\ =& [A,B]_{KS}\end{aligned}$$

(iv) Por inducción tenemos que, $A = A_1 \wedge \ldots \wedge A_p$ y $B = B_1 \wedge \ldots \wedge B_q$, con $A_i = df_i$ y $B_j = dg_j$

Por tanto $[\,,\,] = [\,,\,]_{KS}$, es decir $[\,,\,]$ es un corchete de Poisson graduado de grado $k = -1$ sobre $\Omega(M)$.

□

Ahora supongamos que tenemos una variedad diferencial $M$ y un bivector $P \in A^2(M)$. Definimos un corchete

$$\{,\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

como sigue

$$\{f,g\} := P(df,dg).$$

Este corchete tiene las siguientes propiedades:

1. Antisimetría

$$\begin{aligned}\{f,g\} =& P(df,dg) \\ =& -P(dg,df) \\ =& -\{g,f\}\end{aligned}$$

2. $\mathbb{R}$-bilinealidad

3. Leibniz

$$\begin{aligned}\{f, gh\} &= P(df, d(gh)) \\ &= P(df, dg \cdot h + g \cdot dh) \\ &= P(df, dg \cdot h) + P(df, g \cdot dh) \\ &= P(df, dg) \cdot h + g \cdot P(df, dh) \\ &= \{f, g\}h + g\{f, h\}.\end{aligned}$$

**Definición 26.** *Un bivector $Q \in A^2(M)$ es de Poisson si $[P, P]_{SN} = 0$.*

**Lema 1.** *Un bivector $Q = Q_{ij}\frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \in A^2(M)$ es de Poisson si y sólo si*

$$Q_{ij}\partial_i Q_{kl} - Q_{ik}\partial_i Q_{lj} + Q_{il}\partial_i Q_{jk} = 0.$$

*Demostración.* Sea $Q$ un bivector. Expresamos localmente a $Q$

$$Q = Q_{ij}\frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Utilicemos la siguiente notación para la anterior expresión

$$Q = Q_{ij}\partial_i \wedge \partial_j.$$

Entonces

$$\begin{aligned}[Q, Q]_{SN} = &-\partial_j \wedge [Q_{ij}\partial_i, Q_{kl}\partial_k] \wedge \partial_l + \partial_j \wedge [Q_{ij}\partial_i, \partial_l] \wedge Q_{kl}\partial_k \\ &+Q_{ij}\partial_i \wedge [\partial_j, Q_{kl}\partial_k] \wedge \partial_l - Q_{ij}\partial_i \wedge [\partial_j, \partial_l] \wedge Q_{kl}\partial_k,\end{aligned}$$

teniendo que $[\partial_j, \partial_l] = 0$,

$$\begin{aligned}[Q, Q]_{SN} = &[Q_{ij}\partial_i, Q_{kl}\partial_k] \wedge \partial_j \wedge \partial_l - [Q_{ij}\partial_i, \partial_l] \wedge \partial_j \wedge Q_{kl}\partial_k \\ &-[Q_{kl}\partial_k, \partial_j] \wedge \partial_l \wedge Q_{ij}\partial_i\end{aligned}$$

haciendo un cambio de índices, $l$ por $j$, $j$ por $l$ (que denotaremos por $l \leftrightarrow j$), $k$ por $i$ e $i$ por $k$, (i.e. $k \leftrightarrow i$) en el segundo término, se tiene

$$[Q, Q]_{SN} = [Q_{ij}\partial_i, Q_{kl}\partial_k] \wedge \partial_j \wedge \partial_l - 2[Q_{kl}\partial_k, \partial_j] \wedge \partial_l \wedge Q_{ij}\partial_i,$$

desarrollando los corchetes,

$$\begin{aligned}[Q, Q]_{SN} = &Q_{ij}\partial_i Q_{kl}\partial_k \wedge \partial_j \wedge \partial_l - Q_{kl}\partial_k Q_{ij}\partial_i \wedge \partial_j \wedge \partial_l \\ &+2Q_{ij}\partial_i Q_{kl}\partial_k \wedge \partial_l \wedge \partial_i,\end{aligned}$$

cambiando los índices $j \leftrightarrow l$ e $i \leftrightarrow k$ en el segundo sumando, tenemos

$$[Q, Q]_{SN} = 4Q_{ij}\partial_i Q_{kl}\partial_k \wedge \partial_j \wedge \partial_l,$$

lo hacemos actuar sobre $(df, dg, dh)$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}[Q, Q]_{SN}(df, dg, dh) &= Q_{ij}\partial_i Q_{kl}\partial_k \wedge \partial_j \wedge \partial_l(df, dg, dh) \\ &= Q_{ij}\partial_i Q_{kl}(\partial_k f\partial_j g\partial_l h + \partial_j f\partial_l g\partial_k h - \partial_l f\partial_k g\partial_j h) \\ &\quad -Q_{ij}\partial_i Q_{kl}(\partial_k f\partial_l g\partial_j h + \partial_j f\partial_k g\partial_l h + \partial_l f\partial_j g\partial_k h)\end{aligned}$$

cambiando $k \leftrightarrow l$ en el segundo sumando, se tiene

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}[Q,Q]_{SN}(df,dg,dh) &= 2Q_{ij}\partial_i Q_{kl}(\partial_k f\partial_j g\partial_l h + \partial_j f\partial_l g\partial_k h + \partial_l f\partial_k g\partial_j h) \\ &= 2(Q_{ij}\partial_i Q_{kl} + Q_{ik}\partial_i Q_{lj} + Q_{il}\partial_i Q_{jk})\partial_k f\partial_j g\partial_l h, \end{aligned}$$

por tanto $Q$ es bivector de Poisson si y sólo si

$$Q_{ij}\partial_i Q_{kl} + Q_{ik}\partial_i Q_{lj} + Q_{il}\partial_i Q_{jk} = 0.$$

□

**Proposición 9.** *$P$ es un bivector de Poisson si y sólo si $\{,\}$ cumple la propiedad de Jacobi.*

*Demostración.* Desarrollemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \{h,\{f,g\}\} &= P(dh, d(\partial_i f\partial_j g - \partial_i g\partial_j f)) \\ &= P_{kl}\partial_k \wedge \partial_l(dh, d(P_{ij}(\partial_i f\partial_j g - \partial_i g\partial_j f))) \\ &= P_{kl}\partial_k h\partial_l(P_{ij}(\partial_i f\partial_j g - \partial_i g\partial_j f)) \\ &\quad -P_{kl}\partial_l h\partial_k(P_{ij}(\partial_i f\partial_j g - \partial_i g\partial_j f)). \end{aligned}$$

Cambiando $k \leftrightarrow l$ en el segundo sumando, se tiene

$$\{h,\{f,g\}\} = 2P_{kl}(\partial_k h\partial_l(P_{ij}(\partial_i f\partial_j g - \partial_i g\partial_j f)).$$

Por ser derivación $\partial_l$,

$$\begin{aligned} \{h,\{f,g\}\} &= 2P_{kl}(\partial_k h\partial_l P_{ij}(\partial_i f\partial_j g - \partial_i g\partial_j f) + P_{ij}\partial_k h\partial_l(\partial_i f\partial_j g - \partial_i g\partial_j f)) \\ &= 2P_{kl}(\partial_k h\partial_l P_{ij}\partial_i f\partial_j g + P_{ij}\partial_k h\partial_l(\partial_i f\partial_j g)) \\ &\quad -2P_{kl}(\partial_k h\partial_l P_{ij}\partial_i g\partial_j f + P_{ij}\partial_k h\partial_l(\partial_i g\partial_j f)). \end{aligned}$$

Cambiando $i \leftrightarrow j$ en el segundo sumando y por ser derivación $\partial_l$, se tiene

$$\begin{aligned} &= 4P_{kl}(\partial_k h\partial_l P_{ij}\partial_i f\partial_j g + P_{ij}\partial_k h\partial_j g\partial_{li} f \\ &\quad +P_{ij}\partial_k h\partial_i f\partial_{lj} h). \end{aligned}$$

Análogamente se tiene

$$\begin{aligned} \{f,\{g,h\}\} = &\ 4P_{kl}(\partial_k f\partial_l P_{ij}\partial_i g\partial_j h + P_{ij}\partial_k f\partial_j h\partial_{li} g \\ &+P_{ij}\partial_k f\partial_i g\partial_{lj} h), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \{g,\{h,f\}\} = &\ 4P_{kl}(\partial_k g\partial_l P_{ij}\partial_i h\partial_j f + P_{ij}\partial_k g\partial_j f\partial_{li} h \\ &+P_{ij}\partial_k g\partial_i h\partial_{lj} f). \end{aligned}$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\} &= \\
&= 4[P_{kl}\partial_l P_{ij}+P_{il}\partial_l P_{jk}+P_{jl}\partial_l P_{ki}](\partial_k f\partial_i g\partial_j h) \\
&\quad +4P_{kl}(P_{ij}[\partial_k f\partial_j h\partial_{li} g+\partial_k g\partial_j f\partial_{li} h+\partial_k h\partial_j g\partial_{li} f]) \\
&\quad +4P_{kl}(P_{ij}[\partial_k f\partial_i g\partial_{lj} h-\partial_k g\partial_i h\partial_{lj} f+\partial_k h\partial_i f\partial_{lj} h]).
\end{aligned}
$$

Cambiando $i \leftrightarrow j$ en el tercer sumando, se tiene

$$
= 4[P_{kl}\partial_l P_{ij}+P_{kl}\partial_l P_{ij}+P_{kl}\partial_l P_{ij}](\partial_k f\partial_i g\partial_j h).
$$

Por lo anterior y el lema 1 tenemos:

$\{,\}$ cumple la propiedad de Jacobi si y sólo si $P$ es un bivector de Poisson. $\square$

# Capítulo 4

# Algebroides de Lie

## 4.1. Algebroides de Lie

**Nota 7.** *Los fibrados vectoriales que se usarán de aquí en adelante son fibrados vectoriales localmente triviales de rango finito. Los módulos serán fieles.*

**Definición 27.** *Un algebroide de Lie $(E, [\ ,\ ]_E, q_E)$ es un fibrado vectorial $E$ sobre $M$, con una estructura de álgebra de Lie $[\ ,\ ]_E$ en el espacio vectorial $\Gamma(E)$ de secciones de $E$, y una aplicación $q_E : \Gamma(E) \to \Gamma(TM)$, llamada ancla, tal que:*

- $[X, fY]_E = f[X,Y]_E + (q_E(X)f)Y$ *(Leibniz), para todo $X, Y \in \Gamma(E)$ y $f \in C^\infty(M)$*

**Lema 2.** *Sea $(E, [\ ,\ ]_E, q_E)$ un algebroide de Lie, entonces la aplicación ancla es un morfismo de álgebras, es decir*

$$q_E([A,B]_E) = [q_E(A), q_E(B)].$$

*Demostración.* Por la identidad de Jacobi y la propiedad de Leibniz, tenemos

$$\begin{aligned}
0 = &\ [[A,B]_E, fC]_E + [[B,fC]_E, A]_E + [[fC,A]_E, B]_E \\
= &\ f[[A,B]_E, C]_E + (q_E[A,B]_E(f))C \\
&+ f[[B,C]_E, A] - (q_E A(f))[B,C]_E + (q_E B(f))[C,A]_E - (q_E A(q_E B(f)))C \\
&+ f[[C,A]_E, B]_E - (q_E B(f))[C,A]_E - (q_E A(f))[C,B]_E + (q_E B(q_E A(f)))C \\
= &\ ((q_E([A,B]_E) - [q_E A, q_E B])(f))C.
\end{aligned}$$

Ya que esto es cierto para todo $A, B, C \in \Gamma(E)$ y $f \in C^\infty(M)$, se tiene que

$$q_E([A,B]_E) = [q_E(A), q_E(B)].$$

$\square$

Podemos definir los algebroides de Lie algebraicamente como sigue. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra asociativa sobre un anillo conmutativo con unidad $\mathcal{R}$ y sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{A}$-módulo. Pensaremos en $\mathcal{F}$ como el $C(M)^\infty$-módulo de secciones de un fibrado vectorial $E \xrightarrow{\pi} M$, con $\mathcal{F} = \Gamma(E)$ y $\mathcal{R} = \mathbb{R}$.
Si $f \in \mathcal{A}$, se tiene el morfismo multiplicación $\mu_f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$, definido por ser $\mathcal{F}$ un $\mathcal{A}$-módulo:

$$\mu_f(A) := fA, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

**Definición 28.** *Un operador $D \in End_{\mathcal{R}}(\mathcal{F})$ (o sea, $D : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ es $\mathcal{R}$-lineal) se dice que es una quasi-derivación si dada $f \in \mathcal{A}$, $\exists\, g \in \mathcal{A}$ con*

$$[D, \mu_f] = \mu_g$$

*donde $[\ ,\ ]$ es el conmutador de endomorfismos.*

**Definición 29.** *Una quasi-derivación se dice que es un operador tensorial si*

$$[D, \mu_f] = 0 \ \ \forall f \in \mathcal{A}.$$

Notése que el conjunto de todas las quasi-derivaciones de $\mathcal{F}$, $QDer_{\mathcal{R}}(\mathcal{F})$, es un $\mathcal{R}$-módulo.

**Proposición 10.** *El corchete de $End_{\mathcal{R}}(\mathcal{F})$ induce (o se restringe) a un corchete en $QDer_{\mathcal{R}}(\mathcal{F})$, i.e. si $D_1, D_2 \in QDer_{\mathcal{R}}(\mathcal{F})$, entonces $[D_1, D_2] \in QDer_{\mathcal{R}}(\mathcal{F})$. Así, $QDer_{\mathcal{R}}(\mathcal{F})$ hereda la estructura de álgebra de Lie de $(End_{\mathcal{R}}(\mathcal{F})\ ,\ [\ ,\ ])$.*

*Demostración.* Como $(End_{\mathcal{R}}(\mathcal{F})\ ,\ [\ ,\ ])$ es un álgebra de Lie, $[\ ,\ ]$ es antisimétrico y se cumple la identidad de Jacobi, es decir,

$$[[D_1, D_2], D_3] + [[D_3, D_1], D_2] + [[D_2, D_3], D_1] = 0$$

$\forall\ D_1, D_2, D_3 \in QDer_{\mathcal{R}}(\mathcal{F})$. Sean $D_1, D_2 \in QDer_{\mathcal{R}}(\mathcal{F})$, así que dado $f \in \mathcal{A}$, $\exists\, g_1, g_2 \in \mathcal{A}$ con

$$[D_1, \mu_f] = \mu_{g_1} \quad \text{y} \quad [D_2, \mu_f] = \mu_{g_2}.$$

Por tanto ,

$$\begin{aligned} [[D_1, D_2], \mu_f] &= -[[\mu_f, D_1], D_2] - [[D_2, \mu_f], D_1] \\ &= [[D_1, \mu_f], D_2] - [[D_2, \mu_f], D_1] \\ &= [\mu_{g_1}, D_2] - [\mu_{g_2}, D_1] \\ &= -[D_2, \mu_{g_1}] + [D_1, \mu_{g_2}], \end{aligned}$$

pero también, dados $g_1,\ g_2$, existen $h_1, h_2 \in \mathcal{A}$ con

$$[D_2, \mu_{g_1}] = \mu_{h_1} \quad \text{y} \quad [D_1, \mu_{g_2}] = \mu_{h_2},$$

así que

$$[[D_1, D_2], \mu_f] = \mu_{h_2} - \mu_{h_1}.$$

Ahora, si $A \in \mathcal{F}$, entonces

$$(\mu_{h_2} - \mu_{h_1})(A) = \mu_{h_2}(A) - \mu_{h_1}(A) = h_2 A - h_1 A = (h_2 - h_1)A = \mu_{h_2 - h_1}(A),$$

y como esto es para toda $A \in \mathcal{F}$, tenemos que $\mu_{h_2} - \mu_{h_1} = \mu_{h_2 - h_1}$.
Luego,

$$[[D_1, D_2], \mu_f] = \mu_{h_2 - h_1},$$

lo que nos dice que $[D_1, D_2] \in QDer_{\mathcal{R}}(\mathcal{F})$. □

Se tiene lo siguiente:

**Teorema 2.** *Existe una aplicación $\mathcal{R}$-lineal* $\widehat{\ } : QDer_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}) \longrightarrow Der_{\mathcal{R}}(\mathcal{A})$ *tal que*

$$[D, \mu_f] = \mu_{\widehat{D}(f)}.$$

*Demostración.* Por definición de $D$ como quasi-derivación, dadas $f, g \in \mathcal{A}$, existen $\widehat{D}(f), \widehat{D}(g) \in \mathcal{A}$ tales que

$$[D, \mu_f] = \mu_{\widehat{D}(f)}\ , \ [D, \mu_g] = \mu_{\widehat{D}(g)}\ ,$$

y también existe $\widehat{D}(fg) \in \mathcal{A}$ con

$$[D, \mu_{fg}] = \mu_{\widehat{D}(fg)}$$

Lo que queremos probar, es que $\widehat{D}$ de verdad es derivación, i.e:

$$\widehat{D}(fg) = \widehat{D}(f)g + f\widehat{D}(g).$$

Como $\mu_{\widehat{D}(f)} = D \circ \mu_f - \mu_f \circ D$, por una parte, calculamos (con $A \in \mathcal{F}$)

$$D(fgA) = D((fg)A) = fgD(A) + \widehat{D}(fg)A \tag{4.1}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} D(fgA) =& D(f(gA)) \\ =& fD(gA) + \widehat{D}(f)(gA) \\ =& f(gD(A) + \widehat{D}(g)A) + bD(f)(gA) \\ =& fgD(A) + (f\widehat{D}(g) + \widehat{D}(f)g)A. \end{aligned}$$

Es decir

$$D(fgA) = fgD(A) + (f\widehat{D}(g) + \widehat{D}(f)g)A. \tag{4.2}$$

Igualando (4.1) y (4.2), obtenemos que

$$\widehat{D}(fg)A = (\widehat{D}(f)g + f\widehat{D}(g))A.$$

es decir, $\widehat{D}$ es derivación. □

Como consecuencia:

**Teorema 3.** *El morfismo $\mathcal{R}$-lineal $\widehat{\ }$ se extiende a un morfismo de álgebras de Lie:*

$$[\widehat{D_1, D_2}] = [\widehat{D_1}, \widehat{D_2}] \ , \ \ \forall D_1, D_2 \in QDer_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}).$$

*Demostración.* Por definición, si $D_1, D_2 \in QDer_{\mathcal{R}}(\mathcal{F})$, $f \in \mathcal{A}$ y $A \in \mathcal{F}$ :

$$\begin{aligned}
[D_1, D_2](fA) =& D_1(D_2(fA))D_2(D_1(fA)) \\
=& D_1(fD_2(A) + \widehat{D_2}(f)A)D_2(fD_1(A) + \widehat{D_1}(f)A) \\
=& fD_1(D_2(A)) + \widehat{D_1}(f)D_2(A) + \widehat{D_2}(f)D_1(A) + \widehat{D_1}((\widehat{D_2}(f))A \\
& fD_2(D_1(A))\widehat{D_2}(f)D_1(A) + \widehat{D_1}(f)D_2(A) + \widehat{D_2}((\widehat{D_1}(f))A \\
=& f[D_1, D_2](A) + [\widehat{D_1}, \widehat{D_2}](f)A.
\end{aligned}$$

Esto nos dice que $[D_1, D_2]$ es quasi-derivación, pues lo anterior es equivalente a

$$\mu_{[\widehat{D_1}, \widehat{D_2}](f)}(A) = [D_1, D_2] \circ \mu_f(A) - \mu_f \circ [D_1, D_2](A) = [[D_1, D_2], \mu_f](A),$$

y que, además,

$$[\widehat{D_1, D_2}](f)A = [\widehat{D_1}, \widehat{D_2}](f)A \quad \forall A \in \mathcal{F} \text{ y } \forall f \in \mathcal{A}.$$

□

El siguiente resultado se deduce de un simple cálculo.

**Lema 3.** *Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-módulo cualquiera y $(End_{\mathcal{R}}\mathcal{M}, [\ ,\ ])$ su $\mathcal{R}$-módulo de endomorfismos que es un álgebra con respecto a la composición. Entonces, $[\ ,\ ]$ no sólo es un corchete de Lie, sino que también es un corchete de Poisson:*

$$[E, F \circ G] = [E, F] \circ G + F \circ [E, G] \ , \ \ \forall E, F, G \in End_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}).$$

**Proposición 11.** *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra conmutativa, el conmutador de endomorfismos restringido al $\mathcal{A}$-módulo $QDer_{\mathcal{R}}(\mathcal{F})$ satisface:*

$$[D_1, f.D_2] = f.[D_1, D_2] + \widehat{D_1}(f).D_2, \quad \forall D_1, D_2 \in QDer_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}), \ \forall f \in \mathcal{A}$$

*Demostración.* Como consecuencia del lema y de la definición de $f.D$ :

$$\begin{aligned}
[D_1, fD_2] =& [D_1, \mu_f \circ D_2] \\
=& [D_1, \mu_f] \circ D_2 + \mu_f \circ [D_1, D_2] \\
=& \mu_{\widehat{D_1}(f)}(D_2) + \mu_f \circ [D_1, D_2] \\
=& (\widehat{D_1}(f))D_2 + f[D_1, D_2]
\end{aligned}$$

□

Supongamos que $\mathcal{F}$ tiene además definido un corchete $[\![\ ,\ ]\!] : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ que le da una estructura de álgebra de Lie. Hasta ahora, el corchete que había aparecido era el conmutador de endomorfismos, por eso usaremos la notación $[\![\ ,\ ]\!]$, para distinguirlos. Denotemos por $ad_A$ el operador $ad_A \in End_{\mathcal{R}}(\mathcal{F})$ adjunto de $A$ por la izquierda respecto de $[\![\ ,\ ]\!]$.

**Definición 30.** *El par $(\mathcal{F}, [\![\ ,\ ]\!])$ se dice que es un quasi-algebroide de Lie si $ad_A$ es una quasi-derivación para cualquier $A \in \mathcal{F}$, i.e.*

$$ad_A \in QDer_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}).$$

*Esto equivale a que dados $A \in \mathcal{F}$ y $f \in \mathcal{A}$,*

$$[\![A, fB]\!] - f[\![A, B]\!] = [ad_A, \mu_f](B) = \mu_{\widehat{ad_A}(f)}(B) = \widehat{ad_A}(f)B \quad \forall B \in \mathcal{F}. \tag{4.3}$$

**Definición 31.** *A la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} q_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} & \longrightarrow & Der_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}) \\ A & \longrightarrow & q_{\mathcal{F}}(A) := \widehat{ad_A} \end{array}$$

*se la denomina aplicación ancla (del quasi-algebroide de Lie). Si la aplicación ancla $q_{\mathcal{F}}$ es tensorial (esto es, $\mathcal{A}$-lineal o, equivalentemente $[q_{\mathcal{F}}, \mu_f] = 0 \ \forall f \in \mathcal{A}$), se dice que $(\mathcal{F}, [\![\ ,\ ]\!], q_{\mathcal{F}})$ es un algebroide de Lie sobre $\mathcal{F}$.*

**Proposición 12.** *Si $(\mathcal{F}, [\![\ ,\ ]\!])$ es un quasi-algebroide de Lie, entonces*

$$[\![fA, gB]\!] = fg[\![A, B]\!] + ((q_{\mathcal{F}}(fA))(g))B - g(q_{\mathcal{F}}(B)(f))A.$$

*Demostración.* Primero notemos que, (4.3) nos dice que, $[\![A, fB]\!] - f[\![A, B]\!] = (q_{\mathcal{F}}(A)(f))B$, por tanto:

$$\begin{aligned} [\![fA, gB]\!] &= g[\![fA, B]\!] + (q_{\mathcal{F}}(fA)(g))B \\ &= (q_{\mathcal{F}}(fA)(g))B - g[\![B, fA]\!] \\ &= (q_{\mathcal{F}}(fA)(g))B - g(f[\![B, A]\!] + (q_{\mathcal{F}}(B)(f))A) \\ &= gf[\![A, B]\!] + (q_{\mathcal{F}}(fA)(g))B - g(q_{\mathcal{F}}(B)(f))A. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 14.** *Consideremos $M$ una variedad diferencial y $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado vectorial sobre ella. Sea $\mathcal{F} := \Gamma(E)$ el espacio vectorial y $C^\infty(M)$-módulo de las secciones de $E$ (esto es, $\mathcal{A} := C^\infty(M)$ y $\mathcal{R} = \mathbb{R}$).*
*Entonces, un algebroide de Lie sobre $\Gamma(E)$ consiste en un corchete de Lie $[\![\ ,\ ]\!]$ en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\Gamma(E)$ junto con una aplicación ancla $q_E : \Gamma(E) \longrightarrow DerC^\infty(M) \cong \mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$, de manera que*

$$[\![A, fB]\!] = f[\![A, B]\!] + (q_E A)(f)B$$

*con $q_E A \in \mathfrak{X}(M)$. Además, por ser algebroide de Lie, $q_E$ es $C^\infty(M)$-lineal, esto es, $q_E(fA) = fq_E(A) \ \forall f \in C^\infty(M)$, $A \in \Gamma(E)$ y esta propiedad es consistente*

*con la proposición anterior.*
*En este ejemplo, el que* $[\![\, ,\, ]\!]$ *sea un corchete de Lie en* $\Gamma(E)$ *significa que*

$$[ad_A, ad_B] = ad_{[\![A,B]\!]}\,, \quad \forall A, B \in \Gamma(E).$$

*Para comprobarlo, sea* $C \in \Gamma(E)$, *y evaluemos*

$$\begin{aligned}
[ad_A, ad_B](C) &= ad_A(ad_B(C)) - ad_B(ad_A(C)) \\
&= [\![A, [\![B, C]\!]\,]\!] - [\![B, [\![A, C]\!]\,]\!] \\
&= [\![A, [\![B, C]\!]\,]\!] + [\![B, [\![C, A]\!]\,]\!] \\
&= -[\![C, [\![A, B]\!]\,]\!] \\
&= [\![\,[\![A, B]\!], C]\!] \\
&= ad_{[\![A,B]\!]}(C),
\end{aligned}$$

*y como esto es válido para toda* $C \in \Gamma(E)$, *se tiene el resultado deseado.*
*El teorema 2 dice entonces que (si* $[\ ,\ ]_M$ *es el corchete de Lie de campos vectoriales en* $M$*):*

$$[q_E A, q_E B]_M = [\widehat{ad}_A, \widehat{ad}_B] = \widehat{[ad_A, ad_B]} = \widehat{ad_{[\![A,B]\!]}} = q_E[\![A, B]\!] \quad \forall A, B \in \Gamma(E).$$

*En otras palabras: la aplicación ancla es un morfismo de* $\mathbb{R}-$*álgebras de Lie. Vemos así como se pueden generalizar todas las características de la teoría de algebroides de Lie dentro de este contexto algebraico.*

## 4.2. Álgebra de Gerstenhaber asociada a un algebroide de Lie

Supongamos que tenemos un algebroide de Lie $(E, [\ ,\ ]_E, q_E)$. Consideremos las secciones del fibrado exterior $\Gamma\Lambda E$ de la misma forma que se construyen $\Omega(M) = \Gamma\Lambda T^*M$ ó $\Gamma\Lambda TM$. Un elemento de $A \in \Gamma\Lambda E = \oplus_{p\in\mathbb{Z}}\Gamma\Lambda^p E$ se escribirá como combinación $C^\infty(M)$-lineal del tipo $A = A_1 \wedge \ldots \wedge A_p$, donde $A_i \in \Gamma E$, $1 \leq i \leq p$. Tenemos el corchete del algebroide $[\ ,\ ] : \Gamma E \times \Gamma E \to \Gamma E$ y el ancla $q_E : \Gamma E \to \Gamma TM$, con esto construimos una estructura de álgebra de Gerstenhaber sobre $\Gamma\Lambda E$ como sigue: copiando la definición del corchete de Schouten Nijenhuis y modificándolo con el ancla y el corchete en $\Gamma E$, tenemos, si $A \in \Gamma\Lambda^p E$ $(A = A_1 \wedge \ldots \wedge A_p)$, $B \in \Gamma\Lambda^q E$ $(B = B_1 \wedge \ldots \wedge B_q)$,

1. $[A, B]_{SN} :=$

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} (-1)^{p-i+j-1} A_1 \wedge \ldots \wedge \hat{A}_i \wedge \ldots \wedge A_p \wedge [A_i, B_j]_E \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge \hat{B}_j \wedge \ldots \wedge B_q,$$

2. si $f \in C^\infty(M)$,

$$[f, A]_{SN} := \sum_{1\leq i\leq p} (q_E A_i)(f)(-1)^{i-1} A_1 \wedge \ldots \wedge \hat{A}_i \wedge \ldots \wedge A_p.$$

Se tiene que $(\Gamma\Lambda E, [A, B]_{SN})$ es un álgebra de Gerstenhaber. A la estructura $(\Gamma\Lambda E, [A, B]_{SN})$ se le llama **álgebra de Gerstenhaber asociada al algebroide de Lie**.

Esto será escencial para probar la equivalencia entre algebroides y supervariedades de un cierto tipo que se hará en el capítulo siguiente

# Capítulo 5

# Supervariedades de Poisson y algebroides de Lie

## 5.1. Supervariedades

Recordemos del segundo capítulo que un haz sobre un espacio topológico $X$ es un prehaz $\mathcal{F}$ sobre $X$ verificando los siguientes axiomas para cualquier abierto $U$ y cualquier cubierta $\{U_i\}_{i\in I}$ de $U$

1. Si dos secciones $s, \tilde{s} \in \mathcal{F}(U)$ coinciden cuando restringidas a todos lo $U_i$'s, son iguales.

2. Dadas las secciones $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ que coinciden en la intersección, existe una sección $s \in \mathcal{F}(U)$ cuya restricción a los $U_i$ es igual a las $s_i$.

Básicamente, una supervariedad es un espacio topológico con un haz de superálgebras que contiene un sector isomorfo a las funciones diferenciables sobre una variedad.

**Definición 32.** *Una variedad graduada (o supervariedad) de dimensión $(m|n)$ y base $(M, C^\infty(M))$ esta dada por una variedad diferencial $M$ real, con dimensión $m$, y un haz $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$-álgebras conmutativas graduadas (el haz estructural) tal que*

1. *Existe una secuencia exacta de haces*

$$0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} C^\infty(M) \to 0$$

   *donde $\mathcal{N}$ es el haz de nilpotentes de $\mathcal{A}$ y $\sim$ es un morfismo sobreyectivo de haces de $\mathbb{R}$-álgebras conmutativas graduadas, también llamado morfismo estructural.*

2. *$\mathcal{N}/\mathcal{N}^2$ es un módulo localmente libre con rango $n$ sobre $C^\infty(M) = \mathcal{A}/\mathcal{N}$, y $\mathcal{A}$ es localmente isomorfo, como un haz de $\mathbb{R}$-álgebras conmutativas graduadas, al fibrado exterior $\bigwedge_{C^\infty(M)}(\mathcal{N}/\mathcal{N}^2)$.*

Por la definición de supervariedad, sabemos que si $U \subset X$ abierto

$$\mathcal{A}(U) \simeq \bigwedge_{C^\infty(U)} (\mathcal{N}/\mathcal{N}^2).$$

donde $\mathcal{N}/\mathcal{N}^2$ es un módulo localmente libre con rango $n$ sobre $C^\infty(M) = \mathcal{A}/\mathcal{N}$, pero por la equivalencia entre la categoría de fibrados vectoriales de rango $n$ sobre $M$ y la de módulos localmente libres con rango $n$ sobre $C^\infty(M)$ que se vio en el capítulo 2, existe $E \to M$ fibrado vectorial de rango $n$ sobre $M$ tal que localmente se tiene

$$\mathcal{A}(U) \simeq C^\infty(U) \otimes \Gamma_U \wedge E$$

Existe un teorema que nos dice que esto no sólo ocurre localmente, sino globalmente, este teorema es el siguiente:

**Teorema 4** (Batchelor). *Si $(M, \mathcal{A})$ es una supervariedad de dimensión $(m|n)$, existe $E$ fibrado vectorial de rango $n$ sobre $M$ tal que*

$$\mathcal{A} \simeq \Gamma \wedge E.$$

Este resultado será fundamental en lo que sigue.

**Definición 33.** *Un entorno de escisión de una supervariedad $(M, \mathcal{A})$ es un abierto $U \subset M$ tal que $\Gamma_U E$ es un fibrado trivial y $\mathcal{A}(U) \simeq \bigwedge_{C^\infty(U)} (\mathcal{N}/\mathcal{N}^2)$. Todo elemento de $\mathcal{A}(U)$ se le denomina* ***superfunción***.

También tenemos una sección $\sigma : C^\infty(U) \hookrightarrow \mathcal{A}(U)$ para el morfismo estructural.

**Definición 34.** *Si $U \subset M$ es un entorno de escisión, una familia $\{x^i, x^{-j}\}_{1 \leq i \leq m}^{1 \leq j \leq n}$ de superfunciones ($|x^i| = 0$, $|x^{-j}| = 1$) se le denomina* ***sistema coordenado graduado*** *o (sistema de supercoordenadas) si*

1. *$x^i = \sigma(\tilde{x}^i)$ $(1 \leq i \leq m)$, donde $\{\tilde{x}^1, \ldots \tilde{x}^m\}$ es un sistema coordenado en $U$.*

2. *$\{x^{-1}, \ldots x^{-n}\}$ es una base de $\Gamma_U E$*

Tenemos que una superfunción puede ser expresada en la forma

$$f = f_0 + \sum_{i=1}^{n} f_{-j} x^{-j} + \sum_{\substack{j=1 \\ i<j}}^{n} f_{-i} f_{-j} x^{-i} x^{-j} + \cdots$$

donde $f_k \in C^\infty(U)$.

## 5.2. Supervariedades de Poisson y algebroides de Lie

**Definición 35.** *Una supervariedad $(M, \Gamma\wedge E)$ con una estructura de poisson graduada sobre el haz estructural se la denomina **supervariedad de Poisson**.*

En esta sección se probará que un algebroide de Lie es equivalente a una supervariedad $(M, \Gamma\wedge E)$ con una derivación de grado uno con cuadrado cero en $\Gamma\wedge E^*$). La prueba se basa en la estructura de supervariedad de Poisson que determina el álgebra de Gerstenhaber asociada al algebroide de Lie.

Empecemos mostrando lo siguiente:

**Teorema 5.** *Toda supervariedad $(M, \Gamma\wedge E)$, con una derivación $d_E$ de grado uno en $\Gamma\wedge E^*$ tal que $d_E^2 = 0$, nos define un algebroide.*

*Demostración.* Sea $(M, \Gamma\wedge E)$ una supervariedad, con $E \xrightarrow{\pi} M$ fibrado vectorial. Definamos el siguiente corchete en $\Gamma E$:

$$w([A, B]_E) := d_E(w(B))(A) - d_E(w(A))(B) - d_E w(A, B)$$

con $A, B \in \Gamma E$ y $w \in \Gamma E^*$.
Probemos que $[\ ,\ ]_E$ es un corchete de Lie.

Sean $A, B, C \in \Gamma E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $w \in \Gamma E^*$.

1. Antisimetría:

$$\begin{aligned} w([A, B]_E) &= d_E(w(B))(A) - d_E(w(A))(B) - d_E w(A, B) \\ &= -(d_E(w(A))(B) - d_E(w(B))(A) + d_E w(B, A)) \\ &= -w([B, A]_E) \end{aligned}$$

2. Bilinealidad:

$$\begin{aligned} w([\alpha A + \beta C, B]_E) =& d_E(w(B))(\alpha A + \beta C) - d_E(w(\alpha A + \beta C))(B) \\ & - d_E w(\alpha A + \beta C, B). \end{aligned}$$

Por linealidad de $d_E(w(B))$, $d_E$, $w$ y $d_E w$ se tiene

$$\begin{aligned} w([\alpha A + \beta C, B]_E) =& \alpha d_E(w(B))(A) + \beta d_E(w(B))(C) - \alpha d_E(w(A))(B) \\ & - \beta d_E(w(C))(B) - \alpha d_E w(A, B) - \beta d_E w(C, B). \end{aligned}$$

Sacando de factor común los escalares

$$\begin{aligned} =& \alpha(d_E(w(B))(A) - d_E(w(A))(B) - d_E w(A, B)) \\ & + \beta(d_E(w(B))(C) - d_E(w(C))(B) - d_E w(C, B)) \\ =& \alpha w([A, B]_E) + \beta w([C, B]_E). \end{aligned}$$

3. Identidad de Jacobi.

$$\begin{aligned} w([[A,B],C]_E) =& d_E(w(C))([A,B]) - d_E(w([A,B]))(C) \\ & - d_E w([A,B],C). \end{aligned}$$

Desarrollando estos términos

$$\begin{aligned} w([[A,B],C]_E) =& d_E(d_E(w(C))(B))(A) - d_E(d_E(w(C))(A))(B) \\ & - d_E(d_E(w(C)))(A,B) - d_E(d_E(w(B))(A))(C) \\ & + d_E(d_E(w(A))(B))(C) + d_E(d_E w(A,B)))(C) \\ & - d_E w([A,B],C), \end{aligned}$$

pero ya que

$$d_E(d_E(w(C)))(A,B) = d_E^2(w(C))(A,B) = 0,$$

entonces

$$\begin{aligned} w([[A,B],C]_E) =& d_E(d_E(w(C))(B))(A) - d_E(d_E(w(C))(A))(B) \\ & - d_E(d_E(w(B))(A))(C) + d_E(d_E(w(A))(B))(C) \\ & + d_E(d_E w(A,B)))(C) - d_E w([A,B],C). \end{aligned}$$

Análogamente obtenemos:

$$\begin{aligned} w([[B,C],A]_E) =& d_E(d_E(w(A))(C))(B) - d_E(d_E(w(A))(B))(C) \\ & - d_E(d_E(w(C))(B))(A) + d_E(d_E(w(B))(C))(A) \\ & + d_E(d_E w(B,C)))(A) - d_E w([B,C],A). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w([[A,C],B]_E) =& d_E(d_E(w(B))(C))(A) - d_E(d_E(w(B))(A))(C) \\ & - d_E(d_E(w(C))(A))(B) + d_E(d_E(w(A))(C))(B) \\ & + d_E(d_E w(A,C)))(B) - d_E w([A,C],B). \end{aligned}$$

Ahora

$$w([[A,B],C]_E) + w([[B,C],A]_E) - w([[A,C],B]_E) =$$

$$\begin{aligned} =& d_E w([A,C],B) - d_E w([B,C],A) - d_E w([A,B],C) \\ & - d_E(d_E w(A,C)))(B) + d_E(d_E w(B,C)))(A) + d_E(d_E w(A,B)))(C) \end{aligned}$$

Expresemos $d_E w = \sum_{i<j} f_{ij} m_i \wedge m_j$, entonces:

$$
\begin{aligned}
d_E w([A,B],C) =& (\sum_{i<j} f_{ij} m_i \wedge m_j)([A,B],C) \\
=& \sum_{i<j} f_{ij}(m_i \wedge m_j)([A,B],C) \\
=& \sum_{i<j} f_{ij}(m_i([A,B])m_j(C) - m_i(C)m_j([A,B])) \\
=& \sum_{i<j} f_{ij}\,(m_j(C)d_E(m_i(B))(A) - m_j(C)d_E(m_i(A))(B) \\
& - m_j(C)d_E m_i(A,B) - m_i(C)d_E(m_j(B))(A) \\
& + m_i(C)d_E(m_j(A))(B) + m_i(C)d_E m_j(A,B))\,.
\end{aligned}
$$

Análogamente se obtiene

$$
\begin{aligned}
d_E w([B,C],A) =& \sum_{i<j} f_{ij}(m_j(A)d_E(m_i(C))(B) - m_j(A)d_E(m_i(B))(C) \\
& - m_j(A)d_E m_i(B,C) - m_i(A)d_E(m_j(C))(B) \\
& + m_i(A)d_E(m_j(B))(C) + m_i(A)d_E m_j(B,C)),
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
d_E w([A,C],B) =& \sum_{i<j} f_{ij}(m_j(B)d_E(m_i(C))(A) - m_j(B)d_E(m_i(A))(C) \\
& - m_j(B)d_E m_i(A,C) - m_i(B)d_E(m_j(C))(A) \\
& + m_i(B)d_E(m_j(A))(C) + m_i(B)d_E m_j(A,C)).
\end{aligned}
$$

También tenemos:

$$
\begin{aligned}
d_E(d_E w(A,B)))(C) =& d_E\left(\left(\sum_{i<j} f_{ij} m_i \wedge m_j\right)(A,B)\right)(C) \\
=& d_E\left(\sum_{i<j} f_{ij}(m_i(B)m_j(A) - m_i(A)m_j(B))\right)(C)
\end{aligned}
$$

Por ser $d_E$ derivación y lineal

$$
\begin{aligned}
d_E(d_E w(A,B)))(C) =& \sum_{i<j} f_{ij}(d_E(m_i(B)m_j(A) - m_i(A)m_j(B)))(C) \\
& + \sum_{i<j} d_E f_{ij}(C)(m_i(B)m_j(A) - m_i(A)m_j(B))
\end{aligned}
$$

Otra vez, por ser $d_E$ derivación y lineal
$d_E(d_E w(A, B)))(C) =$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i<j} f_{ij}(d_E(m_i(B))(C)m_j(A) + m_i(B)d_E(m_j(A))(C)\\
&\quad - d_E(m_i(A))(C)m_j(B) - m_i(A)d_E(m_j(B))(C))\\
&\quad + \sum_{i<j}(d_E f_{ij}(C)m_i(B)m_j(A) - d_E f_{ij}(C)m_i(A)m_j(B)).
\end{aligned}
$$

Análogamente se obtiene
$d_E(d_E w(B, C)))(A) =$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i<j} f_{ij}(d_E(m_i(C))(A)m_j(B) + m_i(C)d_E(m_j(B))(A)\\
&\quad - d_E(m_i(B))(A)m_j(C) - m_i(B)d_E(m_j(C))(A))\\
&\quad + \sum_{i<j}(d_E f_{ij}(A)m_i(C)m_j(B) - d_E f_{ij}(A)m_i(B)m_j(C)),
\end{aligned}
$$

y
$d_E(d_E w(A, C)))(B) =$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i<j} f_{ij}(d_E(m_i(C))(B)m_j(A) + m_i(C)d_E(m_j(A))(B)\\
&\quad - d_E(m_i(A))(B)m_j(C) - m_i(A)d_E(m_j(C))(B))\\
&\quad + \sum_{i<j}(d_E f_{ij}(B)m_i(C)m_j(A) - d_E f_{ij}(B)m_i(A)m_j(C)).
\end{aligned}
$$

Por tanto
$w([[A, B], C]_E) + w([[B, C], A]_E) - w([[A, C], B]_E) =$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i<j} f_{ij}((d_E m_i(A, B)m_j(C) - d_E m_i(A, C)m_j(B)\\
&\quad + d_E m_i(B, C))m_j(A) - (m_i(A)d_E m_j(B, C)\\
&\quad - m_i(B)d_E m_j(A, C) + m_i(C)d_E m_j(A, B)))\\
&\quad + \sum_{i<j}(d_E f_{ij}(C)m_i(B)m_j(A) - d_E f_{ij}(C)m_i(A)m_j(B)\\
&\quad + d_E f_{ij}(A)m_i(C)m_j(B) - d_E f_{ij}(A)m_i(B)m_j(C)\\
&\quad - d_E f_{ij}(B)m_i(C)m_j(A) + d_E f_{ij}(B)m_i(A)m_j(C)).
\end{aligned}
$$

Por la identidad de Leibniz

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i<j} f_{ij}((d_E m_i \wedge m_j)(A, B, C) - (m_i \wedge d_e m_j)(A, B, C)) \\
&\quad + \sum_{i<j} (d_E f_{ij} \wedge m_i \wedge m_j)(A, B, C) \\
&= \sum_{i<j} (f_{ij} d_E(m_i \wedge m_j) + d_E f_{ij} \wedge m_i \wedge m_j))(A, B, C)) \\
&= \sum_{i<j} (d_E(f_{ij} m_i \wedge m_j)(A, B, C)) \\
&= d_E(\sum_{i<j} f_{ij} m_i \wedge m_j)(A, B, C) \\
&= d_E(d_E w)(A, B, C) \\
&= d_E^2 w(A, B, C)) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Con esto se concluye la prueba de la identidad de Jacobi.

Ahora, nuestra aplicación ancla se define como:

$$(q_E(A))(f) := (d_E f)(A). \tag{5.1}$$

Veamos que cumple la propiedad de Leibniz.

$$
\begin{aligned}
w([A, fB]_E) &= d_E(w(fB))(A) - d_E(w(A))(fB) - d_E w(A, fB) \\
&= d_E(fw(B))(A) - f d_E(w(A))(B) - f d_E w(A, B) \\
&= (d_E(f)(A))w(B) + f d_E(w(B))(A) \\
&\quad - f d_E(w(A))(B) - f d_E w(A, B) \\
&= ((q_E(A))(f))B(w) + f w([A, B]_E)
\end{aligned}
$$

Ya que $w$ es arbitrario tenemos que

$$[A, fB]_E = (q_E(A))(f)B + f[A, B]_E.$$

□

Nótese que, en particular, si aplicamos la definición del ancla (5.1) al caso en que $f = w(B)$, donde $w \in \Gamma E^*$ y $B \in \Gamma E$ entonces:

$$d(w(B))(A) = (q_E(A))(w(B)). \tag{5.2}$$

**Teorema 6.** *Todo algebroide nos define una supervariedad con una derivación $d$ de grado uno en $\Gamma \wedge E^*$ tal que $d^2 = 0$*

*Demostración.* Sea $(E, [\,,\,]_E, q_E)$ un algebroide de Lie, construimos el álgebra de Gerstenhaber $\Gamma\Lambda E$, probemos que $(M, \Gamma\Lambda E)$ es una supervariedad. Para eso observemos que el siguiente prehaz es un haz:

$$U \mapsto \Gamma_U \Lambda E,$$

porque es el prehaz canónico asociado al haz fibrado exterior $\Lambda E$. Veamos ahora que $(M, \Gamma\Lambda E)$ cumple las propiedades de supervariedad. Observemos que en este caso particular,

$$\mathcal{N} = \Gamma\Lambda E - \Gamma\Lambda^0 E = \Gamma\Lambda E - C^\infty(M)$$

y

$$\mathcal{N}^2 = \mathcal{N} - \Gamma E,$$

mientras que

$$\mathcal{A} = \Gamma\Lambda E$$

Por tanto:

1. $\mathcal{A}/\mathcal{N} = C^\infty(M)$.
2. $\mathcal{N}/\mathcal{N}^2 = \mathcal{N}/(\mathcal{N} - \Gamma E) \quad \Gamma E$

De aquí: $\bigwedge_{C^\infty(M)}(\mathcal{N}/\mathcal{N}^2) \simeq \Gamma\Lambda E = \mathcal{A}$. Por tanto, el espacio $(M, \Gamma\Lambda E)$ cumple las condiciones de la definición de supervariedad.

En esta supervariedad tenemos definida una diferencial en $\Gamma\Lambda E^*$ como sigue: Si $w \in \Gamma\Lambda^k E^*$, y si $X_1, \ldots, X_{k+1} \in \Gamma E$, entonces, se puede definir una $(k+1)$-forma, $dw \in \Gamma\Lambda^{k+1} E^*$ como aquella determinada por

$$\begin{aligned} dw(X_1, \ldots, X_{k+1}) - &\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1} q_E(X_i)(w(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{k+1})) \\ &+ \sum_{i<j}(-1)^{i+j} w([X_i, X_j]_E, X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{k+1}). \end{aligned}$$

Claramente, por ser $w$ multilineal y alternada, la aplicación

$$\begin{array}{rccc} dw & \Gamma E \times \overset{k+1}{\cdots} \times \Gamma E & \to & C^\infty(M) \\ & (X_1, \ldots, X_{k+1}) & \mapsto & dw(X_1, \ldots, X_{k+1}) \end{array}$$

es multilineal y alternada.
Ahora, se tienen las siguientes propiedades sobre $d$:

1. $dw$ es $C^\infty(M)$-multilineal.
   Sean $X_1, \ldots, X_{k+1} \in \Gamma E$ y $f \in C^\infty(M)$.

$$
\begin{aligned}
dw(fX_1,\ldots,X_{k+1}) = &\\
=&q_E(fX_1)w(X_2,\ldots,X_{k+1})\\
&+\sum_{i=2}^{k+1}(-1)^{i+1}q_E(X_i)(fw(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{k+1}))\\
&+\sum_{1<j}(-1)^{1+j}w([fX_1,X_j]_E,X_2,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{k+1})\\
&+\sum_{1<i<j}(-1)^{i+j}w([X_i,X_j]_E,fX_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{k+1}).
\end{aligned}
$$

Por ser $q_E(X_i)$ una derivación sobre $C^\infty(M)$, y por la propiedad de Leibniz del algebroide tenemos

$$
\begin{aligned}
dw(fX_1,\ldots,X_{k+1}) = &\\
=&q_E(fX_1)w(X_2,\ldots,X_{k+1})\\
&+\sum_{i=2}^{k+1}(-1)^{i+1}((q_E(X_i)f)w(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{k+1})\\
&+fq_E(X_i)w(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{k+1}))\\
&+\sum_{1<j}(-1)^{1+j}(w(f[X_1,X_j]_E,X_2,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{k+1})\\
&-w((q_E(X_j)f)X_1,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{k+1}))\\
&+\sum_{1<i<j}(-1)^{i+j}w([X_i,X_j]_E,fX_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{k+1}).
\end{aligned}
$$

Por ser $w$ $C^\infty(M)$-multilineal,

$$
\begin{aligned}
=&fq_E(X_1)(w(X_2,\ldots,X_{k+1})\\
&+\sum_{i=2}^{k+1}(-1)^{i+1}((q_E(X_i)f)w(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{k+1})\\
&+fq_E(X_i)w(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{k+1}))\\
&+\sum_{1<j}(-1)^{1+j}(fw([X_1,X_j]_E,X_2,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{k+1})\\
&-(q_E(X_j)f)w(X_1,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{k+1}))\\
&+\sum_{1<i<j}(-1)^{i+j}fw([X_i,X_j]_E,X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{k+1})\\
=&fdw(X_1,\ldots,X_{k+1}).
\end{aligned}
$$

Por tanto, $dw$ es $C^\infty(M)$-multilineal.

2 Es una derivación de grado 1, es decir $d(w \wedge \tau) = dw \wedge \tau + (-1)^k w \wedge d\tau$.
Sean $w \in \Gamma\Lambda^k E^*$ y $z \in \Gamma\Lambda^r E^*$, consideremos la siguiente notación.
$X_{1,k} := X_1, \ldots, X_k$,
$X_{\sigma(1,k)} := X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(k)}$,
$X^{i}_{\sigma(1,k)} := X_{\sigma(1)}, \ldots, \hat{X}_{\sigma(i)}, \ldots, X_{\sigma(k)}$,
$X^{ij}_{\sigma(1,k)} := X_{\sigma(1)}, \ldots, \hat{X}_{\sigma(i)}, \ldots, \hat{X}_{\sigma(j)}, \ldots, X_{\sigma(k)}$,
$X_{\sigma(r,s)} := X_{\sigma(r)}, \ldots, X_{\sigma(s)}$, con $r < s$
$\hat{X}^{u}_{\sigma(r,s)} := X_{\sigma(r)}, \ldots, \hat{X}_{\sigma(r+u)}, \ldots, X_{\sigma(s)}$ y
$\hat{X}^{uv}_{\sigma(r,s)} := X_{\sigma(r)}, \ldots, \hat{X}_{\sigma(r+u)}, \ldots, \hat{X}_{\sigma(r+v)}, \ldots, X_{\sigma(s)}$, con $u \leq v$

$$(dw \wedge \tau + (-1)^k w \wedge dz)(X_{1,k+r+1}) =$$

$$=(dw \wedge z)(X_{1,k+r+1}) + (-1)^k (w \wedge dz)(X_{1,k+r+1}).$$

Usando la definición de producto exterior,

$$= \sum_{\sigma \in B_{k+1,r}} sgn(\sigma) dw(X_{\sigma(1,k+1)}) z(X_{\sigma(k+2,k+r+1)})$$
$$+ (-1)^k \sum_{\sigma \in B_{k,r+1}} sgn(\sigma) w(X_{\sigma(1,k)}) dz(X_{\sigma(k+1,k+r+1)}),$$

donde $B_{a,b}$ denota el conjunto de permutaciones de barajar de tipo $(a,b)$ en $\Sigma_{a+b}$ (conjunto de permutaciones de $a+b$ elementos).
Por definición de $dw$ y $dz$

$$= \sum_{\sigma \in B_{k+1,r}} sgn(\sigma) \left( \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} q_E(X_{\sigma(i)})(w(\hat{X}^{i}_{\sigma(1,k+1)})) + \right.$$
$$\left. + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} w([X_{\sigma(i)}, X_{\sigma(j)}]_E, \hat{X}^{ij}_{\sigma(1,k+1)}) \right) \cdot z(\hat{X}_{\sigma(k+2,k+r+1)})$$
$$+ (-1)^k \sum_{\sigma \in B_{k,r+1}} sgn(\sigma) w(\hat{X}_{\sigma(1,k)})$$
$$\left( \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} q_E(X_{\sigma(k+i)})(z(\hat{X}^{i}_{\sigma(k+1,k+r+1)})) + \right.$$
$$\left. + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} z([X_{\sigma(k+i)}, X_{\sigma(k+j)}]_E, \hat{X}^{ij}_{\sigma(k+1,k+r+1)}) \right)$$

Cambiando los sumandos

$$
\begin{aligned}
=&\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}\left[\sum_{\sigma\in B_{k+1,r}} sgn(\sigma)q_E(X_{\sigma(i)})(w(\hat{X}^{i}_{\sigma(1,k+1)}))z(\hat{X}_{\sigma(k+2,k+r+1)})\right.\\
&\left.+(-1)^k\sum_{\sigma\in B_{k,r+1}} w(X_{\sigma(1,k)})q_E(X_{\sigma(k+i)})(z(\hat{X}^{i}_{\sigma(k+1,k+r+1)}))\right]\\
&+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\left[\sum_{\sigma\in B_{k+1,r}} sgn(\sigma)\, w([X_{\sigma(i)},X_{\sigma(j)}]_E,\hat{X}^{ij}_{\sigma(1,k+1)})z(\hat{X}_{\sigma(k+2,k+r+1)})\right.\\
&\left.+(-1)^k\sum_{\sigma\in B_{k,r+1}} w(X_{\sigma(1,k)})z([X_{\sigma(k+i)},X_{\sigma(k+j)}]_E,\hat{X}^{ij}_{\sigma(k+1,k+r+1)})\right]\\
=&\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}q_E(X_{\sigma(i)})(w\wedge z)(\hat{X}^{i}_{\sigma(1,k+r+1)})\\
&+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}(w\wedge z)([X_i,X_j]_E,\hat{X}^{ij}_{\sigma(1,k+r+1)})\\
=&d(w\wedge z)(X_{\sigma(1,k+r+1)}).
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$d(w\wedge\tau)=dw\wedge\tau+(-1)^k w\wedge d\tau.$$

3. $d^2=0$.
Para funciones se tiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
d(df)(A,B)=&q_E(A)((df)(B))-q_E(B)((df)(A))-df([A,B])\\
=&q_E(A)(q_E(B)(f))-q_E(B)(q_E(A))-df([A,B])\\
=&df([A,B])-df([A,B])\\
=&0.
\end{aligned}
$$

Notemos que si $w=w_1\wedge\ldots\wedge w_k$

$$dw=dw_1\wedge(w_2\wedge\ldots\wedge w_k)-w_1\wedge d(w_2\wedge\ldots\wedge w_k),$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
d(dw)=&d^2w_1\wedge(w_2\wedge\ldots\wedge w_k)+w_1\wedge d(w_2\wedge\ldots\wedge w_k)\\
&-dw_1\wedge d(w_2\wedge\ldots\wedge w_k)+w_1\wedge d^2(w_2\wedge\ldots\wedge w_k)\\
=&d^2w_1\wedge w_2+w_1\wedge d^2w_2.
\end{aligned}
$$

por lo tanto es suficiente probar que $d^2w=0$ para $w\in\Gamma E^*$.

$$
\begin{aligned}
d(dw)(X_1, X_2, X_3) =& q_E(X_1)(dw(X_2, X_3)) - q_E(X_2)(dw(X_1, X_3)) \\
& + q_E(X_3)(dw(X_1, X_2)) - dw([X_1, X_2]_E, X_3) \\
& - dw([X_2, X_3]_E, X_1) + dw([X_1, X_3]_E, X_1) \\
=& q_E(X_1)(q_E(X_2)(w(X_3)) - q_E(X_1)(q_E(X_3)(w(X_2)) \\
& - q_E(X_1)(w([X_2, X_3])) - q_E(X_2)(q_E(X_1)(w(X_3)) \\
& + q_E(X_2)(q_E(X_1)(w(X_1)) + q_E(X_2)(w([X_1, X_3])) \\
& + q_E(X_3)(q_E(X_1)(w(X_2)) - q_E(X_3)(q_E(X_2)(w(X_1)) \\
& - q_E(X_3)(w([X_1, X_2])) - [X_1, X_2](w(X_3)) \\
& + q_E(X_3)(w([X_1, X_2])) + w([[X_1, X_2], X_3]) \\
& - [X_2, X_3](w(X_1)) + q_E(X_1)(w([X_2, X_3])) \\
& + w([[X_2, X_3], X_1]) + [X_1, X_3](w(X_2)) \\
& - q_E(X_2)(w([X_1, X_3])) - w([[X_1, X_3], X_2]) \\
=& w([[X_1, X_2], X_3] + [[X_2, X_3], X_1] - [[X_1, X_3], X_2]) \\
=& 0.
\end{aligned}
$$

□

Si tenemos una supervariedad con una derivación $d_E$ de grado uno en $\Gamma\Lambda E^*$ tal que $d_E^2 = 0$ y le asignamos su algebroide de Lie $(E, q_E, M)$, y después obtenemos su supervariedad $(M, \Gamma\Lambda E)$ con su derivación $d$ de grado uno en $\Gamma\Lambda E^*$ tal que $d^2 = 0$, tenemos que ver si $d = d_E$.

Por construcción $dw(A, B) = d(w(B))(A) - d(w(A))(B) - w([A, B]_E)$ para $w \in \Gamma\Lambda E^*$ que es $d_E w(A, B) = (q_E(A))(w(B)) - (q_E(B))(w(A)) - w([A, B]_E)$, ya que $(q_E(A))(f) := (d_E f)(A)$ tenemos que

$$d_E w(A, B) = dw(A, B)$$

Ahora, supongamos que $dw = d_E w$ para $w \in \Gamma\Lambda^p E^*$ con $p \leq n - 1$, si $w = w_1 \wedge \ldots \wedge w_n$ y por ser derivación

$$d_E(w_1 \wedge \ldots \wedge w_n) = d_E w_1 \wedge (w_2 \wedge \ldots \wedge w_n) + (-1)^k w_1 \wedge d_E(w_2 \wedge \ldots \wedge w_n).$$

usando la hipótesis de inducción

$$d_E(w_1 \wedge \ldots \wedge w_n) = dw_1 \wedge (w_2 \wedge \ldots \wedge w_n) + (-1)^k w_1 \wedge d(w_2 \wedge \ldots \wedge w_n),$$

es decir

$$d_E(w_1 \wedge \ldots \wedge w_n) = d(w_1 \wedge \ldots \wedge w_n)$$

Por tanto regresamos a la misma supervariedad.

Ahora, si empezamos con un algebroide de Lie $(E, q_E, M)$ con un corchete en las secciones $[\ ,\ ]_E$, obtenemos su supervariedad con una derivación $d$ de grado uno en $\Gamma\Lambda E^*$ tal que $d_E^2 = 0$ mediante el procedimiento que hemos descrito, y luego construimos su algebroide $(E, p_E, M)$ con un corchete en las secciones $\{\ ,\ \}_E$.
Por construcción $(p_E(A))(f) := (df)(A)$, y también $(df)(A) = (q_E(A))(f)$. También se tiene

$$\{A, B\}_E(w) := d(w(B))(A) - d(w(A))(B) - dw(A, B),$$

y por la relación entre $d$ y $q_E$ dada en (5.2)

$$\{A, B\}_E(w) = (q_E(A))(w(B)) - (q_E(B)(w(A)) - dw(A, B),$$

pero esto es la definición de $[A, B]_E(w)$.

Por tanto, se tiene una equivalencia biyectiva entre algebroides y supervariedades con una derivación $d_E$ de grado uno en $\Gamma\Lambda E^*$ tal que $d_E^2 = 0$.

**Nota 8.** *La correspondencia anterior* no *se extiende a una equivalencia entre categorías. La razón es que el fibrado exterior $\Lambda E$ de un fibrado vectorial $E \xrightarrow{\pi} M$, de nuevo es un fibrado vectorial, y es bien conocido que hay más morfismos de supervariedades que morfismos entre los correspondientes fibrados vectoriales (y exteriores) dados por el teorema de Batchelor.*

Un ejemplo de la correspondencia es el siguiente:

**Ejemplo 15.** *Sea $(M, \{\ ,\ \})$ una variedad (ordinaria) de Poisson, con un bivector de Poisson $P \in \Lambda^2 TM$ no degenerado. Este bivector induce -através de su polaridad- un isomorfismo $\boldsymbol{P} : T^*M \to TM$. Con esto, se puede construir una estructura de algebroide de Lie en $T^*M = E$, donde $\boldsymbol{P} = q_E$ es la aplicación ancla. Para ello, basta con definir el corchete de Koszul-Schouten (ejemplo 13) en $\Gamma T^*M$ que son las 1-formas diferenciales. De hecho, como sabemos, este corchete se extiende a uno de Poisson graduado sobre todo el álgebra de Gerstenhaber del algebroide, que en este caso es $\Gamma\Lambda T^*M$ (el álgebra de Cartan de formas diferenciales sobre $M$). ¿Cuál es la supervariedad que corresponde a este algebroide? Claramente, es la supervariedad $(M, \Gamma\Lambda T^*M) \equiv (M, \Omega(M))$ (llamada de Koszul o de Cartan-Koszul). Observemos que esta supervariedad está dada en forma de Batchelor trivial.*
*La derivación de grado uno sobre el fibrado dual $\Gamma\Lambda TM$, $d_{\Gamma M}$, es la siguiente. Si $A \in \Gamma\Lambda^k TM$, y $X_1, \ldots, X_{k+1} \in \Gamma T^*M$*

$$\begin{aligned} dA(X_1, \ldots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \boldsymbol{P}(X_i)(A(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{k+1})) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} A([X_i, X_j]_{KS}, X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{k+1}). \end{aligned}$$

# Bibliografía


[1] C. Bartocci, U. Bruzzo, D. Hernández-Ruipérez: "The geometry of supermanifolds". Kluwer Academic, 1991.

[2] F. Berezin: "Introduction to superanalysis". Edited by A. A. Kirillov. D. Reidel Publishing Co. 1987.

[3] Y. Kosmannn-Schwarzbach: "From Poisson algebras to Gerstenhaber algebras". Ann. Inst. Fourier 46, 5 (1996), 1243-1274.

[4] B. Kostant: "Graded manifolds, graded Lie theory and prequantization". Lect. Notes in Math. 570 (1977), 170-306.

[5] J. L. Koszul: "Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie". En "Elie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui" Astérisque. Numéro hors serie, SCM (1985). 257-271

[6] J. Monterde. A. Sánchez-Valenzuela "Existence and uniqueness of solutions to superdifferential equations" J.Geom.Phys. 10 (1993). 315-343.

[7] J. Pradines: "Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables. Relations entre propriétés locales et globales". C. R. Acad. Sci. Paris. Série A 263 (1966), 907-910.

[8] A. Vaintrob: "Lie algebroids and homological vector fields", Uspekhi Mat Nauk. 52, 2 (1997), 161-162.

[9] A. Weinstein: "Poisson geometry" Diff Geom. Appl. 9 1-2 (1998), 213-238.