



Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Facultad de Ciencias



Autosimilaridad y Criticalidad
Auto-organizada
en un Modelo de Pilas de Arena

Trabajo de tesis para obtener el título de

Maestría en Ciencias Aplicadas

P R E S E N T A:

Saúl Cázares García

A S E S O R:

Edgardo Ugalde Saldaña



INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN COMUNICACIÓN ÓPTICA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ

ASUNTO: EXAMEN DE MAESTRÍA DE
SAÚL CÁZARES GARCÍA
San Luis Potosí, S.L.P., 29 de septiembre de 2003

Fis. Benito Pineda Reyes
Director de la Facultad de Ciencias
UASLP

Estimado Fís. Pineda Reyes:

Por medio de la presente confirmamos que hemos revisado el trabajo de tesis *Sistemas Críticamente Auto-organizado y Autosimilar en el modelo de pilas de arena de Bak*, elaborado por el MAT Saúl Cázares García, para la obtención del grado de Maestro en Ciencias Aplicadas en la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí. Consideramos que el citado trabajo tiene suficientes méritos para cubrir el requisito especificado en el artículo 42 (b) del Reglamento de Estudios de Posgrado de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Atentamente,

Dr. Edgardo Ugalde Saldaña
Asesor

Dr. Raúl Eduardo Balderas Navarro
Sinodal

Dr. Jesús Urías Hermosillo
Sinodal

Dr. Antonio Morante Lezama
Sinodal

c.c.p. Dr. Miguel A. Vidal Borbolla
Coordinador Académico del Posgrado en Ciencias Aplicadas

Av. Karakorum 1470, San Luis Potosí 78200 México. tel:(01 4) 825-01-83, Fax: (01 4) 825-01-98

Agradecimientos

Agradezco el apoyo por parte de mi familia, amigos, y maestros.

Gracias familia por el ejemplo y el amor que me dan.

Disfrute grandemente la convivencia de Fernando Medina, Mario Lomilí, Edgar, Nadia, Manuel, Memo, Lety, Jesus Leños, Efrain, Jelacio, Fortuna, Hector Juarez, Hector Perez, Jacob, Jehova, Jorge, luis, Irbin y de todos los que conformamos los juegos de volibol, agradeciendo su sincera amistad; gracias Fortuna por las enseñanzas en el manejo de la computadora en particular en el área de programación orientada a objetos, Hector Juarez en la área de manejo del sistema linux y al Doctor Edgardo por su enseñanza y paciencia.

Este trabajo fue posible gracias al apoyo económico del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, y a las facilidades ofrecidas por el Instituto de Investigación en Comunicación Óptica de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Contenido

1	Introducción	1
2	Criticalidad Auto-organizada	2
2.1	Criticalidad <i>vs.</i> Criticalidad Auto-organizada	2
2.2	Ejemplos	6
2.2.1	Sistema de Aspersión	6
2.2.2	Terremotos.	7
2.3	Definición	8
2.4	Ejemplos	12
2.4.1	Marcha Aleatoria	13
2.4.2	Turbulencia	14
3	El Modelo	15
3.1	Definición	15
3.2	Algunos resultados numéricos	17
3.3	Algunos resultados teóricos	19
4	Resultados Numéricos	20
4.1	Criticalidad Auto-organizada en el modelo	20
4.1.1	Cálculos	21
4.1.2	Resultados	21
4.2	Autosimilaridad en el modelo	25
4.2.1	Cálculos	26
4.2.2	Resultados	26
5	Observaciones finales y Conclusiones	30

A	Listados para Matlab	34
A.1	Listado que genera los datos	34
A.2	Listado que analiza los datos	36
A.3	Las funciones de evolución	38

Lista de Figuras

2.1	Bombardeo con agua mediante un sistema de aspersión	7
2.2	Fricción de placas tectónicas adyacentes.	9
2.3	La carpeta de Sierpinski.	10
2.4	Marcha Aleatoria en dimensión 1.	13
3.1	Dos configuraciones consecutivas y la región de la avalancha.	18
4.1	Distribución de las duraciones de las avalanchas en escala logarítmica.	22
4.2	Distribución de las áreas de las avalanchas en escala logarítmica.	23
4.3	Histograma de la dimensión lineal de las avalanchas.	24
4.4	Función de correlación en escala lineal y en escala logarítmica. La línea recta corresponde al ajuste en ley de potencias.	25
4.5	Las primeras funciones de estructura en escala logarítmica.	27
4.6	Ley de exponentes con su barra de error	28

Capítulo 1

Introducción

En este trabajo examinamos dos fenómenos estadísticos presentes en la evolución del modelo de pilas de arena de Bak, Tang y Wiesenfeld. El modelo fué introducido en [2], en donde también se discute uno de los dos fenómenos que aquí nos ocupan: La Criticalidad Auto-organizada. El otro fenómeno que examinaremos es el de la Autosimilaridad de una familia de observables. Esta es una propiedad de las distribuciones de los observables en cuestión, y tiene relación con otro tipo de autosimilaridad más conocido, la autosimilaridad geométrica de los fractales.

Los objetivos de este trabajo son: (1) Explicar la naturaleza de los fenómenos que arriba fueron mencionados (criticalidad auto-organizada y autosimilaridad), (2) mostrar evidencias numéricas de su presencia en el modelo de pilas de arena de Bak y co-autores, y (3) discutir su interrelación en estos tipos de modelos.

El texto se organiza como sigue: En el próximo capítulo vamos a tratar de definir de manera abstracta la Criticalidad Auto-organizada, y vamos a dar ejemplos concretos donde este fenómeno se observa. Lo mismo haremos en el Capítulo 3, refiriéndonos a la autosimilaridad. En el Capítulo 4 vamos a presentar el modelo de pila de arena de Bak, Tang y Wiesenfeld, y vamos a mencionar algunos de los resultados conocidos sobre este modelo. En el Capítulo 5 vamos a exponer nuestros resultados numéricos, los que indican la presencia en el modelo de los dos fenómenos que nos ocupan. El Capítulo 6 está consagrado a nuestras conclusiones y observaciones generales.

Capítulo 2

Criticalidad Auto-organizada

2.1 Criticalidad *vs.* Criticalidad Auto-organizada

El término “criticalidad auto-organizada” fue introducido por Bak y co-autores en [2]. En ese trabajo, el concepto es ilustrado mediante un modelo computacional, el mismo que describiremos mas adelante. El modelo de Bak y co-autores es un sistema extendido espacialmente, que esta sujeto a un forzamiento externo. Debido a ese forzamiento externo, el sistema presenta algunas características propias de los sistemas en estado crítico. En lo que sigue vamos a explicar cuáles son algunas características de un estado crítico, y como estas se presentan en un sistema críticamente auto-organizado.

La mecánica estadística estudia, desde un punto de vista estadístico, sistemas extendidos tales como fluidos, suspensiones coloidales, sólidos cristalinos, etc. A estos sistemas se les asocia una colección de observables $\{f_1, f_2, \dots\}$, que son funciones reales definidas en el espacio de configuraciones del sistema, espacio al que denotamos Ω . Por otro lado, el sistema esta sujeto a ciertas restricciones, las que se expresan a través de variables termodinámicas $\{X_1, X_2, \dots\}$. Los valores de estas variables determinan las distribuciones de los observables, es decir, para cada valor de $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots)$ hay una distribución de probabilidad $P(\mathbf{X})$ para los observables $\{f_1, f_2, \dots\}$. Los promedios de los observables dependen entonces del valor de \mathbf{X} . En una situación de equilibrio se espera que los promedios

$$E_{\mathbf{X}}(f_k) := \int_{\Omega} f_k(\omega) dP_{\mathbf{X}}(\omega)$$

sean funciones suaves de \mathbf{X} . Se dice que hay una transición de fase en $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0$, si en tal valor de \mathbf{X} los promedios $E_{\mathbf{X}}(f_k)$ dejan de ser funciones suaves. El orden de la transición es el orden de la derivada de $E_{\mathbf{X}}(f_k)$ que deja de ser continua en \mathbf{X}_0 . Utilizando algunos de estos promedios, se construye un indicador de la transición de fase, al que se le llama parámetro de orden.

Por ejemplo, en el caso de la transición agua-vapor, la cual es una transición de primer orden, las variables termodinámicas usuales son la presión y la temperatura, $\mathbf{X} = (P, T)$. La densidad ρ , es el observable que sirve para construir el parámetro de orden, que en este caso es la diferencia de densidad entre la fase líquida y la fase gaseosa, $\Delta\rho := \rho_l - \rho_v$.

Los puntos críticos son puntos de transición de fase de orden superior (mayor o igual a 2). Suponiendo que los puntos de transición de fase forman un conjunto continuo en el espacio de variables termodinámicas, puede haber puntos en este conjunto donde la transición cambia de orden (pasando de primero a segundo por ejemplo), y donde el parámetro de orden se anula. Estos son los llamados puntos críticos.

Siguiendo con el ejemplo de la transición agua-vapor, los puntos de transición de primer orden forman una curva monótona creciente $T \mapsto P(T)$ en el plano $P - T$. Esto quiere decir que la temperatura de ebullición crece con la presión. Esto sucede hasta llegar a un punto al borde de la curva, $(P_c, T_c) \approx (374^\circ\text{C}, 218 \text{ atm})$, donde el parámetro de orden $\Delta\rho$ se anula. Esto quiere decir que en el punto crítico (P_c, T_c) , la densidad del agua y del vapor coinciden. Las fases ya no se pueden distinguir.

El acercamiento al punto crítico se caracteriza por la divergencia polinomial de cantidades que se obtienen a partir de los promedios $E_{\mathbf{X}}(f_k)$ y sus derivadas. De modo que hay funciones χ_k que dependen de $E_{\mathbf{X}}(f_k)$ y sus derivadas, y asociadas a estas funciones hay exponentes γ_k , tales que cerca del punto crítico \mathbf{X}_c ,

$$\chi_k(x) = O(x^{\gamma_k}),$$

donde $x = |\mathbf{X} - \mathbf{X}_c|/|\mathbf{X}_c|$ representa la distancia al punto crítico. Los exponentes γ_k se conocen como exponentes críticos.

Otra característica usual del acercamiento al punto crítico es el cambio en el decaimiento de las correlaciones de observables locales. Un observable local es una función $f = f(\omega, \mathbf{x})$ que depende de la configuración y de la posición

en el espacio físico. La función de correlación espacial del observable en cuestión se define como:

$$\Gamma_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) := E_{\mathbf{x}}((f(\omega, \mathbf{x}) - \bar{f}(\mathbf{x}))(f(\omega, \mathbf{x} + \mathbf{r}) - \bar{f}(\mathbf{x} + \mathbf{r}))),$$

donde $\bar{f}(\mathbf{x})$ es el valor medio del observable en el punto \mathbf{x} . La función Γ mide la interdependencia del valor observable de dos posiciones a una distancia dada. Lejos del punto crítico, en una fase determinada, la correlación decae típicamente como una exponencial, es decir

$$\Gamma_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) = o(\exp(-r/\lambda_{\mathbf{x}})),$$

donde $r = |\mathbf{r}|$. El parámetro $\lambda_{\mathbf{x}}$ es la longitud de correlación, la cual cambia conforme nos acercamos al punto crítico. En el punto crítico la correlación cambia su decaimiento, pasando a un decaimiento menor que exponencial. En tal caso decimos que la longitud de correlación diverge. Esta es otra característica común del comportamiento en el punto crítico

Finalmente, cuando el sistema se aproxima al punto crítico, en su evolución temporal se observa la aparición de estructuras coherentes del tamaño del sistema. Esto es consistente con el cambio de comportamiento en la función de correlación.

En resumen, cuando un sistema se aproxima al punto crítico, algunas cantidades termodinámicas divergen, alguna longitud de correlación diverge, y aparecen estructuras coherentes del tamaño del sistema. Otra característica del comportamiento en el punto crítico es la autosimilaridad estadística y la invariancia de escala, pero de eso hablaremos más en detalle en el capítulo siguiente. Una exposición sencilla de estos conceptos puede encontrar en [1, pag. 132 ss.], mientras que una descripción más formal se puede consultar en [11, pag. 392 ss.].

Para Bak y co-autores, un sistema está críticamente auto-organizado si de forma natural, debido a su propia evolución, alcanza un estado donde la longitud de correlación de algún observable diverge, surgen estructuras coherentes de gran escala, y la estadística de algunas propiedades asociadas a estas estructuras es invariante de escala en el sentido estadístico. Una idea clave en la propuesta de Bak y co-autores es la del estado mínimamente estable. Este es un estado (colección de configuraciones en Ω) que al ser perturbado puede generar, en el proceso de volver a la estabilidad, estructuras del tamaño del sistema, y correlaciones de largo alcance.

La invariancia de escala de una cierta magnitud se caracteriza por que esa magnitud, como función de la escala, sigue una ley de potencia. Cuando esta invariancia se da en el sentido estadístico, lo que sigue una ley de potencias es la distribución de esa magnitud.

Por ejemplo, si E es la energía de una estructura coherente presente en el sistema (suponiendo que tal cosa se pueda medir), entonces habrá invariancia estadística de escala para esta magnitud si

$$P(E \in [e, e + d e]) \propto e^{-\gamma_E de},$$

en un rango significativo de valores de e . Notese que para valores pequeños de γ_E este comportamiento no puede ser válido en todo el rango de valores de e .

A parte de estas características muy generales, el concepto de criticalidad auto-organizada no está claramente definido ni en [2], ni en trabajos posteriores (para una discusión al respecto, consultar [12]), y su relación con el concepto de criticalidad en mecánica estadística no es clara. En todo caso, nosotros nos restringiremos al escenario siguiente.

Un sistema espacialmente extendido, con espacio de configuraciones Ω , observables $\{f_1, f_2, \dots\}$, sigue una evolución en el tiempo. Esta evolución es consistente con su distribución estadística, es decir, para todo observable f_k se cumple que

$$E(f_k) := \int_{\Omega} f_k(\omega) dP(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_k(\omega^t) dt,$$

donde ω^t es la configuración al tiempo t , que se obtiene a partir de una configuración inicial "típica" ω^0 . La ecuación precedente es mejor conocida como "hipótesis ergódica". En el modelo de Bak y co-autores, la evolución tiene lugar en pasos discretos, y es una evolución estocástica, en tal caso la ecuación precedente se puede escribir como

$$P(f_k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T-1} \sum_{n=0}^{T-1} f_k(\omega^n).$$

En ambos casos E denota el promedio respecto a la distribución del sistema.

El sistema es forzado permanentemente, de modo que de manera natural alcanza un estado mínimamente estable $\Omega_m \subset \Omega$, que al ser perturbado puede generar, en el proceso de volver a la estabilidad, estructuras del tamaño del sistema, y correlaciones de largo alcance. Entonces, asociado al estado mínimamente estable hay estructuras coherentes que se pueden medir a través de observables adecuados E_k . Estos observables son invariantes de escala en el sentido estadístico, es decir

$$P(E_k \in [e, e + de]) \propto e^{-\gamma E_k} d e.$$

Al mismo tiempo, algunos observables locales presentan correlaciones espaciales que decaen polinomialmente en el estado mínimamente estable, es decir,

$$E(f(\omega, \mathbf{x})f(\omega, \mathbf{x} + \mathbf{r})|\Omega_m) = O(r^{-p}).$$

Este escenario para describir la criticalidad auto-organizada es nuestro intento por formalizar el concepto. Una tal descripción no se encuentra en el trabajo original de Bak y co-autores, o en trabajos posteriores.

A continuación vamos a describir brevemente algunos sistemas físicos en los cuales se observan todas o algunas de estas características.

2.2 Ejemplos

Algunos de los sistemas que exhiben un comportamiento críticamente organizado son: pilas de arena (fenómeno que inspira al modelo de Bak y co-autores), terremotos, y la propagación del fuego forestal. Recientemente se ha argumentado la existencia de este tipo de comportamiento en sistemas biológicos. Una descripción más detallada de este tipo de sistemas se encuentra en [12, Cap. 3].

2.2.1 Sistema de Aspersión

El sistema consiste de una semiesfera de vidrio que es bombardeada por agua mediante un sistema de aspersión (la perturbación). En el interior de la semiesfera, una red de ríos formados por el bombardeo de agua fluyen hacia las orillas.

En este caso el sistema logra un estado mínimamente estable a partir del cual, al continuar la perturbación, se forman estructuras coherentes (las gotas de agua que caen). Los observables asociados a las estructuras coherentes son el periodo de vida y el tamaño. La duración de una pulsación fue llamada periodo de vida. Y la cantidad de masa contenida en un pulso es el tamaño de la avalancha (ver Figura 2.1.).

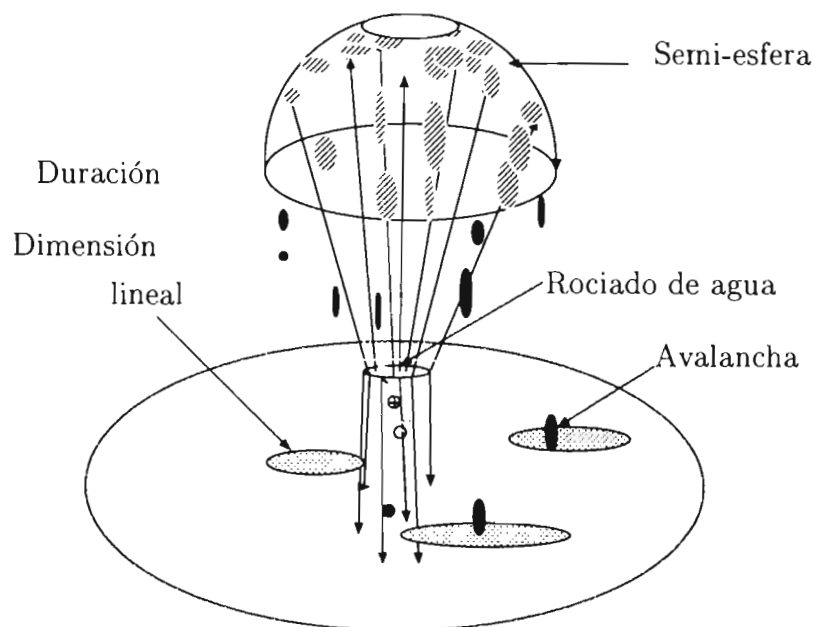


Figura 2.1: Bombardeo con agua mediante un sistema de aspersión

La distribución de tamaños y periodos de vida siguen leyes de potencias,

$$P(S \in [s, s + ds]) \propto s^{-a}$$

$$P(S \in [t, t + dt]) \propto t^{3.1},$$

respectivamente. El exponente asociado a la distribución de tamaños depende de la viscosidad, de modo que $a \approx 2.66$ a baja viscosidad, $a \approx 1.93$ a alta viscosidad (para mas detalles ver [15]).

2.2.2 Terremotos.

En los terremotos el sistema consiste de dos placas tectónicas en fricción, dando como resultado una acumulación de tensión en su interfase. Dicha tensión es liberada en segundos o minutos, mediante un movimiento brusco de las placas.

La perturbación del sistema consiste en el desplazamiento relativo de las placas tectónicas, que típicamente es de unos pocos centímetros por año.

La estructura coherente es en este caso la onda de choque, que se expande a lo largo de todo el sistema. A esta se le pueden asociar magnitudes tales como la cantidad de energía E . Su distribución, $P(E \in [e, e + de])$, sigue una ley de potencias

$$P(E \in [e, e + de]) \propto e^{-B} de,$$

en un rango significativo de valores. El exponente B muestra una dependencia geográfica, y se ha encontrado siempre en el intervalo $[1.8, 2.2]$. La morfología de las fallas (interfase entre dos placas tectónicas) muestra una apariencia fractal. Después de el terremoto se siguen un cierto número de réplicas, que se distribuye en el tiempo según la Ley de Omori: Si $n(t)$ denota al número de réplicas dentro de un intervalo de tiempo de logitud t después del terremoto, entonces $n(t) = O(t^{-A})$, con $A \in [1, 1.5]$.

La estructura y comportamiento temporal de los terremotos puede ser descrita mediante fractales y leyes de potencia, sin embargo existen escalas características para los terremotos. Una de ellas está relacionada con el ancho de la superficie terrestre. Además, mientras que los terremotos pequeños pueden propagarse en las dos dimensiones de la interfase entre las placas, los terremotos grandes sólo se propagan a lo largo de la falla. En ambos tipos de terremotos, la distribución de la energía liberada sigue una ley de potencias, pero el exponente asociado depende del tipo de terremoto.

En [12, Cap.3] pueden encontrarse descripciones mas detalladas de estos y otros fenómenos con las características de criticalidad auto-organizada. En particular, una discusión sobre criticalidad auto-organizada en placas tectónicas puede encontrarse en [16].

2.3 Definición

El término "autosimilaridad" indica que un objeto se puede descomponer en un cierto número de partes, las cuales son equivalentes al objeto original luego de un cambio de escala. Un ejemplo clásico de autosimilaridad es el fractal conocido como la carpeta de Sierpinski, que se ilustra en la figura 2.3, y que es el único subconjunto compacto en $[0, 1]^2$ que es invariante bajo la transformación

$$F \mapsto \frac{F}{2} \cup \frac{F}{2} + \left(\frac{1}{2}, 0\right) \cup \frac{F}{2} + \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

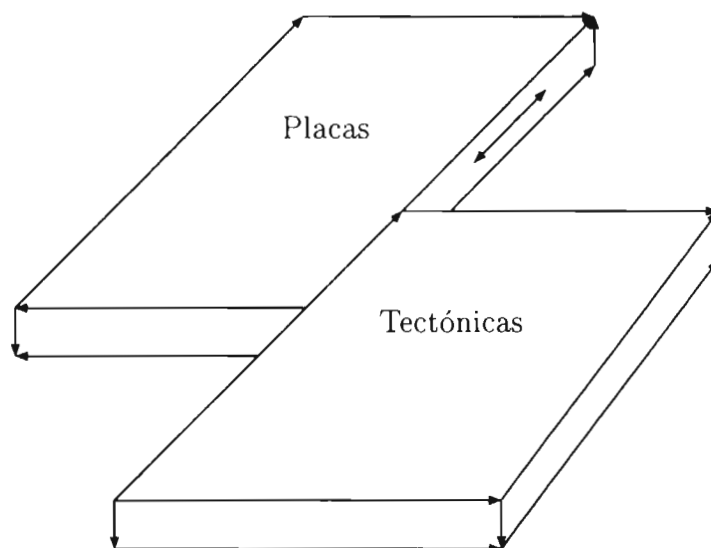


Figura 2.2: Fricción de placas tectónicas adyacentes.

La relación anterior indica que F se puede descomponer en 3 partes, cada una de las cuales es equivalente a F después de un cambio de escala por un factor 2.

Asociado a la invariancia bajo cambios de escala están los comportamientos de ley de potencias. En el ejemplo que nos ocupa, considere la función $\ell \mapsto n(\ell)$ que a cada escala $\ell \in (0, 1)$ le asocia el número de triángulos de lado ℓ que contiene F . Es fácil ver que

$$n(\ell) = \begin{cases} 3^k & \text{si } \ell = 2^{-k} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Decimos entonces que n sigue la ley de potencias $n(\ell) \sim \ell^{-b}$ con exponente $b = \ln(3)/\ln(2)$.

Supongamos ahora que tenemos no un objeto geométrico, sino un fenómeno físico, el cual podemos medir a diferentes escalas. Digamos que $m(\ell)$ indica la magnitud del fenómeno a la escala ℓ . Decimos que el fenómeno es autosimilar si su magnitud es invariante de escala, es decir, si sigue una ley de potencias $m(\ell) \sim \ell^\gamma$ para algún exponente $\gamma \in \mathbb{R}$. Este tipo de comportamiento se observa justamente en sistemas extendidos en el punto crítico. Además es

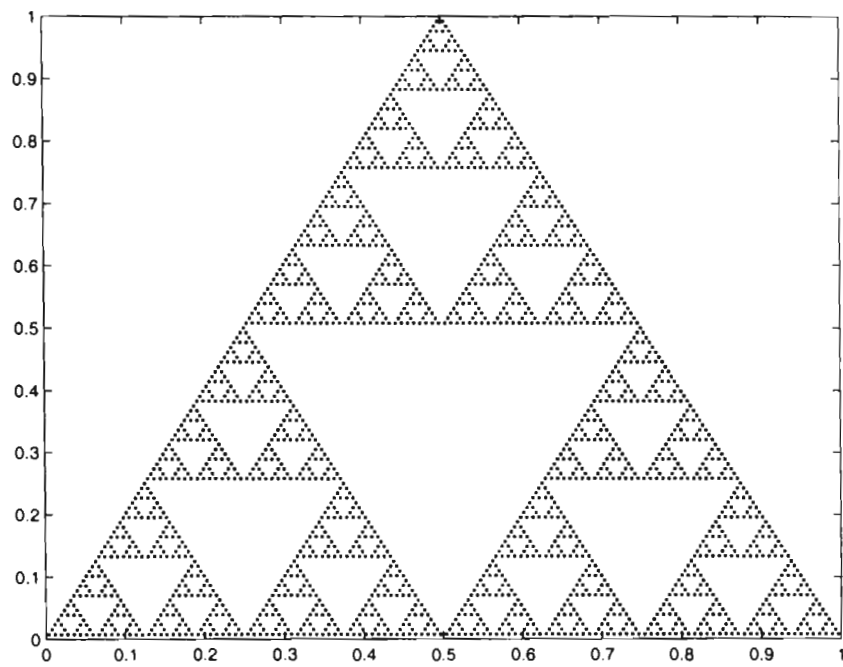


Figura 2.3: La carpeta de Sierpinski.

común observar, asociado a este tipo de invariancia de escala, estructuras coherentes, hasta cierto grado de autosimilaridad en el sentido geométrico.

La autosimilaridad estadística de un fenómeno se refiere a que la distribución de su magnitud, que en este caso es una variable aleatoria, es invariante de escala en el sentido que precisamos a continuación.

Consideremos un espacio de configuraciones Ω , y una manera de observar un cierto fenómeno a diferentes escalas, es decir, una familia de observables $\{\phi_\ell : \ell \in I\}$ (el subíndice ℓ indica la escala de observación e I es el rango de escalas posibles). Decimos que el sistema es autosimilar con respecto a la familia de observaciones $\{\phi_\ell : \ell \in I\}$, si las distribuciones

$$\rho_\ell(x) := \frac{d}{dx} P(\phi_\ell \leq x)$$

son invariantes de escala, es decir,

$$\rho_1(x) = \ell^\alpha \rho_\ell(x\ell^\alpha),$$

para algún exponente $\alpha \in \mathbb{R}$. Esto quiere decir que las distribuciones asociadas a observaciones a diferentes escalas son equivalentes bajo un cambio de escala. La ecuación anterior implica en particular que la magnitud promedio sigue una ley de potencias. Para verificar esto, observemos que

$$\begin{aligned} m(\ell) &:= \int_{\Omega} \phi_\ell(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x \rho_\ell(x) dx \\ &= \ell^{-\alpha} \int_{\mathbb{R}} x \rho_1(x\ell^{-\alpha}) dx \\ &= \ell^\alpha \int_{\mathbb{R}} y \rho_1(y) dy, \end{aligned}$$

de modo que $m(\ell) \propto \ell^\alpha$.

Los momentos de orden superior también siguen una ley de potencias,

$$\begin{aligned} S_q(\ell) &:= \int_{\Omega} \phi_\ell(\omega)^q dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x^q \rho_\ell(x) dx \\ &= \ell^{-\alpha q} \int_{\mathbb{R}} x^q \rho_1(x\ell^{-\alpha}) dx \\ &= \ell^{q\alpha} \int_{\mathbb{R}} y \rho_1(y) dy. \end{aligned}$$

Como funciones de la escala, estos momentos reciben el nombre de funciones de estructura. Así, la q -ésima función de estructura,

$$\ell \mapsto S_q(\ell),$$

sigue la ley de potencias $S_q(\ell) \sim \ell^{q\alpha}$ en el caso en que el sistema sea autosimilar con respecto a la familia $\{\phi_\ell : \ell \in I\}$. En este caso el intervalo I es llamado rango de autosimilaridad y α es el exponente de autosimilaridad (ver [18] y sus referencias).

Notese que, bajo condiciones adecuadas, las funciones de estructura determinan de forma única las densidades de probabilidad $\rho_\ell(x)$. Para verificar esto, notese que la transformada de Laplace de $\rho_\ell(x)$ depende de forma única de los momentos de la distribución de la manera siguiente (ver [9, pag 272 ss.]):

$$\mathcal{L}_s(\rho_\ell(x)) := \int_0^\infty e^{-sx} \rho_\ell(x) dx = \sum_{q=0}^\infty \frac{(-1)^q S_q(\ell) s^q}{q!}.$$

Y como a su vez $\rho_\ell(x)$ está determinada de forma única por su transformada de Laplace, entonces las funciones de estructura son suficientes para definir $\rho_\ell(x)$ para cada $\ell \in I$. De este modo, la autosimilaridad puede definirse como el comportamiento en ley de potencias de todas las funciones de estructura. En lo que sigue supondremos que se cumplen todas las condiciones necesarias para que la fórmula anterior sea válida, de modo que nuestra definición de autosimilaridad se reduce a: $S_q(\ell) \propto \ell^{\alpha q}$ para todo $q \in \mathbb{N}$ y $\ell \in I$.

2.4 Ejemplos

La autosimilaridad estadística es más común en sistemas físicos que la autosimilaridad geométrica. Bajo ciertas condiciones, por ejemplo cerca de un punto crítico, los sistemas físicos generan estructuras coherentes con características fractales (ver [17]). Algunas magnitudes asociadas a estas estructuras satisfacen las condiciones mencionadas arriba. También es común la formación de estructuras fractales en sistemas fuera de equilibrio. Un ejemplo notable de ello es el de la agregación limitada por difusión, DLA por sus siglas en inglés (ver [14]). En este caso también podemos asociar cantidades a esas estructuras, de modo que las distribuciones asociadas son invariantes de escala en el sentido que se indicó en la sección anterior. En esta sección vamos a exponer dos ejemplos claros de autosimilaridad estadística en sistemas físicos.

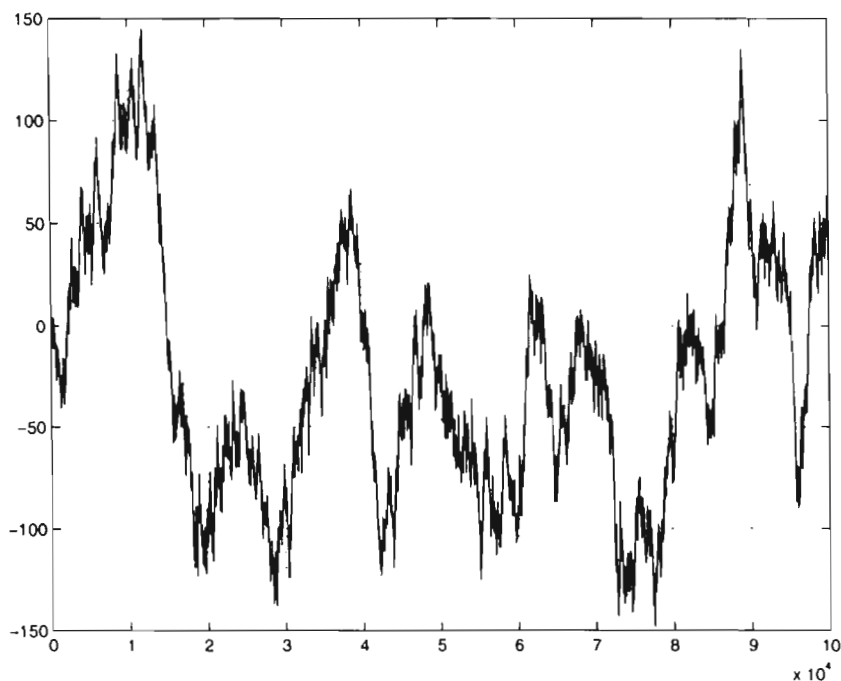


Figura 2.4: Marcha Aleatoria en dimension 1.

2.4.1 Marcha Aleatoria

El ejemplo más notable de autosimilaridad es la marcha aleatoria en cualquier dimension. En ese ejemplo hay varias magnitudes que podemos utilizar para observar el fenomeno. Para fijar ideas, vamos a considerar el siguiente modelo.

La red unidimensional Z representa el espacio fisico. Una partícula se desplaza según la marcha aleatoria

$$\begin{aligned} P(x(t+1) - x(t) = 1) &= 1/2 \\ P(x(t+1) - x(t) = -1) &= 1/2, \end{aligned}$$

de modo que el desplazamiento promedio es nulo, es decir, $E(x(t)) = x(0)$. Supongamos que al tiempo $t = 0$, una partícula parte del origen. Al tiempo $t = T$, la posición de la partícula se distribuye como:

$$P(x(T) = s) = \binom{T}{(s+T)/2} \left(\frac{1}{2}\right)^T,$$

de modo que

$$P(x(T) \in [s, s + ds]) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-s^2/2T} ds.$$

En este caso, la familia de observables es el desplazamiento absoluto $|x(T)|$, y $T \in N$ debe verse como el parámetro de escala. Es fácil ver que en este caso

$$S_q(T) := \int_{R^+} |s|^q dP(x(T) = s) \simeq \frac{1}{2\pi T} \int_{R^+} |s|^q e^{-s^2/2T} ds,$$

sigue la ley de escala $S_q(T) \sim T^{q/2}$ (para más detalles sobre marchas aleatoria ver [8, Cap. III y VII]).

2.4.2 Turbulencia

Las funciones de estructura, y el término “autosimilaridad estadística” aparecen por primera vez en el estudio estadístico de la turbulencia desarrollada (ver [19]). En turbulencia desarrollada, las configuraciones del sistema son campos de velocidad $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{x})$, que dan la velocidad del fluido en cada posición \mathbf{x} del espacio físico. Para cuantificar el fenómeno se utiliza la familia de observables

$$\Delta_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) := \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}).$$

Bajo las condiciones de turbulencia desarrollada, estos observables tiene estadísticas homogéneas e isotrópicas en el espacio. Esto quiere decir que la distribución de $\Delta_{\mathbf{r}}(\mathbf{x})$ no depende de \mathbf{x} , y depende de \mathbf{r} solamente a través de su norma $r := |\mathbf{r}|$. La teoría clásica debida a Kolmogorov [13] permite predecir que

$$S_q(r) := E(|\Delta_{\mathbf{r}}(\mathbf{x})|^q) \sim r^{q/3}.$$

Posterior a esta teoría se detectaron desviaciones en los exponentes, lo que condujo a varias reformulaciones (para más detalles, consulte [10] y [18]).

Capítulo 3

El Modelo

En este capítulo vamos a describir el modelo de pilas de arena. Este modelo aparece por primera vez en [2], y ahí mismo se discuten algunos resultados numéricos en relación al fenómeno de criticalidad auto-organizada.

3.1 Definición

El espacio físico está representado por una red bidimensional

$$\Lambda := \{1, 2, \dots, L\} \times \{1, 2, \dots, M\},$$

y las configuraciones son todos los arreglos posibles de enteros en esa red, es decir,

$$\Omega_\Lambda := N^\Lambda = \{\omega : \Lambda \rightarrow N\}.$$

La dinámica estocástica que sigue el modelo conduce a un atractor finito $R_\Lambda \subset \Omega_\Lambda$, que consiste de configuraciones recurrentes, es decir, configuraciones $\omega = \omega^0 \in \Omega_\Lambda$ tales que $P(\exists t : \omega^t = \omega^0) = 1$. Aquí el superíndice indica el tiempo en la evolución estocástica del sistema.

En una unidad de tiempo, el sistema (1) incrementa un sitio al azar, y si hay sitios críticos, (2) genera una avalancha. La avalancha afecta a una región del espacio $S \subset \Lambda$, y tiene una duración $\tau \in N$, aunque se supone que relativo al tiempo de evolución del sistema, las avalanchas son instantáneas.

Las avanchas son una secuencia de derrumbes localizados. Dada una configuración $\omega \in \Omega$, un sitio $\mathbf{r} \in \Lambda$ se derrumbará si $\omega(\mathbf{r}) > 3$. En tal caso decimos que \mathbf{r} es un sitio crítico. El derrumbe del sitio crítico \mathbf{r} se define como:

$$\omega \mapsto \omega - T_r,$$

donde T_r es tal que

$$T_r(\mathbf{x}) = \begin{cases} -4 & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{r} \\ 1 & \text{si } |\mathbf{x} - \mathbf{r}| = 1 \\ 0 & \text{cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Una configuración sufrirá de derrumbes localizados hasta que no haya más sitios críticos que derrumbar. Así, en un paso de tiempo la evolución del sistema está definida por el siguiente algoritmo:

Evolución.

entrada $\ll \omega^t$;

inicializa $\omega = \omega^t$; $\tau = 0$; $S = \emptyset$;

elige $\mathbf{r} \in \Lambda_N$ con distribución uniforme;

actualiza $\omega(\mathbf{r}) := \omega(\mathbf{r}) + 1$;

mientras que $\max_{\mathbf{r}} \omega(\mathbf{r}) \geq 4$, repite

encuentra \mathbf{r} tal que $\omega(\mathbf{r}) \geq 4$;

actualiza $\omega := \omega - T_r$; $\tau := \tau + 1$; $S := S \cup \{\mathbf{r}\}$;

end;

actualiza $U(\omega^t) := \omega$

salida $\gg (U(\omega), \tau, S)$;

A la salida de este algoritmo tenemos la configuración $U(\omega^t)$ que resulta después de un paso de tiempo. Si hubo sitios que derrumbar durante ese proceso, el algoritmo nos dará la duración τ de la avalancha, y la región S de los sitios que fueron derrumbados. Notese que la evolución es aleatoria: el sitio que se incrementa se elige al azar. Además, el orden en que se van derrumbando los sitios es arbitrario. Una característica del modelo es que la configuración $U(\omega^t)$ que se obtiene al final de la avalancha, no depende del orden en que se elijen los sitios a derumbar (ver [4]).

Finalmente, la dinámica del modelo se describe en el siguiente algoritmo.

```

Dinámica.
entrada  $\ll \omega^0$ ;
inicializa  $\mathcal{T} = \emptyset$ ;  $\mathcal{S} = \emptyset$ ;
para  $t$  desde 1 hasta  $\infty$ ,
    elije  $r \in \Lambda_N$  con distribución uniforme;
    actualiza  $\omega^{t+1} = A(\omega^t + e_r)$ ;
    si  $\omega^{t+1} \neq \omega^t + e_r$ , entonces
        actualiza  $\mathcal{T} := \mathcal{T} \cup \{\tau\}$ ;
        actualiza  $\mathcal{S} := \mathcal{S} \cup \{S\}$ ;
    fin;
fin;
salida  $\gg (\{\omega^t\}_{t=0}^\infty, \mathcal{T}, \mathcal{S})$ ;

```

Este algoritmo genera la secuencia de configuraciones $\{\omega^t : t \in N\}$, así como los ensembles de duraciones \mathcal{T} , y regiones \mathcal{S} , de las avalanchas que sufrió el sistema durante su evolución. Después de un transitorio, la dinámica entra en el atractor \mathcal{R}_Λ , formado por configuraciones mínimamente estables.

En el capítulo siguiente examinaremos algunas propiedades estadísticas de los ensembles generados durante la evolución del modelo. Por lo pronto mostramos en la Figura 3.1, en una escala de colores, dos configuraciones consecutivas en el tiempo, así como la región involucrada en la avalancha. En este ejemplo particular, la duración de la avalancha fue $\tau = 397$.

3.2 Algunos resultados numéricos

Los primeros resultados numéricos referentes a este modelo se encuentran en los artículos originales de Bak y co-autores [2, 3]. Ellos estudian la distribución de tamaños de avalancha $P(\sigma \in [\sigma, \sigma + d\sigma])$. El tamaño de avalancha corresponde, en el algoritmo descrito arriba, al número de sitios derrumbados, $\sigma = \sigma(S) := \#S$. La distribución se calcula a partir del ensemble \mathcal{S} que genera la dinámica.

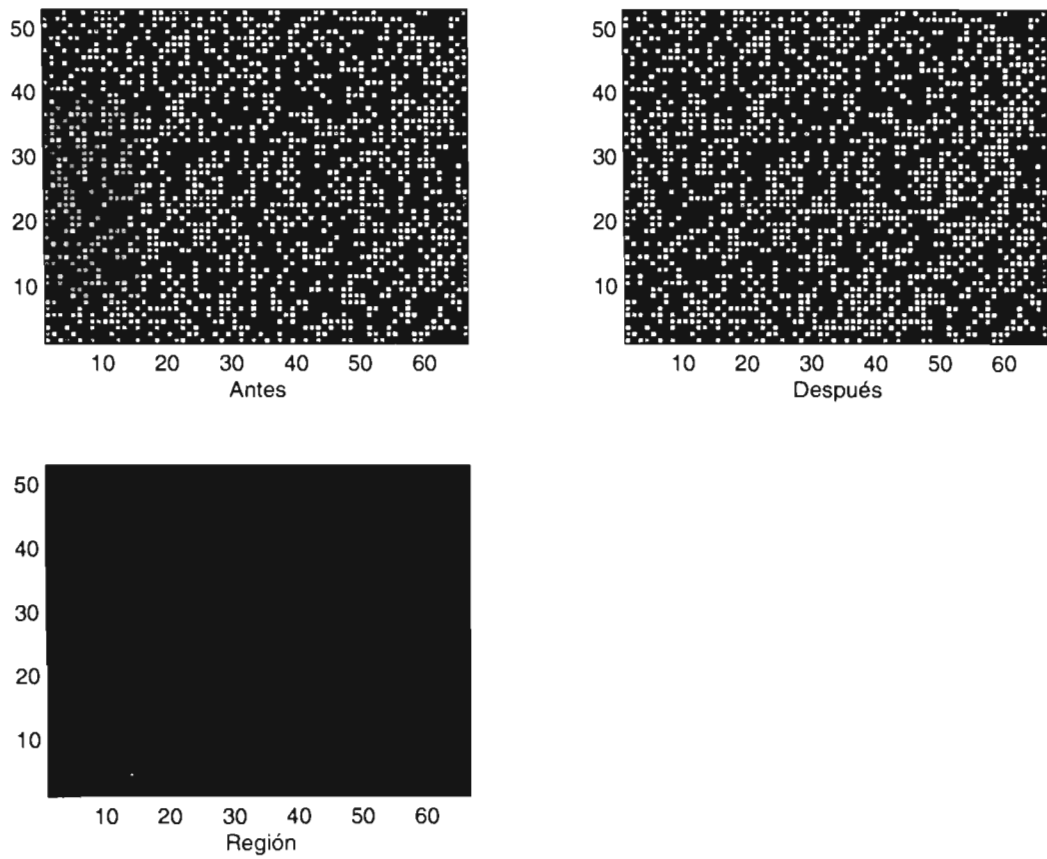


Figura 3.1: Dos configuraciones consecutivas y la región de la avalancha.

Bak y co-autores encuentran que la distribución de tamaños sigue una ley de potencias

$$P(\sigma \in [s, s + ds]) \propto s^{-a},$$

con $a \approx 1$. Los autores también estudian la distribución de duraciones de las avalanchas. Con el fin de relacionar estas duraciones con el espectro de potencia del ritmo de disipación (para mas detalles ver [3]), ellos calculan la distribución de duraciones de avalanchas τ , ponderada por la respuesta promedio σ/τ . Para ser mas precisos, ellos consideran la función

$$D(t) = \frac{dP(\tau \in [t, t+dt])}{dt} \frac{E(\sigma|\tau=t)}{t}.$$

Ellos encuentran que esta cantidad también sigue una ley de potencias,

$$D(t) \propto t^{-b},$$

donde $b \approx 0.43$. A partir de esta ley, ellos derivan un comportamiento en ley de potencias para el espectro de potencias del ritmo de disipación, y encuentran $S(f) \propto f^{-2+b}$.

3.3 Algunos resultados teóricos

Los primeros resultados teóricos relacionados con este modelo se deben a D. Dhar [4]. Dhar utiliza el hecho de que los derrumbes individuales conmutan, para definir un álgebra de acciones que conmutan. La dinámica del sistema es una cadena de Markov, cuyos estados son las configuraciones recurrentes, y las transiciones entre estados se llevan a cabo por la acción de uno de los elementos de esta álgebra. Dhar encuentra que los estados recurrentes estan equidistribuidos, es decir, que tienen la misma probabilidad de ocurrencia. También encuentra una fórmula exácta para el número promedio de derrumbes individuales que componen una avalancha, que resulta ser del orden de $L \times M$ (el tamaño de la red). Aunque interesantes, estos resultados y otros posteriores (ver [5]) no estan directamente vinculados con el fenómeno de criticalidad auto-organizada.

Capítulo 4

Resultados Numéricos

En este capítulo vamos a describir los cálculos numéricos que llevamos a cabo, y los resultados que obtuvimos. Hicimos varias pruebas con redes de diferentes dimensiones, pero aquí solo mostraremos los resultados referentes a la red de 71×75 , para la cual calculamos 30000 pasos en el tiempo con el fin de construir ensembles representativos. La simulación comienza con una configuración aleatoria estable, es decir, todas sus entradas son menores que 4. Luego se echa a correr la dinámica durante 7000 pasos de tiempo para evitar efectos transitorios, y finalmente se calculan las 30000 iteraciones de la dinámica, lo que da lugar a una secuencia

$$\{\omega^t \in \Omega_\Lambda : \omega^{t+1} = U(\omega^t)\},$$

y a los ensembles \mathcal{T} y \mathcal{S} que contienen las duraciones y las regiones de las avalanchas (vea la descripción de la dinámica en el capítulo anterior).

4.1 Criticalidad Auto-organizada en el modelo

Nuestros indicadores de criticalidad auto-organizada son el comportamiento en ley de potencias de las distribuciones de duraciones y tamaños de avalancha, así como un decaimiento polinomial en las correlaciones.

4.1.1 Cálculos

Durante la evolución del modelo se generan los ensembles \mathcal{T} y \mathcal{S} . A partir de esos ensembles calculamos las distribuciones de la duración τ de las avalanchas, el área $\sigma = \sigma(S) := \#S$ de las mismas, y su dimensión lineal

$$\lambda = \lambda(S) := \frac{\sum_{r \in S} |r - \bar{r}|}{\sigma(S)}, \text{ con } \bar{r} = \frac{\sum_{r \in S} r}{\sigma(S)}.$$

A partir de los ensembles \mathcal{T} y \mathcal{S} que generamos durante la simulación, calculamos $\tau_{\min} := \min\{\tau \in \mathcal{T}\} = 1$, $\sigma_{\min} := \min\{\sigma(S) : S \in \mathcal{S}\} = 1$, y $\lambda_{\min} := \{\lambda(S) : S \in \mathcal{S}\} = 0$. Las distribuciones de las cantidades τ , σ y λ se definen como sigue:

$$\begin{aligned} f_{\tau}(t_k) &:= P_{\mathcal{T}}(t_{k-1} \leq \tau \leq t_k), \text{ con } t_k := \tau_{\min} + \Delta_{\tau} \times k \\ f_{\sigma}(s_k) &:= P_{\mathcal{S}}(s_{k-1} \leq \sigma \leq s_k), \text{ con } s_k := \sigma_{\min} + \Delta_{\sigma} \times k \\ f_{\lambda}(r_k) &:= P_{\mathcal{S}}(r_{k-1} \leq \lambda \leq r_k), \text{ con } r_k := \lambda_{\min} + \Delta_{\lambda} \times k. \end{aligned}$$

Aquí los parámetros Δ_{τ} , Δ_{σ} y Δ_{λ} son las precisiones de observación para cada una de estas cantidades, y son fijadas al momento de analizar los resultados de la simulación. Calculamos las distribuciones f_{τ} , f_{σ} , y f_{λ} , contando la fracción de los elementos en \mathcal{T} (respectivamente \mathcal{S}) que satisfacen la condición enunciada.

En otra simulación, en la red bidimensional de tamaño 150×200 calculamos la función de correlación

$$\Gamma(r) := E((\omega^t(x_m, y_m) - \bar{\omega})(\omega^t(x_m + r, y_m) - \bar{\omega})),$$

donde $(x_m, y_m) = (75, 100)$ es el centro de la red bidimensional, $\bar{\omega}$ es el valor promedio de la configuración en un sitio. En este caso hicimos una simulación de 50000 pasos de tiempo. Los promedios se calculan respecto al ensemble $\{\omega^0, \omega^1, \dots, \omega^{50000}\}$ que generamos en el transcurso de la simulación.

4.1.2 Resultados

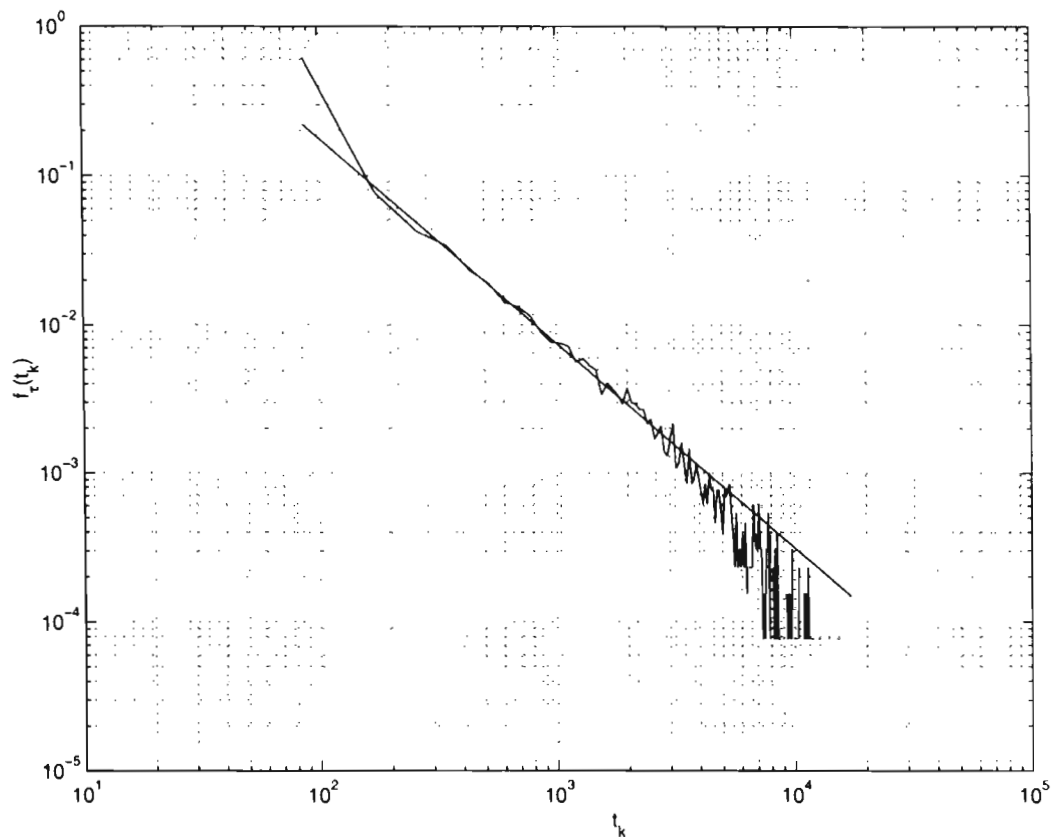


Figura 4.1: Distribución de las duraciones de las avalanchas en escala logarítmica.

En la Figura 4.1 mostramos en escala logarítmica la distribución de duraciones de las avalanchas. La línea recta representa el ajuste en ley de potencias

$$f_{\tau}(t_k) \sim t_k^{-\gamma_{\tau}}, \text{ con } \gamma_{\tau} = 1.37 \pm 0.06.$$

El exponente γ_{τ} se obtiene por regresión lineal de los datos en el rango $172 \leq s_k \leq 3452$. Para este cálculo hicimos $\Delta_{\tau} := 86.3$.

En la Figura 4.2 mostramos en escala logarítmica la distribución de áreas de las avalanchas. La línea recta representa el ajuste en ley de potencias

$$f_{\sigma}(s_k) \sim s_k^{-\gamma_{\sigma}}, \text{ con } \gamma_{\sigma} = 1.2 \pm 0.1.$$

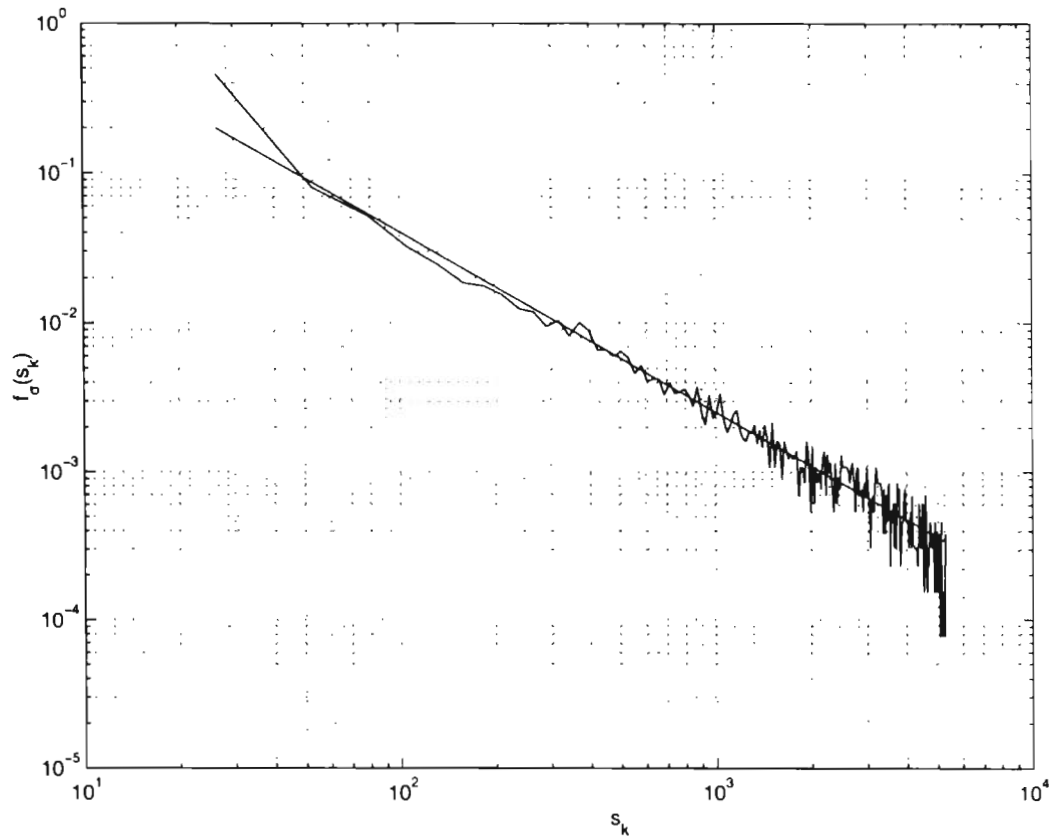


Figura 4.2: Distribución de las áreas de las avalanchas en escala logarítmica.

El exponente γ_σ se obtiene por regresión lineal de los datos en el rango $52 \leq s_k \leq 290$. Para este cálculo hicimos $\Delta_\sigma := 26.42$.

También calculamos la distribución de la dimensión lineal de las avalanchas, sin embargo no encontramos un comportamiento en ley de potencias para esta cantidad. Por completez mostramos en la Figura 4.3 el histograma resultante. En este caso $\Delta_\lambda = 2.11$.

Finalmente, en la Figura 4.4 mostramos la función de correlación para el experimento numérico en la red bidimensional de tamaño 150×200 . Dadas las dimensiones limitadas del sistema, es difícil determinar qué tipo de comportamiento tiene la función de correlación. El ajuste en ley de potencias

$$\Gamma(r) \sim r^{-p}, \text{ con } p := 1.34 \pm 0.43,$$

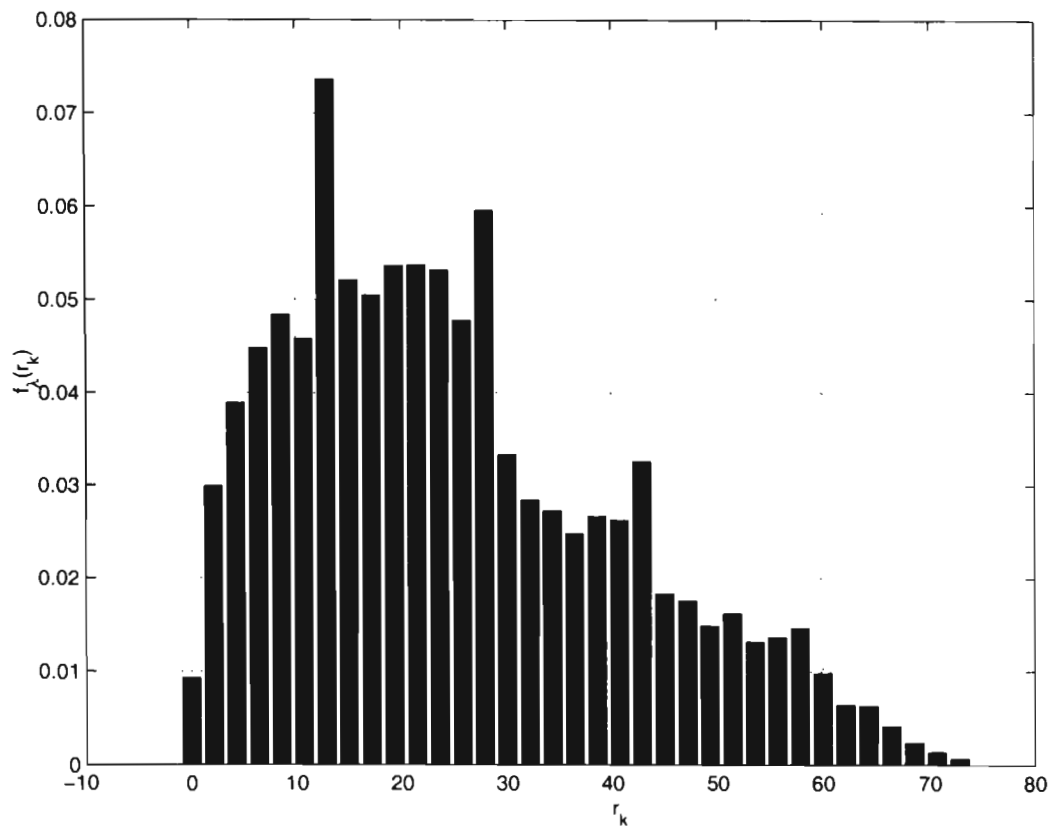


Figura 4.3: Histograma de la dimensión lineal de las avalanchas.

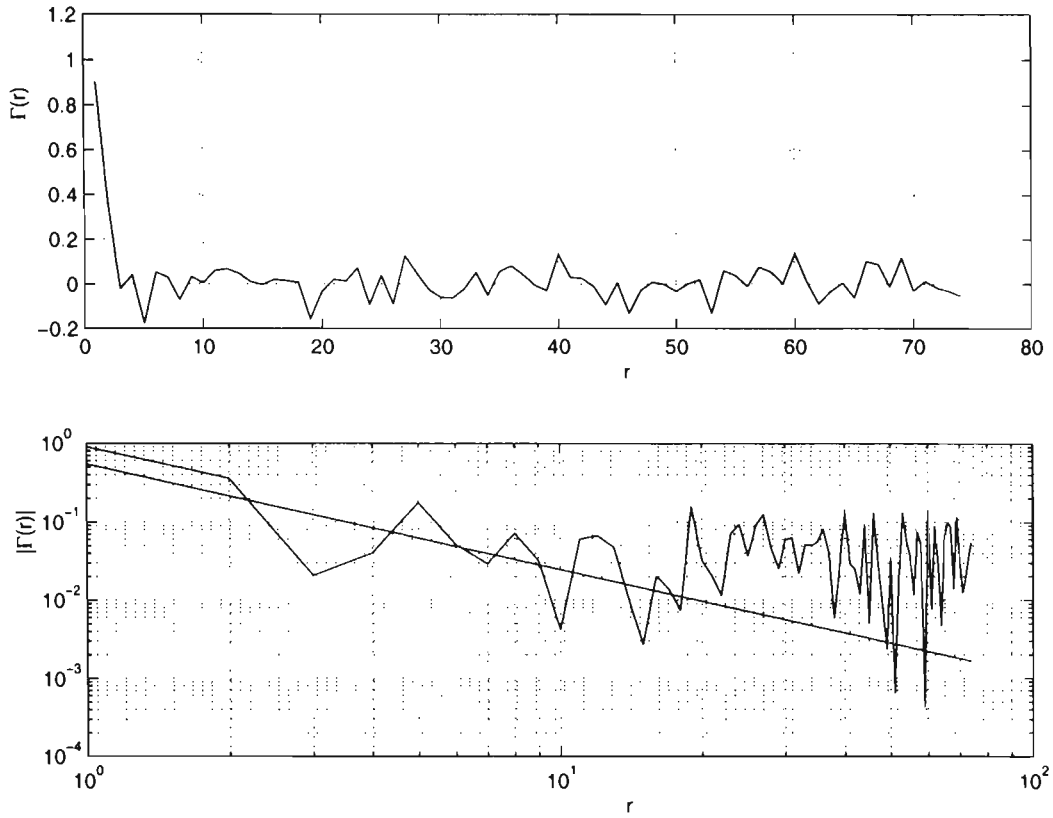


Figura 4.4: Función de correlación en escala lineal y en escala logarítmica. La línea recta corresponde al ajuste en ley de potencias.

se obtuvo por regresión lineal de los datos en el rango $1 \leq r \leq 50$.

4.2 Autosimilaridad en el modelo

Nuestro indicador de autosimilaridad es el comportamiento en ley de potencia de las funciones de estructura asociadas a “la carga del sistema observada a diferentes escalas”.

Dada la configuración $\omega \in \Omega_\Lambda$, la carga del sistema a escala r se define como:

$$\phi_r(\omega) := \sum_{|\mathbf{r}-\mathbf{c}|\leq r} |\omega(\mathbf{r}) - \bar{\omega}(r)|,$$

donde $\mathbf{c} \in \Lambda$ es el centro geométrico de la red Λ , y

$$\bar{\omega}(r) := E \left(\sum_{|\mathbf{r}-\mathbf{c}| \leq r} \omega(\mathbf{r}) \right).$$

En nuestros cálculos consideramos la autosimilaridad estadística respecto a la familia $\{\phi_r\}_r$.

A continuación describimos los cálculos realizados.

4.2.1 Cálculos

Durante la evolución del modelo generamos la matriz

$$h : \{1, 2, \dots, T\} \times \{1, 2, \dots, d\} \rightarrow N, \text{ donde } h(t, r) := \sum_{|\mathbf{r}-\mathbf{c}| \leq r} \omega^t(\mathbf{r}).$$

En nuestra simulación, $T = 30000$ es el tiempo total, y $d = 34$ es el radio de la red. Cada renglón de la matriz h define un ensemble de valores, a partir del cual podríamos determinar la distribución de uno de los observables ϕ_r . En lugar de eso, calculamos directamente las funciones de estructura:

$$S_q(r) := \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |h(t, r) - \bar{h}(r)|^q, \text{ con } \bar{h}(r) := \frac{1}{T} \sum h(t, r).$$

Cada función de estructura presenta un comportamiento en ley de potencias

$$S_q(r) \sim r^{\chi(q)}.$$

Llamamos ley de exponentes a la función $q \mapsto \chi(q)$. En caso de autosimilaridad estadística, esperamos que $\chi(q) = q\alpha$, donde α es el exponente de autosimilaridad.

4.2.2 Resultados

En la Figura 4.5 mostramos en escala logarítmica las funciones de estructura

$$r \mapsto S_q(r),$$

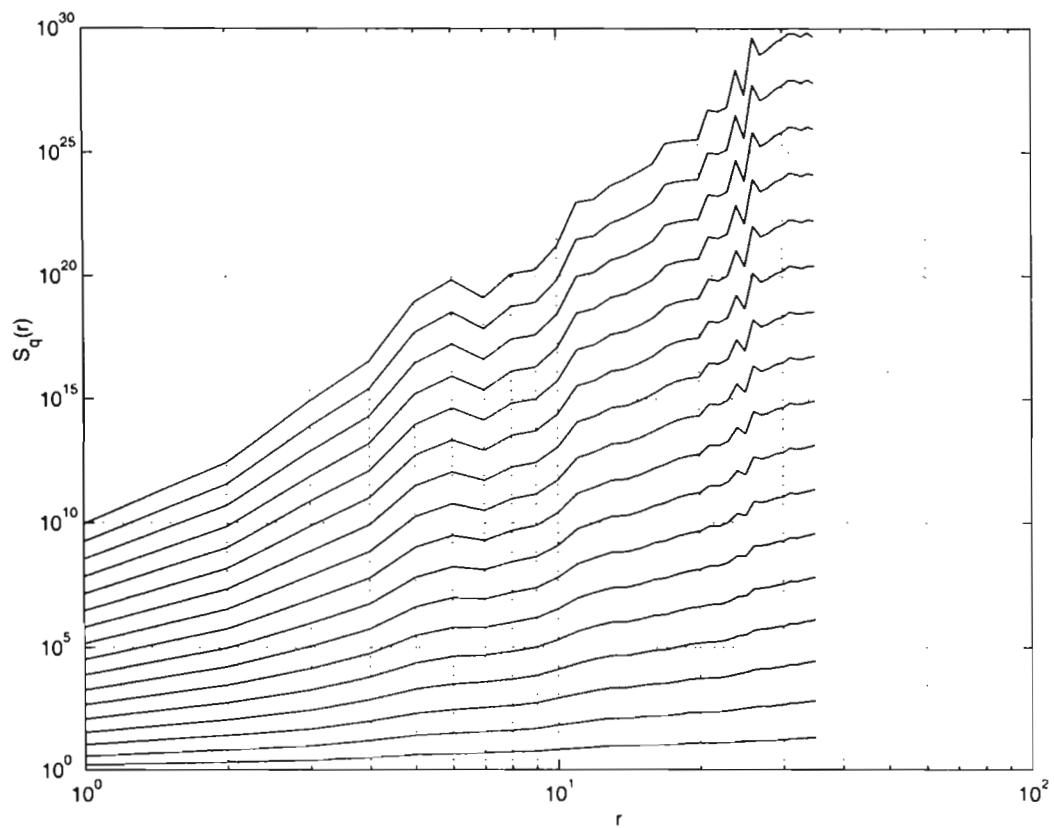


Figura 4.5: Las primeras funciones de estructura en escala logarítmica.

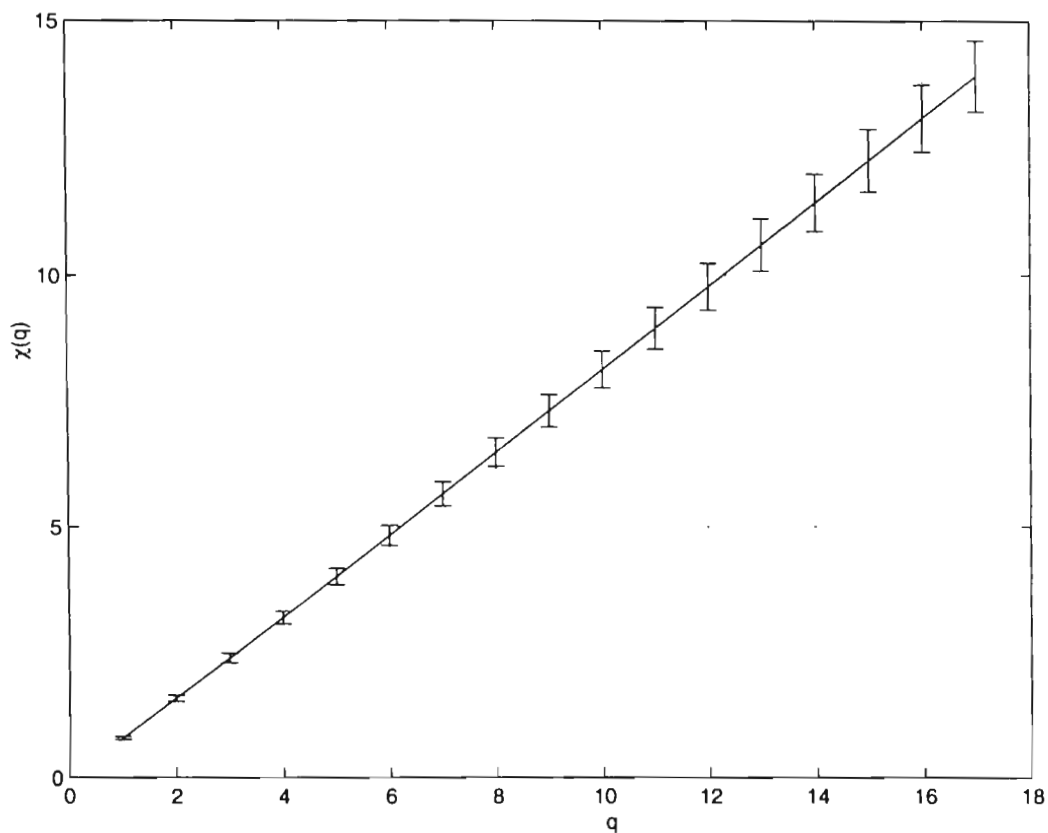


Figura 4.6: Ley de exponentes con su barra de error

para $q = 1, \dots, 17$ y $1 \leq r \leq 34$. Parece razonable aproximar las funciones de estructura por leyes de potencia,

$$S_q(r) \sim r^{\chi(q)}.$$

En la Figura 4.6 mostramos la ley de exponentes $q \mapsto \chi(q)$ con su correspondiente barra de error. Cada exponente se obtiene por regresión lineal de los datos en el rango $1 \leq r \leq 34$. Como esperabamos, la ley de exponentes resulta ser lineal,

$$\chi(q) \approx \alpha q, \text{ con } \alpha = 0.82 \pm 0.02.$$

Aquí cabe hacer notar que en el ensemble de arreglos $\omega : \Lambda \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$, donde cada entrada $\omega(\mathbf{r})$ se distribuye de manera idéntica e independiente

de las demás, ϕ_r no es otra cosa que la suma de $2\pi r^2$ variables aleatorias independientes, igualmente distribuidas. En este caso, el Teorema del Límite Central (que se puede consultar en [8] por ejemplo), predice la autosimilaridad con respecto a la familia $\{\phi_r\}_r$, con exponente $\alpha = 1$. En nuestros experimentos encontramos un exponente ligeramente menor.

Capítulo 5

Observaciones finales y Conclusiones

Hemos verificado que ciertas características de la criticalidad auto-organizada y de la autosimilaridad están presentes en el modelo de pilas de arena de Bak, Tang y Wiesenfeld. Una vez evidenciado esto, el siguiente paso es relacionar ambos fenómenos, primero en el cuadro de este sencillo modelo, y después en forma más en general. Es aconsejable realizar estudios numéricos más exhaustivos, y sobre todo llevarlos a cabo en redes de dimensiones mayores a las que nosotros consideramos en este trabajo. Pero una vez hecho esto, es necesario hacer estudios teóricos, siguiendo por ejemplo las técnicas de la teoría de los fenómenos críticos en mecánica estadística, para relacionar criticalidad auto-organizada y autosimilaridad. Es necesario sin embargo tomar en cuenta, y superar, la siguiente limitación en la formulación actual: Los indicadores de criticalidad auto-organizada miden propiedades de eventos "instantáneos", los que ocurren en el pasaje entre dos configuraciones del sistema. La autosimilaridad es una propiedad de observables sobre las configuraciones del sistema, y se puede medir en tiempo "natural". Para relacionar ambos fenómenos será necesario una formulación en donde coexistan los fenómenos "instantáneos" y los fenómenos que ocurren en el "tiempo natural".

Dentro del contexto que nosotros nos fijamos en los Capítulos 2 y 3, el modelo de pilas de arena muestra características de criticalidad auto-organizada y de autosimilaridad. Tomando en cuenta la analogía con los fenómenos críticos en mecánica estadística, nosotros conjeturamos que la presencia simultánea de estos dos fenómenos no es casual, sino que debe existir una relación en-

tre los dos. Esperaríamos que en una formulación más completa, estos dos fenómenos sean consecuencia de una cierta generalización de la autosimilitud estadística. Dejamos abierta esta línea de investigación.

Bibliografía

- [1] R. Badii and M. Politi, *Complexity: hierarchical structures and scaling in physics*, Cambridge University Press, 1997
- [2] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, *Self-organized criticality: an explanation of $1/f$ noise*, Phys. Rev. Lett. **59**(4) (1987) 381–384.
- [3] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, *Self-organized criticality*, Phys. Rev. A **38**(1) (1988) 364–374.
- [4] D. Dhar, *Self-organized critical state of sand pile automaton models*, Phys. Rev. Lett. **64**(14) (1990) 1613–1616.
- [5] D. Dhar and P. Ruelle, S. Sen and D.-N. Verman, *Algebraic aspects of abelian sandpile models*, J. Phys. A: Math. Gen. **28** (1995) 805–831.
- [6] K. Falconer, *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*, Wiley & Sons, 1990.
- [7] K. Falconer, *Techniques in fractal geometry*, Wiley & Sons, 1997.
- [8] W. Feller, *Introducción a la teoría de las probabilidades y sus aplicaciones Vol. I*, Editorial Limusa, 1993.
- [9] W. Feller, *Introducción a la teoría de las probabilidades y sus aplicaciones Vol. II*, Editorial Limusa, 1989.
- [10] U. Frisch, *Turbulence: a legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University press, 1995.
- [11] K. Huang, *Statistical mechanics*, John Wiley & Sons, 1963.

- [12] H. J. Jensen, *Self-organized criticality: emergent complex behavior in physical and biological Systems*, Cambridge Lecture Notes in Physics **10**, Cambridge University Press, 1998.
- [13] A. N. Kolmogorov, *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **30** (1941) 9–13 (réimpresso en Proc. R Soc. Lond. A **434** (1991) 9–13).
- [14] P. Meakin and S. Tolman, *Diffusion-limited Agregation*, en en “Fractals in the natural sciences”, editado por M. Fleischmann, D. J. Tildesley y R. C. Ball, Princeton University Press, 1989.
- [15] B. Plourde, F. Nori and M. Bretz, *Water Droplet Avalanches*, Phys. Rev. Lett. **71** (17) (1993) 2749–2752.
- [16] D. Sornette, *Self-Organized Criticality in Plate Tectonics*, en: “Spontaneous formation of space-time structures and criticality”, editado por T. Riste y D. Sherrington, NATO SCIENCE SERIES: C: Mathematical and Physical Sciences, Volume 349 Kluwer, 1991.
- [17] R. B. Stinchcombe, *Fractals, Phase Transitions and Criticality*, en “Fractals in the natural sciences”, editado por M. Fleischmann, D. J. Tildesley y R. C. Ball, Princeton University Press, 1989.
- [18] E. Ugalde, *Self-similarity and finite-time effects in turbulent sequences*, J. Phys. A: Math. Gen. **29** (1996) 4425–4443.
- [19] C. W. van Atta and J. Park, *Statistical self-similarity and inertial sub-range turbulence* en “Statistical models and turbulence”, Lect. Notes in Phys. **12**, 402–426, editado por M. Rosenblatt y C. W. van Atta, Springer Verlag, 1972.

Apéndice A

Listados para Matlab

A.1 Listado que genera los datos

```
%%% THIS SCRIPT GENERATES FILES CONTAINING
%%% 1. SEQUENCE OF ENERGIES AT DIFFERENT SCALES
%%% 2. SEQUENCE OF AVALANCHES' DURATION
%%% 3. SEQUENCE OF AVALANCHES' AREAS
%%% 4. SEQUENCE OF AVALANCHES' LINEAR LENGTHS
```

```
%%% INITIALIZATION
```

```
D=input('Dimensions of the lattice: ');
L=D(1);
M=D(2);
lattice=3*ones(L,M);
cx=floor((L-1)/2);
cy=floor((M-1)/2);
dim=min(cx,cy);
time=input('Number of Iterations: ');
```

```
%%% DEFINITION OF DISTANCES
```

```
dist=zeros(L,M); for i=1:L,
    for j=1:M,
        dist(i,j)=sqrt((i-cx)^2+(j-cy)^2);
```



```

        end
    end

    sitio=(1:L);

    neighs=zeros(L,dim*M); for r=1:dim,
        level=(r-1)*M;
        neighs(:,level+1:level+M)=(dist <= r);
    end

    %%% TRANSCIENT

    for t=1:7000,
        lattice=evolution(lattice);
    end

    %%% GENERATION OF DATA SETS

    energy=zeros(dim,time);
    tau=zeros(1,time);
    area=zeros(1,time);
    lineal=zeros(1,time);

    for t=1:time
        for r=1:dim
            level=(r-1)*M;
            mask=neighs(:,level+1:level+M);
            energy(r,t)=sum(sum(lattice.*mask));
        end
        prelattice=prevolution(lattice);
        tau(t)=prelattice(1,2*M+1);
        region=prelattice(:,M+1:2*M);
        area(t)=sum(sum(region));
        [x y]=find(region==1);
        n=length(x);
        if n >0

```

```

        xm=sum(x)/n;
        ym=sum(y)/n;
        lineal(t)=ceil(sum(((x-xm).^2+(y-ym).^2).^(1/2))/n);
    else lineal(t)=0;
    end
    lattice=prelattice(:,1:M);
end

eftiempo=find(tau > 0); eftau=tau(eftiempo);
eflineal=lineal(eftiempo); efarea=area(eftiempo);

save ./cenergy.mat energy
save ./ceftau.mat eftau
save ./cefarea.mat efarea
save ./ceflineal.mat eflineal
save ./ceftiempo.mat eftiempo

```

A.2 Listado que analiza los datos

```

%%% DATA ANALYSIS

load ./cenergy.mat
load ./ceftau.mat
load ./cefarea.mat
load ./ceflineal.mat
load ./ceftiempo.mat

[dim tiempo]=size(energy);

qmax=input('maximum order: ');
cg=input('cross graining: ');

```

```
struc=zeros(dim,qmax); for r=1:dim
    menergy=sum(energy(r,:))/tiempo;
    for q=1:qmax
        struc(r,q)=sum(abs(energy(r,:)-menergy).^q)/tiempo;
    end
end
```

```
dtau=frecf(eftau,cg); darea=frecf(efarea,cg);
lineal=round(eflineal); dlineal=frecf(lineal,dim);
```

```
save ./cdtau.mat dtau
save ./cdarea.mat darea
save ./cdlineal.mat dlineal
save ./cstruc.mat struc
```

A.3 Las funciones de evolución

```
function[salida]=prevolution(lattice);

[a b]=size(lattice);

salida=zeros(a,2*b+1); ri=round(rand(1)*a+1/2);
rj=round(rand(1)*b+1/2);

lattice(ri,rj)=lattice(ri,rj)+1;

while length(find(lattice > 3)) > 0,
    [x y]=find(lattice > 3);
    n=length(x);
    salida(1,2*b+1)=salida(1,2*b+1)+n;
    salida(x,y+b)=1;
    for k=1:n,
        lattice(x(k),y(k))=lattice(x(k),y(k))-4;
        if x(k)+1 <= a, lattice(x(k)+1,y(k))=
            lattice(x(k)+1,y(k))+1; end;
        if x(k)-1 >= 1, lattice(x(k)-1,y(k))=
            lattice(x(k)-1,y(k))+1; end;
        if y(k)+1 <= b, lattice(x(k),y(k)+1)=
            lattice(x(k),y(k)+1)+1; end;
        if y(k)-1 >= 1, lattice(x(k),y(k)-1)=
            lattice(x(k),y(k)-1)+1; end;
    end;
end
salida(:,1:b)=lattice;

function[salida]=evolution(lattice);

[a b]=size(lattice);

ri=round(rand(1)*a+1/2);
rj=round(rand(1)*b+1/2);
```

```

lattice(ri,rj)=lattice(ri,rj)+1;

while length(find(lattice > 3)) > 0,
    [x y]=find(lattice > 3);
    n=length(x);
    for k=1:n,
        lattice(x(k),y(k))=lattice(x(k),y(k))-4;
        if x(k)+1 <= a, lattice(x(k)+1,y(k))=
            lattice(x(k)+1,y(k))+1; end;
        if x(k)-1 >= 1, lattice(x(k)-1,y(k))=
            lattice(x(k)-1,y(k))+1; end;
        if y(k)+1 <= b, lattice(x(k),y(k)+1)=
            lattice(x(k),y(k)+1)+1; end;
        if y(k)-1 >= 1, lattice(x(k),y(k)-1)=
            lattice(x(k),y(k)-1)+1; end;
    end;
end
salida=lattice;

```

