



Universidad Autónoma de San Luis Potosí.



Facultad de Ciencias

Condiciones de estabilidad global en redes
dinámicas.

TESIS

Que para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias Aplicadas

PRESENTA:

Sarais Moreno Vázquez

ASESOR:

Dr. Valentin Afraimovich

Agradecimientos

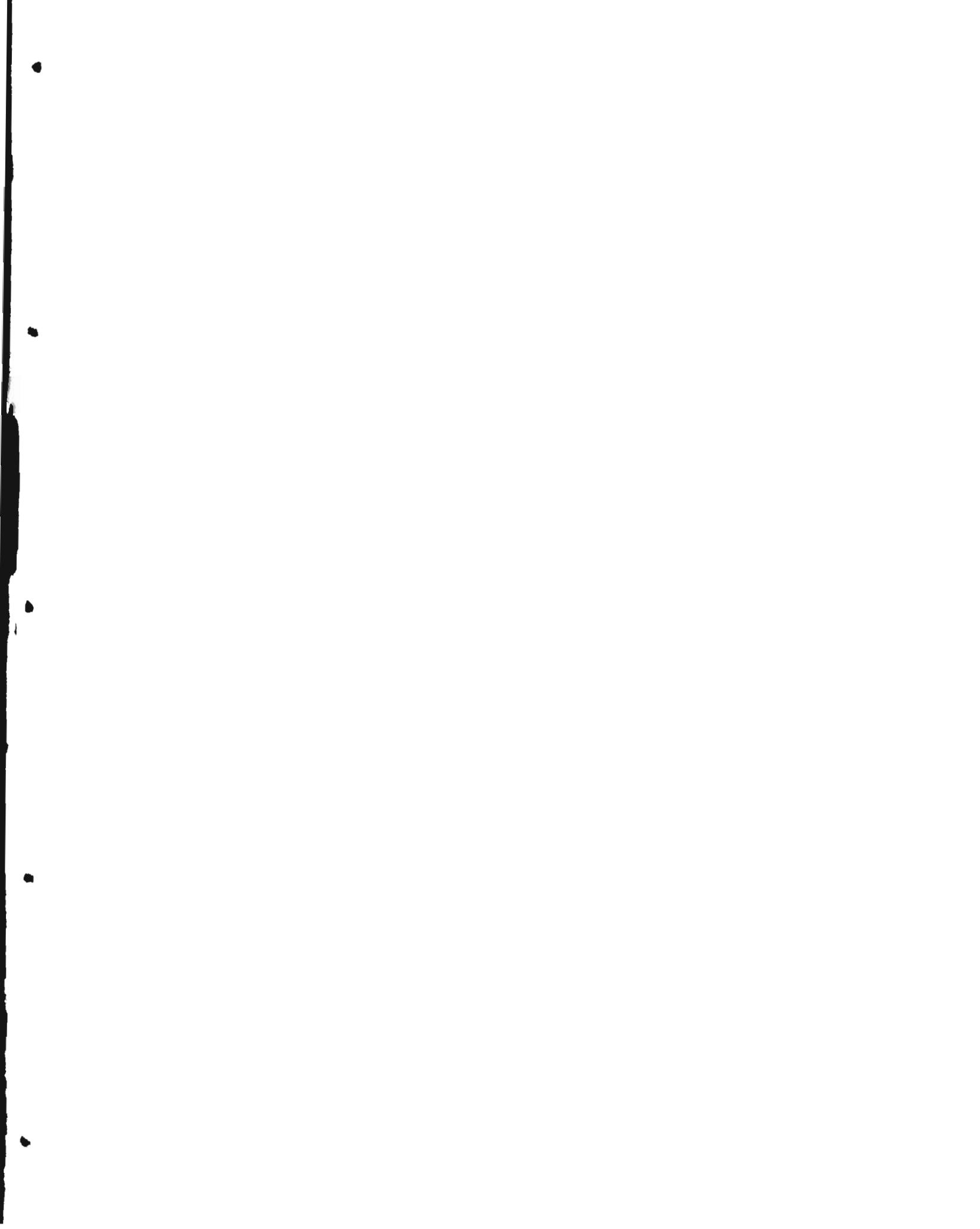
Agradezco profundamente a mis padres: Arturo Inés Moreno A. y María Guadalupe Vázquez G., mi principal soporte en la vida, así como a mis hermanas: Dalia y Olympia.

Muchas gracias a mi asesor: Dr. Valentin Afraimovich por haberme dado la oportunidad de hacer la tesis con él, por todo lo que me ha enseñado, por su tiempo y paciencia.

También agradezco a mis amigos por los ánimos y apoyo que me han brindado . gracias Blas, gracias Irma por ayudarme a que esta tesis estuviera mejor escrita.

No puedo dejar sin agradecer al Dr. Edgardo Ugalde, Dr. Antonio Morante y Dr. Alvaro Pérez, por el tiempo dedicado a la revisión de esta tesis.

Finalmente agradezco a las instituciones IICO– UASLP y CONACYT por haberme dado el apoyo económico para estudiar esta maestría.



Índice general

Introducción	5
1. Estabilidad global en redes activas	7
1.1. Definiciones principales	7
1.2. Dinámica simbólica	9
1.3. Condiciones Lipschitz y la presión topológica	14
1.4. Resultados principales	16
2. Otras Condiciones Suficientes	19
2.1. Forma general de un sistema y el mapeo interacción	19
2.2. Cálculo de la presión topológica.	21
2.3. Ejemplo	22
3. Sistemas con tiempo continuo	25
3.1. Aplicaciones a las ecuaciones diferenciales ordinarias	25
3.2. Ejemplo	29

4

4. Algunas demostraciones 33

5. Conclusiones 39

A. Fórmula general 43

Bibliografía 47

Introducción

Existen muchos modelos matemáticos de sistemas reales (por ejemplo, sistemas biológicos, ver [8]) que tienen la forma de redes dinámicas, es decir, un conjunto discreto de sistemas dinámicos interactuantes. Las redes dinámicas tiene una larga historia, la cual se remonta a la investigación de Huygens sobre el fenómeno de sincronización, ver [7]. Se logró un progreso esencial en los estudios numéricos de los sistemas dinámicos interactuantes con la introducción de redes de mapeos acoplados (de aquí en adelante serán denotados por sus siglas en inglés: CML), o más generalmente sistemas dinámicos en la red (a partir de aquí serán denotados por sus siglas en inglés: LDS), ver [5]. Con [4], empezaron estudios más rigurosos de los CML.

Las redes dinámicas están caracterizadas por su topología (la estructura de la red), por las interacciones entre los elementos (o subsistemas locales) asentados en los nodos de la red y por la dinámica intrínseca (evolución local) de esos subsistemas locales. En [1] fueron encontradas las condiciones para CMLs, bajo las cuales la dinámica es regular, de hecho, estos sistemas tienen un único punto fijo atractor. Nuestro trabajo es una generalización de los resultados en [1] para el caso de LDS con dimensión finita y para el caso de sistemas con tiempo continuo. La meta de este trabajo es analizar el efecto conjunto de los tres factores mencionados (la topología de la red, la interacción o acoplamiento y la dinámica local) cuando se usa dinámica simbólica para un sistema dinámico en la red generado por un mapeo $\mathcal{F} : \underline{X} \rightarrow \underline{X}$

donde $(\mathcal{F}\underline{x})_i = T_i(x_i) + F_i(\{x_j\})$, donde j pertenece a una vecindad de i , llamado red del sistema sobre un espacio \underline{X} . Los resultados principales proveen condiciones suficientes bajo las cuales \mathcal{F} tendrá una dinámica simple, es decir, \mathcal{F} tiene un solo punto fijo atractor (todas las trayectorias van a él cuando el tiempo va a infinito).

La estructura de este trabajo puede ser descrita como sigue: capítulo 1, sección 1: definiciones principales; sección 2: introducimos la dinámica simbólica para la evolución de redes dinámicas de tipo general; sección 3: relacionamos la fuerza de la dinámica local y la de las interacciones a la presión topológica de un sistema dinámico simbólico y proveemos fórmulas para el cálculo de la presión topológica; sección 4 presentamos los resultados principales. El resultado principal de el capítulo 1 se relaciona con el caso en el que todos los mapeos individuales son idénticos. En el capítulo 2 consideramos el caso en el que los sistemas individuales pueden ser diferentes, pero introducimos nuevas constantes de Lipschitz de distinta forma a como fue hecho en el capítulo 1: además el teorema principal es nuevamente formulado en términos de la presión topológica. En el capítulo 3 estudiamos sistemas de tiempo continuo y, basándonos sobre los resultados del capítulo 1, encontramos las condiciones para que el mapeo de Euler (este mapeo proviene de integrar las EDOs empleando el esquema de Euler) tenga un único punto fijo atractor. Entonces reescribimos esas condiciones para los sistemas con tiempo continuo, y así, descubrimos las condiciones para que estos sistemas tengan un único equilibrio atractor.

Todos los resultados están acompañados por ejemplos.

Capítulo 1

Estabilidad global en redes activas

1.1. Definiciones principales

Sea $T_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i \in \mathcal{M}$, donde \mathcal{M} es un conjunto finito de índices, una colección de mapeos de un espacio euclideo \mathbb{R}^n sobre sí mismo satisfaciendo las condiciones de Lipschitz:

$$L_i := \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{\rho(T_i x, T_i y)}{\rho(x, y)} < \infty, \quad (1.1)$$

donde

$$\rho(x_i, y_i) = \|x_i - y_i\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_i^j - y_i^j)^2}, \quad x_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^n)$$

Asumamos que $L := \max_i L_i$. El mapeo T_i es llamado un mapeo local, y el par (T_i, \mathbb{R}^n) genera un sistema dinámico local (o individual). Denotemos el producto directo de los sistemas (T_i, \mathbb{R}^n) dotados con la métrica uniforme $d(\underline{x}, \underline{y}) = \sup_i \rho(x_i, y_i)$ por $(\underline{T}, \underline{X})$. Los elementos $\underline{x} \in \underline{X}$ serán llamados vectores (o configuraciones) y sus coordenadas serán denotadas como $x_j = (\underline{x})_j$, $j \in \mathcal{M}$, i.e. $\underline{x} = \{x_j\}$.

Ejemplo 1 Sea $\mathcal{M} = \{1, 2, 3\}$, $T_i x_i = q_i x_i + a_i \sin(x_i)$. $0 < q_i < 1$, $a_i > 0$, se tiene que $L_i = \sup \left| \frac{dT_i}{dx_i} \right| = \sup |q_i + a_i \cos(x_i)| = (q_i + a_i)$.

Definición 1 Un mapeo $F : \underline{X} \rightarrow \underline{X}$ es llamado una interacción si

1. para cada $i \in \mathcal{M}$ existe una colección finita de índices $K_i \ni i$,
2. para cualquier $i \in \mathcal{M}$ existe una función continua

$$F_i : \bigoplus_{j \in K_i} X_j \rightarrow X_i, \quad X_j = \mathbb{R}^n,$$

satisfaciendo la siguiente condición de Lipschitz con una constante $\Lambda_i \geq 0$.

$$\rho(F_i(\{x_j\}), F_i(\{y_j\})) \leq \Lambda_i \sum_{j \in K_i} \rho(x_j, y_j). \quad (1.2)$$

Asumamos que $\Lambda := \max_i \Lambda_i$. Si $K_i = \{i\}$ entonces $F_i := Id$, el mapeo identidad de \mathbb{R}^n .

3. El mapeo F se define

$$(F(\underline{x}))_i := F_i(\{x_j\}), \quad i \in \mathcal{M}, \quad j \in K_i.$$

Definición 2 Un sistema dinámico generado por el mapeo \mathcal{F} tal que $(\mathcal{F}\underline{x})_i = T_i(x_i) + F_i(\{x_j\})$, $j \in K_i$, es llamado una red dinámica sobre \underline{X} .

Al sistema dinámico generado por los mapeos con la forma $(\mathcal{F}\underline{x})_i = T_i(x_i) + F_i(\{x_j\})$ se les llama *sistemas dinámicos en la red (LDS)*.

Nota 1 En el caso cuando el sistema $(\mathcal{F}\underline{x})_i$ es disipativo se deben considerar las constantes de Lipschitz dentro de una bola de disipación B .

Ejemplo 2 Usaremos el ejemplo 1 para introducir el siguiente sistema,

$$(\mathcal{F}\underline{x})_1 = q_1 x_1 + a_1 \sin(x_1) - \epsilon_1 (\sin(x_1)) \quad \epsilon_1 > 0,$$

$$(\mathcal{F}\underline{x})_2 = q_2 x_2 + a_2 \sin(x_2) + \epsilon_2 (-2 \sin(x_1) + \sin(x_2) + \sin(x_3)), \quad \epsilon_2 > 0.$$

$$(\mathcal{F}\underline{x})_3 = q_3 x_3 + a_3 \sin(x_3) + \epsilon_3 (\sin(x_2) - \sin(x_3)), \quad \epsilon_3 > 0,$$

donde

$$K_1 = \{1\}, \quad \Lambda_1 = \sup \left| \frac{dF_1}{dx_1} \right| = \epsilon_1,$$

ya que

$$\sup \left| \frac{dF_1}{dx_1} \right| = \sup |(-\epsilon_1)(\cos(x_1))| = \epsilon_1,$$

y por el ejemplo 1, se tiene que $L_1 = q_1 + a_1$.

De igual manera,

$$K_2 = \{1, 2, 3\}, \quad \Lambda_2 = 2\epsilon_2 \text{ y } L_2 = q_2 + a_2.$$

$$K_3 = \{2, 3\}, \quad \Lambda_3 = \epsilon_3 \text{ y } L_3 = q_3 + a_3.$$

Nuestro problema es encontrar condiciones suficientes bajo las cuales \mathcal{F} tendrá una dinámica simple, es decir, \mathcal{F} tiene un solo punto fijo atractor (todas las trayectorias van a él cuando n es suficientemente grande).

Nótese que en [1] se encontraron las condiciones suficientes para que redes de tipo general tuvieran esta dinámica global, siendo un ejemplo particular los CML, mientras que en este trabajo, se hace una generalización para el caso de LDS, que es el sistema dinámico generado por los mapeos que se describe en la definición 2.

1.2. Dinámica simbólica

Será útil para nosotros expresar la topología de interacciones en la forma de un grafo de conectividad.

Definición 3 *Un grafo de conectividad $G := G(\mathcal{M}, F)$ de la interacción F en \mathcal{M} es un grafo dirigido en el cual los vértices corresponden a los índices en \mathcal{M} . El grafo $G(\mathcal{M}, F)$ contiene la arista $j \rightarrow i$, $i, j \in \mathcal{M}$, comenzando en j y terminando en i si y solo si $j \in K_i$.*

Ejemplo 3 Para el ejemplo 2 el grafo de conectividad tiene la forma que se muestra en la Fig. 1.1.

Denotaremos ahora los vértices en G por los símbolos $1, 2, \dots, N$ y consideremos una matriz de transición de $N \times N$, $(a_{mk}) = A := A(\mathcal{M}, F)$ con entradas $\{0, 1\}$: $a_{mk} = 1$, si hay una arista que empieza en el vértice m y termina en el vértice k , de otra manera se tiene que $a_{mk} = 0$; $m, k \in \{1, 2, \dots, N\}$. La cadena topológica de Markov unilateral correspondiente (Ω_A^+, σ) , está bien definida. Su espacio de configuraciones Ω_A^+ consiste de todas las secuencias admisibles $\underline{i} = (i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, \dots)$, $i_k \in \{1, \dots, N\}$, tal que $a_{i_k i_{k+1}} = 1$ y $\sigma : \Omega_A^+ \rightarrow \Omega_A^+$ es el mapeo shift $(\sigma \underline{i})_k = (i)_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dotemos a Ω_A^+ con la métrica $dist(\underline{i}, \underline{j}) = \sum_{k=0}^{\infty} |i_k - j_k|/q^k$, $q > 1$.

Identificamos los estados de la cadena topológica de Markov (TMC) con los vértices $i \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Un cilindro no vacío $[i_0 \dots i_{n-1}] = \{(j_0 j_1 \dots) \in \Omega_A^+, j_0 = i_0, \dots, j_{n-1} = i_{n-1}\}$ es llamado admisible; la palabra $(i_0 \dots i_{n-1})$ es admisible si $[i_0 \dots i_{n-1}] \neq \emptyset$.

Ejemplo 4 La matriz de transición del ejemplo 3 tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se introducirá un pre-orden parcial en el conjunto de estados de la (TMC) (Ω_A^+, σ) (Aleksyev[3]). Decimos que i precede a j y escribimos $i \prec j$, si existe un cilindro admisible $[i_0, \dots, i_{n-1}]$, $n > 1$, tal que $i_0 = j$, $i_{n-1} = i$.

Un estado j es equivalente a i (i.e. $j \sim i$) si $i \prec j \prec i$. Por la definición 1, todo i pertenece a una clase de equivalencia E , entonces existe una descomposición disjunta

$\{1 \dots N\} = E^{(1)} \cup E^{(2)} \cup \dots \cup E^{(s)}$. Entonces un orden parcial es definido sobre el conjunto de las clases de equivalencia: $E^{(p)} \prec E^{(q)}$ si para cualquier par $j \in E^{(p)}$, $i \in E^{(q)}$ se tiene que $j \prec i$.

Ejemplo 5 Para el grafo de la Fig. 1.1, $E^{(1)} = \{1\}$ y $E^{(2)} = \{2, 3\}$.

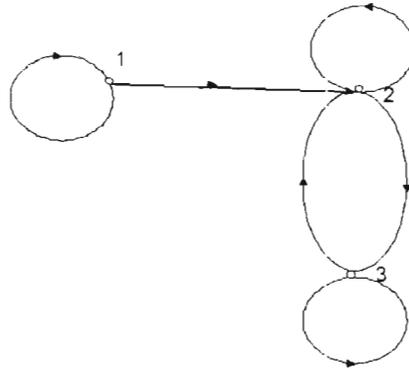


Figura 1.1: Grafo para una TMC con una descomposición no trivial.

Recordemos ahora la definición de puntos no errantes de un sistema dinámico. Sea X el espacio fase de un sistema dinámico generado por un mapeo $f : X \rightarrow X$.

Definición 4 Un punto $x \in X$ es no errante si para cualquier conjunto abierto (vecindad) $U \ni x$ existe un entero $n > 0$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Un punto es llamado un punto errante si no es un punto no errante.

Se usará el siguiente resultado, extraído de [3], para definir subconjuntos invariantes de (Ω_A^+) (ver Fig. 1.2) lo que permitirá el estudio particular de palabras admisibles.

TEOREMA DE LA DESCOMPOSICION ESPECTRAL

1. El conjunto NW de los puntos no errantes de una TMC (Ω_A^+, σ) puede ser representado como una unión disjunta

$$NW = \Omega^{(1)} \cup \dots \cup \Omega^{(s)},$$

tal que para todo $k \in \{1, \dots, s\}$:

- (a) la restricción $\sigma|_{\Omega^{(k)}}$ es una TMC relacionada a la clase $E^{(k)}$ de equivalencia y $\Omega^{(k)} = \Omega_{A(k)}$, donde $A(k)$ es la matriz de transición correspondiente, claramente $A(k)$ es una submatriz (de hecho un bloque diagonal) de A .
- (b) el mapeo shift $\sigma|_{\Omega^{(k)}}$ es transitivo topologicamente, es decir, σ es transitivo topologicamente si y solo si existe un r tal que $A^r(k)$ es primitiva,
- (c) el orden parcial para los componentes $\Omega^{(k)}$ está bien definido: $\Omega^{(p)} \prec \Omega^{(q)}$ si $E^{(p)} \prec E^{(q)}$.

2. El conjunto W de los puntos errantes de la TMC (Ω_A^+, σ) puede ser representado como una unión disjunta

$$W = \cup_{k,m=1}^s W_{km},$$

donde

- (a) $W_{km} \neq \emptyset$ si y solo si $k \neq m$ y $\Omega^{(m)} \prec \Omega^{(k)}$.
- (b) si $\underline{w} = (i_0 i_1 \dots) \in W_{km}$ entonces $i_0 \in E^{(k)}$ y $\sigma^n \underline{w} \in \Omega^{(m)}$ para un $0 < n < \infty$.
- (c) si $\Omega^{(m)} \prec \Omega^{(k)}$ entonces para todo $\underline{j} \in \Omega^{(k)}$, $\underline{i} \in \Omega^{(m)}$ y para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\underline{w} \in W_{km}$ tal que $\text{dist}(\underline{w}, \underline{j}) < \epsilon$ y $\sigma^n \underline{w} = \underline{i}$ para algún $0 < n < \infty$.

Para cualquier $k \in \{1, \dots, s\}$, sea

$$\Sigma^{(k)} := \bigcup_{n=2}^{\infty} \{[i_0 \dots i_{n-1}], i_{n-1} \in E^{(k)}\}$$

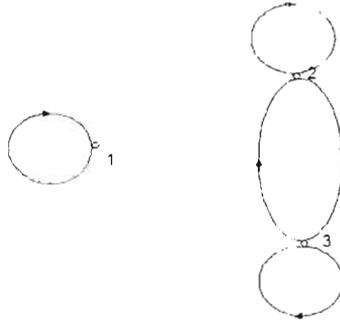


Figura 1.2: Los grafos para $\Omega^{(1)}$ y $\Omega^{(2)}$ en el ejemplo 2.

el conjunto de todos los cilindros admisibles terminando en algún estado en $E^{(k)}$ y sea

$$P_k := \{m : E^{(k)} \prec E^{(m)}\} \cup \{k\}$$

el conjunto de índices relacionados al predecesor de $E^{(k)}$ de acuerdo al orden parcial introducido. El siguiente lema es un corolario directo del teorema de la descomposición espectral.

Lema 1 *La clausura*

$$\overline{\Sigma^{(k)}} = \left(\bigcup_{m \in P_k} \Omega^{(m)} \right) \cup \left(\bigcup_{m_1 \neq m_2, m_2 \in P_k} W_{m_1 m_2} \right).$$

Se sigue de este lema que la restricción $\sigma|_{\overline{\Sigma^{(k)}}}$ es una *TMC*. Denotamos esto por (Ω_{R_k}, σ) , donde R_k es la matriz de transición correspondiente.

1.3. Condiciones Lipschitz y la presión topológica

Recordemos definiciones y resultados conocidos de dinámica simbólica que nos serán útiles para dar las condiciones suficientes para que \mathcal{F} tenga una dinámica simple.

Sea (Ω_A^+, σ) una TMC y sea $\mathcal{K}^n = \#\{\text{cilindros admisibles de longitud } n+1\} = \#\{[i_0 i_1 \dots i_{n-1} i_n]\} = \sum_{(i_0 i_1 i_2 \dots i_n)}$.

Entropía topológica. [2]

El número

$$h := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathcal{K}^n}{n}$$

es llamado la entropía topológica del mapeo shift σ_A .

Proposición 1 *Si A es una matriz de $m \times m$.*

1. *si $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_m|$, entonces la entropía topológica está dada por $h = \ln |\lambda_1|$, con λ_k eigenvalores de A .*

Si A es una matriz primitiva satisface lo asumido en el Teorema de Perron-Frobenius [6], por lo que sus eigenvalores λ_k pueden ser ordenados en tal modo que $\lambda_1 \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_m|$, entonces la entropía topológica del shift σ_A es $h = \ln \lambda_1$.

2. $\mathcal{K}^n \leq c(n)e^{hn}$, con $c(n)$ un polinomio en $\mathbb{R}(n)$.

Presión topológica. [2]

Sea $\varphi : \Omega_A^+ \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Dado un cilindro no vacío $\underline{W} = [i_0 i_1 \dots i_n]$, sea $S_n(\underline{W}) = \sup_{\underline{w} \in \underline{W}} \sum_{l=0}^n \varphi(\sigma^l \underline{w})$, entonces $\Gamma(\varphi, n) = \sum_{\underline{W} \in \mathcal{W}_n} e^{S_n(\underline{W})}$, donde \mathcal{W}_n es

una colección de cilindros no vacíos de longitud $n + 1$. Se puede probar (ver [2]) que existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \Gamma(\varphi, n)}{n} =: P(\varphi),$$

$P(\varphi)$ es la presión topológica del potencial φ sobre el sistema dinámico simbólico (Ω_A^+, σ) .

Si $\varphi(i_0 i_1 \dots) = \varphi(i_0)$, entonces, $S_n(\underline{W}) = \varphi(i_0) + \varphi(i_1) + \dots + \varphi(i_n)$ y $\Gamma(\varphi, n) = \sum_{\underline{W} \in W_n} \prod_{k=0}^n e^{\varphi(i_k)}$, introduciendo $\rho_i = e^{\varphi(i)}$, $\varphi(i) = \ln \rho_i$, se tiene que

$$\Gamma(\varphi, n) = \sum_{\underline{W} \in W_n} \prod_{k=0}^n e^{\varphi(i_k)} = \sum_{\underline{W} \in W_n} \prod_{k=0}^n \rho_{i_k}.$$

Proposición 2 Considerando que la matriz $B = A \text{diag } \rho_i$, se tiene que

1. la presión topológica es

$$P(\varphi) = \ln |\gamma_1|.$$

donde $|\gamma_1|$ es el radio espectral de la matriz B .

2. $\Gamma(\varphi, n) \leq c_1(n) e^{P(\varphi)n}$, $c_1(n)$ es un polinomio en $\mathbb{R}(n)$.

Recordemos que tenemos identificados los vértices en G con los símbolos $1, 2, \dots, N$, y el espacio $Y = \bigotimes_{m=1}^N X_m$, $X_m \equiv X$ dotado con la distancia $d(\underline{x}, \underline{y}) = \sup_m \rho(x_m, y_m)$

Sea $Y^{(k)} = \bigotimes_{m \in P_k} X_m$, $X_m \equiv X$. el siguiente lema es un corolario directo de las definiciones.

Lema 2 El conjunto $Y^{(k)}$ es \mathcal{F} -invariante en el sentido de que $(\mathcal{F}\underline{x})_m = (\mathcal{F}\underline{y})_m$, $m \in P_k$ dado que $(\underline{x})_j = (\underline{y})_j$ para todo $j \in P_k$.

Entonces la restricción de \mathcal{F} a $Y^{(k)}$ está bien definida, y la denotamos por \mathcal{F}_k .
 $k = 1, 2, \dots, s$.

Ahora estimamos la constante de Lipschitz de los mapeos \mathcal{F}_k^n , $n \in \mathbb{N}$. Consideremos $\sum_{i_0} := 1$ y $\Lambda_{i_{-1}} := 1$, tomando en cuenta que $\Lambda_{i_0, \dots, i_{j-1}} = \Lambda_{i_0} \Lambda_{i_1} \dots \Lambda_{i_{j-1}}$, para poder demostrar el siguiente lema.

Lema 3 *Asumiendo que $L_i = L_j = L$ y que $\Lambda_i \neq \Lambda_j$, se tiene que*

$$d(\mathcal{F}_k^n \underline{x}, \mathcal{F}_k^n \underline{y}) \leq \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} L^{n-j} \sum_{(i_j, i_{j-1}, \dots, i_0)} \Lambda_{i_0, \dots, i_{j-1}} \right) d(\underline{x}, \underline{y}). \quad (1.3)$$

donde la suma es tomada sobre todas las palabras admisibles de longitud $j+1$ de Ω_{R_k} , $i_n \in E^{(k)}$.

Hemos incluido la demostración de este lema en el capítulo 4: *Algunas demostraciones*, por considerarse extensa.

1.4. Resultados principales

Los siguientes dos resultados son importantes para llegar al objetivo que nos hemos planteado en este capítulo, es decir, encontrar las condiciones suficientes bajo las cuales \mathcal{F} tendrá una estabilidad global, puesto que nos permitirán construir la prueba del resultado principal. Del siguiente corolario se sigue que la distancia entre los mapeos \mathcal{F}_k^n está acotada, esto se deriva del lema anterior.

Corolario 1

$$d(\mathcal{F}_k^n \underline{x}, \mathcal{F}_k^n \underline{y}) \leq c(n)(L + e^{P^{(k)}(\varphi)})^n d(\underline{x}, \underline{y}), \quad (1.4)$$

donde $P^{(k)}(\varphi)$ es la presión topológica de (Ω_{R_k}, σ) .

Demostración. De (1.3) se sigue que:

$$\begin{aligned} d(\mathcal{F}_k^n \underline{x}, \mathcal{F}_k^n \underline{y}) &\leq \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} L^{n-j} \sum_{(i_0, \dots, i_{j-1})} \Lambda_{i_0, \dots, i_{j-1}} \right) d(\underline{x}, \underline{y}) \\ &\leq \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} L^{n-j} c(j) e^{P^{(k)}(\varphi)j} d(\underline{x}, \underline{y}) \leq c(n) (L + e^{P^{(k)}(\varphi)})^n d(\underline{x}, \underline{y}) \end{aligned}$$

donde $P^{(k)}(\varphi)$ es la presión topológica de (Ω_{R_k}, σ) . ■

El siguiente resultado se sigue directamente del corolario 1.

Teorema 1 Si $(L + e^{P^{(k)}(\varphi)}) < 1$, entonces, \mathcal{F}_k^n es un mapeo contractivo para $n \geq n_0$.

Con este resultado, estamos por lograr el objetivo deseado.

Corolario 2 \mathcal{F}_k tiene un único punto fijo estable.

Demostración. Supongamos que \underline{x}_n es un punto fijo de \mathcal{F}_k^n , y que \underline{x}_{n+1} es un punto fijo de \mathcal{F}_k^{n+1} , es decir, $\mathcal{F}_k^n \underline{x}_n = \underline{x}_n$ y $\mathcal{F}_k^{n+1} \underline{x}_{n+1} = \underline{x}_{n+1}$, luego,

$$|\mathcal{F}_k^{n(n+1)} \underline{x}_n - \mathcal{F}_k^{(n+1)n} \underline{x}_{n+1}| =$$

$$\begin{aligned} &|\mathcal{F}_k^n(\mathcal{F}_k^n(\mathcal{F}_k^n \dots (\mathcal{F}_k^n \underline{x}_n) \dots)) - \mathcal{F}_k^{n+1}(\mathcal{F}_k^{n+1}(\mathcal{F}_k^{n+1} \dots (\mathcal{F}_k^{n+1} \underline{x}_{n+1}) \dots))| \\ &= |\underline{x}_n - \underline{x}_{n+1}| \leq c(n(n+1))(L + e^{P^{(k)}(\varphi)})^{n(n+1)} |\underline{x}_n - \underline{x}_{n+1}|, \end{aligned}$$

donde si n es suficientemente grande $c(n(n+1))(L + e^{P^{(k)}(\varphi)})^{n(n+1)} \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$ entonces $\underline{x}^* = \underline{x}_n = \underline{x}_{n+1}$, es decir, los \mathcal{F}_k^n tienen un único punto fijo cuando n es suficientemente grande.

Probaremos que \underline{x}^* es un punto fijo de \mathcal{F}_k .

Como acabamos de mostrar, $\mathcal{F}_k^{n+1} \underline{x}^* = \underline{x}^*$ y $\mathcal{F}_k^n \underline{x}^* = \underline{x}^*$, entonces,

$$\mathcal{F}_k^{n+1} \underline{x}^* = \mathcal{F}_k \mathcal{F}_k^n \underline{x}^* = \mathcal{F}_k \underline{x}^* = \underline{x}^*.$$

Luego \underline{x}^* es el único punto fijo de \mathcal{F}_k , ya que si existiera otro \underline{y}^* tal que $\mathcal{F}_k \underline{y}^* = \underline{y}^*$,

entonces $\mathcal{F}_k^n \underline{y}^* = \mathcal{F}_k \mathcal{F}_k \mathcal{F}_k \dots \mathcal{F}_k \underline{y}^* = \mathcal{F}_k \underline{y}^* = \underline{y}^*$, luego, $\underline{y}^* = \underline{x}^*$.

\underline{x}^* es atractor. En efecto, si $\mathcal{F}_k^n \underline{x}^* = \underline{x}^*$ y estimando, $|\mathcal{F}_k^n \underline{x} - \mathcal{F}_k^n \underline{x}^*| \leq c(n)(L + e^{\mathbb{P}^{(k)}(\varphi)})^n |\underline{x} - \underline{x}^*|$, luego como $(L + e^{\mathbb{P}^{(k)}(\varphi)})^n$ tiende a 0 cuando n es suficientemente grande, entonces $|\mathcal{F}_k^n \underline{x} - \mathcal{F}_k^n \underline{x}^*| = |\mathcal{F}_k^n \underline{x} - \underline{x}^*| \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$, es decir, $\mathcal{F}_k^n \underline{x} \rightarrow \underline{x}^*$, cuando $n \rightarrow \infty$.

Queda demostrado que \mathcal{F}_k tiene un único punto fijo atractor puesto que todas las trayectorias van a este punto cuando n tiende a infinito. ■

Nótese que los resultados anteriores se obtuvieron de asumir que las constantes de Lipschitz del mapeo interacción son distintas pero las constantes de Lipschitz de los mapeos individuales son iguales, entonces el siguiente resultado se da si las constantes de Lipschitz de los mapeos interacción también son iguales.

Corolario 3 Si $\Lambda_i = \Lambda$, entonces, $e^{\mathbb{P}^{(k)}(\varphi)} = \Lambda e^{h^{(k)}}$, entonces, las condiciones de estabilidad pueden ser escritas como $L + \Lambda e^{h^{(k)}} < 1$, dado que $(L + e^{\mathbb{P}^{(k)}(\varphi)}) < 1$, donde $h^{(k)}$ es la entropía topológica de (Ω_{R_k}, σ) .

Capítulo 2

Otras Condiciones Suficientes

2.1. Forma general de un sistema y el mapeo interacción

Cosideremos el siguiente caso general de un mapeo interacción.

$$\bar{x}_i = M_i(\{x_j\})_{j \in K}. \quad (2.1)$$

Nuestro objetivo, así como lo hicimos para el caso de LDS, será encontrar las condiciones suficientes para que 2.1 tenga una estabilidad global, es decir M tiene un punto fijo atractor global.

Como en el capítulo anterior, utilizaremos dinámica simbólica en base a un grafo de conectividad. Nuevamente utilizaremos el orden parcial mencionado anteriormente y el teorema de la descomposición espectral. pero la obtención de las constantes de Lipschitz se llevará a cabo de manera distinta. Para evitar complicaciones no necesarias denotemos en este capítulo a la restricción $M_k =: M$.

Asumamos que el sistema (2.1) es disipativo, es decir que existe una bola de disipación B , $\sum_i |x_i|^2 \leq R$, tal que para cualquier condición inicial $\underline{x} \in B$, sea $\underline{x} = \{x_i\}$, existe n_0 tal que $M^n(\underline{x}) \in B$, para $n \geq n_0$.

Ahora estimamos la constante de Lipschitz de los mapeos M^n , $n = 1, 2, 3, \dots$ empleando $\max_{\underline{x} \in B} \left| \frac{\partial M}{\partial x_j} \right| := \lambda_{ij}$ para poder demostrar el siguiente lema.

Lema 4

$$d(M^n \underline{x}, M^n \underline{y}) \leq \left(\sum_{(i_n \dots i_0)} \prod_{j=0}^{n-1} \lambda_{i_j i_{j+1}} \right) d(\underline{x}, \underline{y}), \quad (2.2)$$

donde la suma es tomada sobre todas las palabras admisibles de longitud $n+1$ de Ω_{R_k} , $i_n \in E^{(k)}$.

Hemos incluido la demostración de este lema en el capítulo 4: *Algunas demostraciones*, por considerarse extensa.

Representaremos las constantes de Lipschitz en (2.2) en una forma más conveniente. Introduciendo la función $\varphi : \Omega_{R_k} \rightarrow \mathbb{R}$ haciendo $\varphi(i_0 i_1 i_2 \dots) := \ln \lambda_{i_0 i_1}$. Entonces

$$\Gamma_k(n, \varphi) := \sum_{(i_n \dots i_0)} \prod_{j=0}^{n-1} \lambda_{i_j i_{j+1}} = \sum_{\underline{w} \in \{i_n \dots i_0\}} e^{\sum_{m=0}^{n-1} \varphi(\sigma^m \underline{w})},$$

donde la suma es tomada sobre el mismo conjunto de palabras admisibles como en (2.2). Es bien conocido que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \Gamma_k(n, \varphi)}{n} =: P^{(k)}(\varphi),$$

donde $P^{(k)}(\varphi)$ es la presión topológica de la función φ sobre la TMC (Ω_{R_k}, σ) . Además $\Gamma_k(n, \varphi)$ se porta asintóticamente bien como $e^{(n P^{(k)}(\varphi))}$ cuando $n \rightarrow \infty$. Luego, hemos probado lo siguiente.

Teorema 2 Si $P^{(k)}(\varphi) < 0$, entonces existe un punto fijo atractor global para el mapeo M .

2.2. Cálculo de la presión topológica.

En esta sección explicaremos cómo calcular la presión topológica en términos del grafo G y las constantes λ_{ij} .

Nuestra función φ depende solo de los primeros dos símbolos de la secuencia. La fórmula más simple puede ser obtenida si φ depende solo de un símbolo. Definamos los estados de la nueva TMC como las aristas $\{(ij)\}$ del grafo G . Se dice que hay una transición de la arista (ij) a la arista (lm) si y solo si $j = l$. Denotemos las aristas $\{(ij)\}$ por los nuevos símbolos $\{1, 2, \dots, \bar{N}\}$, por \bar{A} la nueva matriz de transición correspondiente y por $(\Omega_{\bar{A}}, \sigma)$ la nueva TMC. Se conoce que (Ω_A, σ) y $(\Omega_{\bar{A}}, \sigma)$ son topológicamente conjugadas. Sea $\Omega_{\bar{R}_k}$ la imagen de Ω_{R_k} bajo esta conjugación y $(\Omega_{\bar{R}_k}, \sigma)$ la TMC correspondiente. Si la arista (ij) corresponde a un símbolo $m \in \{1, \dots, \bar{N}\}$, entonces $\psi(m) := \varphi(ij)$. Luego, la función $\psi: \Omega_{R_k} \rightarrow \mathbb{R}$ está bien definida donde $\psi(i_0 i_1 \dots) = \psi(i_0)$, $(i_0 i_1 \dots) \in \Omega_{\bar{R}_k}$. Sea $\psi(m) := \ln \mu_m$, $m \in \{1, \dots, \bar{N}\}$, entonces $\Gamma(\varphi, n) = \Gamma(\psi, n) = \sum_{(i_0 \dots i_{n-1} i_n)} \prod_{m=0}^n \mu_{i_m}$.

Proposición 3 La suma $\Gamma(\psi, n)$ satisface la igualdad

$$\Gamma(\psi, n) = \vec{R} (\bar{R}_k \text{diag}(\mu_1 \dots \mu_{\bar{N}}))^n E^T,$$

donde $\vec{R} = (\mu_1, \dots, \mu_{\bar{N}})$, $E = (1, 1, \dots, 1)$.

Corolario 4 La presión topológica satisface la igualdad

$$P^{(k)}(\varphi) = \ln |r_k|,$$

donde r_k es el eigenvalor máximo de la matriz $\bar{R}_k \text{diag}(\mu_1 \dots \mu_{\bar{N}})$.

2.3. Ejemplo

Consideremos los siguientes mapeos:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \\ \bar{x}_2 &= \alpha f(x_2) + \beta f(x_1)\end{aligned}\tag{2.3}$$

donde $f(x) = \arctan(x)$, encontraremos condiciones para $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tal que el sistema (2.3) sea globalmente estable, i.e., tendrá un punto fijo asintóticamente estable.

A continuación se calculan las constantes de Lipschitz (ver Fig. 2.1).

$$\begin{aligned}\sup_{\underline{x} \in B} \left| \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_1} \right| &= \alpha \max \left| \frac{1}{1+x_1^2} \right| = \lambda_{11} = \alpha, \\ \sup_{\underline{x} \in B} \left| \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_2} \right| &= \beta \max \left| \frac{1}{1+x_2^2} \right| = \lambda_{12} = \beta, \\ \sup_{\underline{x} \in B} \left| \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_1} \right| &= \beta \max \left| \frac{1}{1+x_1^2} \right| = \lambda_{21} = \beta, \\ \sup_{\underline{x} \in B} \left| \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_2} \right| &= \alpha \max \left| \frac{1}{1+x_2^2} \right| = \lambda_{22} = \alpha.\end{aligned}$$

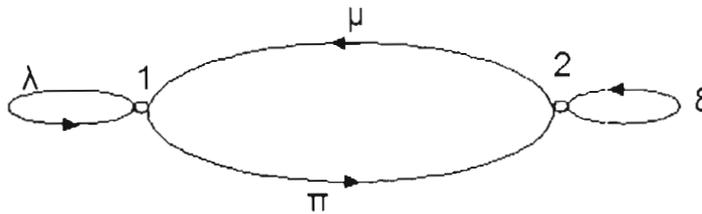


Figura 2.1: Ejemplo: El grafo para la TMC (Ω_C^+, σ) , $K_1 = \{1, 2\}$, $K_2 = \{1, 2\}$.

Utilizando el procedimiento referido en la sección 2.2, renombramos los vértices $11 = I$, $12 = II$, $21 = III$ y $22 = VI$ (ver Fig. 2.2).

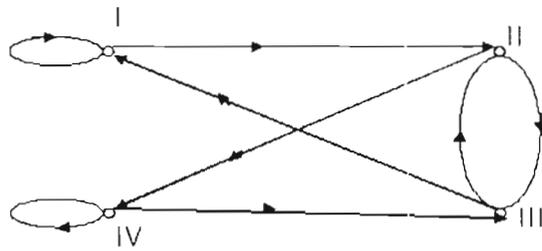


Figura 2.2: Ejemplo: El grafo para la TMC (Ω_A^+, σ) .

para obtener la nueva matriz de transición:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

con $\lambda_{11} = \mu_I$, $\lambda_{12} = \mu_{II}$, $\lambda_{21} = \mu_{III}$ y $\lambda_{22} = \mu_{IV}$.

Por el corolario 4, calculamos

$$B = A \operatorname{diag} \Lambda_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

entonces, la ecuación característica para la matriz B es:

$$\lambda^4 - 2\alpha\lambda^3 + \lambda^2(\alpha^2 - \beta^2) = 0,$$

$\lambda^4 - 2\alpha\lambda^3 + \lambda^2(\alpha^2 - \beta^2) = \lambda^2(\lambda^2 - 2\alpha\lambda + (\alpha^2 + \beta^2)) = 0$, de aquí que $\lambda_{1,2} = 0$,
 $\lambda_3 = \alpha + \beta$ y $\lambda_4 = \alpha - \beta$.

Luego por el Teorema 2, si $\ln |\alpha + \beta| < 0$ entonces el sistema (2.3) tiene un punto fijo atractor global.

Nota 2 De acuerdo con el teorema de la descomposición espectral todos los resultados son válidos para un subsistema determinado por cualquier subgrafo G_k .

Capítulo 3

Sistemas con tiempo continuo

3.1. Aplicaciones a las ecuaciones diferenciales ordinarias

Consideremos la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + F_i(\{x_j\})_{j \in K_i}, \quad (3.1)$$

donde f_i y F_i , son funciones diferenciables.

Como planteamos en la introducción, el objetivo de éste capítulo es probar que (3.1) tiene un único punto de equilibrio atractor con las técnicas ya descritas en el primer capítulo. A continuación daremos al sistema (3.1) la forma del mapeo de Euler para poder utilizar precisamente esas técnicas.

Reemplacemos la derivada por las diferencias:

$$\frac{x_i(t + \tau) - x_i(t)}{\tau} = f_i(x_i) + F_i(\{x_j\})_{j \in K_i},$$

para obtener el llamado mapeo de Euler:

$$\underline{x} \longrightarrow H_\tau(\underline{x}) :$$

$$\bar{x}_i = x_i + \tau f_i(x_i) + \tau F_i(\{x_j\})_{j \in \mathcal{K}},$$

Se requiere la siguiente suposición, ya que un sistema disipativo favorece la aparición de un atractor.

Suposición 1. El sistema (3.1) es disipativo, es decir que existe una bola de disipación B , tal que para cualquier condición inicial \underline{x}_0 , sea $\underline{x} = \{x_i\}$, existe t_0 tal que $\underline{x}(t, \underline{x}_0) \in B$, para $t \geq t_0$.

Procedemos como sigue para encontrar las constantes de Lipschitz necesarias para poder lograr nuestro objetivo.

Sea $x_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^n)$, $f_i = (f_i^1, f_i^2, \dots, f_i^n)$, usaremos la norma euclídeana. Sea $L_i := \max_{\underline{x} \in B} \|I + \tau E_i\|$, donde I es la matriz identidad de $n \times n$ y

$$E_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_i^1}{\partial x_i^1} & \cdots & \frac{\partial f_i^1}{\partial x_i^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_i^n}{\partial x_i^1} & \cdots & \frac{\partial f_i^n}{\partial x_i^n} \end{pmatrix}.$$

Sean

$$L_\tau := \max_i L_i := \max_i \left(\max_{\underline{x} \in B} \|I + \tau E_i\| \right)$$

y

$$\Lambda_i := \tau \max_{\underline{x} \in B} \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_{j \in \mathcal{K}}} \right|, \text{ donde } \Lambda_i = \tau \tilde{\Lambda}_i.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\|I + \tau E_i\|^2 &= \max_{\|x_i\|=1} \|(I + \tau E_i)x_i\|^2 = \max_{\|x_i\|=1} ((I + \tau E_i)x_i, (I + \tau E_i)x_i) \\
&= \max_{\|x_i\|=1} ((x_i, x_i) + \tau(x_i, E_i x_i) + \tau(E_i x_i, x_i) + \tau^2(E_i x_i, E_i x_i)) \\
&= \max_{\|x_i\|=1} (1 + 2\tau(E_i x_i, x_i) + \tau^2(E_i x_i, E_i x_i))
\end{aligned}$$

Empleamos la siguiente suposición para encontrar el valor de $\|I + \tau E_i\|^2$.

Suposición 2. $\max_{\underline{x} \in B} \max_{\|x_i\|=1} (E_i x_i, x_i) := \mu < 0$.

Si $0 < \tau \ll 1$, tenemos que,

$$\|I + \tau E_i\|^2 = 1 + 2\tau\mu + (\tau^2 \|E_i\|^2) \simeq 1 + 2\tau\mu,$$

por lo que utilizando la expansión de Taylor alrededor de $2\tau\mu$

$$\|I + \tau E_i\| \simeq \sqrt{1 + 2\tau\mu} \simeq 1 + \tau\mu.$$

Al mapeo H le asociamos el grafo de conectividad. Si A es la matriz de transición de la cadena de Markov correspondiente (Ω_A^+, σ) , tenemos que la presión topológica $P_\tau(\varphi) = \ln |\gamma_{\max}|$, $\gamma_{\max} \in \text{spec} B$, $B = A \text{diag } \Lambda_i$. Luego,

$$B = A \begin{pmatrix} \tau \tilde{\Lambda}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tau \tilde{\Lambda}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \tau \tilde{\Lambda}_n \end{pmatrix} = \tau A \text{diag } \tilde{\Lambda}_i.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\gamma_{\max} &= \tau \tilde{\gamma}_{\max}, \text{ donde } \tilde{\gamma}_{\max} \in \text{spec } \tilde{B}, \quad \tilde{B} = A \text{diag } \tilde{\Lambda}_i, \\
P_\tau(\varphi) &= \ln |\gamma_{\max}| = \ln |\tau \tilde{\gamma}_{\max}| = \ln \tau + \ln |\tilde{\gamma}_{\max}|, \\
\widetilde{P}(\varphi) &= \ln |\tilde{\gamma}_{\max}|.
\end{aligned}$$

Los siguientes resultados son fundamentales para obtener lo mencionado al principio del capítulo. Con el lema 5 y corolario 5 se prueba que el mapeo H de Euler tiene un sólo punto fijo atractor. Con el lema 6 se prueba que dicho punto, es un punto de equilibrio para nuestro sistema (3.1). Con el lema 7 demostraremos además que el punto de equilibrio es único para lograr nuestro objetivo ya con el teorema 3 para encontrar las condiciones suficientes en las que nuestro sistema (3.1) tiene un único punto atractor de equilibrio.

Lema 5 Si $\mu + e^{\widetilde{P}(\varphi)} < 0$ entonces existe un τ_0 tal que $(H_\tau)_i$ satisface las condiciones:

$$L_\tau + e^{P_\tau(\varphi)} < 1.$$

Demostración. Si $\mu + e^{\widetilde{P}(\varphi)} < 0$ y si se asume que $\tau = \tau_0 \ll 1$, entonces se satisface que: $L_\tau = 1 + \tau\mu$, además también por lo mencionado anteriormente $e^{P_\tau(\varphi)} = \tau e^{\widetilde{P}(\varphi)}$, luego se tiene que, $L_\tau + e^{P_\tau(\varphi)} = 1 + \tau_0(\mu + e^{\widetilde{P}(\varphi)}) < 1$, es decir que $(H_{\tau_0})_i$ satisface las condiciones de Teorema 1. ■

Corolario 5 Si $\tau \ll 1$ entonces $(H_\tau)_i$ (el mapeo de Euler) tiene un solo punto fijo atractor O_τ .

Lema 6 O_τ es un punto de equilibrio en (3.1), es decir, $(f_i(x_i) + F_i(\{x_j\}_{j \in K_i}))|_{O_\tau} = 0$.

Demostración. Tenemos que: $(H_\tau)_i = \bar{x}_i = x_i + \tau f_i(x_i) + \tau F_i(\{x_j\}_{j \in K_i})$, como O_τ es el único punto fijo atractor de $(H_\tau)_i$, entonces, si $O_\tau = \{x_i^0\}$, se tiene que $\bar{x}_i = x_i^0 = x_i^0 + \tau f_i(x_i^0) + \tau F_i(\{x_j^0\}_{j \in K_i})$, de aquí que $\tau f_i(x_i^0) + \tau F_i(\{x_j^0\}_{j \in K_i}) = 0$, es decir, $f_i(x_i^0) + F_i(\{x_j^0\}_{j \in K_i}) = 0$. ■

Lema 7 Si $\tau' \ll 1$, entonces:

$$O_\tau = O_{\tau'}.$$

Demostración. Por el lema anterior tenemos que $O_\tau = x_i^0$ es un punto de equilibrio, es decir $(f_i(x_i^0) + F_i(\{x_j^0\}_{j \in K_i})) = 0$, luego $(H_\tau^n(O_\tau))_i = x_i^0 + \tau'(f_i(x_i^0) + F_i(\{x_j^0\}_{j \in K_i})) = O_\tau, \forall \tau'$; por otro lado tenemos que $(H_{\tau'}^n(O_{\tau'}))_i = O_{\tau'}$, por lo que $O_{\tau'}$ es un punto de equilibrio, es decir, $(H_{\tau'}^n(O_{\tau'}))_i = O_{\tau'}, \forall \tau'$, luego, $d((H_\tau^n O_\tau)_i, (H_{\tau'}^n O_{\tau'})_i) \leq c(n)(1 + \tau\mu + |\tau|e^{\widetilde{P(\varphi)}})^n d(O_\tau, O_{\tau'})$, como $c(n)(1 + \tau\mu + |\tau|e^{\widetilde{P(\varphi)}})^n \rightarrow 0$, entonces se tiene que $O_\tau = O_{\tau'}, \forall (\tau, \tau') \ll 1$. ■

Y es así como obtenemos el resultado deseado en el siguiente teorema.

Teorema 3 Si $(\mu + e^{\widetilde{P(\varphi)}}) < 0$, entonces el sistema (3.1) tiene un único punto de equilibrio atractor.

Demostración. Si $(\mu + e^{\widetilde{P(\varphi)}}) < 0$, entonces por el lema 5 tenemos que existe un τ_0 tal que $(H_\tau)_i$ satisface las condiciones del teorema 1, es decir, existe un único punto fijo atractor O_{τ_0} y, por el lema 7, para cualquier otro τ_1 tal que $(H_\tau)_i$ satisface las condiciones del teorema 1, se tiene que $O_{\tau_1} = O_{\tau_0}$. Finalmente, con el lema 6, obtenemos que O_{τ_0} es un punto de equilibrio para (3.1), y por lo tanto el sistema (3.1) tiene un único punto de equilibrio atractor. ■

3.2. Ejemplo

En el siguiente ejemplo veremos cómo se aplica el teorema 3 a un ejemplo particular:

$$\dot{x}_i = -\lambda x_i + b_i + \epsilon(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}), \quad (3.2)$$

$x_i \in \mathbb{R}$ con condiciones de frontera periódicas, $x_{i+N} = x_i$.

Proposición 4 Si $(-\lambda + 6\epsilon) < 0$, entonces (3.2) tiene un único punto de equilibrio atractor.

Demostración. Reemplazando la derivada por las diferencias,

$$\frac{x_i(t + \tau) - x_i(t)}{\tau} = -\lambda x_i + b_i + \epsilon(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}).$$

para obtener el mapeo de Euler,

$$\bar{x}_i = x_i - \tau\lambda x_i + \tau b_i + \tau\epsilon(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}),$$

entonces,

$$L_i = |1 - \tau\lambda|, \quad \Lambda_i = |2\tau\epsilon| = 2\tau\epsilon.$$

Sea A la matriz de transición correspondiente a la cadena de Markov (Ω_A^+, σ) , se tiene que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} B = A \operatorname{diag} \Lambda_i &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\tau\epsilon & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\tau\epsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2\tau\epsilon & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\tau\epsilon \end{pmatrix} = \\ &= 2\tau\epsilon \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

luego, $P(\varphi) = \ln |\gamma_{\max}| = \ln |2\tau\epsilon\tilde{\gamma}_{\max}|$, con $\gamma_{\max} \in \operatorname{spec} B$ de donde $\tilde{\gamma}_{\max} \in \operatorname{spec} A$.

Utilizando la transformada discreta de Fourier sobre A , obtenemos que $(1 + 2 \cos(\frac{2\pi k}{n})) = \tilde{\gamma}_k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $\tilde{\gamma}_{\max} = 3$, luego tenemos que $L = |1 - \tau\lambda|$ y $e^{J(\varphi)} = e^{\ln|2\tau\epsilon| + \ln|\tilde{\gamma}_{\max}|} = 6\tau\epsilon$, como $(-\lambda + 6\epsilon) < 0$ entonces $(|1 - \tau\lambda| + e^{\ln|2\tau\epsilon| + \ln|\tilde{\gamma}_{\max}|}) < 1$, por lo tanto por el Teorema 3, el sistema (3.2) tiene un único punto de equilibrio atractor

■

Capítulo 4

Algunas demostraciones

El siguiente lema pertenece al capítulo 1, sección 1.3.

Consideremos $\sum_{i_0} := 1$ y $\Lambda_{i_{j-1}} := 1$, tomando en cuenta que $\Lambda_{i_0, \dots, i_{j-1}} := \Lambda_{i_0} \Lambda_{i_1} \dots \Lambda_{i_{j-1}}$.

Lema 3. Asumiendo que $L_i = L_j = L$ y que $\Lambda_i \neq \Lambda_j$, se tiene que

$$d(\mathcal{F}_k^n \underline{x}, \mathcal{F}_k^n \underline{y}) \leq \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} L^{n-j} \sum_{(i_j, i_{j-1}, \dots, i_0)} \Lambda_{i_0, \dots, i_{j-1}} \right) d(\underline{x}, \underline{y}), \quad (1.3)$$

donde la suma es tomada sobre todas las palabras admisibles de longitud $j+1$ de Ω_{R_k} , $i_n \in E^{(k)}$.

Demostración. Procederemos a hacer la demostración por inducción.

Haciendo uso de (1.1) y (1.2), se tiene que para todo $i \in E^{(k)}$,

$$\begin{aligned} \rho((\mathcal{F}_k \underline{x})_i, (\mathcal{F}_k \underline{y})_i) &= \rho(T_i(x_i) + F_i(\{x_j\}), T_i(y_i) + F_i(\{y_j\})) \\ &= |T_i(x_i) + F_i(\{x_j\}) - T_i(y_i) - F_i(\{y_j\})| \\ &\leq |T_i(x_i) - T_i(y_i)| + |F_i(\{x_j\}) - F_i(\{y_j\})| \\ &\leq L_i \rho(x_i, y_i) + \Lambda_i \sum_{j \in K_i} \rho(x_j, y_j) \\ &\leq L_i \rho(x_i, y_i) + \Lambda_i \sum_{(j,i)} \rho(x_j, y_j), \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde la suma es tomada sobre todas las palabras admisibles de longitud 2 en Ω_{R_k} terminando con el símbolo i .

Para $n = 1$, de (4.1) se sigue que

$$d(\mathcal{F}_k \underline{x}, \mathcal{F}_k \underline{y}) \leq Ld(\underline{x}, \underline{y}) + \Lambda_i \sum_{(j,i) \in \Omega_H} d(\underline{x}, \underline{y})$$

si $i := i_0$ y $j := i_1$,

$$\begin{aligned} & Ld(\underline{x}, \underline{y}) + \Lambda_i \sum_{(j,i) \in \Omega_H} d(\underline{x}, \underline{y}) \\ &= \left(\sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} L^{1-j} \sum_{(i_0, \dots, i_{j-1}, i_0)} \Lambda_{i_0, \dots, i_{j-1}} \right) d(\underline{x}, \underline{y}), \end{aligned}$$

luego (1.3) se cumple.

Más aún, para $n = 2$, con $i_0 =: i$ de aquí en adelante,

$$\begin{aligned} \rho((\mathcal{F}_k^2 \underline{x})_i, (\mathcal{F}_k^2 \underline{y})_i) &\leq L_i \rho((\mathcal{F}_k \underline{x})_i, (\mathcal{F}_k \underline{y})_i) + \Lambda_i \sum_{(i_1, i)} \rho((\mathcal{F}_k \underline{x})_{i_1}, (\mathcal{F}_k \underline{y})_{i_1}) \\ &\leq L_i \left(L_i \rho(x_i, y_i) + \Lambda_i \sum_{(i_1, i)} \rho(x_{i_1}, y_{i_1}) \right) + \Lambda_i \sum_{(i_1, i)} \left(L_{i_1} \rho(x_{i_1}, y_{i_1}) + \Lambda_{i_1} \sum_{(i_2, i_1)} \rho(x_{i_2}, y_{i_2}) \right) \\ &= L_i^2 \rho(x_i, y_i) + L_i \Lambda_i \sum_{(i_1, i)} \rho(x_{i_1}, y_{i_1}) + \Lambda_i L_{i_1} \sum_{(i_1, i)} \rho(x_{i_1}, y_{i_1}) + \Lambda_i \Lambda_{i_1} \sum_{(i_2, i_1, i)} \rho(x_{i_2}, y_{i_2}), \end{aligned}$$

se sigue que:

$$\begin{aligned} d(\mathcal{F}_k^2 \underline{x}, \mathcal{F}_k^2 \underline{y}) &\leq L^2 d(\underline{x}, \underline{y}) + L \Lambda_i \sum_{(i_1, i)} d(\underline{x}, \underline{y}) + \Lambda_i L \sum_{(i_1, i)} d(\underline{x}, \underline{y}) + \Lambda_{i_1} \sum_{(i_2, i_1, i)} d(\underline{x}, \underline{y}) \\ &= \left(\sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} L^{2-j} \sum_{(i_0, \dots, i_{j-1}, i)} \Lambda_{i_0, \dots, i_{j-1}} \right) d(\underline{x}, \underline{y}). \end{aligned}$$

donde la suma es tomada sobre todas las palabras admisibles de longitud 3 de Ω_{R_k} terminando por el símbolo $i \in P_k$, luego (1.3) se cumple.

Supongamos que se cumple para $n = m$, es decir,

$$d(\mathcal{F}_k^m \underline{x}, \mathcal{F}_k^m \underline{y}) \leq \left(\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} L^{m-j} \sum_{(i_j i_{j-1} \dots i_1)} \Lambda_{i_0 \dots i_{j-1}} \right) d(\underline{x}, \underline{y}),$$

probaremos que se cumple para $n = m + 1$.

Notemos que,

$$\rho((\mathcal{F}_k^{m+1} \underline{x})_i, (\mathcal{F}_k^{m+1} \underline{y})_i) \leq L_i \rho((\mathcal{F}_k^m \underline{x})_i, (\mathcal{F}_k^m \underline{y})_i) + \Lambda_i \sum_{(i_1 \in K_i)} \rho((\mathcal{F}_k^m \underline{x})_{i_1}, (\mathcal{F}_k^m \underline{y})_{i_1}),$$

se sigue que:

$$\begin{aligned} d(\mathcal{F}_k^{m+1} \underline{x}, \mathcal{F}_k^{m+1} \underline{y}) &\leq L_i d(\mathcal{F}_k^m \underline{x}, \mathcal{F}_k^m \underline{y}) + \Lambda_i \sum_{(i_1 \in K_i)} d(\mathcal{F}_k^m \underline{x}, \mathcal{F}_k^m \underline{y}) \leq \\ &L \left(\left(\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} L^{m-j} \sum_{(i_j i_{j-1} \dots i_1)} \Lambda_{i_0 \dots i_{j-1}} \right) d(\underline{x}, \underline{y}) \right) + \\ &\Lambda_i \sum_{(i_1 \in K_i)} \left(\left(\sum_{j=1}^{m+1} \binom{m}{j-1} L^{m+1-j} \sum_{(i_j i_{j-1} \dots i_1)} \Lambda_{i_1 \dots i_{j-1}} \right) d(\underline{x}, \underline{y}) \right) \leq \\ &\left(\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} L^{m+1-j} \sum_{(i_j i_{j-1} \dots i_1)} \Lambda_{i_0 \dots i_{j-1}} + \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m}{j-1} L^{m+1-j} \sum_{(i_j i_{j-1} \dots i_1)} \Lambda_{i_0 \dots i_{j-1}} \right) d(\underline{x}, \underline{y}) = \\ &\left(L^{m+1} + \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} L^{m+1-j} \sum_{(i_j i_{j-1} \dots i_1)} \Lambda_{i_0 \dots i_{j-1}} + \right. \\ &\left. \sum_{j=1}^m \binom{m}{j-1} L^{m+1-j} \sum_{(i_j i_{j-1} \dots i_1)} \Lambda_{i_0 \dots i_{j-1}} + \sum_{(i_{m+1} i_m \dots i_1)} \Lambda_{i_0 i_1 \dots i_m} \right) d(\underline{x}, \underline{y}) = \\ &\left(L^{m+1} + \sum_{j=1}^m L^{m+1-j} \sum_{(i_j \dots i_1)} \Lambda_{i_0 \dots i_{j-1}} \left(\binom{m}{j} + \binom{m}{j-1} \right) + \sum_{(i_{m+1} i_m \dots i_1)} \Lambda_{i_0 i_1 \dots i_m} \right) d(\underline{x}, \underline{y}) \end{aligned}$$

utilizando una propiedad de los combinatorios, se tiene,

$$\begin{aligned}
d(\mathcal{F}_k^{m+1} \underline{x}, \mathcal{F}_k^{m+1} \underline{y}) &\leq \\
&\left(L^{m+1} + \sum_{j=1}^m \binom{m+1}{j} L^{m+1-j} \sum_{(i_j, i_{j-1}, \dots, i_1)} \Lambda_{i_0, \dots, i_{j-1}} + \sum_{(i_{m+1}, i_m, \dots, i_1)} \Lambda_{i_0, i_1, \dots, i_m} \right) d(\underline{x}, \underline{y}) = \\
&\left(\sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} L^{m+1-j} \sum_{(i_j, i_{j-1}, \dots, i_1)} \Lambda_{i_0, \dots, i_{j-1}} \right) d(\underline{x}, \underline{y}),
\end{aligned}$$

donde la suma es tomada sobre todas las palabras admisibles de longitud $j+1$ de Ω_{R_k} , $i_{m+1} \in E^{(k)}$. ■

El siguiente lema pertenece al capítulo 2, sección 2.1.

Lema 4.

$$d(M^n \underline{x}, M^n \underline{y}) \leq \left(\sum_{(i_n, \dots, i_0)} \prod_{j=0}^{n-1} \lambda_{i_j, i_{j+1}} \right) d(\underline{x}, \underline{y}), \quad (2.2)$$

donde la suma es tomada sobre todas las palabras admisibles de longitud $n+1$ de Ω_{R_k} , $i_n \in E^{(k)}$.

Demostración. Procederemos a hacer la demostración por inducción.

Tenemos que para $n=1$, para todo $i \in E^{(k)}$,

$$\rho((M\underline{x})_i, (M\underline{y})_i) = \rho(M_i(\{x_j\}), M_i(\{y_j\})) \leq \sum_{(j \in K_i)} \lambda_{ij} \rho(x_j, y_j) = \sum_{(j)} \lambda_{ij} \rho(x_j, y_j),$$

donde la suma es tomada sobre todas las palabras admisibles de longitud 2 en Ω_{R_k} terminando con el símbolo i .

Luego,

$$d(M\underline{x}, M\underline{y}) \leq \sum_{(j)} \lambda_{ij} d(\underline{x}, \underline{y}).$$

Para $n = 2$,

$$\begin{aligned} \rho((M^2\underline{x})_i, (M^2\underline{y})_i) &\leq \sum_{(ji)} \lambda_{ij} \rho((M\underline{x})_j, (M\underline{y})_j) \leq \sum_{(ji)} \lambda_{ij} \sum_{kj} \lambda_{jk} \rho(x_k, y_k) \\ &= \sum_{(kji)} \lambda_{ij} \lambda_{jk} \rho(x_k, y_k), \end{aligned}$$

luego,

$$d(M^2\underline{x}, M^2\underline{y}) \leq \sum_{(kji)} \lambda_{ij} \lambda_{jk} d(\underline{x}, \underline{y}),$$

donde la suma es tomada sobre todas las palabras admisibles de longitud 3 de Ω_{i_k} terminando con el símbolo $i \in P_k$.

Supongamos que se cumple para $n = m$, i.e.,

$$d(M^m\underline{x}, M^m\underline{y}) \leq \left(\sum_{(i_m \dots i_0)} \prod_{j=0}^{m-1} \lambda_{i_j, i_{j+1}} \right) d(\underline{x}, \underline{y}).$$

Probaremos que se cumple para $n = m + 1$, consideremos $i_0 := i$

$$\rho((M^{m+1}\underline{x})_i, (M^{m+1}\underline{y})_i) \leq \sum_{(i_1 i)} \lambda_{i_1 i} \rho((M^m\underline{x})_{i_1}, (M^m\underline{y})_{i_1}),$$

luego,

$$\begin{aligned} d(M^{m+1}\underline{x}, M^{m+1}\underline{y}) &\leq \sum_{(i_1 i)} \lambda_{i_1 i} d(M^m\underline{x}, M^m\underline{y}) \leq \sum_{(i_1 i)} \lambda_{i_1 i} \left(\left(\sum_{(i_{m+1} \dots i_1)} \prod_{j=1}^m \lambda_{i_j, i_{j+1}} \right) d(\underline{x}, \underline{y}) \right) \\ &= \sum_{(i_{m+1} \dots i)} \prod_{j=0}^m \lambda_{i_j, i_{j+1}} d(\underline{x}, \underline{y}). \end{aligned}$$

donde la suma es tomada sobre todas las palabras admisibles de longitud $m + 2$ de Ω_{R_k} , $i_{m+1} \in F^{(k)}$. ■

Capítulo 5

Conclusiones

Hay muchos modelos matemáticos de sistemas reales [8] que tienen la forma de una red de elementos activos interactuantes. Cada uno de estos elementos tiene su propia dinámica y ésta puede ser descrita por un sistema dinámico. Sujetos a una interacción, estos elementos evolucionan juntos y manifiestan una dinámica colectiva. La dinámica está determinada por el comportamiento individual de los elementos, la geometría de una interacción y los índices de acoplamiento. En conjunto, estos tres factores son importantes para la dinámica colectiva y el problema radica en cómo describir matemáticamente la acción de estos tres factores.

Para lograr lo anterior, en este trabajo se buscaron las condiciones suficientes bajo las cuales ciertos sistemas dinámicos generados por mapeos: LDS, sistema dinámico generado por el mapeo interacción y mapeo de Euler, tuvieran una estabilidad global, es decir, que tuvieran un único punto fijo atractivo (todas las trayectorias van a éste cuando n es suficientemente grande). Para ello, se emplearon técnicas de dinámica simbólica que fueron utilizadas en [1] y que aquí nuevamente se han explicado a detalle.

En el capítulo 1 se estudió en concreto, el caso de LDS, dando las definiciones principales sobre el mapeo \mathcal{F} , luego empleamos las técnicas de dinámica simbólica para trabajar con subconjuntos invariantes del grafo de conectividad correspondiente al mapeo interacción de \mathcal{F} y así trabajar con los cilindros admisibles para poder acotar los mapeos \mathcal{F}_k^n . Luego se utilizaron resultados de presión y entropía topológica para obtener las condiciones suficientes para que \mathcal{F}_k fuera globalmente estable.

En el capítulo 2 se dieron las condiciones suficientes para la estabilidad global, pero ahora para el caso general de un mapeo interacción. Fueron empleadas las mismas técnicas que en el primer capítulo pero se trabajó con las constantes de Lipschitz en distinta forma, también se explicó cómo calcular la presión topológica.

En el capítulo 3, trabajando con el mapeo de Euler, se llegó a que el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (sistema dinámico continuo) presentado en este capítulo tiene un único punto atractor de equilibrio, utilizando también las técnicas del capítulo 1.

En resumen, en este trabajo se estudió el problema de estabilidad global y nosotros hemos demostrado que los tres factores principales de la dinámica (el comportamiento individual de los elementos, la geometría de una interacción y los índices de acoplamiento), se combinan en la forma de la presión topológica sobre el sistema dinámico simbólico determinado por el grafo de interacción. En otras palabras en el problema de estabilidad global de la red descubrimos una forma de la influencia de esos principales factores sobre la red.

El trabajo a futuro consistiría en aplicar la teoría desarrollada en este trabajo a modelos reales de redes dinámicas.

Apéndice A

Fórmula general

La fórmula que a continuación desarrollamos es la fórmula general que acota los mapeos \mathcal{F}_k^n . Consideraremos todos los planteamientos establecidos en el capítulo 1.

Definiendo $\sum_i := 1$ y $\Lambda_{i-1} := 1$, tomando en cuenta que $\Lambda_{i_0, \dots, i_{j-1}} = \Lambda_{i_0} \Lambda_{i_1} \dots \Lambda_{i_{j-1}}$ y $L_{i_1, \dots, i_{n-j-1}} = L_{i_1} \dots L_{i_{n-j-1}}$, probaremos el siguiente lema.

Lema 8 *Asumiendo que $L_i \neq L_j$ y que $\Lambda_i \neq \Lambda_j$, se tiene que*

$$d(\mathcal{F}_k^n \underline{x}, \mathcal{F}_k^n \underline{y}) \leq \left(\sum_{j=0}^n \sum_{(i_j, i_{j-1}, \dots, i_0)} \sum_{l=0, \dots, l_{n-j-1} = l_{n-j-2}}^j L_{i_1, \dots, i_{n-j-1}} \Lambda_{i_0, \dots, i_{j-1}} \right) d(\underline{x}, \underline{y}), \quad (\text{A.1})$$

donde la suma es tomada sobre todas las palabras admisibles de longitud $j+1$ de Ω_{R_k} , $i_n \in E^{(k)}$.

Demostración. Procederemos a demostrar por inducción.

Haciendo uso de (1.1) y (1.2), para todo $i \in E^{(k)}$

$$\begin{aligned}
\rho((\mathcal{F}_k \underline{x})_i, (\mathcal{F}_k \underline{y})_i) &= \rho(T_i(x_i) + F_i(\{x_j\}), T_i(y_i) + F_i(\{y_j\})) = \\
|T_i(x_i) + F_i(\{x_j\}) - T_i(y_i) - F_i(\{y_j\})| &\leq |T_i(x_i) - T_i(y_i)| + |F_i(\{x_j\}) - F_i(\{y_j\})| \leq \\
L_i \rho(x_i, y_i) + \Lambda_i \sum_{j \in K_i} \rho(x_j, y_j) &= L_i \rho(x_i, y_i) + \Lambda_i \sum_{(j,i)} \rho(x_j, y_j),
\end{aligned} \tag{A.2}$$

donde la suma es tomada sobre todas las palabras admisibles de longitud 2 en Ω_{R_k} terminando con el símbolo i .

Entonces, para $n = 1$, de (A.2) se sigue que:

$$d(\mathcal{F}_k \underline{x}, \mathcal{F}_k \underline{y}) \leq L_i d(\underline{x}, \underline{y}) + \Lambda_i \sum_{(j,i) \in \Omega_{R_k}} d(\underline{x}, \underline{y}) = \left(L_i + \Lambda_i \sum_{i_1, i} \right) d(\underline{x}, \underline{y})$$

haciendo $i := i_0$ y $j := i_1$,

$$\begin{aligned}
&\left(L_i + \Lambda_i \sum_{i_1, i} \right) d(\underline{x}, \underline{y}) = \\
&\left(\sum_{j=0}^1 \sum_{(i_j, i_{j-1}, \dots, i_0)} \left(\sum_{l=0, \dots, l-j}^j L_{i_l \dots i_{l-j}} \right) \Lambda_{i_0 \dots i_{j-1}} \right) d(\underline{x}, \underline{y}).
\end{aligned}$$

luego (A.1) se cumple.

Mas aún, para $n = 2$, de aquí en adelante consideremos $i := i_0$

$$\begin{aligned}
\rho((\mathcal{F}_k^2 \underline{x})_i, (\mathcal{F}_k^2 \underline{y})_i) &\leq L_i \rho((\mathcal{F}_k \underline{x})_i, (\mathcal{F}_k \underline{y})_i) + \Lambda_i \sum_{(i_1, i)} \rho((\mathcal{F}_k \underline{x})_{i_1}, (\mathcal{F}_k \underline{y})_{i_1}) \leq \\
L_i \left(L_i \rho(x_i, y_i) + \Lambda_i \sum_{(i_1, i)} \rho(x_{i_1}, y_{i_1}) \right) &+ \Lambda_i \sum_{(i_1, i)} \left(L_{i_1} \rho(x_{i_1}, y_{i_1}) + \Lambda_{i_1} \sum_{(i_2, i_1)} \rho(x_{i_2}, y_{i_2}) \right) = \\
L_i^2 \rho(x_i, y_i) + L_i \Lambda_i \sum_{(i_1, i)} \rho(x_{i_1}, y_{i_1}) &+ \Lambda_i L_{i_1} \sum_{(i_1, i)} \rho(x_{i_1}, y_{i_1}) + \Lambda_i \Lambda_{i_1} \sum_{(i_2, i_1)} \rho(x_{i_2}, y_{i_2}).
\end{aligned}$$

se sigue que

$$d(\mathcal{F}_k^2 \underline{x}, \mathcal{F}_k^2 \underline{y}) \leq L_i^2 d(\underline{x}, \underline{y}) + L_i \Lambda_i \sum_{(i_1, i)} d(\underline{x}, \underline{y}) + \Lambda_i L_{i_1} \sum_{(i_1, i)} d(\underline{x}, \underline{y}) + \Lambda_i \Lambda_{i_1} \sum_{(i_2, i_1)} d(\underline{x}, \underline{y}) =$$

$$\left(\sum_{j=0}^2 \sum_{(i_j, i_{j-1}, \dots, i)} \left(\sum_{l=0, \dots, l_j}^j L_{i_1, \dots, i_{l_j}} \right) \Lambda_{i_0, \dots, i_{j-1}} \right) d(\underline{x}, \underline{y}),$$

donde la suma es tomada sobre todas las palabras admisibles de longitud 3 de Ω_{I_k} terminando por el símbolo $i \in P_k$. Luego (A.1) se cumple.

Supongamos que se cumple para $n = m$, es decir,

$$d(\mathcal{F}_k^m \underline{x}, \mathcal{F}_k^m \underline{y}) \leq \left(\sum_{j=0}^m \sum_{(i_j, i_{j-1}, \dots, i)} \left(\sum_{l=0, \dots, l_{m-j-1}}^j L_{i_1, \dots, i_{m-j-1}} \right) \Lambda_{i_0, \dots, i_{j-1}} \right) d(\underline{x}, \underline{y})$$

Probaremos que se cumple para $n = m + 1$.

Notemos que

$$\rho((\mathcal{F}_k^{m+1} \underline{x})_i, (\mathcal{F}_k^{m+1} \underline{y})_i) \leq L_i \rho((\mathcal{F}_k^m \underline{x})_i, (\mathcal{F}_k^m \underline{y})_i) + \Lambda_i \sum_{(i_1 \in K_i)} \rho((\mathcal{F}_k^m \underline{x})_{i_1}, (\mathcal{F}_k^m \underline{y})_{i_1}),$$

se sigue que:

$$\begin{aligned} d(\mathcal{F}_k^{m+1} \underline{x}, \mathcal{F}_k^{m+1} \underline{y}) &\leq L_i d(\mathcal{F}_k^m \underline{x}, \mathcal{F}_k^m \underline{y}) + \Lambda_i \sum_{(i_1 \in K_i)} d(\mathcal{F}_k^m \underline{x}, \mathcal{F}_k^m \underline{y}) = \\ &L_i \left(\sum_{j=0}^m \sum_{(i_j, i_{j-1}, \dots, i)} \left(\sum_{l=0, \dots, l_{m-j-1}}^j L_{i_1, \dots, i_{m-j-1}} \right) \Lambda_{i_0, \dots, i_{j-1}} \right) d(\underline{x}, \underline{y}) + \\ &\Lambda_i \sum_{(i_1 \in K_i)} \left(\sum_{j=1}^{m+1} \sum_{(i_j, i_{j-1}, \dots, i_1)} \left(\sum_{l=1, \dots, l_{m-j}}^j L_{i_1, \dots, i_{m-j}} \right) \Lambda_{i_1, \dots, i_{j-1}} \right) d(\underline{x}, \underline{y}) \end{aligned}$$

sacando el primer sumando de la primera y segunda sumatoria respectivamente, se tiene,

$$\begin{aligned} d(\mathcal{F}_k^{m+1} \underline{x}, \mathcal{F}_k^{m+1} \underline{y}) &\leq \\ &\left(L_i^{m+1} + \sum_{j=1}^m \sum_{(i_j, i_{j-1}, \dots, i_0)} L_i \left(\sum_{l=0, \dots, l_{m-j-1}}^j L_{i_1, \dots, i_{m-j-1}} \right) \Lambda_{i_0, \dots, i_{j-1}} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^m \sum_{(i_j i_{j-1} \dots i_0)} \left(\sum_{l=1, \dots, l_m}^j \sum_{j=l_m-j-1} L_{i_l, \dots, i_{l_m-j}} \right) \Lambda_{i_0 \dots i_{j-1}} + \sum_{i_{m+1} \dots i_1} \Lambda_{i_1 \dots i_m} \Big) d(\underline{x}, \underline{y}) = \\
& \left(L_i^{m+1} + \sum_{j=1}^m \sum_{i_j \dots i_1} \Lambda_{i_1 \dots i_{j-1}} \left(L_i \left(\sum_{l=0, \dots, l_m-j-1}^j L_{i_l, \dots, i_{l_m-j-1}} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sum_{l=1, \dots, l_m-j}^j L_{i_l, \dots, i_{l_m-j}} \right) + \sum_{i_{m+1} \dots i_1} \Lambda_{i_1 \dots i_m} \right) d(\underline{x}, \underline{y}) =
\end{aligned}$$

(observemos que podemos reetiquetar de la siguiente forma)

$$\begin{aligned}
& = \left(L_i^{m+1} + \sum_{j=1}^m \sum_{i_j \dots i_1} \Lambda_{i_1 \dots i_{j-1}} \left(L_i \left(\sum_{l_1=0, \dots, l_m-j}^j L_{i_{l_1}, \dots, i_{l_m-j}} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sum_{l=1, \dots, l_m-j}^j L_{i_l, \dots, i_{l_m-j}} \right) + \sum_{i_{m+1} \dots i_1} \Lambda_{i_1 \dots i_m} \right) d(\underline{x}, \underline{y}) = \\
& \left(L_i^{m+1} + \sum_{j=1}^m \sum_{i_j \dots i_1} \Lambda_{i_1 \dots i_{j-1}} \left(\sum_{l=0, \dots, l_m-j}^j L_{i_l, \dots, i_{l_m-j}} \right) + \sum_{i_{m+1} \dots i_1} \Lambda_{i_1 \dots i_m} \right) d(\underline{x}, \underline{y}) = \\
& \left(\sum_{j=0}^{m+1} \sum_{i_j \dots i_1} \left(\sum_{l=0, \dots, l_m-j}^j L_{i_l, \dots, i_{l_m-j}} \right) \Lambda_{i_0 \dots i_{j-1}} \right) d(\underline{x}, \underline{y}).
\end{aligned}$$

donde la suma es tomada sobre todas las palabras admisibles de longitud $j+1$ de

$\Omega_{R_k}, i_{m+1} \in E^{(k)}$. ■

Bibliografía

- [1] Afraimovich Valentin S and Bunimovich Leonid A, 2007 Dynamical networks: interplay of topology interactions and local dynamic. *Nonlinearity* 20 1761-1771 (Ltd and London Mathematical Society) .
- [2] Afraimovich V and Hsu S-B 2003 Lectures on chaotic dynamical systems AMS Studies in Advance Mathematics vol 28 (Providence, RI: American Mathematical Society).
- [3] Alekseyev V M 1981 Translations of the *AMS* (Series 2) vol 116 (Providence,RI: American Mathematical Society) (Engl. Transl.).
- [4] Bunimovich L A and Sinai Ya G 1988 Space-time chaos in coupled map lattices *Nonlinearity* 1 491 – 519.
- [5] Chazottes J-R and Fernandez B (ed) 2005 Dynamics of coupled map lattices and of related spatially extended systems *Lecture Notes in Physics* vol 671 (Berlin: Springer).
- [6] Katok and Hasselblatt 1995 *Encyclopedia of mathematics and its applications: Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems* (Cambridge University Press).
- [7] Pikovsky A, Rosenblum M and Kurths J 2002 *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences* (Cambridge: Cambridge University Press).

- [8] Rabinovich MI, Varona P, Selverston AI. 2006 Dynamical Principles in Neuroscience, *Rev Mod Phys* 78, 1213.