



Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Facultad de Ciencias



Equivalencia de Medias sin Equivalencia de Ensamblajes:  
Aplicación a Problemas de Puntos en el Plano

TESIS

Que para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias Aplicadas

PRESENTA:

Rutilo Moreno Monsiváis

ASESOR:

Dr. Edgardo Ugalde Saldaña

EQUIVALENCIA DE MEDIAS SIN EQUIVALENCIA DE  
ENSEMBLES: APLICACIÓN A PROBLEMAS DE PUNTOS EN EL  
PLANO

RUTILO MORENO MONSIVALS  
SEPTIEMBRE DEL 2005

CONTENIDO

1. Motivación	2
1.1. Caminos Alternantes	2
1.2. Matchings Lineales	3
2. Planteamiento del Trabajo	6
2.1. Marco formal	7
2.2. Estructura de la Tesis	10
3. Equivalencia de Medias	12
3.1. Prueba del Teorema 1	13
3.2. Crecimiento lineal asintótico	15
4. Equivalencia de Ensembles	20
5. Comentarios Finales	26
6. Anexo: Resultados Técnicos	29
Referencias	32

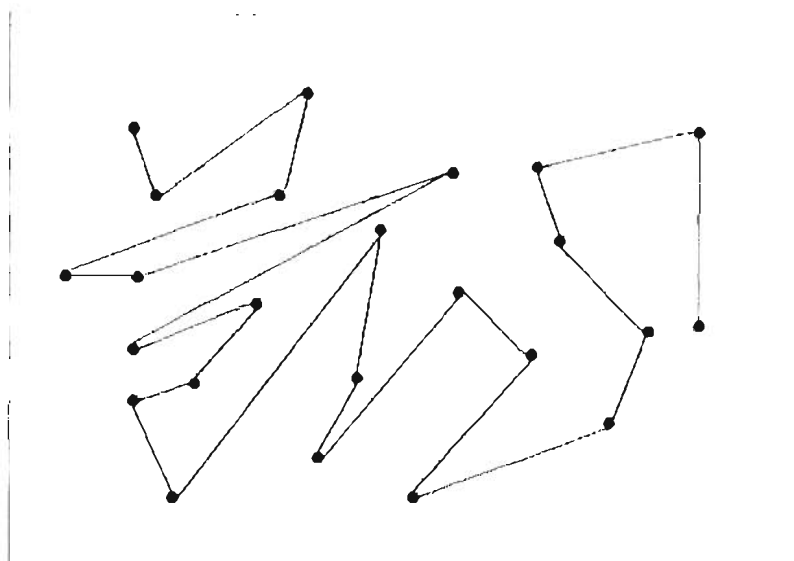


FIGURE 1. Ejemplo de una configuración  $C$ , y un camino alternante con soporte en la misma

## 1. MOTIVACIÓN

1.1. **Caminos Alternantes.** Sea  $C := \{v_i : i = 1, 2, \dots, 2n\}$  un conjunto de puntos en el plano,  $n$  de los cuales son rojos, mientras que los restantes  $n$  son azules. Considérese que tales puntos están dispuestos en posición general, es decir, ninguna recta incluye a tres de ellos. Un camino alternante  $c$  (vease Figura 1) con soporte en  $C$  es una sucesión de la forma  $v_{i_1}, s_1, v_{i_2}, s_2, \dots, v_{i_{\ell-1}}, s_{\ell-1}, v_{i_\ell}$ , que cumple

- los extremos del segmento  $s_j$  son los puntos  $v_{i_j}, v_{i_{j+1}}$ ,
- $v_{i_j}$  es de distinto color a  $v_{i_{j+1}}$ ,
- los puntos de la sucesión  $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{\ell-1}}, v_{i_\ell}$  no se repiten,
- no hay cruce entre los segmentos  $s_1, s_2, \dots, s_{\ell-1}$ , es decir,  $s_i \cap s_j \subset C$  para  $i \neq j$ .

La longitud de un camino alternante  $c$  es el número  $\ell$  de puntos que incluye. Luego  $c$  se dice maximal si su longitud es maximal en el conjunto de todos los caminos alternantes con soporte en  $C$ . Como la longitud de un camino alternante maximal solo depende del conjunto que lo soporta, entonces se define  $\ell = \ell(C)$  como la longitud de cualquier camino alternante maximal con soporte en  $C$ . Erdős conjeturó que los conjuntos de puntos que minimizan  $\ell(C)$  son aquellos cuyos elementos delimitan una

región convexa del plano. Se puede definir la cota inferior

$$\ell(n) := \min\{\ell(C) : C \text{ es un conjunto de } n \text{ puntos rojos y } n \text{ puntos azules que delimitan una región convexa del plano}\}$$

Paul Erdős propuso como problema encontrar  $\ell(n)$  y conjeturó que  $\ell(n) \leq 3n/2 + 2$ .

Se demuestra fácilmente que  $\ell(n) \geq n$ . Basta observar que hay una línea recta que separa el conjunto  $C$  en 2 subconjuntos de igual cardinalidad, y uno de ellos contiene  $n$  o más puntos azules, lo que implica que el complemento contiene  $n$  o más puntos rojos. Un camino alternante se construye entonces alternando entre puntos de esos 2 subconjuntos. Es de suponerse que la desigualdad  $\ell(n) \geq n$  es estricta, sin embargo el mejor resultado mejora esta cota solo en ordenes inferiores al lineal (vease más adelante).

En 2003 Abellanas y coautores [1] probaron que para cada  $\epsilon > 0$  existe  $n = n(\epsilon)$  tales que para cada  $n \geq n(\epsilon)$  hay un conjunto  $C_n$  de  $n$  puntos rojos y  $n$  puntos azules que delimitan una región convexa del plano que satisface

$$\ell(C_n) \leq \frac{4n}{3}(1 + \epsilon).$$

más tarde, en 2005, Kinčl y coautores [6] demuestran que existen constantes  $C_1, C_2 \geq 0$ , tal que

$$n + C_1 \sqrt{\frac{n}{\log n}} \leq \ell(n) \leq \frac{4}{3}n + C_2 \sqrt{n}.$$

De esta forma se mejoran las cotas inferior y superior para  $n$ . Aunque la mejora de la cota inferior es tan solo de orden  $\sqrt{n/\log(n)}$ , se cree que la cota superior  $4n/3$  es asintóticamente justa.

**1.2. Matchings Lineales.** Un matching lineal maximal en  $C$  es un conjunto maximal de segmentos de recta disjuntos dos a dos, cada uno de los cuales tiene como extremos un punto rojo y uno punto azul tomados de  $C$ , y tales que hay una línea recta que intersecta a todos los segmentos (de ahí el adjetivo de lineal, vease figura 2).

Decimos que el número de puntos que recubre un matching compuesto por  $m$  segmentos es  $2m$ . Abellanas y coautores [1] demuestran que encontrar cotas para matchings

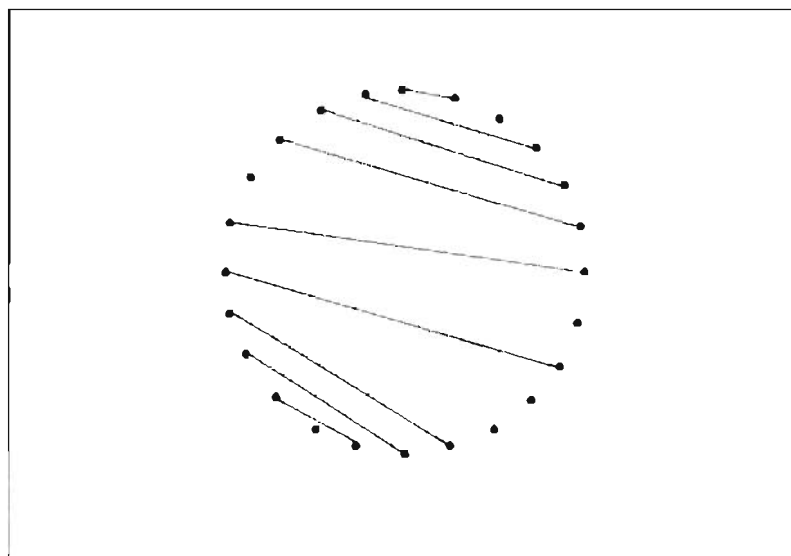


FIGURE 2. Ejemplo de una configuración en posición convexa  $C$ , y un matching lineal con soporte en la misma

lineales maximales equivale a encontrar cotas para caminos alternantes maximales en el sentido siguiente

**Proposición 1.** *Supongamos que existe un arreglo de  $n$  puntos rojos y  $m \geq n$  puntos azules en posición convexa en el plano, y que admite un matching lineal maximal que recubre menos de  $\alpha \times n$  puntos. Entonces, para algún natural  $r$  existe otro arreglo convexo con  $n' = r \times n$  puntos rojos y  $r \times m$  puntos azules que soporta un camino alternante maximal de longitud menor a  $\alpha \times n'$ . Recíprocamente, si existe un arreglo convexo de  $n$  puntos rojos y  $m \geq n$  puntos azules que soporta un camino alternante maximal de longitud menor a  $\alpha \times n$ , entonces también existe, para algún natural  $r$ , algún otro arreglo convexo con  $n' = r \times n$  puntos rojos y  $r \times m$  puntos azules que admite un matching lineal maximal de longitud al menos  $\alpha \times n'$*

Hay entonces una estrecha relación entre caminos alternantes maximales y matchings lineales maximales. Una consecuencia directa de esta proposición es la siguiente: Llamando  $m(C)$  al número de puntos cubiertos por un matching lineal maximal en un arreglo convexo  $C$  de puntos rojos y azules, se define

$$m(n) := \min\{m(C) \mid C \text{ es un arreglo convexo de } n \text{ puntos rojos y } n \text{ puntos azules que delimitan una región convexa del plano}\}$$

Suponiendo que los límites

$$\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell(n)}{n} \text{ y } \beta := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(n)}{n}$$

existen, la proposición 1 implica que  $\alpha = \beta$ , y todo indica que ambos toman el valor  $4/3$ .

## 2 PLANTEAMIENTO DEL TRABAJO

Los problemas de puntos rojos y azules que se acaban de enlistar tienen una versión aleatoria. Considerando un *ensamble* aleatorio de conjuntos de puntos rojos y azules delimitando una región convexa del plano, resulta natural preguntarse ¿cuál es la distribución de  $l(C)$ , o de  $m(C)$ , sobre tal *ensamble*? ¿cual es la media de *ensamble* de estas cantidades? ¿qué tanto difieren las medias de sus valores mínimos?

Tratándose de conjuntos de  $n$  puntos rojos y  $n$  puntos azules, hay un *ensamble* natural que es pertinente considerar: la colección de todos los conjuntos de  $n$  puntos rojos y  $n$  puntos azules delimitando una región convexa del plano, con la distribución uniforme sobre esta colección. Siguiendo la terminología de la Mecánica Estadística (vease [7] por ejemplo), se calificará de *microcanónico* a este *ensamble*. En oposición a este *ensamble* está el que se calificará de *canónico* (lo que corresponde a interpretar el color como un nivel de energía), y que consiste en todo los conjuntos de  $2n$  puntos, ya sean rojos o azules, delimitando una región convexa del plano, con una distribución uniforme sobre esta colección.

Experimentos numéricos realizados por Mario Cetina [2] indican que los caminos alternates maximales son en promedio equivalentes en ambos *ensambles*, *canónico* y *microcanónico*. Los mismos experimentos indican que los matchings maximales son en promedio equivalentes en ambos *ensambles*. No se conocen indicaciones sobre las distribuciones de los valores de  $l(C)$  y  $m(C)$  según el *ensamble* y aunque se cree que un estudio numérico en este sentido puede ser muy útil, el estudio riguroso de tales distribuciones no se considerará en este trabajo. De lo que se trata en el presente trabajo es de establecer de manera precisa la equivalencia del crecimiento lineal en  $n$  de las medias de  $l(C)$  (respectivamente  $m(C)$ ) entre los dos *ensambles* que se introdujeron anteriormente.

Cuando se mencionan en el mismo párrafo la palabras "equivalencia" y "*ensambles*", surge la pregunta: ¿qué relación existe entre la equivalencia del crecimiento lineal de las medias de la que se habló anteriormente, y la equivalencia de *ensambles* que se estudia en Mecánica Estadística? En la segunda parte de este trabajo se analizan las

similitudes y diferencias que hay entre el tipo de equivalencia que demanda la equivalencia del crecimiento lineal de las medias, y la más clásica equivalencia completa de *ensembles* (nosotros adaptamos el sentido que a este termino se le da en [3]).

**2.1. Marco formal.** Para  $n \in \mathbb{N}$  fijo, sea  $\Omega_n^{\text{mic}}$  el conjunto de todas las secuencias de  $R$  y  $A$  de tamaño  $2n$ , que contienen exactamente  $n$  veces  $R$  y  $n$  veces  $A$ , o lo que es lo mismo,

$$\Omega_n^{\text{mic}} := \{\omega \in \{R, A\}^{2n} : \#\omega^{-1}(R) = \#\omega^{-1}(A) = n\}.$$

La notación indica que  $\omega$  es una función con dominio  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  e imagen  $\{R, A\}$ , bajo la cual hay  $n$  índices en  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  que toman el valor  $R$ , mientras que los  $n$  índices restantes toman el valor  $A$ . Esto último se abrevia  $\#\omega^{-1}(R) = \#\omega^{-1}(A) = n$ . En el conjunto  $\Omega_n^{\text{mic}}$  se considerara la distribución de probabilidad uniforme

$$\mathbb{P}_n^{\text{mic}}(\omega) := \frac{1}{\#\Omega_n^{\text{mic}}} \quad \forall \omega \in \Omega_n^{\text{mic}}.$$

Un cálculo elemental permite concluir que:

$$\mathbb{P}_n^{\text{mic}}(\omega) = \binom{2n}{n}^{-1} \quad \forall \omega \in \Omega_n^{\text{mic}}.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , la pareja  $(\Omega_n^{\text{mic}}, \mathbb{P}_n^{\text{mic}})$  define el *ensemble microcanónico en el volumen  $n$* .

A cada secuencia  $\omega \in \Omega_n^{\text{mic}}$  se pueden asociar un conjunto de puntos rojos ( $R$ ) y azules ( $A$ ) que delimitan una región convexa en el plano. Para fijar ideas, para cada  $n \in \mathbb{N}$  y para  $k = 1, 2, \dots, 2n$ , sea  $v_k := \exp(2\pi i \times (k-1)/2n)$  en el plano complejo. La secuencia  $\omega \in \Omega_n^{\text{mic}}$  determina una coloración:  $v_k$  será azul si  $\omega(k) = A$ , y rojo en caso contrario. De esta manera se asocia a cada secuencia  $\omega \in \Omega_n^{\text{mic}}$  un conjunto coloreado  $C_\omega$  que delimita una región convexa de  $\mathbb{C}$  (vease Figura 3).

Cualquiera que fuera la manera de asociar secuencias  $\omega$  con conjuntos de puntos azules y rojos delimitando una región convexa del plano, la longitud de un camino alternado maximal en el conjunto de puntos resultante dependerá solamente de la secuencia que lo define. Lo mismo se puede decir de un matching lineal maximal en tal conjunto de puntos.



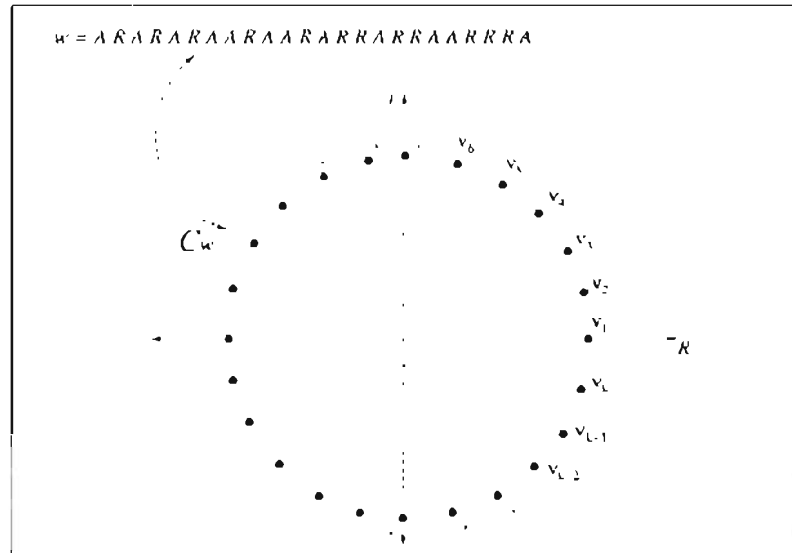


FIGURE 3. Correspondencia entre una secuencia  $w$  y su configuración asociada  $C_w$ .

Dada esta relación particular entre secuencias y conjuntos coloreados de puntos que acabamos de describir, se pueden definir funciones  $\omega \mapsto \ell(\omega) := \ell(C_\omega)$  y  $\omega \mapsto m(\omega) := m(C_\omega)$ , con  $C_\omega$  como se ha descrito.

De forma análoga se considerara el *ensamble canónico en volumen  $n$*  formado por la pareja  $(\{R, A\}^{2n}, \mathbb{P}_n)$ , donde

$$\mathbb{P}_n(\omega) := \frac{1}{\#\{R, A\}^{2n}} = 4^{-n} \quad \forall \omega \in \{R, A\}^{2n}.$$

es la distribución uniforme en el espacio de secuencias  $\{R, A\}^{2n}$ .

Asociando conjuntos coloreados de puntos a cada secuencia, se pueden extender a todo  $\{R, A\}^{2n}$  la funciones  $\omega \mapsto \ell(\omega)$  y  $\omega \mapsto m(\omega)$  que se acaban de definir.

Los experimentos numéricos de Cetina indican que los promedios

$$\mathbb{E}_n^{\text{num}}(\ell) := \sum_{\omega \in \{R, A\}^{2n}} \ell(\omega) \mathbb{P}_n^{\text{num}}(\omega) \quad \text{y} \quad \mathbb{E}_n(\ell) := \sum_{\omega \in \{R, A\}^{2n}} \ell(\omega) \mathbb{P}_n(\omega),$$

tienen asintóticamente el mismo crecimiento lineal con  $n$ . Lo mismo se puede decir de la función  $m$ , sin que esto implique que el ritmo de crecimiento sea el mismo para las dos funciones (veanse figs. 4 y 5). De manera más precisa, la evidencia numérica indica que hay constantes  $\alpha \approx 0.920$ ,  $\bar{\beta} \approx 0.815$  tal que,

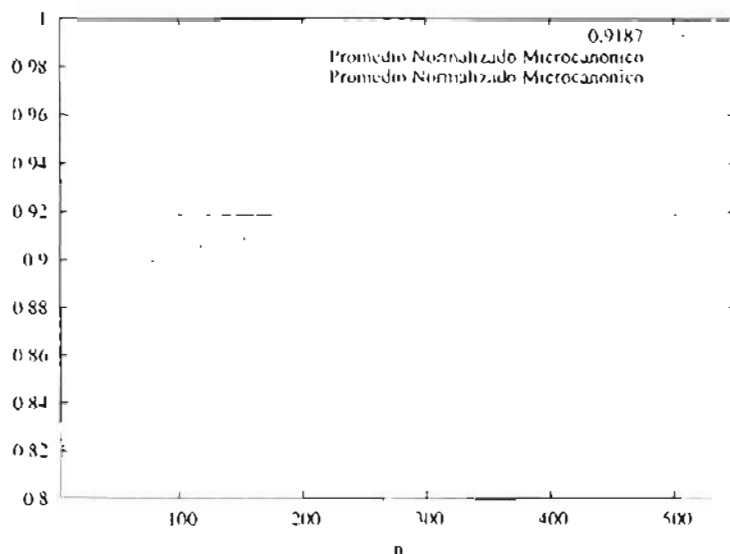


FIGURE 4. Comparación de promedios normalizados de caminos alternantes maximales en ensembles canónico y microcanónico

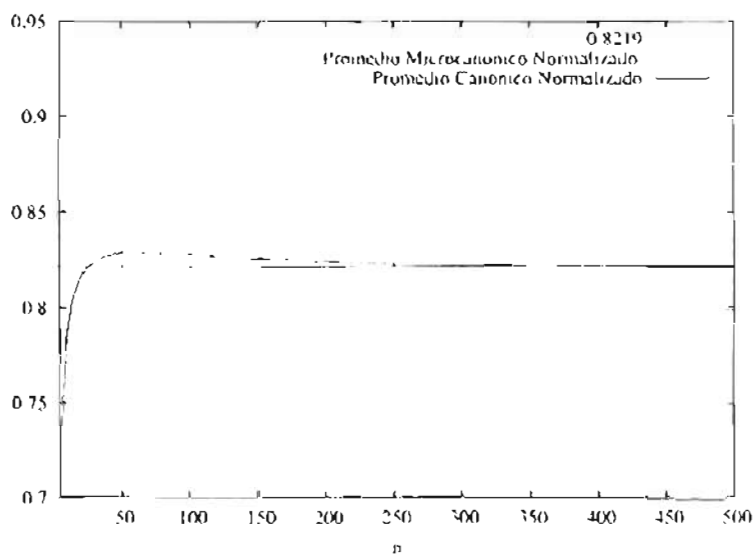


FIGURE 5. Comparación de promedios normalizados de matchings maximales en ensembles canónico y microcanónico .

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_n^{mc}(\ell)}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_n(\ell)}{2n} = \bar{\alpha}, \text{ and } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_n^{mc}(m)}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_n(m)}{2n} = \beta$$

En el Capítulo 4 se demostrará que los ensembles *caudales* y *monotónicos* son equivalentes en el sentido siguiente:

**Proposición 2.** *Fijese  $n \in \mathbb{N}$ , y dada  $v_n : \{R, A\}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  defínase para todo  $\omega \in \Omega$  la función  $v_n : \{R, A\}^{2n+2n} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $v_n(\omega) = v_n(\omega|_{(1,1-1)})$ . Entonces existe  $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que  $\lim_{m \rightarrow \infty} f_n(m) = 0$  y tal que*

$$|\Sigma_{v_n}^{2m}(v_n) - E_{v_n}(v_n)| \leq \max |v_n| + f_n(m),$$

para todo  $m \geq 0$ .

Se podría pensar que la equivalencia de medias que describe la relación (1) es una consecuencia de esta *equivalencia de ensembles* cuando se aplica a las funciones  $f$  y  $g$ . Sin embargo esto no es el caso pues mientras la proposición anterior habla de funciones  $v_m$  que dependen siempre de un número fijo de coordenadas, la relación (1) se refiere más a una familia de funciones que dependen de un número creciente de coordenadas. Es por esto que mientras en un caso el límite  $\lim_{m \rightarrow \infty} |\Sigma_{v_n}^{2m}(v_n) - E_{v_n}(v_n)|$  existe, en el otro esta media crece conforme aumenta la longitud de las secuencias.  $E_{v_n}^{2m}(f) = 0$

**2.2. Estructura de la Tesis.** En esta tesis explotamos y comparamos resultados generales sobre *equivalencia de ensembles* con el que a algunos de ellos se aplican a resultados particulares como la equivalencia de medias que se postula en la relación (1). Esta equivalencia de medias no se puede derivar de un resultado general sobre equivalencia de ensembles, sin tomar en cuenta las particularidades de las funciones  $f$  y  $g$ . Por otro lado, la relación (1) no requiere de una equivalencia completa de ensembles. En el próximo capítulo demostramos la equivalencia del crecimiento de las medias de  $f$  (respectivamente  $g$ ) respecto a los *ensembles caudales* y *monotónicos*. Esta equivalencia supone que el crecimiento de estas medias es asintóticamente lineal, cosa que no demostramos. En el mismo capítulo incluimos una discusión al respecto de este crecimiento asintóticamente lineal y cómo debería demostrarse. En el capítulo 4 presentamos una generalización de la Proposición 2 que se aplica a familias de funciones que dependen de un número creciente de coordenadas, de modo que se pueden considerar familias cuya longitud crece con el volumen (número de coordenadas) aunque no crece la media. Así esta generalización no se puede aplicar a

las familias  $\ell$  y  $m$ . Terminamos la tesis con conclusiones generales y perspectivas. El capítulo 6 contiene las pruebas de lemas técnicos que usamos en el próximo capítulo.

## 3. EQUIVALENCIA DE MEDIAS

El primer resultado de este trabajo, que atiende a la motivación original, es el siguiente

**Teorema 1.** *Para todo  $\epsilon > 0$  existe  $n = n(\epsilon) \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n(\epsilon)$  se tiene*

$$-(2 + \epsilon)\sqrt{n \log(n)} \leq \mathbb{E}_n(n) - \mathbb{E}_n^{\text{unc}}(\nu) \leq +(2 + \epsilon)\sqrt{n \log(n)},$$

donde  $\nu$  representa a cualquiera de las funciones  $\ell$  o  $m$ .

**Nota 1.** *Tómese en cuenta que tanto  $\ell$  como  $m$  representan familias de funciones, y no funciones fijas. La función particular que interviene en la desigualdad varía con la longitud de las secuencias, es decir con  $n$ .*

Para probar este resultado se usaran los siguientes dos lemas técnicos, cuya prueba se encuentra en el capítulo 6

**Lema 1.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $\delta > 0$ , sea*

$$\mathcal{B}_n^\delta := \{\omega \in \{R, A\}^{2n} : n(1 - \delta) \leq \#\omega^{-1}(A) \leq (1 + \delta)n\},$$

entonces

$$\frac{2(1 - \delta) \exp(-2n\delta^2)}{1 + \delta} \frac{\exp(-2n\delta^2)}{\sqrt{\pi n(1 - \delta^2)}} \leq \mathbb{P}_n(\{R, A\}^{2n} \setminus \mathcal{B}_n^\delta) \leq \frac{1 - \delta \exp\left(-n\delta^2 + \frac{1}{6n(1 - \delta^2)}\right)}{\delta} \frac{1}{\sqrt{\pi n(1 - \delta^2)}}$$

**Nota 2.** *El conjunto  $\mathcal{B}_n^\delta$  representa el conjunto de secuencias de  $2n$  puntos que tienen un número de puntos azules entre  $n(1 - \delta)$  y  $n(1 + \delta)$ . El enunciado establece la relación que hay entre la probabilidad canónica de encontrar una secuencia con un tal número de azules, en función de  $\delta$ . Nótese que esta probabilidad tiende a 1, para cualquier valor fijo  $\delta > 0$ , pero más importante es considerar el caso en que  $\delta \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .*

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $-n + 1 \leq k \leq n - 1$  se define

$$\Omega_n^k := \{\omega \in \{R, A\}^{2n} : \#\omega^{-1}(A) = n + k\},$$

y dotamos tal conjunto con la distribución uniforme

$$\mathbb{P}_n^k(\omega) := \frac{1}{\#\Omega_n^k} = \binom{2n}{n+k}^{-1} \quad \forall \omega \in \Omega_n^k.$$

Nótese que  $\Omega_n^{\text{mic}} \equiv \Omega_n^0$ , igual que  $\mathbb{P}_n^{\text{mic}} \equiv \mathbb{P}_n^0$ .

**Lema 2.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $-n+1 \leq k \leq n-1$ ,

$$-2|k| + \mathbb{E}_n^{\text{mic}}(\nu) \leq \sum_{\omega \in \Omega_n^k} \nu(\omega) \mathbb{P}_n^k(\omega) \leq 2|k| + \mathbb{E}_n^{\text{mic}}(\nu),$$

donde  $\nu$  es cualquiera de las funciones  $\ell$  o  $m$ .

**Nota 3.** Este lema establece en particular que los promedios microcanónicos no varían mucho si en lugar de fijar el número de coordenadas con valor  $A$  a  $n$ , se fija a cualquier otro valor cercano. De esta forma se obtiene un control en la variabilidad del promedio ante errores en la restricción del número de coordenadas con valor  $A$ .

3.1. **Prueba del Teorema 1.** Para  $n \in \mathbb{N}$  y  $\delta > 0$  dados tenemos que

$$\sum_{\omega \in \mathcal{B}_n^\delta} \nu(\omega) \mathbb{P}_n(\omega) \leq \mathbb{E}_n(\nu) \leq \sum_{\omega \in \mathcal{B}_n^\delta} \nu(\omega) \mathbb{P}_n(\omega) + 2n(1-\delta) \mathbb{P}_n(\{R, A\}^{2n} \setminus \mathcal{B}_n^\delta).$$

El Lema 1 permite precisar estas cotas como sigue,

$$\sum_{\omega \in \mathcal{B}_n^\delta} \nu(\omega) \mathbb{P}_n(\omega) \leq \mathbb{E}_n(\nu) \leq \sum_{\omega \in \mathcal{B}_n^\delta} \nu(\omega) \mathbb{P}_n(\omega) + \frac{2(1-\delta)^2 e^{-n\delta^2 + \frac{1}{\ln(1-\delta^2)}}}{\delta} \sqrt{\frac{n}{\pi(1-\delta^2)}}$$

Ahora haciendo  $\delta = \delta(n) := \sqrt{\log(n)/n}$  se tiene

$$(2) \quad \sum_{\omega \in \mathcal{B}_n^\delta} \nu(\omega) \mathbb{P}_n(\omega) \leq \mathbb{E}_n(\nu) \leq \sum_{\omega \in \mathcal{B}_n^\delta} \nu(\omega) \mathbb{P}_n(\omega) + \frac{\exp(9/2 \cdot \ln) 3\sqrt{2}}{\sqrt{\pi \log(n)}},$$

tomando en cuenta que  $\log(n)/n < 1/2$  para  $n \in \mathbb{N}$ . Por otro lado,

$$\sum_{\omega \in \mathcal{B}_n^\delta} \nu(\omega) \mathbb{P}_n(\omega) = \sum_{-n\delta \leq k \leq n\delta} 4^{-n} \binom{2n}{n+k} \sum_{\omega \in \Omega_n^k} \nu(\omega) \mathbb{P}_n^k(\omega),$$

lo que tomando en cuenta el Lemma 2 da

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_n(\mathcal{B}_n^\delta) \mathbb{E}_n^{\text{mic}}(\nu) - \frac{2}{4^n} \sum_{k=-n\delta}^{n\delta} \binom{2n}{n+k} |k| &\leq \sum_{\omega \in \mathcal{B}_n^\delta} \nu(\omega) \mathbb{P}_n(\omega) \\ &\leq \mathbb{P}_n(\mathcal{B}_n^\delta) \mathbb{E}_n^{\text{mic}}(\nu) + \frac{2}{4^n} \sum_{k=-n\delta}^{n\delta} \binom{2n}{n+k} |k|. \end{aligned}$$

Puesto que  $|k| \leq [\delta \times n] \leq \sqrt{n \log(n)}$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_n(\mathcal{B}_n^\delta) \times (\mathbb{E}_n^{\text{mic}}(\nu) - 2\sqrt{n \log(n)}) &\leq \sum_{\omega \in \mathcal{B}_n^\delta} \nu(\omega) \mathbb{P}_n(\omega) \\ &\leq \mathbb{P}_n(\mathcal{B}_n^\delta) \times (\mathbb{E}_n^{\text{mic}}(\nu) + 2\sqrt{n \log(n)}). \end{aligned}$$

Aquí se ha usado otra vez la relación  $\delta = \delta(n) = \sqrt{\log(n)/n}$ . Una vez más, haciendo uso del Lemma 1 y tomando en cuenta que  $\mathbb{P}_n(\mathcal{B}_n^\delta) \leq 1$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\exp(9/24n)3\sqrt{2}}{2n(1 - (\sqrt{2})^{-1})\sqrt{\pi \log(n)}}\right) \times (\mathbb{E}_n^{\text{mic}}(\nu) - 2\sqrt{n \log(n)}) &\leq \sum_{\omega \in \mathcal{B}_n^\delta} \nu(\omega) \mathbb{P}_n(\omega) \\ &\leq (\mathbb{E}_n^{\text{mic}}(\nu) + 2\sqrt{n \log(n)}). \end{aligned}$$

Finalmente, gracias a las desigualdades en (2) se obtiene

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\exp(9/24n)3\sqrt{2}}{2n(1 - (\sqrt{2})^{-1})\sqrt{\pi \log(n)}}\right) \times (\mathbb{E}_n^{\text{mic}}(\nu) - 2\sqrt{n \log(n)}) &\leq \mathbb{E}_n(\nu) \\ (\mathbb{E}_n^{\text{mic}}(\nu) + 2\sqrt{n \log(n)}) + \frac{\exp(9/24n)3\sqrt{2}}{\sqrt{\pi \log(n)}} &\geq \mathbb{E}_n(\nu). \end{aligned}$$

Como  $\mathbb{E}_n^{\text{mic}}(\nu) \leq 2n$ , se pueden simplificar aún más estas desigualdades para obtener

$$\begin{aligned} -2\sqrt{n \log(n)} - \frac{\exp(9/24n)3\sqrt{2}}{(1 - (\sqrt{2})^{-1})\sqrt{\pi \log(n)}} &\leq \mathbb{E}_n(\nu) - \mathbb{E}_n^{\text{mic}}(\nu) \\ &\leq 2\sqrt{n \log(n)} + \frac{\exp(9/24n)3\sqrt{2}}{\sqrt{\pi \log(n)}}. \end{aligned}$$

Para concluir esta prueba basta observar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\exp(9/24n)3\sqrt{2}}{\sqrt{\pi \log(n)}} = 0$$

**3.2. Crecimiento lineal asintótico.** El teorema anterior permite afirmar que la diferencia entre las medias  $\mathbb{E}_n(\nu)$  y  $\mathbb{E}_n^{\text{mic}}(\nu)$  es a lo mucho de orden  $\sqrt{n \log(n)}$ . Así, suponiendo que los límites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_n(\nu) \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_n^{\text{mic}}(\nu)$$

existen, lo que de ninguna manera está implícito en el teorema anterior, el Teorema 1 implica que ambos toman mismo valor.

Para demostrar que los límites anteriores existen, bastaría probar que para  $\nu = \ell$  ó  $m$ , la secuencia  $\mathbb{E}_n^{\text{mic}}(\nu)$  es subaditiva, mientras que  $\mathbb{E}_n(\nu)$  es subaditiva, es decir,

$$\mathbb{E}_{n+m}^{\text{mic}}(\nu) \geq \mathbb{E}_n^{\text{mic}}(\nu) + \mathbb{E}_m^{\text{mic}}(\nu) \quad \text{y} \quad \mathbb{E}_{n+m}(\nu) \leq \mathbb{E}_n(\nu) + \mathbb{E}_m(\nu),$$

para cada  $m, n \in \mathbb{N}$ . Algunos experimentos numéricos (ver Figuras 4 y 5) hacen suponer que este comportamiento (superaditivo para medias microcanónicas y subaditivo para medias canónicas) tiene lugar, al menos para valores de  $m$  y  $n$  suficientemente grandes.

A continuación presentamos dos ejemplos de familias de funciones relacionadas con  $m$  y  $\ell$ , cuyas medias definen secuencias superaditivas.

Se define un *matching lineal restringido* en la configuración  $\{v_1, v_2, \dots, v_{2n}\}$  como un *matching lineal* en el cual, si  $i$  es el menor índice tal que  $v_i$  es cubierto por el *matching*, de modo que hay un segmento de recta que une a los puntos  $v_i$  y  $v_j$  para algún  $j > i$ , entonces ninguno de los puntos en  $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_{2n}\}$  es cubierto por *matching* (ver Figuras 6 y 7).

Un *matching lineal restringido* es *maximal* si es *maximal* respecto al número de segmentos de recta que incluye. Con esto definimos la función  $m_r : \{R, A\}^{2n} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que  $m_r(\omega)$  es la longitud de un *matching lineal restringido maximal* en el conjunto de puntos  $C_\omega$  definido por la configuración  $\omega$ .

De forma análoga definimos un *camino alternante restringido* en  $\{v_1, v_2, \dots, v_{2n}\}$  como un *camino alternante* en el cual, si los puntos  $v_i$  y  $v_j$  con  $i < j$  son los extremos de dicho camino, entonces no existe ningún punto en  $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_{2n}\}$  que pertenezca al camino (ver Figuras 8 y 9).





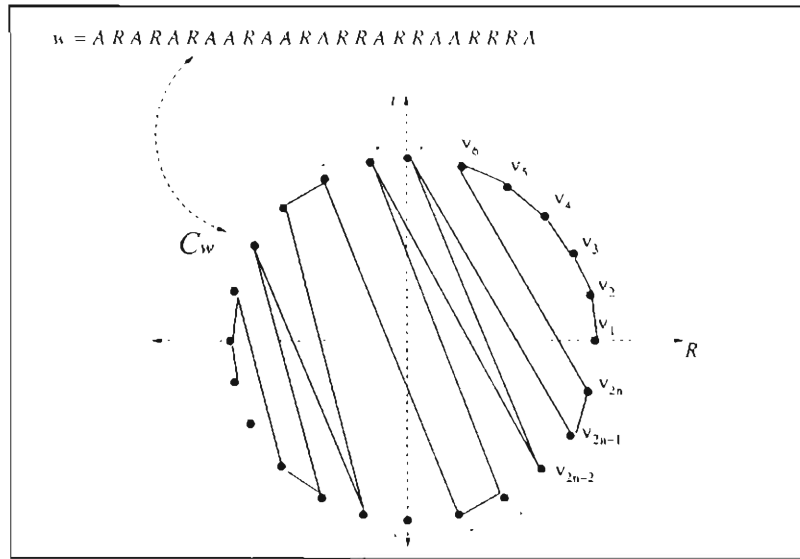


FIGURE 8. Ejemplo de un camino alternante no restringido en un conjunto de puntos rojos y azules en el plano en posición convexa.

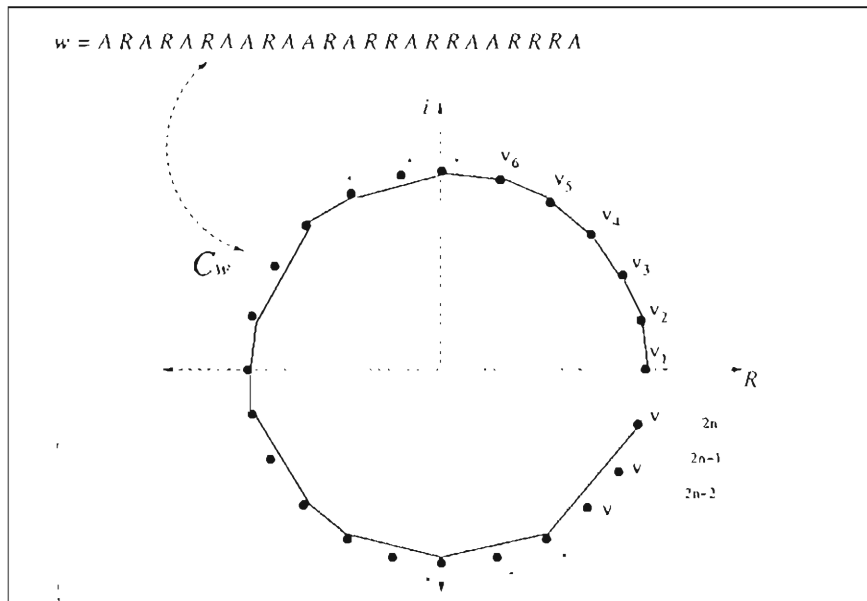


FIGURE 9. Ejemplo de un camino alternante maximal restringido en un conjunto de puntos rojos y azules en el plano en posición convexa.

que  $\ell_r(\omega)$  es la longitud de un camino alternante restringido maximal en el conjunto  $C_\omega$  asociado a la configuración  $\omega$ .

**Nota 4.** Haremos notar que lo mismo que  $m$  y  $\ell$ ,  $m_r$  y  $\ell_r$  son familias de funciones, una función para cada "volumen"  $n \in \mathbb{N}$ .

Para dichas familias  $\ell_r$  y  $m_r$  se tiene el siguiente.

**Teorema 2.** Para  $\nu_r = m_r$  o  $\ell_r$ , los límites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_n(\nu_r)/(2n) \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_n^{\text{mic}}(\nu_r)/(2n)$$

existen.

La existencia de los límites  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_n(\nu_r)/n$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_n^{\text{mic}}(\nu_r)/n$  esta asegurada por el siguiente resultado cuya prueba omitimos ya que es completamente análoga a la del Lema I.6.7 en [8].

**Lema 3** (Lema superaditivo). Sea  $c_0 \in \mathbb{R}$  fijo y  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  una secuencia en  $\mathbb{R}$  tal que  $a_{n+m} \geq a_n + a_m - c_0$  para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ . entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/n$  existe y es tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n/n$ . Este límite puede ser infinito.

*Prueba del Teorema 2.* Dadas configuraciones  $\omega \in \{R, A\}^{2n}$  y  $\tilde{\omega} \in \{R, A\}^{2m}$ , definimos la concatenación  $\omega \cdot \tilde{\omega} \in \{R, A\}^{2(n+m)}$  como sigue:

$$(\omega \cdot \tilde{\omega})(i) = \begin{cases} \omega(i) & \text{para } 1 \leq i \leq 2n, \\ \tilde{\omega}(i - 2n) & \text{para } 2n + 1 \leq i \leq 2(n + m) \end{cases}$$

A partir de dos caminos alternantes restringidos  $c$  en  $C_\omega$  y  $\tilde{c}$  en  $C_{\tilde{\omega}}$ , podemos construir un camino alternante restringido  $c \cdot \tilde{c}$  en  $C_{\omega \cdot \tilde{\omega}}$  como sigue: primero trazamos en  $C_{\omega \cdot \tilde{\omega}}$  los caminos alternantes correspondientes a  $c$  y  $\tilde{c}$ . Después, si el color del último vértice de  $c$  es diferente al del primer vértice de  $\tilde{c}$ , entonces unimos sus correspondientes en  $C_{\omega \cdot \tilde{\omega}}$  mediante un segmento de recta. Debido a la restricción impuesta en los caminos  $c$  y  $\tilde{c}$ , este segmento de recta no intersectará a ninguno de los ya existentes. Si por el contrario el color del último vértice de  $c$  es igual al del primer vértice de  $\tilde{c}$ , entonces unimos mediante un segmento de recta, el correspondiente al penúltimo vértice de  $c$  con el correspondiente al primero de  $\tilde{c}$ . Otra vez, este nuevo segmento de recta no intersectará a los ya existentes. En ambos casos el camino construido satisficará la restricción, y tendrá longitud acotada inferiormente por la suma de las longitudes de  $c$  y  $\tilde{c}$  menos 1. De aquí concluimos que

$$\ell_r(\omega \cdot \tilde{\omega}) \geq \ell_r(\omega) + \ell_r(\tilde{\omega}) - 1.$$

Un razonamiento análogo nos permite deducir la misma desigualdad reemplazando  $m_r$  por  $\ell_r$ .

En ambos casos la superaditividad, que es válida configuración por configuración, se extiende a las medias, de modo que

$$\mathbb{E}_{n+m}(\nu_r) \geq \mathbb{E}_m(\nu_r) + \mathbb{E}_n(\nu_r) - 1 \quad \text{y} \quad \mathbb{E}_{n+m}^{\text{mic}}(\nu_r) \geq \mathbb{E}_m^{\text{mic}}(\nu_r) + \mathbb{E}_n^{\text{mic}}(\nu_r) - 1$$

para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ , y donde  $\nu_r = \ell_r$  o  $m_r$ . Enseguida aplicamos el Lema superaditivo, y de esta forma se prueba el teorema.  $\square$

## 4. EQUIVALENCIA DE ENSEMBLES

El segundo resultado de este trabajo es la Proposición 2 que es una extensión en el capítulo 2 y una generalización del mismo a familias de funciones que dependen de un número creciente de coordenadas, es decir, familias de funciones cuya media crece con el número de coordenadas. En este capítulo analizaremos también la relación entre la equivalencia de medias de las funciones  $f$  y  $g$  y la equivalencia de ensembles.

Se comienza por demostrar el siguiente

**Teorema 3.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq n$ , y para toda función  $\phi: \{B, A\}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{n,m}^{\text{unif}}(\phi) &= \mathbb{P}_{n,m}^{\text{unif}}(\{\omega \in \Omega_{n,m}^{\text{unif}} : \omega|_{[1, \dots, n]} = \phi\}) \\ \mathbb{E}_{n,m}(\phi) &= \mathbb{E}_{n,m}(\{\omega \in \{B, A\}^{n+m} : \omega|_{[1, 2, \dots, n]} = \phi\}) \end{aligned}$$

Existe una función  $a: (n, m) \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $m \geq n \rightarrow [0, \infty]$  tal que

$$\exp(-a(n, m)) \leq \frac{\mathbb{P}_{n,m}^{\text{unif}}(\phi)}{\mathbb{E}_{n,m}(\phi)} \leq \exp(a(n, m))$$

Además, si  $m = m(n) = n^2 \log(n)$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n, m) = 0$ .

**Nota 5.** Este teorema establece cotas en el cono de entre probabilidad no recurrente y canónica que se tiene un prefijo de longitud  $n$  de una sucesión en  $\{B, A\}^{n+m}$ . En particular, establece que dicha coincide tanto a una asintóticamente con  $n$  para cualquier elección  $m: m(n) \geq n^2 \log(n)$ . De esta forma los prefijos de una sucesión tomada al azar tienen asintóticamente la misma probabilidad que sea que las configuraciones sea elegidas según el ensemble canónico o el no recurrente.

*Proof.* Dado  $\phi: \{B, A\}^m$ , por definición tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{n,m}^{\text{unif}}(\phi) &= \mathbb{P}_{n,m}^{\text{unif}}(\{\omega \in \Omega_{n,m}^{\text{unif}} : \omega|_{[1, \dots, n]} = \phi\}) \\ &= \sum_{\omega \in \{B, A\}^{n+m}} \mathbb{P}_{n,m}^{\text{unif}}(\omega) \end{aligned}$$

Puesto que

$$\sum_{\omega \in \{B, A\}^{n+m}} \mathbb{P}_{n,m}^{\text{unif}}(\omega) = \binom{2(n+m)}{n+m}^{-1}$$

entonces

$$\mathbb{P}_{n+m}^{\text{mic}}(\phi) = \# \{ \omega \in \Omega_{n+m}^{\text{mic}} : \omega_{\{1, \dots, 2n\}} = \phi \} \times \binom{2(n+m)}{n+m}^{-1}$$

Para todos y cada  $\omega \in \Omega_{n+m}^{\text{mic}}$  cuyo prefijo de tamaño  $2n$  es  $\phi$ , es decir, que satisface  $\omega|_{\{1, \dots, 2n\}} = \phi$ , se tenemos que

$$\# \{ \omega^{-1}(\{R\}) \cap \{2n+1, \dots, 2(n+m)\} \} = n+m - \#\phi^{-1}(R).$$

De aquí se sigue que

$$\# \{ \omega \in \Omega_{n+m}^{\text{mic}} : \omega_{\{1, \dots, 2n\}} = \phi \} = \binom{2m}{n+m - \#\phi^{-1}(R)}.$$

Esto es,  $\phi$  toma el valor  $R$  en  $\#\phi^{-1}(R)$  coordenadas, de modo que si  $\omega$  tiene prefijo  $\phi$ , su sufixo debe tomar valor  $R$  en exactamente  $n+m - \#\phi^{-1}(R)$  de las  $2m$  coordenadas restantes. Usando este hecho se sigue que

$$\mathbb{P}_{n+m}^{\text{mic}}(\phi) = \binom{2m}{n+m - \#\phi^{-1}(R)} \binom{2(n+m)}{n+m}^{-1}$$

Si consideramos el *ensemble canónico* llegamos de forma análoga a que  $\mathbb{P}_{n+m}(\phi) = 4^{-n}$ . Dado que  $0 \leq \#\phi^{-1}(R) \leq n$ , entonces

$$4^n \binom{2m}{m+n} \binom{2(n+m)}{n+m}^{-1} \leq \frac{\mathbb{P}_{n+m}^{\text{mic}}(\phi)}{\mathbb{P}_{n+m}(\phi)} \leq 4^n \binom{2m}{m} \binom{2(n+m)}{n+m}^{-1},$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{4^n \times (2m)! \times (n+m)!}{(2(n+m))! \times (m-n)!} \leq \frac{\mathbb{P}_{n+m}^{\text{mic}}(\phi)}{\mathbb{P}_{n+m}(\phi)} \leq \frac{4^n \times (2m)! \times ((n+m)!)^2}{(2(n+m))! \times (m!)^2}.$$

Aplicando la fórmula de Stirling<sup>1</sup> y simplificando, se obtiene

$$\exp\left(-m\mathcal{D}(n/m) - \frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{n}{m}\right)\right) \leq \frac{\mathbb{P}_{n+m}^{\text{mic}}(\phi)}{\mathbb{P}_{n+m}(\phi)} \leq \exp\left(\frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{n}{m}\right) + \frac{1}{6(n+m)}\right)$$

donde,  $\mathcal{D}(\epsilon) = (1 + \epsilon) \log(1 + \epsilon) + (1 - \epsilon) \log(1 - \epsilon)$  para todo  $\epsilon \in (0, 1)$ . De aquí se sigue que

$$\exp(-a(n, m)) \leq \frac{\mathbb{P}_{n+m}^{\text{mic}}(\phi)}{\mathbb{P}_{n+m}(\phi)} \leq \exp(a(n, m)),$$

con

$$a(n, m) = \max\left(m\mathcal{D}(n/m) + \frac{1}{2} \log(1 - n/m), \frac{1}{2} \log(1 + n/m) + \frac{1}{6(n+m)}\right)$$

<sup>1</sup>  $\sqrt{2\pi}e^{-n+(12n+1)^{-1}}n^{n+\frac{1}{2}} \leq n! \leq \sqrt{2\pi}e^{-n+(12n)^{-1}}n^{n+\frac{1}{2}}$

Puesto que  $\log(1 + \epsilon) \geq \epsilon/2$  para todo  $\epsilon \in ]0; 1[$ , entonces  $\mathcal{D}(\epsilon) \subset 2\epsilon^2$  y de ahí:

$$a(\epsilon) - m_\epsilon \leq \max \left( \frac{2n^2}{n}, \frac{n}{2n}, \frac{n}{2n}, \frac{1}{6(n+1)} \right) = \frac{2n^2}{n}$$

para  $0 < \epsilon \leq 1$ .

Finalmente, con  $m_\epsilon = m(n) \geq n^2 \log(\epsilon)$  se tiene  $n(n - m_\epsilon) \leq 2/\log(\epsilon)$ , de modo que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} a(\epsilon) - m(\epsilon) = 0$  en este caso. Así concluyese la prueba.  $\square$

La Proposición 2 enunciada en el capítulo 2 es en realidad un corolario del Teorema anterior.

**Corolario 1** (Proposición 2 del capítulo 2). *Égese  $n \in \mathbb{N}$ , y doto  $v_n: [R, A]^D \rightarrow \mathbb{R}$  defínase para toda  $m \geq 0$  la función  $v_m: [R, A]^{D(n+m)} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $v_m(x) = v_n(x|_{[R, A]^D})$ . Entonces existe  $f_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que  $\lim_{m \rightarrow \infty} f_n(m) = 0$  y tal que*

$$|E_{n+m}^{(m)}(v_m) - E_{n+m}(v_m)| \leq \max |v_n| \cdot f_n(m),$$

para toda  $m \geq 0$ .

*Proof.* Puesto que para cada  $m \geq 0$  la función  $v_m$  depende sólo de las primeras  $2n$  coordenadas, entonces:

$$E_{n+m}^{(m)}(v_m) = \sum_{\omega \in (R, A)^{2n}} v_n(\omega) \mathbb{P}_{n+m}(\omega) \quad \text{y} \quad E_{n+m}(v_m) = \sum_{\omega \in (R, A)^{2n}} v_n(\omega) \mathbb{P}_{n+m}^{(m)}(\omega)$$

Por lo tanto:

$$|E_{n+m}^{(m)}(v_m) - E_{n+m}(v_m)| \leq \sum_{\omega \in (R, A)^{2n}} |v_n(\omega)| \cdot |\mathbb{P}_{n+m}^{(m)}(\omega) - \mathbb{P}_{n+m}(\omega)|$$

Usando el Teorema 3 se sigue que:

$$\begin{aligned} |E_{n+m}^{(m)}(v_m) - E_{n+m}(v_m)| &\leq \sum_{\omega \in (R, A)^{2n}} |v_n(\omega)| \cdot \mathbb{P}_{n+m}(\omega) \cdot \max \{1 - e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{n+m}}, e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{n+m}}\} \\ &\leq (e^{2n} - 1) \cdot \sum_{\omega \in (R, A)^{2n}} |v_n(\omega)| \cdot \mathbb{P}_{n+m}(\omega) \\ &\leq (e^{2n} - 1) \times \max_{\omega \in (R, A)^{2n}} |v_n(\omega)| \end{aligned}$$

Basé en aquí hemos probado que:

$$|E_{n+m}^{(m)}(v_m) - E_{n+m}(v_m)| \leq \max |v_n| \cdot f_n(m)$$

con  $f_n(m) := \exp(a(n, m)) - 1 \leq \exp(2n^2/m) - 1$ . Para concluir la prueba basta hacer notar que para  $n$  fijo,  $\lim_{m \rightarrow \infty} a(n, m) = 0$ .  $\square$

**Nota 6.** *Notese que la familia de funciones  $\{\nu_m : m \geq 0\}$  en realidad definen una sola función  $\nu_0$  que extendemos a espacios de configuraciones cada vez mas grandes, es decir, para volúmenes crecientes. Diremos que en este caso que  $\nu_m$  tiene soporte  $2n$ , y que las configuraciones sobre las que actúa son de volumen  $2(m+n)$ . Por otro lado, puesto que  $\mathbb{P}_{(n+m)}(\phi) = 4^{-n}$  para toda configuración  $\phi \in \{R, A\}^{2n}$ , entonces  $\mathbb{E}_{n+m}(\nu_m) = \mathbb{E}_n(\nu_0)$  para todo  $m \geq 0$ . Entonces, de acuerdo al corolario anterior, el valor esperado de  $\mathbb{E}_{n+m}(\nu_m)$  converge a aproxima a la media que toma la misma función según el ensemble canónico,  $\mathbb{E}_n(\nu_0)$ .*

*Un resultado similar se obtiene si se consideran familias de funciones  $\nu_m$  que dependen de todo el volumen, pero tal que esta dependencia es cada vez menos sensible a las coordenadas cuyo índice tiende a infinito.*

Como una aplicación del corolario anterior se tiene el siguiente.

**Ejemplo 1.** *Fijese  $n \in \mathbb{N}$ , y para cada  $m \geq 0$  y  $\omega \in \{R, A\}^{2(n+m)}$  defínase  $\nu_0(\omega) = \nu(\omega|_{\{1, \dots, 2n\}})$ , donde  $\nu$  es cualquiera de las dos funciones  $\ell$  y  $m$  que estudiamos en el capítulo anterior. Del Corolario 1 se sigue que*

$$|\mathbb{E}_{n+m}^{\text{mic}}(\nu_r) - \mathbb{E}_{n+m}(\nu_r)| \leq 2n \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k(n, m)}{k!} \leq 2n \times a(n, m)e^{a(n, m)}.$$

Así, para  $n$  fijo,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |\mathbb{E}_{n+m}^{\text{mic}}(\nu_r) - \mathbb{E}_{n+m}(\nu_r)| = 2n \lim_{m \rightarrow \infty} a(n, m)e^{a(n, m)} = 0.$$

*El corolario anterior también establece que se puede aproximar el valor esperado  $\mathbb{E}_{n+m}^{\text{mic}}(\nu_r)$  mediante  $\mathbb{E}_{n+m}(\nu_r)$ , cometiendo un error que tiende a cero a cero cuando el volumen de las configuraciones tiende a infinito.*

**Nota 7.** *Puesto que el corolario anterior se aplica solo a funciones que dependen de un número fijo de coordenadas, el problema de la equivalencia de medias  $\mathbb{E}_{n+m}^{\text{mic}}(\nu)$  y  $\mathbb{E}_n(\nu)$  no puede ser tratado mediante el uso de este corolario ya que dichas funciones dependen de sus  $2n$  coordenadas para cada versión finita  $\{R, A\}^{2n}$  que se considere.*



A continuación se presenta una generalización del Corolario 1 aplicable a familias de funciones cuya medida crece con el volumen de la función.

**Corolario 2.** Dada una familia de funciones  $\{\nu_n : \{R, A\}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ , para cada  $n$  y  $m \in \mathbb{N}$  defínase la función  $\nu_{n+m} : \{R, A\}^{2(n+m)} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nu_{n+m}(\sigma) = \nu_n(\sigma|_{\{1, \dots, n\}})$ . Entonces existe  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que para todo  $n, m \in \mathbb{N}$

$$|\mathbb{E}_{\nu_{n+m}}^{\text{int}}(\nu_{n,m}) - \mathbb{E}_{\nu_{n+m}}(\nu_{n,m})| \leq \max |v_n| \cdot f(n, m).$$

Además, se para cada  $n \in \mathbb{N}$   $m = m(n) = \max |v_n| \times n^2 \log(n)$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}_{\nu_{n+m(n)}}^{\text{int}}(\nu_{n,m(n)}) - \mathbb{E}_{\nu_{n+m(n)}}(\nu_{n,m(n)})| = 0.$$

**Nota 8.** Este corolario establece la equivalencia de medidas para familias de funciones que con soporte creciente. La equivalencia se logra si el volumen crece más rápido que el soporte. Por ejemplo, para familias como  $f$  y  $g$  el soporte crece linealmente con el soporte, la relación entre soporte y volumen es

$$\text{volumen} \sim (\text{soporte})^2 \log(\text{soporte}).$$

*Proof.* Puesto que  $\nu_{n,m}$  sólo depende de las primeras  $2n$  coordenadas, entonces

$$\mathbb{E}_{\nu_{n+m}}(\nu_{n,m}) = \sum_{\sigma \in \{R, A\}^{2n}} \nu_n(\sigma) \mathbb{P}_n(\sigma) \quad \text{y} \quad \mathbb{E}_{\nu_{n+m}}^{\text{int}}(\nu_{n,m}) = \sum_{\sigma \in \{R, A\}^{2n}} \nu_n(\sigma) |\mathbb{P}_{n+m}^{\text{int}}(\sigma)|$$

por lo tanto

$$|\mathbb{E}_{\nu_{n+m}}^{\text{int}}(\nu_{n,m}) - \mathbb{E}_{\nu_{n+m}}(\nu_{n,m})| \leq \sum_{\sigma \in \{R, A\}^{2n}} |\nu_n(\sigma)| \cdot |\mathbb{P}_{n+m}^{\text{int}}(\sigma) - \mathbb{P}_{n+m}(\sigma)|$$

De la misma forma que lo hicimos en la prueba del Corolario 1, usando el Teorema 3 obtenemos

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}_{\nu_{n+m}}^{\text{int}}(\nu_{n,m}) - \mathbb{E}_{\nu_{n+m}}(\nu_{n,m})| &\leq (e^{n(n+m)} - 1) \sum_{\sigma \in \{R, A\}^{2n}} |\nu_n(\sigma)| \cdot \mathbb{P}_{n+m}(\sigma) \\ &\leq (e^{n(n+m)} - 1) \cdot \max |v_n| \end{aligned}$$

Haciendo  $f(n, m) = e^{n(n+m)} - 1$  queda probada la primera parte del enunciado.

Ahora, puesto que  $n(m, n) = 2n^2 \log(n)$ , para  $m = m(n) = \max |v_n| \cdot n^2 \log(n)$  tenemos

$$|\mathbb{E}_{\nu_{n+m}}^{\text{int}}(\nu_{n,m}) - \mathbb{E}_{\nu_{n+m}}(\nu_{n,m})| \leq n^2 \log(n)$$

con lo que  $\nu_{n+m}$  converge débilmente a  $\nu_n$ . □

*Nota 9.* De acuerdo a este corolario podemos aproximar la media microcanónica de una función  $\phi_n$  de soporte  $2n$ , definidas sobre configuraciones de volumen  $2(m+n)$ , por la media canónica de la misma función, siempre y cuando el volumen sea mayor que  $|\nu_n| \times n^2 \log(n)$ . Existe entonces una equivalencia entre medias canónica y microcanónica para funciones cuyo soporte es pequeño respecto al volumen.

Se puede demostrar fácilmente que de este corolario no se deriva la equivalencia de medias que se establece en la relación 1 del Capítulo 1.

## 7. COMENTARIOS FINALES

La equivalencia de *ensembles* es un resultado muy importante en mecánica estadística matemática, que permite aproximar medias estadísticas en sistemas con restricciones por medio de sus correspondientes en sistemas sin restricciones. En nuestro caso la restricción es que el número de puntos rojos debe ser igual al número de puntos azules. La equivalencia de *ensembles* es útil ya que en general las es más fácil hacer cálculos en sistemas sin restricciones.

El principal objetivo de este trabajo fue establecer la equivalencia de medias *canónica* y *microcanónica* para las funciones  $\ell$  y  $\alpha$ , así como explorar similitudes y diferencias entre esta equivalencia de medias y la ya conocida (completa) de *ensembles*.

La equivalencia de medias para las funciones citadas en el párrafo anterior se obtuvo estableciendo una cota para la diferencia  $|\mathbb{E}_n^{\text{can}}(\ell) - \mathbb{E}_n(\ell)|$ , donde  $n$  es cualquiera de las dos  $\ell$  ó  $\alpha$ . En el Teorema 1 establecimos que esta diferencia es  $O(n^{-1/2})$  de modo que la diferencia normalizada tiende a cero.

La evidencia numérica (ver Figuras 10 y 11) indica que tanto en el caso de la familia  $\ell$  como el de la familia  $\alpha$ , dicha cota es de orden mucho menor de modo que la diferencia normalizada  $(\mathbb{E}_n^{\text{can}}(\ell) - \mathbb{E}_n(\ell))/n$  decrece como  $n^{-2}$  con  $n \geq 1$ . Esto es compatible con un crecimiento logarítmico de la diferencia.

Si bien la cota dada por el Teorema 1 no es justa, para obtenerla no usamos las particularidades de las familias de los funciones  $\ell$  y  $\alpha$ . Se puede mejorar la cota mediante un cálculo más elaborado.

Por otro lado, en este trabajo no demostramos que los límites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_n(\ell)/n \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_n^{\text{can}}(\ell)/n$$

existen. La evidencia numérica indica que  $\mathbb{E}_n(\ell)/n$  es creciente con  $n$  y al ser acotada superiormente por 1, debe tender a un límite cuando hacemos tender  $n$  a infinito. El Teorema 1 implica que si existe este límite entonces la sucesión  $\mathbb{E}_n^{\text{can}}(\ell)/n$  también converge al mismo límite.

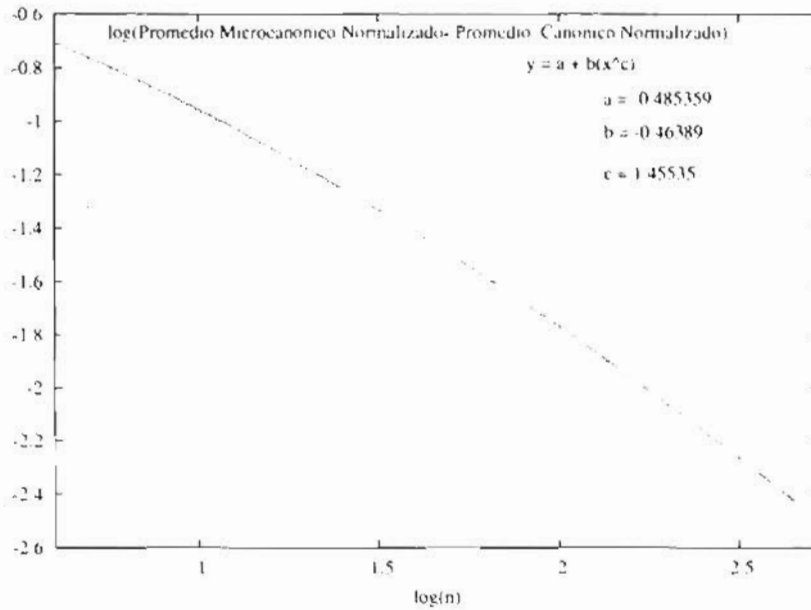


FIGURE 10. Resultados Numericos para Caminos Alternantes Maximales

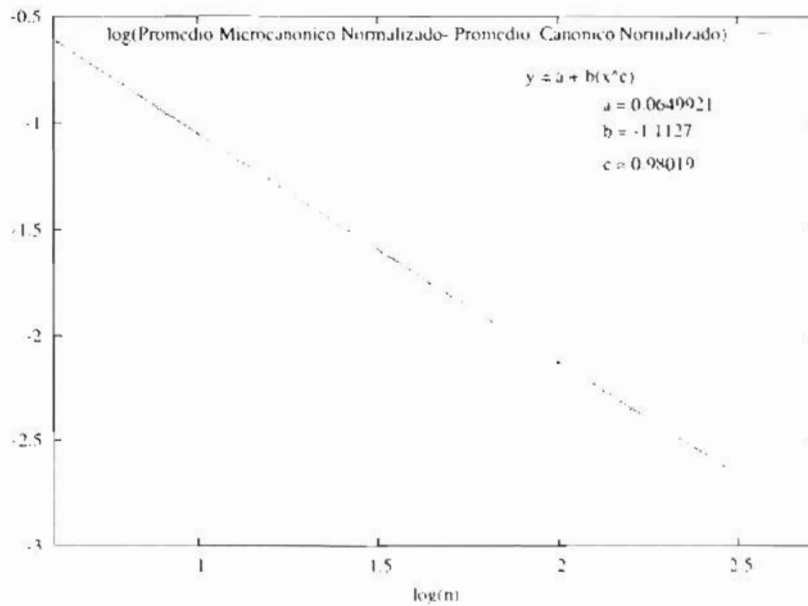


FIGURE 11. Resultados Numericos para Matchings Lineales Maximales.

Acerca de la secuencia  $\mathbb{E}_n(m)/n$ , la evidencia numérica indica que

$$\frac{\mathbb{E}_n(m)}{n} > \frac{\mathbb{E}_{n'}(m)}{n'} \text{ para } 50 < n < n'.$$

Es decir, la sucesión  $E_n(m)/n$  parece ser decreciente a partir de  $n = 50$ . Al estar acotada inferiormente por cero, esta sucesión debe tender a un límite cuando  $n$  tiende a infinito. Una vez más el Teorema 1 implicaría que  $\epsilon_2^{2^n}(a, n)$  también converge y ambos límites deben de coincidir.

En la segunda parte de este trabajo se estudió la equivalencia de *cadenas marcadas* y *caóticas*. Se estableció dicha equivalencia en el Teorema 3, sin embargo este resultado no garantiza la equivalencia de las medidas normalizadas para las funciones  $f$  y  $\pi$ .

Queda como trabajo a futuro demostrar que existen los límites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n^{\text{mar}}(p)}{2n} \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(\nu)}{2n}$$

donde  $\nu$  es cualquiera de  $f$  o  $\pi$ . Con esto y el Teorema 3 de el presente trabajo se demostraría además que dichos límites coinciden.

A futuro se pretende también establecer una generalización de el trabajo realizado alfabets más grandes que el binario  $\{R, A\}$ , así como a diferentes distribuciones (no necesariamente uniformes) en cada *cadenas*.

## 6. ANEXO: RESULTADOS TÉCNICOS

**Prueba del Lema 1.** Tenemos por definición.

$$\mathbb{P}_n(\{R, A\}^{2n} \setminus \mathcal{B}_n^\delta) = \frac{2}{4^n} \sum_{j=0}^{n(1-\delta)-1} \binom{2n}{j}.$$

Puesto que para  $1 \leq j \leq n(1-\delta)$  se cumple

$$\binom{2n}{j-1} = \binom{2n}{j} \frac{j}{2n-j+1} \leq \binom{2n}{j} \frac{j}{2n-j} \leq \binom{2n}{j} \frac{n(1-\delta)}{2n-n(1-\delta)} = \binom{2n}{j} \frac{1-\delta}{1+\delta},$$

iterando se obtiene que

$$\binom{2n}{j} \leq \binom{2n}{n(1-\delta)} \left( \frac{1-\delta}{1+\delta} \right)^{n(1-\delta)-j}$$

para  $0 \leq j \leq n(1-\delta)$ . Este hecho permite establecer cotas para  $\mathbb{P}_n(\{R, A\}^{2n} \setminus \mathcal{B}_n^\delta)$  de la siguiente manera

$$\frac{2(1-\delta)}{4^n(1+\delta)} \binom{2n}{n(1-\delta)} \leq \mathbb{P}_n(\{R, A\}^{2n} \setminus \mathcal{B}_n^\delta) \leq \frac{2}{4^n} \binom{2n}{n(1-\delta)} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1-\delta}{1+\delta} \right)^j,$$

o lo que es lo mismo,

$$\frac{2(1-\delta)}{(1+\delta)4^n} \frac{(2n)!}{(n(1-\delta))!(n(1+\delta))!} \leq \mathbb{P}_n(\{R, A\}^{2n} \setminus \mathcal{B}_n^\delta) \leq \frac{2}{4^n} \left( \frac{1-\delta}{2\delta} \right) \frac{(2n)!}{(n(1-\delta))!(n(1+\delta))!}.$$

Utilizando la formula de Stirling<sup>2</sup> se obtiene

$$\frac{2(1-\delta)}{1+\delta} \frac{\exp(-\mathcal{D}(\delta))}{\sqrt{\pi n(1-\delta^2)}} \leq \mathbb{P}_n(\{R, A\}^{2n} \setminus \mathcal{B}_n^\delta) \leq \frac{1-\delta}{\delta} \frac{\exp\left(-\mathcal{D}(\delta) + \frac{1}{6n(1-\delta^2)}\right)}{\sqrt{\pi n(1-\delta^2)}},$$

donde  $\mathcal{D}(\delta) = (1+\delta) \log(1+\delta) + (1-\delta) \log(1+\delta)$ . Finalmente, dado que  $\delta^2 \leq \mathcal{D}(\delta) \leq 2\delta^2$ , entonces

$$\frac{2(1-\delta)}{1+\delta} \frac{\exp(-2\delta^2)}{\sqrt{\pi n(1-\delta^2)}} \leq \mathbb{P}_n(\{R, A\}^{2n} \setminus \mathcal{B}_n^\delta) \leq \frac{1-\delta}{\delta} \frac{\exp\left(-\delta^2 + \frac{1}{6n(1-\delta^2)}\right)}{\sqrt{\pi n(1-\delta^2)}},$$

con lo que queda demostrado el lema.  $\square$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $-n+1 \leq k \leq n-1$  se define

$$\Omega_n^k := \{\omega \in \{R, A\}^{2n} : \#\omega^{-1}(A) = n+k\},$$

<sup>2</sup> $\sqrt{2\pi}e^{-n+(12n+1)^{-1}}n^{n+\frac{1}{2}} \leq n! \leq \sqrt{2\pi}e^{-n+(12n)^{-1}}n^{n+\frac{1}{2}}$

se le asigna a tal conjunto la distribución uniforme

$$\mathbb{P}_n^k(\omega_i) = \frac{1}{\#\Omega_n^k} \binom{2n}{n+k}^{-1} \quad \forall \omega \in \Omega_n^k$$

Notese que  $\Omega_n^{0n} = \Omega_n^0$  así como  $\mathbb{P}_n^{n+} = \mathbb{P}_n^+$ .

**Prueba del Lema 2.** Basta probarlo para  $0 < k \leq n-1$  el caso  $n-n+1+k=0$  es simétrico.

Para cada  $\omega \in \Omega_n^0$  se define  $\Omega_n^k(\omega)$  como el conjunto de las configuraciones  $\omega' \in \Omega_n^k$  que se obtienen al tomar  $k$  de las  $n$  coordenadas de  $\omega$  con valor  $B$  y reasignarles el valor  $A$ . Se le dota a dicho conjunto con la distribución uniforme, es decir

$$u_n^k(\omega') = \binom{n}{k}^{-1} \quad \forall \omega' \in \Omega_n^k(\omega)$$

De esta forma estamos definiendo una proyección aleatoria (mapa de cotin.)  $\pi_k: \Omega_n^0 \rightarrow \Omega_n^k$  de tal que

$$\mathbb{P}(\pi_k(\omega') = \omega) = \begin{cases} u_n^k(\omega) & \text{si } \omega \in \Omega_n^k(\omega') \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Notese que cada configuración  $\omega \in \Omega_n^k$  puede obtenerse por proyección aleatoria a partir de varias configuraciones  $\omega' \in \Omega_n^0$ . De hecho,

$$\#\{\omega' \in \Omega_n^0 : \omega \in \pi_k(\omega')\} = \binom{n+k}{k}$$

que corresponde todas las posibles elecciones de  $k$  coordenadas de valor  $A$  en  $\omega'$  que tendrán valor  $B$  antes de la proyección aleatoria. Esto nos permite escribir

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega_n^k} v(\omega) \mathbb{P}_n^k(\omega) &= \sum_{\omega' \in \Omega_n^0} \binom{n+k}{k}^{-1} \sum_{\omega \in \pi_k(\omega')} \mathbb{P}_n^k(\omega) v(\omega) \\ &= \sum_{\omega' \in \Omega_n^0} \binom{n+k}{k}^{-1} \times \binom{2n}{n+k}^{-1} \sum_{\omega \in \pi_k(\omega')} v(\omega) \end{aligned}$$

Ahora puesto que

$$\binom{n+k}{k} \binom{2n}{n+k} = \frac{(n+k)!}{n!k!} \frac{(2n)!}{(n+k)!(n-k)!} = \binom{2n}{n} \binom{n}{k}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega_n^k} \nu(\bar{\omega}) \mathbb{P}_n^k(\bar{\omega}) &= \sum_{\omega \in \Omega_n^0} \binom{2n}{n}^{-1} \times \binom{n}{k}^{-1} \sum_{\omega \in \Omega_n^0(\omega)} \nu(\bar{\omega}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega_n^0} \mathbb{P}_n^0(\omega) \left( \sum_{\omega \in \Omega_n^0(\omega)} u_n^k(\bar{\omega}) \nu(\bar{\omega}) \right). \end{aligned}$$

Por otro lado, al hacer una proyección aleatoria  $\omega \mapsto \bar{\omega}$ , la longitud de el camino alternante maximal, o el número de puntos cubiertos por un matching maximal, no puede variar en más de  $2k$ . Esto es evidente tratándose de matchings (se pierden o se ganan a lo más  $k$  aristas), y en el caso de caminos alternantes basta notar que cada vez que se cambia el color de un punto, o bien el punto no pertenece al camino y el camino se puede alterar para incluir además a ese punto, o si no entonces es un punto estaba en el camino y entonces se pierde una alternancia. En este caso hay que alterar el camino, perdiendo 2 aristas, para recuperar la alternancia. Como no había autoaristas en el camino original, y los puntos están en posición convexa, entonces esta modificación no genera cortes. De esto resulta que si  $\pi_k(\omega) = \bar{\omega}$ , entonces

$$\nu(\omega) - 2k\nu(\bar{\omega}) \leq \nu(\omega) + 2k.$$

para  $\nu = \ell$  o  $m$ .

Tomando estas desigualdades se obtiene

$$\sum_{\omega \in \Omega_n^0} \mathbb{P}_n^0(\omega) (\nu(\omega) - 2k) \left( \sum_{\omega \in \Omega_n^0(\omega)} u_n^k \right) \leq \sum_{\omega \in \Omega_n^0} \nu(\bar{\omega}) \mathbb{P}_n^k(\bar{\omega}) \leq \sum_{\omega \in \Omega_n^0} \mathbb{P}_n^0(\omega) (\nu(\omega) + 2k) \left( \sum_{\omega \in \Omega_n^0(\omega)} u_n^k \right).$$

es decir,

$$-2k + \mathbb{E}_n^{\text{mic}}(\nu) \leq \sum_{\omega \in \Omega_n^0} \nu(\bar{\omega}) \mathbb{P}_n^k(\bar{\omega}) \leq 2k + \mathbb{E}_n^{\text{mic}}(\nu),$$

y así se termina la prueba.

□



## REFERENCIAS

- [1] M. Abellanas, A. García, F. Hurtado y J. Tejel, Caminos Alternantes, en *Actas de los X Encuentros de Geometría Computacional*, Sevilla (2003) 7-12
- [2] Mario Cetina, Tesis de Maestría en Ciencias Aplicadas (2005) en preparación
- [3] Stefan Adams, Complete Equivalence of the Gibbs Ensembles for One-Dimensional Markov Systems, *Journal of Statistical Physics* **105** (5/6) (2001) 879-908
- [4] William Feller, *An introduction to probability theory and its applications Vol. I, 3ª Edición*, John Wiley & Sons, 1950.
- [5] Kerson Huang, *Statistical mechanics 2ª Edición*, John Wiley & Sons, 1963
- [6] Jan Kyncl, János Pacl, Géza Tóth, Long Alternating Paths in Bicolored Point Sets, *Graph Drawing 2004, Lecture Notes in Computer Science* **3383** (2004) 340-348
- [7] Kerson Huang, *Statistical mechanics 2ª Edición*, John Wiley & Sons, 1963
- [8] Paul C. Shields, "Ergodic Theory of discrete sample paths", *Graduate Studies in Mathematics* **13**, American Mathematical Society, 1996.