

# Introducción a los Métodos Numéricos:

Software en Basic y aplicaciones  
en Hidrología Superficial

Daniel Francisco Campos Aranda

$$\begin{bmatrix} r(1) & 0 & 0 & 0 \\ r(2) & r(1) & 0 & 0 \\ r(3) & r(2) & r(1) & 0 \\ 0 & r(3) & r(2) & r(1) \\ 0 & 0 & r(3) & r(2) \\ 0 & 0 & 0 & r(3) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u(1) \\ u(2) \\ u(3) \\ u(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q(1) \\ q(2) \\ q(3) \\ q(4) \\ q(5) \\ q(6) \end{bmatrix}$$

$$M = Nq - Nr + 1 = 6 - 3 + 1 = 4$$

$$U = (R^T \times R)^{-1} \times (R^T \times Q)$$

```
1870 FOR I=1 TO M:FOR J=1 TO NR
1880 Q(I+J-1)=Q(I+J-1)+U(I)*R(J):NEXT J,I
```

Universidad Autónoma de San Luis Potosí  
Facultad de Ingeniería

San Luis Potosí, S.L.P., México, 2003

**Introducción a los Métodos Numéricos:**  
Software en Basic y aplicaciones en Hidrología Superficial

Daniel Francisco Campos Aranda



# **Introducción a los Métodos Numéricos:**

Software en Basic y aplicaciones  
en Hidrología Superficial

Daniel Francisco Campos Aranda

Universidad Autónoma de San Luis Potosí  
Facultad de Ingeniería

---

San Luis Potosí, S.L.P., México, 2003

Derechos reservados *by*

© Daniel Francisco Campos Aranda  
© Universidad Autónoma de San Luis Potosí

ISBN 970-705-019-5  
0800 00327 A 0252

A la memoria de mi madre

*Francisca Aranda Vda. de Campos*  
(20 de julio de 1916 — 11 de abril de 2003)



# Índice

<b>Prólogo</b>	13
<b>Capítulo 1. Introducción a los Métodos Numéricos</b>	
Resumen	15
1.1 Importancia de los métodos numéricos en ingeniería	15
¿Cómo se diseñaba en ingeniería antes de los métodos numéricos?	
¿Qué son los métodos numéricos?	
¿Qué son los modelos matemáticos?	
Ejemplo de un modelo matemático y sus características	
1.2 Evolución histórica de las computadoras personales	18
1.3 Linealización gráfica	18
1.4 Aplicaciones prácticas	21
Infiltración en suelos	
Curvas de infiltración	
Fórmula de Horton	
1.5 Aproximación numérica	24
El modelo lineal	
Programa de cómputo	
Linealización matemática	
1.6 Tipos de errores	26
Problemas propuestos	27
Referencias	28
<b>Capítulo 2. Interpolación mediante Polinomios</b>	
Resumen	30
2.1 Concepto y utilidad	30
2.2 Polinomios de interpolación de Newton	31
Interpolación lineal	
Interpolación cuadrática	
2.3 Polinomios de interpolación de Lagrange	33



2.4 Aplicación práctica	35
Concepto de precipitación confiable	
Programa de cómputo e interpolaciones realizadas	
Estimación de la precipitación confiable	
Problemas propuestos	37
Referencias	38
<b>Capítulo 3. Solución de Ecuaciones no Lineales</b>	
Resumen	44
3.1 Generalidades	44
3.2 Método de Bisección	45
3.3 Método de Falsa Posición	47
3.4 Método de Newton-Raphson	49
3.5 Método de la Secante	50
3.6 Aplicación práctica 1	51
Métodos del análisis de frecuencia de crecientes	
Resumen de aspectos teóricos de la distribución LP3	
Método clásico de momentos	
Método de máxima verosimilitud	
Medida numérica de bondad de ajuste	
Método de los promedios diversos	
Ajuste de la distribución LP3	
3.7 Aplicación práctica 2	57
Tiempo de encharcamiento	
Algoritmo de infiltración de Morel-Seytoux	
Calibrado del algoritmo de infiltración por bisección	
Problemas propuestos	58
Referencias	59
<b>Capítulo 4. Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales</b>	
Resumen	66
4.1 Conceptos y operaciones de matrices	66
Definiciones y terminología	
Operaciones básicas con matrices	
Programas de cómputo MULMA y INVMA	
4.2 Métodos de solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales	69
¿Qué es un Sistema de Ecuaciones Lineales (SEL)?	
Clasificación de los métodos de solución de un SEL	
Tipos de soluciones y matriz ampliada	
4.3 Métodos de Gauss y Gauss-Jordan	70
Método de Gauss	
Método de Gauss-Jordan	
4.4 Método de Jacobi	74
4.5 Método de Gauss-Seidel	76
4.6 Aplicación práctica	77
¿Qué es el hidrograma unitario (HU)?	
Teoría matemática del HU	

Métodos de identificación del HU	
Unidades de las ordenadas del HU	
Identificación del HU mediante mínimos cuadrados	
Identificación del HU mediante mínimos cuadrados suavizados	
Breve descripción del programa HUIMCS	
Proceso operativo	
Identificación de un HU por mínimos cuadrados	
Identificación de un HU por mínimos cuadrados suavizados	
Problemas propuestos	84
Referencias	85
<b>Capítulo 5. Ajuste de Curvas</b>	
Resumen	93
5.1 Conceptos de apoyo	93
Importancia de la regresión y correlación	
Conceptos de regresión y correlación	
Diagrama de dispersión y modelos de regresión	
Principio de mínimos cuadrados	
5.2 Regresión y correlación lineales	95
Recta de regresión de y sobre x	
Coeficiente de correlación lineal	
Linealización de curvas	
5.3 Regresión y correlación polinomial	100
Polinomio cuadrático o parabólico	
Polinomio de grado 3 (cúbico) y de grado m	
Coeficiente de determinación y error estándar de la estimación	
Programa de cómputo REGPOL	
5.4 Regresión y correlación múltiple	104
5.5 Aplicaciones prácticas	105
Ampliación de la información hidrométrica (niveles máximos anuales)	
Ampliación de la información hidrométrica (volúmenes escurridos anuales)	
Ampliación de la información pluviométrica	
Análisis de frecuencia de crecientes por mínimos cuadrados (criterio de Nash)	
Ajuste de la Distribución GVE (representación de funciones curvas)	
Otras aplicaciones de la transformación de curvas a ecuaciones	
Operación de un embalse	
Estimación de crecientes (fórmulas empíricas)	
Otras aplicaciones factibles	
Problemas propuestos	117
Referencias	119
<b>Capítulo 6. Derivación Numérica</b>	
Resumen	128
6.1 Introducción	128

6.2 Aproximación por diferencias de primer orden	128
6.3 Aproximación por diferencias de segundo orden	129
6.4 Programa de cómputo	133
6.5 Aplicación práctica	133
Problemas propuestos	134
Referencias	135
<b>Capítulo 7. Integración Numérica</b>	
Resumen	137
7.1 Introducción	137
7.2 Regla del trapecio	138
De un tramo	
Por intervalos o extendida	
Corrección en la regla del trapecio	
7.3 Integración Romberg	141
7.4 Reglas de Simpson 1/3 y 3/8	142
7.5 Programa de cómputo INTEGRAL	143
7.6 Integración con datos desigualmente espaciados	144
7.7 Cuadraturas de Gauss	145
7.8 Aplicaciones prácticas	146
Cálculo del flujo uniforme en cauces	
Otras aplicaciones factibles	
Problemas propuestos	149
Referencias	150
<b>Capítulo 8. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias</b>	
Resumen	154
8.1 Generalidades	154
8.2 Método de Euler	156
8.3 Método de Heun	159
8.4 Métodos de Runge-Kutta	160
8.5 Aplicaciones prácticas	162
Tránsito en vasos: Generalidades	
Tránsito en vasos: Método numérico o de Heun	
Tránsito en vasos: Método de Hager & Sinnger (1985)	
Tránsito en vasos: Método del NERC (1975)	
Tránsito inverso	
Problemas propuestos	166
Referencias	167
<b>Capítulo 9. Optimización Numérica</b>	
Resumen	172
9.1 Introducción	172

9.2 Programación Lineal	173
9.3 Optimización con múltiples variables no restringidas	174
9.4 Optimización con múltiples variables restringidas	176
9.5 Aplicaciones prácticas	177
Optimización en sistemas de cultivo	
Otras aplicaciones del algoritmo Simplex	
Ajuste de modelos probabilísticos de crecientes	
Modelos del análisis de frecuencia de crecientes	
Ajuste de parámetros de la distribución Gumbel mixta	
Ajuste de parámetros de una mezcla de distribuciones normales	
Ajuste de parámetros de la distribución GVE	
Ajuste de parámetros de la distribución Wakeby	
Identificación de ordenadas del hidrograma unitario	
Ajuste de parámetros del método de Muskingum	
Ajuste de parámetros del método de Muskingum con flujo lateral	
Calibración de modelos determinísticos	
Problemas propuestos	188
Referencias	190
<b>Apéndice A: Instrucciones empleadas del Basic</b>	
A.1 Instrucciones de programación	212
A.2 Funciones matemáticas	215
A.3 Instrucciones de operación de programas	215
A.4 Documentación de programas	216
Referencias	216
<b>Apéndice B: Introducción a la serie de Taylor y sus aplicaciones</b>	
B.1 Introducción	218
B.2 Funciones analíticas y puntos singulares	218
B.3 Desarrollo término a término de la serie de Taylor	219
B.4 Obtención del método de Newton-Raphson	221
B.5 Error del método de Newton-Raphson	221
B.6 Serie de Maclaurin	221
Referencias	222
<b>Índice de Programas de Cómputo</b>	
PCN1: MODLIN (MODElo LINEal) Capítulo 1	29
PCN2: NEWTON (polinomios de NEWTON de $n$ -ésimo grado) Capítulo 2	43
PCN3: BISEC (método de BISECCión) Capítulo 3	61
PCN4: LP3MV (distribución Log-Pearson tipo III ajustada por Máxima Verosimilitud) Capítulo 3*	62

PCN5:	LP3PD (distribución Log-Pearson tipo III ajustada por Promedios Diversos) Capítulo 3*	64
PCN6:	MULMA (MULTiplicación de MATrices) Capítulo 4	87
PCN7:	INVMA (INVersión de una MATriz) Capítulo 4	88
PCN8:	GAUSS (método de GAUSS) Capítulo 4	89
PCN9:	JACOBI (método de JACOBI) Capítulo 4	90
PCN10:	HUIMCS (Hidrograma Unitario Identificado por Mínimos Cuadrados Suavizados) Capítulo 4*	91
PCN11:	REGPOL (REGresión POLinomial) Capítulo 5	122
PCN12:	REGMUL (REGresión MULTiple) Capítulo 5	124
PCN13:	GVESEX (distribución General de Valores Extremos ajustada por SEXtiles) Capítulo 5*	126
PCN14:	DERIV123 (DERIVadas 1a., 2a. y 3a.) Capítulo 6	136
PCN15:	INTEGRAL (solución de INTREGALes definidas) Capítulo 7	152
PCN16:	PROHID (PROpiedades HIDráulicas) Capítulo 7*	153
PCN17:	EULER (método de EULER) Capítulo 8	169
PCN18:	RK4 (método de Runge-Kutta de 4°. orden) Capítulo 8	170
PCN19:	TRANVA (TRANsito de crecientes en VAsos de almacenamiento o embalses) Capítulo 8*	171
PCN20:	SIMPLEX (algoritmo de método SIMPLEX) Capítulo 9	195
PCN21:	ROSEN (algoritmo del método de ROSENbrock) Capítulo 9	198
PCN22:	OPTIM (algoritmo complex o método OPTIM) Capítulo 9	200
PCN23:	OPTHU (OPTimización del Hidrograma Unitario) Capítulo 9*	203
PCN24:	PAMUS2MC (PARámetros de MUSkingum 2 por Mínimos Cuadrados) Capítulo 9*	207
PCN25:	OPTMUS2 (OPTimización de MUSkingun de 2 parámetros) Capítulo 9*	209

\* algoritmos de aplicación

# Prólogo

Este es un texto destinado a los estudiantes de las carreras de ingeniería que cursan la materia de *Métodos Numéricos*, facilitándoles el acceso a las técnicas básicas de esta disciplina, y a sus aplicaciones elementales y prácticas; éstas últimas sólo dentro del campo de la Hidrología Superficial. Debido a la amplitud con que son tratadas las aplicaciones prácticas de los capítulos sobre sistemas de ecuaciones lineales, regresión y correlación, y optimización numérica, el texto probablemente será útil a los ingenieros que realizan cálculos y diseño hidrológicos.

Los objetivos fundamentales del texto son los dos siguientes: el primero es cubrir el temario de la cátedra de *Métodos Numéricos* que corresponde al área de materias comunes de la Facultad de Ingeniería de la UASLP, y el segundo consiste en presentar aplicaciones prácticas en el campo de la Hidrología Superficial, de los procedimientos o algoritmos básicos que integran esta poderosa herramienta de la ingeniería. Con respecto al primer objetivo, su alcance es elemental, es decir, únicamente se exponen las técnicas básicas de los métodos numéricos, se evitan los desarrollos matemáticos de soporte teórico y se presentan ejemplos numéricos didácticos extremadamente simples.

En relación con las aplicaciones, el texto presenta una diferencia importante respecto al temario de la cátedra de *Métodos Numéricos* y consiste en no haber dedicado el capítulo 9 final a las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP), sino a las técnicas básicas de la optimización numérica. Lo anterior obedeció al hecho de ser sumamente escasos los problemas de hidrología superficial que se resuelven a través de EDP; en cambio, los algoritmos de la optimización numérica han tenido aportaciones importantes en la modelación determinística de diversos procesos hidrológicos, como el escurrimiento de una cuenca y el tránsito de crecientes en cauces. Además, recientemente se han realizado aplicaciones en el modelado probabilístico de crecientes y a futuro se requieren soluciones óptimas a problemas del campo de los aprovechamientos hidráulicos, las cuales podrán ser buscadas a través de técnicas como la simulación y la optimización numérica.

Para el logro de los dos objetivos citados se presentan en total 48 ejemplos de tipo académico y 18 de carácter práctico asociados con las aplicaciones; adicionalmente los llamados problemas propuestos del final de cada capítulo, 56 en total, son una combinación de los ejemplos didácticos y de las aplicaciones prácticas, ambos con un ligero incremento en su complejidad pero todos incluyendo su solución respectiva. Con el símbolo □ se ha indicado la terminación de cada ejemplo dentro del texto.

Por otra parte, los 25 listados de programas de cómputo desarrollados en *Basic* abarcan algoritmos de las técnicas fundamentales de los métodos numéricos (16) y solu-

ciones a los problemas o procesos de carácter hidrológico descritos en las aplicaciones prácticas (9). Fueron escritos en *Basic*, primero porque algunos de ellos datan de finales de los años ochenta y porque este lenguaje es sumamente sencillo de interpretar, se asemeja mucho a la manera racional y analítica que tiene el ingeniero para plantear y resolver los problemas y porque además es extraordinariamente simple en el acceso de datos y en la presentación de resultados en pantalla y/o impresos.

Agradezco a la UASLP el otorgarme la prestación del Año Sabático durante el 2001 para la realización de este trabajo. A todas las personas que en diferentes formas contribuyeron en tal propósito les doy las más sinceras gracias.

Daniel Francisco Campos Aranda

Enero de 2002

# Capítulo 1:

## Introducción a los Métodos Numéricos

### Resumen

Inicialmente se citan brevemente las técnicas de diseño en ingeniería disponibles antes de los *Métodos Numéricos* (MN), a continuación se formulan definiciones conceptuales sobre éstos y los modelos matemáticos que intentan representar el mundo real, destacando la importancia que actualmente tienen los primeros para obtener soluciones aproximadas de los segundos, gracias al apoyo de las computadoras personales (PC). En seguida se describe un modelo matemático de un fenómeno simple, la caída de un cuerpo, destacando sus consideraciones y situaciones extremas. Posteriormente se expone la evolución inicial, tanto en equipo como en programas, de las PC. Con cierto detalle se abordan los temas de la representación y linealización gráfica de datos experimentales. Como complemento de lo anterior, se trata el tópico de la linealización matemática y su aproximación numérica a través del modelo lineal, cuyas ecuaciones se presentan y resuelven mediante un programa de cómputo. Dentro de estos temas se desarrollan dos ejemplos didácticos y dos aplicaciones prácticas, estas últimas en el campo de la infiltración en suelos. Finalmente, se expone someramente el tema de los errores numéricos.

### 1.1 Importancia de los métodos numéricos en ingeniería

#### ¿Cómo se diseñaba en ingeniería antes de los métodos numéricos?

Antes de las computadoras personales (PC) y los *Métodos Numéricos* (MN) existían tres técnicas o procedimientos diferentes que los ingenieros aplicaban para la solución de sus problemas de diseño <sup>[C3]</sup>:

- 1o. Métodos exactos o analíticos, se obtienen sólo en una clase limitada de problemas, aquellos que pueden aproximarse o simplificarse mediante modelos lineales, o que tienen geometría simple y pocas dimensiones.
- 2o. Comportamiento de sistemas por soluciones gráficas (nomogramas), están limitadas a problemas que pueden describirse usando 3 dimensiones o menos.
- 3o. Cálculos manuales, lógicamente lentos, tediosos y con alta posibilidad de errores numéricos.

Las PC y los MN amplían considerablemente la capacidad para enfrentar y resolver problemas, resultando que ahora se dispone de mayor tiempo para la creatividad, análisis de sensibilidad, búsqueda de una solución integral o general y desarrollo de la conciencia holística. Por ello, actualmente las PC y los MN proporcionan una alternativa viable para cálculos verdaderamente complicados, presentes casi siempre en las soluciones exactas de los problemas reales.



### ¿Qué son los métodos numéricos?

Son herramientas útiles, instructivas y creativas para el estudiante de ingeniería. Los métodos numéricos (MN) se pueden definir como técnicas mediante las cuales es posible plantear soluciones a problemas matemáticos, de tal manera que se puedan resolver usando operaciones aritméticas y lógicas. Los MN combinan las dos herramientas actuales más poderosas del ingeniero: las matemáticas y las computadoras digitales, por ello con fines prácticos pueden ser definidos como las matemáticas vía computadora.

Aunque desde un punto de vista estricto, los dedos y un ábaco son computadoras digitales, se restringe esta designación al equipo (*hardware*) que estuvo disponible a mediados de los años setenta, por ello se puede indicar que los MN son mucho más antiguos, e incluso algunos datan de los comienzos de las matemáticas modernas, pero su uso y ampliación extensiva está ligado al advenimiento de las computadoras de escritorio y portátiles [H1]. La combinación de los MN y las computadoras personales ha creado una herramienta de gran poder, que ha desplazado al análisis matemático clásico en las aplicaciones industriales y la investigación, aún en problemas donde las soluciones analíticas pueden ser obtenidas, pues los MN son fáciles y rápidos de plantear y aplicar, ya sea mediante programas de cómputo (*software*) desarrollados *ex-profeso* o disponibles en paquetes comerciales [H1].

### ¿Qué son los modelos matemáticos?

El mundo físico, con toda su complejidad, puede parecer agobiante e impredecible, por ello es tarea tradicional del científico identificar patrones reproducibles y las leyes que gobiernan este caos. Tales leyes proporcionan comprensión a los ingenieros y por lo tanto pueden aplicarlas a problemas prácticos para obtener sus soluciones.

Desde el punto de vista del diseño en ingeniería, los conocimientos que proporciona la ciencia son muy útiles cuando se expresan en forma de un *modelo matemático*, el cual puede ser una simple ecuación algebraica, diferencial o integral, o bien un sistema de ecuaciones lineales, no lineales, diferenciales o en derivadas parciales. En resumen, un modelo matemático es una formulación o ecuación(es) que expresa(n) las características fundamentales o relevantes de un sistema o proceso físico, químico, biológico o de otro tipo y que permite por lo tanto estudiar el sistema o proceso bajo condiciones diferentes, con fines de pronóstico o de búsqueda de escenarios óptimos (ejemplo, sustentabilidad).

Con frecuencia, el modelo matemático o la representación matemática del problema o sistema real es tan compleja que es prácticamente imposible obtener una solución exacta o analítica, a menos que se hagan una serie de hipótesis o suposiciones que permitan simplificarlo. Esta simplificación puede ser tan burda que resulta más conveniente o exacto obtener una solución aproximada del modelo matemático original a través de un MN, que una solución matemática del modelo simplificado. De donde se deduce la importancia de los MN.

### Ejemplo de un modelo matemático y sus características

Quizás el experimento más famoso de la historia es el supuestamente realizado por Galileo, sobre la caída de los cuerpos desde la torre inclinada de Pisa en el siglo XVI. La persistencia en nuestros recuerdos de tal experimento se debe no sólo a su sencillez, sino a la sensación de incomodidad que nos brindaba el aceptar, contra el sentido común, que dos cuerpos del mismo material pero de pesos diferentes caen con velocidades iguales y por lo tanto llegan al suelo al mismo tiempo. Lo que sucede en realidad es que para dos esferas de tamaños similares del mismo material, pero una de 10 libras y otra de una, la diferencia en los tiempos de caída en una distancia de 56 metros (altura aproximada de la Torre de Pisa) es una fracción de segundo. Tal diferencia es difícil de detectar sin instrumentos [E1, E2].

La descripción detallada del fenómeno es la siguiente. Al dejar caer una esfera (para simplificar que no gira), ésta aumenta su velocidad hasta que la fuerza ascendente de

arrastre, que es proporcional al cuadrado de la velocidad, se iguala con el peso neto de la esfera; es decir, el peso de la esfera menos el peso del aire que ocupa, ya que está sumergida en él. Este empuje de flotación del aire es muy pequeño en esferas sólidas, pero en las huecas de pared muy delgada o de materiales muy livianos, puede ser importante. Una vez que se alcanza la igualdad de fuerzas, la esfera cae con velocidad constante o de caída. En esta descripción se han ignorado los efectos del cambio en la densidad y viscosidad del aire, así como la etapa inicial del movimiento de caída que es laminar. Entonces, mientras el peso neto es mayor que la fuerza ascendente de arrastre, la velocidad aumenta y la aceleración será igual a la resultante de las fuerzas dividida entre la masa virtual, la cual es la suma de la masa de la esfera más la del fluido de su alrededor que también está siendo acelerado, y que para una esfera es igual a la mitad de la masa del aire desalojado por ella, cantidad generalmente muy pequeña <sup>[E1, E2]</sup>.

El modelo matemático o ecuación del movimiento para una esfera en caída libre es de acuerdo a la segunda ley de Newton:

$$P - F_f - F_a = (m + m_a) a \quad (1.1)$$

en donde,  $P$  es el peso de la esfera;  $F_f$  fuerza de flotación, igual al peso del aire desalojado;  $F_a$  fuerza de arrastre;  $m$  y  $m_a$  masa de la esfera y masa añadida, y  $a$  aceleración de la esfera (incógnita). La aceleración  $a$  y la  $F_a$  son igual a:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (1.2)$$

$$F_a = C_a A \frac{\rho \cdot v^2}{2} \quad (1.3)$$

siendo,  $A$  el área proyectada de la esfera,  $\rho$  la densidad del aire,  $v$  velocidad de la esfera y  $C_a$  coeficiente de arrastre función del número de Reynolds (cociente adimensional entre las fuerzas de inercia y las de viscosidad), igual al producto de diámetro de la esfera por su velocidad entre la viscosidad cinemática del aire. Para la solución del problema se debe recurrir a los métodos numéricos, ya que en la ecuación 1.1 la aceleración  $a$  depende de la  $F_a$  y ésta es función de la velocidad de caída, por lo cual no se puede tener una solución explícita <sup>[C3]</sup>.

En las referencias [E1, E2] se presentan resultados numéricos en forma gráfica con los tiempos en segundos en las abscisas y las velocidades de caída en las ordenadas. por ejemplo para esferas de 7 cm de diámetro de materiales diferentes (papel, madera, vidrio, acero y plomo), observándose que a los 4 segundos la esfera de papel alcanza una velocidad terminal de caída del orden de 20 m/s; en cambio, las esferas de acero y plomo a los 8 segundos todavía se están acelerando y tienen ya velocidades mayores de 65 m/s.

Dos aspectos extremos e interesantes de este experimento, corresponden al ensayo realizado en la Luna por el comandante D. R. Scott durante la misión Apolo 15, es decir, en el vacío y con gravedad débil, de manera que al dejar caer desde la altura de su hombro un martillo y una pluma de halcón, ambos objetos se aceleraron igual y llegaron al suelo lunar simultáneamente <sup>[E1, E2]</sup>. El otro fenómeno interesante, es el de las gotitas de agua que forman las nubes que prácticamente están suspendidas en el fluido aire, pues debido a sus reducidísimas dimensiones no pueden vencer la resistencia del aire y aunque están cayendo lo hacen a velocidades bajísimas. Una gota de lluvia mide aproximadamente 2 mm de diámetro (2,000 micrómetros), en cambio una gotita de una nube sólo mide 20 micrómetros y por ello se requieren un millón de ellas para formar una gota de lluvia <sup>[W1]</sup>.

## 1.2 Evolución histórica de las computadoras personales

Las computadoras personales (PC) tienen sus inicios a mediados de la década de los años setenta, cuando dos estudiantes de la Universidad de Harvard, Bill Gates y Paul Allen durante la primavera de 1975 estuvieron adaptando un programa escrito en Basic para que funcionara en la computadora MITS Altair, que actualmente es reconocida como la primera PC disponible comercialmente. El software resultante ha sido más importante en el desarrollo de las PC que la misma Altair. La MITS Corp. se retiró del mercado en 1977, pero sus fundadores crearon posteriormente Microsoft Corp., en Redmond, Washington que es tal vez la compañía más importante en producción y comercialización de software [L1].

En 1976, en una cochera de Cupertino, California, Stephen G. Wozniak y Steven P. Jobs fundaron la Apple Computer Inc., compañía que lideró el inicio de la industria de las PC. Su primera computadora, la Apple I, estaba disponible en partes para ensamblarse, pero posteriormente la Apple II presentó una tecnología superior y se vendieron 5 millones de ellas [L1]. En 1979, Jef Raskin ideó la Macintosh como una PC de bajo costo y fácil de usar, esta computadora fue introducida a principios de 1984 y era básicamente una versión reducida de una estación de trabajo (Lisa) desarrollada previamente por Apple Computer [L1].

En 1981 la compañía IBM introdujo una computadora construida con base en un microprocesador y un sistema operativo diseñado por Microsoft (MS-DOS o PC-DOS), denominada *computadora personal* por ser la más pequeña de IBM. El éxito de IBM creció cuando Lotus Development Corp. introdujo la hoja de cálculo para su PC; ésta evolucionó a una más potente, la PC XT, que contenía un disco duro Winchester y que le tomó menos de tres años en ser la PC estándar. La IBM introdujo en agosto de 1984 la PC AT basada en el microprocesador de Intel 80286. 1986 se puede considerar como el año de las PC *compatibles*, pues en sus inicios las diferentes marcas se estandarizaron al procesador 80286, con 640 kilobytes de memoria principal, disco duro de 20 megabytes y una unidad para disco flexibles de 1.2 megabytes. Pero en septiembre de 1986 nace una nueva generación de computadoras a través de la Deskpro 386 de Compaq Corp., la cual utiliza el nuevo microprocesador 80386 de 32 bits [L1].

Posteriormente llegaron los coprocesadores matemáticos para volver más eficientes las operaciones y cálculos de punto flotante. Después, en 1989 se introdujo el procesador de Intel 80486. La computadora inglesa de la compañía Apricot, la VX FT Server conjuga la unidad de procesamiento central y el coprocesador matemático en un solo circuito integrado, muy poderoso y cercano a las estaciones de trabajo. A principios de 1993 se da a conocer el nuevo microprocesador de Intel, el *Pentium*, a la vanguardia hasta nuestro días, pues no solo fue un nuevo circuito integrado sino que ofrecía velocidades de 60 a 100 MHz, 32 bits de direccionamiento, 64 bits para datos, memoria caché de 8 K para datos y 8 K para instrucciones, todo esto desarrollado con 3.2 millones de transistores [L1].

Ante este desarrollo de hardware, el software ha jugado un papel importantísimo, tanto en el sistema operativo como en el de las aplicaciones. Una mayor cantidad de compañías nuevas han tenido éxito en el desarrollo de software, incluso las innovaciones frecuentemente provienen de éstas. Sin embargo, *Windows* de Microsoft se ha convertido en el sistema operativo dominante para IBM y compatibles desde su aparición en noviembre de 1985 [L1]. Para mayor detalle de una visión retrospectiva y futura de las computadoras se sugiere consultar las referencias [L2] y [D1].

## 1.3 Linealización gráfica

Fundamental en el inicio de casi cualquier problema matemático, está la representación gráfica de datos experimentales, o bien de funciones matemáticas asociadas, por lo cual resulta muy conveniente el conocimiento y reglas de uso y construcción de los papeles comúnmente utilizados para dibujar datos o ecuaciones. Aunado a lo

anterior existe la técnica gráfica de la *linealización* para representar con mayor exactitud y más fácilmente una curva por una recta, y en esta última hacer interpolaciones o extrapolaciones.

Los papeles utilizados para representaciones gráficas de datos y funciones son el natural, generalmente milimétrico, el semilogarítmico y el logarítmico. En estos dos últimos, las escalas logarítmicas se construyen haciendo uso de su propiedad más importante que es la relativa a la amplitud del campo que varía en múltiplos de 10, esto es, las escalas logarítmicas van de 0.0001 a 0.001, de 0.001 a 0.01, de 0.01 a 0.1, de 0.1 a 1, de 1 a 10, de 10 a 100, de 100 a 1 000, de 1 000 a 10 000, de 10 000 a 100 000, etc. Entonces, de acuerdo al problema se define cuántos campos son requeridos para dibujar los datos y la amplitud de cada campo (*módulo*) se adopta de acuerdo a la disponibilidad de espacio para la gráfica. El módulo seleccionado abarca la amplitud de la escala logarítmica por dibujar, porque ésta comienza en 1 y termina en 10, y los logaritmos decimales respectivos de tales valores son cero y uno.

Por ejemplo, si se requieren tres campos, 1 a 10, de 10 a 100 y de 100 a 1000 y cada uno debe abarcar 5 centímetros de módulo, entonces a partir de un origen dado a 8.8 mm se marca el valor de 1.5, a 15.05 mm del origen se tiene el valor de 2.0, a 23.86 mm también del origen se tendrá el 3.0 de la escala y así sucesivamente. El procedimiento consiste en obtener el logaritmo decimal del valor por dibujar y multiplicarlo por el módulo, para obtener la distancia desde el origen en que está tal magnitud en la escala logarítmica que se dibuja. Distancias que son iguales para los valores equivalentes en las otras escalas.

**Ejemplo 1.1.** Esta primera aplicación didáctica corresponde a los datos tomados de la página 165 de la referencia [L3], que son los tabulados a continuación.

$x$ (volumen) libras/pulgada <sup>2</sup>	$y$ (presión) pies <sup>3</sup> /libra
1.853	250.30
2.748	163.30
4.280	101.90
6.992	60.40
14.000	28.83
26.360	14.70
53.920	6.86

Estos datos al dibujarlos en un papel milimétrico, con escalas en las abscisas de 1 cm = 5 lb/in<sup>2</sup> y en las ordenadas de 1 cm = 20 ft<sup>3</sup>/lb, definen una curva *hiperbólica* cuya ecuación es del tipo:  $y = \alpha x^{-\beta}$ , es decir que en  $x = 1$  pasa por  $y = \alpha$ . Cuando el exponente es positivo y menor que uno, se definen curvas *parabólicas* con eje de simetría en las abscisas y cuando es mayor que uno en las ordenadas.

La linealización gráfica de estas curvas se realiza en el papel logarítmico, ya que:

$$y = \alpha x^{-\beta} \quad (1.4)$$

aplicando logaritmos:

$$\log y = \log \alpha + \beta \log x$$

haciendo:

$$\begin{aligned} \log y &= Y \\ \log x &= X \\ b &= \log \alpha \quad \therefore \quad \alpha = 10^b \\ m &= \beta \end{aligned}$$

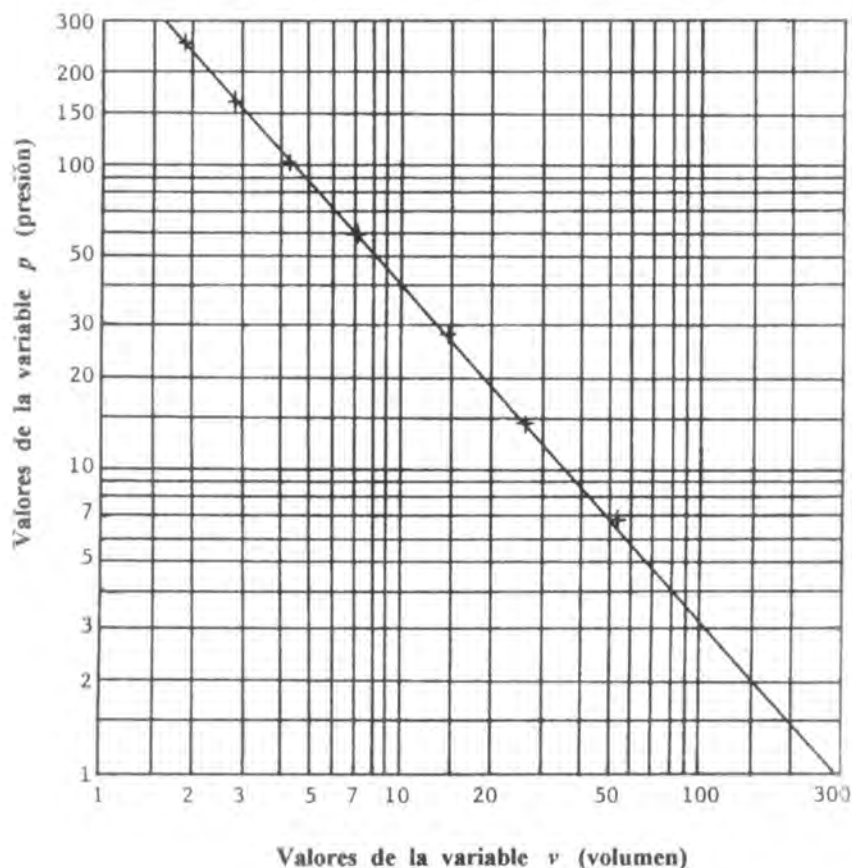
se obtiene la ecuación de la recta con pendiente  $m$  y ordenada al origen  $b$ , en el papel logarítmico:

$$Y = b + m X \quad (1.5)$$

En la figura 1.1 se muestra la linealización gráfica realizada en papel logarítmico construido *ex-profeso*.

Figura 1.1

Linealización gráfica de los datos del ejemplo 1.1



**Ejemplo 1.2.** En esta segunda aplicación didáctica también se utilizan datos experimentales tomados de la referencia [L3], página 167, para la cantidad de sustancia remanente ( $A$ ) de una reacción un tiempo ( $t$ ) posterior, dados en la siguiente tabulación.

$x(t)$	$y(A)$
2	94.8
5	87.9
8	81.3
11	74.9
14	68.7
17	64.0
27	49.3
31	44.0
35	39.1
44	31.6

Al dibujar estos datos en un papel milimétrico, con escalas de abscisas y ordenadas de  $1 \text{ cm} = 5$  unidades de  $t$  y  $A$ , respectivamente, se define una curva *exponencial* de decaimiento, es decir, del tipo:  $y = \alpha e^{\beta x}$ . Estas curvas parten de  $\alpha$  en el eje de las ordenadas ( $x = 0$ ) y son ascendentes cuando  $\beta$  es positivo y descendentes cuando es negativo. La linealización de estas curvas se efectúa con base en el papel semilogarítmico, debido a que:

$$y = \alpha e^{\beta x} \quad (1.6)$$

tomando logaritmos:

$$\log y = \log \alpha + \beta x \log e$$

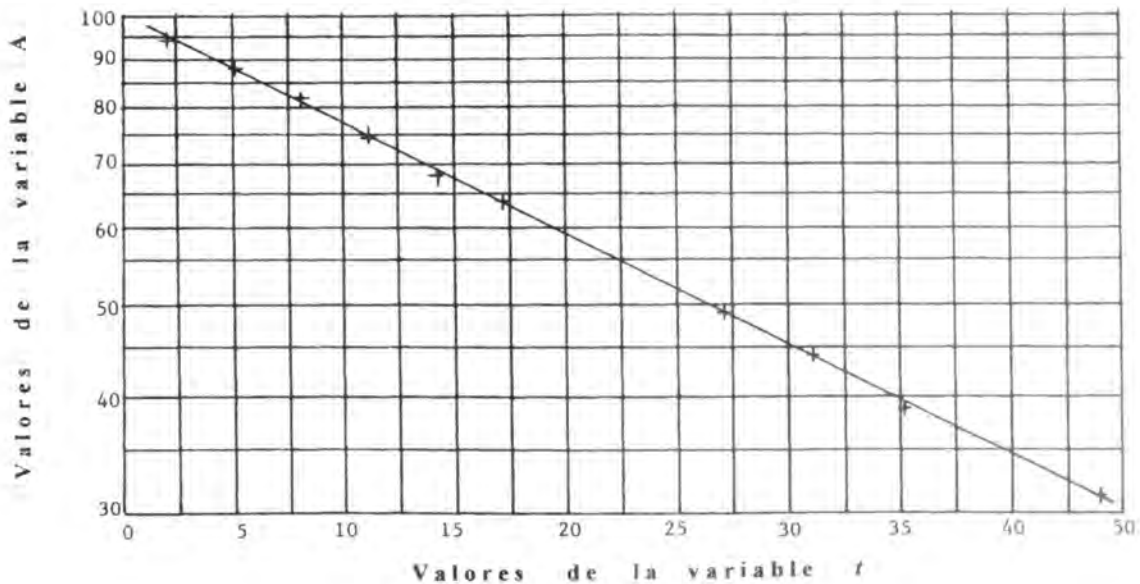
haciendo:

$$\begin{aligned} \log y &= Y \\ x &= X \\ b = \log \alpha & \quad \therefore \quad \alpha = 10^b \\ m = \beta \log e & \quad \therefore \quad \beta = m / \log e = 2.3025851 m \end{aligned}$$

se obtiene la ecuación de la recta con pendiente  $m$  y ordenada al origen  $b$ , en el papel semilogarítmico; ecuación 1.5. En la figura 1.2 se muestra la linealización gráfica efectuada en un papel semilogarítmico construido para tal propósito.

Figura 1.2

Linealización gráfica de los datos del ejemplo 1.2



## 1.4 Aplicaciones prácticas

### Infiltración en suelos

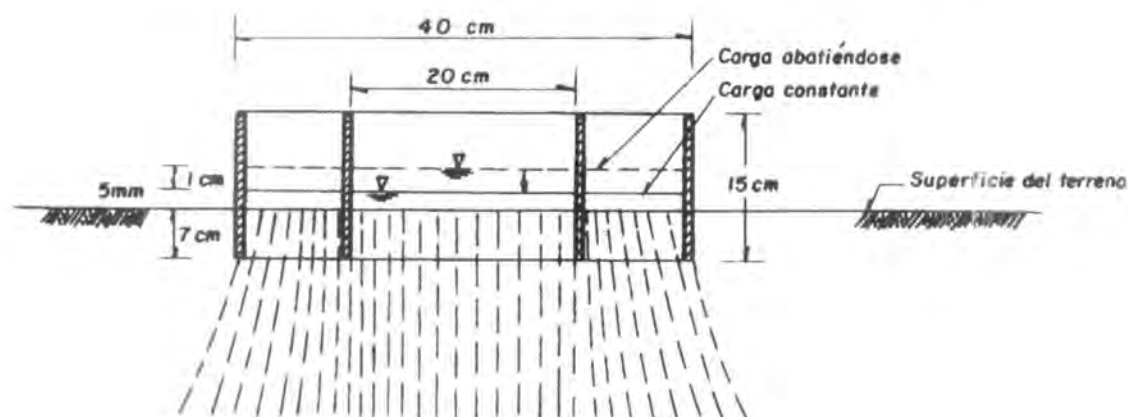
Ambas aplicaciones corresponden al tema de la *infiltración* en suelos y en cuencas. La infiltración se define como el proceso mediante el cual el agua penetra en el suelo, a través de su superficie y queda retenida en él o alcanza un manto acuífero incrementando el volumen de éste. En cambio, se define como *capacidad de infiltración* ( $f$ ) a la velocidad máxima por unidad de superficie y en ciertas condiciones, a la que el agua puede ser absorbida por el suelo, se expresa comúnmente en  $\text{mm/h}$ . Actualmente existen 4 métodos para la determinación de la capacidad de infiltración: (1) infiltróme-

tros, (2) análisis de hidrogramas en cuencas pequeñas, (3) análisis de tormentas en cuencas grandes y (4) ensayos en lisímetros. Los infiltrómetros permiten aplicar artificialmente el agua al suelo o terreno, son de dos tipos: los inundadores y los simuladores de lluvia. Lógicamente, sus mediciones son puntuales [1].

El infiltrómetro de cilindros concéntricos (ver Figura 1.3) consta de dos aros de unos 15 cm de altura unidos entre sí para mantenerse concéntricos y poderse hincar parcialmente en el suelo unos 5 a 10 cm. El diámetro del cilindro interior es del orden de 20 cm y el del exterior de 40 cm. Al llenar los cilindros con agua, se debe procurar conservar el mismo nivel en ambos, pues el objeto del aro exterior es evitar que el agua del cilindro interior se infiltre lateralmente en un área mayor.

Figura 1.3

### Corte esquemático del infiltrómetro de cilindros concéntricos [1]



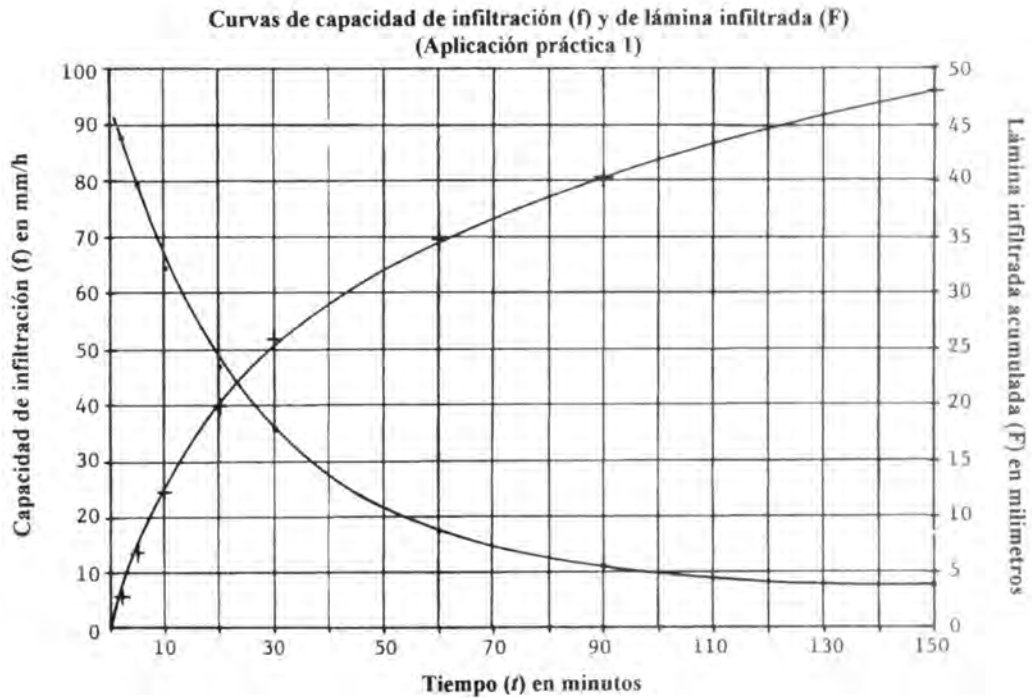
El procedimiento de la prueba consiste en añadir una cantidad conocida de agua ( $\text{cm}^3$ ), hasta cubrir, del orden de 10 mm, la marca correspondiente a una lámina de 5 mm sobre el suelo. Transcurrido un tiempo, que debe medirse, el agua desciende y llega a la marca, entonces se repite el proceso, añadiendo agua en una cantidad conocida. Al dividir los volúmenes agregados de agua entre el área del cilindro interior, se obtienen las láminas infiltradas, las cuales al ser divididas entre los intervalos medidos conducen a la capacidad de infiltración [1]. La curva de capacidad de infiltración, con  $f$  en las ordenadas y los tiempos acumulados en las abscisas, es una curva hiperbólica, en cambio la curva de volumen infiltrado acumulado es una curva parabólica.

#### Curvas de Infiltración

**Ejemplo 1.3.** Los datos de las columnas 1 y 2 de la Tabla 1.1 de la página siguiente corresponden al ejemplo 4.1, página 165 de la referencia [S1], para un ensayo en suelo franco-arcilloso con infiltrómetro de doble cilindro con diámetro interior de 35 cm, por lo cual su área ( $a$ ) es de  $962.115 \text{ cm}^2$ . La columna 3 se obtiene dividiendo el valor de la 1 entre  $a$ . La columna 4 es igual a la 2 entre 60. La columna 5 es igual a la 3 entre la 4 y finalmente la columna 6 son los volúmenes acumulados de la 1 en  $a$  y por 10.

En la figura 1.4, se han dibujado en las abscisas los tiempos acumulados, en minutos, contra los valores de las columnas 5 y 6, entonces se definen las curvas de capacidad de infiltración ( $f-t$ ) y de lámina infiltrada acumulada ( $F-t$ ).

Figura 1.4



**Tabla 1.1**  
Cálculos correspondientes a las curvas de capacidad de infiltración y lámina infiltrada acumulada

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Volumen de agua adicionado (cm <sup>3</sup> )	Tiempo en que se infiltró (minutos)	Lámina infiltrada (cm)	Incremento de tiempo (horas)	Capacidad de infiltración (mm/h)	Lámina infiltrada acumulada (F)(mm)
0	0	0.000	0.000	0.00	0.00
278	2	0.289	0.033	87.58	2.89
380	3	0.395	0.050	79.00	6.84
515	5	0.535	0.083	64.46	12.19
751	10	0.781	0.167	46.77	20.00
576	10	0.599	0.167	35.87	25.98
845	30	0.878	0.500	17.56	34.77
530	30	0.551	0.500	11.02	40.28
720	60	0.748	1.000	7.48	47.76

#### Fórmula de Horton

**Ejemplo 1.4.** R. E. Horton en 1940 propuso la fórmula siguiente para representar la capacidad de infiltración de los suelos <sup>(C1)</sup>:

$$f = f_c + (f_0 - f_c) e^{-kt} \quad (1.7)$$

en la cual:

f = capacidad de infiltración, en mm/h.

f<sub>c</sub> = capacidad de infiltración final, en mm/h.



$f_0$  = capacidad de infiltración inicial, cuando  $t = 0$ , en mm/h.  
 $k$  = constante positiva de decaimiento, en 1/minuto.  
 $t$  = tiempo transcurrido, en minutos.

La ecuación 1.7 es una recta en el papel semilogarítmico, con  $t$  en las abscisas,  $(f - f_c)$  en la escala logarítmica de las ordenadas y las equivalencias siguientes:

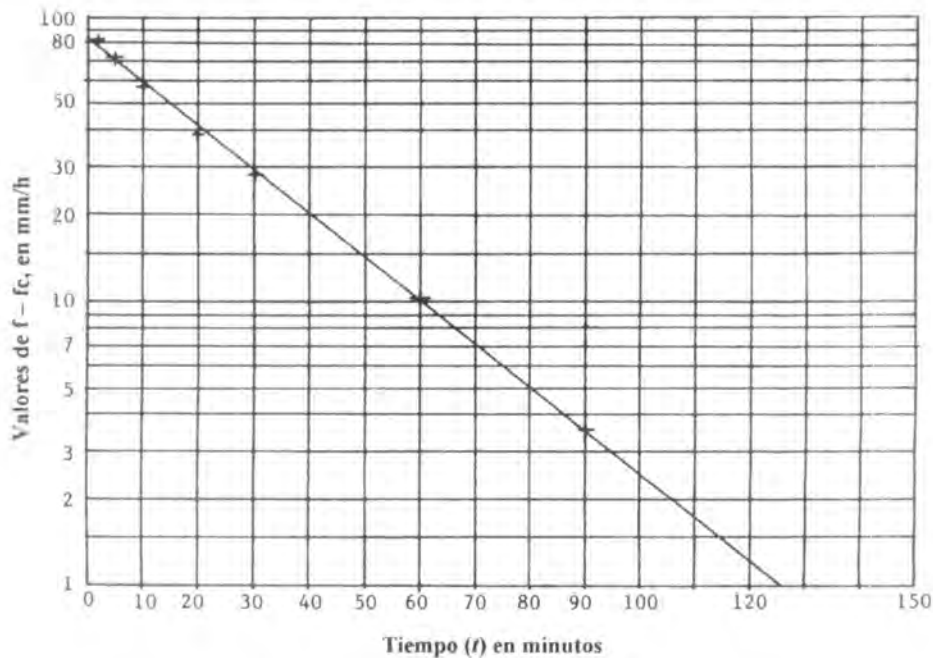
$$b = \log(f_0 - f_c) \quad \therefore \quad (f_0 - f_c) = 10^b \quad (1.8)$$

$$m = k \log e \quad \therefore \quad k = m / \log e = 2.3025851 \cdot m \quad (1.9)$$

En la figura 1.5 se han dibujado los valores acumulados de la columna 2 y de la columna 5 menos un valor adoptado de  $f_c = 7.45$  mm/h. La ventaja fundamental de la fórmula de Horton radica en permitir caracterizar mediante tres parámetros ( $f_0$ ,  $f_c$  y  $k$ ), el proceso de infiltración en un suelo específico, lo cual es muy útil para comparaciones y regionalización de tales valores.

Figura 1.5

Ajuste de la fórmula de R. E. Horton  
(Aplicación práctica 2)



### 1.5 Aproximación numérica

Los métodos numéricos (MN) son técnicas que consisten fundamentalmente en una secuencia de operaciones aritméticas (algoritmo) que permiten aproximar de una manera eficiente, las soluciones de una amplia variedad de problemas matemáticos que se originan al representar un sistema físico. Por ello, a la solución a través de los MN se le llama *Aproximación Numérica*.

#### El modelo lineal

La representación matemática de un proceso físico mediante una ecuación de una recta ( $Y = b + m X$ ), es la forma más simple que existe y por ello, procesos que no son lineales, en el sentido estadístico, se transforman o linealizan gráficamente, para pos

teriormente encontrar la ecuación respectiva. En el capítulo 5 se abordarán con detalle los conceptos de regresión y correlación, a través del principio de mínimos cuadrados. Por el momento, es suficiente con indicar que la recta que mejor representa a unos puntos, es aquella que pasa por el punto medio de éstos y que su inclinación es tal que minimiza la suma de las distancias al cuadrado de cada punto a dicha recta. Lo anterior conduce a las ecuaciones siguientes <sup>[C2]</sup>:

$$b = \bar{y} - m \bar{x} \quad (1.10)$$

$$m = S_{xy} / S_x^2 \quad (1.11)$$

$$r_{xy} = S_{xy} / (S_x^2 \cdot S_y^2)^{1/2} \quad (1.12)$$

siendo:

$$\bar{y} \quad \text{media aritmética de las } y \quad \bar{y} = (1/n) \sum_1^n y_i \quad (1.13)$$

$$\bar{x} \quad \text{media aritmética de las } x \quad \bar{x} = (1/n) \sum_1^n x_i \quad (1.14)$$

$$S_{xy} \quad \text{covariancia} \quad S_{xy} = (1/n) \sum_1^n x_i y_i - (\bar{x}) \cdot (\bar{y}) \quad (1.15)$$

$$S_x^2 \quad \text{variancia de las } x \quad S_x^2 = (1/n) \sum_1^n x_i^2 - (\bar{x})^2 \quad (1.16)$$

$$S_y^2 \quad \text{variancia de las } y \quad S_y^2 = (1/n) \sum_1^n y_i^2 - (\bar{y})^2 \quad (1.17)$$

$r_{xy}$  es el coeficiente de correlación lineal que mide el grado de asociación o dependencia entre las variables  $x$  e  $y$ , varía de cero a  $\pm 1$ . Cuando es cero no existe linealidad en los puntos o datos y cuando vale la unidad, los puntos están sobre la recta, es decir, no existe dispersión <sup>[C2]</sup>.

### Programa de cómputo

El programa de cómputo número 1 (MODLIN) o del MODElo LINEal aplica las ecuaciones 1.10 a 1.17 para encontrar la fórmula de la línea recta (ecuación 1.5). Mediante cambios apropiados en las líneas 1050 y 1070 se utilizará para obtener las aproximaciones numéricas a las aplicaciones previamente expuestas. El programa MODLIN incluye los datos de tales aplicaciones, ya que los datos no se accesan por pantalla sino que los lee el programa mediante la instrucción READ-DATA (ver Apéndice A para detalles del lenguaje *Basic* utilizado).

### Linealización matemática

**Ejemplo 1.5.** Al procesar con el programa MODLIN los datos del ejemplo 1.1 en el dominio logarítmico se obtienen:

$$\begin{aligned} b &= 2.6821 \\ m &= -1.0662 \\ r_{xy} &= -0.999998 \end{aligned} \quad \therefore \quad y = 480.95 x^{-1.0662} \quad (1.18)$$

en cambio, el procesamiento de los datos del ejemplo 1.2 en el dominio semilogarítmico condujo a:

$$\begin{aligned} b &= 2.0003 \\ m &= -0.0115 \\ r_{xy} &= -0.999824 \end{aligned} \quad \therefore \quad y = 100.07 e^{-0.0265x} \quad (1.19)$$

por último, al procesar por medio del programa MODLIN los 7 datos de la Figura 1.4, se obtiene:

$$\begin{aligned} b &= 1.9181 \\ m &= -0.01524 \\ r_{xy} &= -0.99997 \end{aligned} \quad \therefore f = 7.45 + 82.81 e^{-0.0351t} \quad (1.20)$$

Las rectas definidas por las ecuaciones 1.18, 1.19 y 1.20 se han dibujado en las figuras 1.1, 1.2 y 1.5, respectivamente.

## 1.6 Tipos de errores

La idea conceptual del inciso 1.5 fue que los métodos numéricos (MN) permiten obtener soluciones aproximadas, lo cual implica que existe una discrepancia o *error* con respecto a la solución exacta o analítica. Los errores que son posibles cuando se aplican los MN, principalmente en forma manual, es decir, sin recurrir a las computadoras, son de los tres tipos siguientes:

**(1) Errores inherentes.** Son las fallas o anomalías propias de los datos, también se les conoce como errores accidentales o heredados. Se pueden originar en la lectura de los datos, ya sea debido al observador o experimentador, o bien al aparato de medición. Estos errores aunque no dependen del MN empleado o de su precisión, pueden alterar su aplicación o tener repercusiones en sus resultados.

**(2) Errores de redondeo.** Estos se producen al utilizar un cierto número de dígitos significativos en operaciones como multiplicación y división, en las cuales el resultado puede tener un número de dígitos mayor que el utilizado, por lo que el último dígito se redondea. También es conocido como error por aproximación. El redondeo del último dígito se realiza incrementándolo en 1 cuando el primer dígito eliminado es 5 o mayor, en caso contrario permanece sin cambio. Por ejemplo, 8.7458, redondeado a 3, 2 y 1 dígitos es: 8.746, 8.75 y 8.7, respectivamente.

**(3) Errores de truncamiento.** Son los generados al trabajar con series infinitas, cuando al realizar un cálculo con tales series únicamente se utiliza un número finito de términos (ver Apéndice B sobre la Serie de Taylor).

Para la medición y presentación de los errores se tienen dos medidas numéricas: el *error absoluto* ( $\epsilon_a$ ) es la diferencia, en valor absoluto, entre la solución exacta o analítica y la aproximación numérica de la solución obtenida con un MN, y el *error relativo* ( $\epsilon_r$ ) que es el cociente entre el error absoluto y la solución exacta, también en valor absoluto; se puede interpretar como un porcentaje de error y por ello algunas veces se expresa en %. Entonces se tiene:

$$\epsilon_a = |X_R - X_A| \quad (1.21)$$

$$\epsilon_r = \epsilon_a / |X_A| \quad (1.22)$$

$X_R$  solución exacta o analítica  
 $X_A$  aproximación numérica

**Ejemplo 1.6.** Evaluar  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x$ , para  $x = 4.71$  utilizando aritmética de redondeo a un dígito. Considerando como solución exacta  $f(4.71) = -14.487489$ , cuantificar los errores absoluto y relativo.

Sustituyendo  $x = 4.71$  en la función se tiene:

$$f(4.71) = (4.71)^3 - (4.71)^2 + 3(4.71) = 104.5 - 133.1 + 14.1 = -14.5$$

entonces se tiene que:

$$\epsilon_a = |-14.487489 - (-14.5)| = 0.012511$$

$$\epsilon_r = 0.012511 / |-14.487489| = 0.0008635 = 0.08635\%$$

□

**Ejemplo 1.7.** Evaluar la serie del número  $e$  utilizando 4 y 5 términos. ¿Qué errores de truncamiento se comenten en cada caso, si se considera como solución exacta 2.71828?

El número  $e$ , base de los logaritmos naturales, es igual a:

$$e = \sum_{i=0}^{\infty} 1/i! \quad (1.23)$$

entonces, con 4 términos la serie será:

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 2.66667$$

$$\epsilon_a = |2.71828 - 2.66667| = 0.05161$$

$$\epsilon_r = 0.05161 / |2.71828| = 0.018986 = 1.899\%$$

ahora con 5 términos se tiene:

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = 2.70833$$

$$\epsilon_a = |2.71828 - 2.70833| = 0.00995$$

$$\epsilon_r = 0.00995 / |2.71828| = 0.003659 = 0.366\%$$

□

### Problemas propuestos

**Problema 1.1:** Linealizar gráfica y matemáticamente las siguientes 7 parejas de datos experimentales <sup>[1.3]</sup>. (Respuestas:  $\alpha = 0.00436$ ,  $\beta = 0.0253$ )

$x$ (0)	$y$ (C)
58	0.000
86	0.004
148	0.018
166	0.029
188	0.051
202	0.073
210	0.090

**Problema 1.2:** Repita los cálculos de las primera y segunda aplicaciones numéricas considerando que el diámetro del cilindro interior es de 30 cm. (Respuestas:  $f_0 = 120$  mm/h,  $f_c = 10$  mm/h y  $k = 0.0348$  <sup>[C1]</sup>).

**Problema 1.3:** Efectúe los cálculos indicados en las operaciones  $a$ ,  $b$  y  $c$ , de las maneras siguientes: (1) exactamente, (2) con redondeo a un dígito y (3) con redondeo a tres dígitos. Evaluar los errores relativos correspondientes. (Respuestas: 10.006%, 0.10%; 100%, 0.917%; 3.4%, 0.034%).

(a) 185.345(1/3)

(b) 0.0218(197)

(c)  $\frac{4}{5} + \frac{1}{6}$

**Problema 1.4:** Utilizando 3 y 5 términos en la serie, evalúe  $\sin(\pi/4)$ . Considerando como solución exacta 0.0707107, obtener los errores relativos de cada caso. (Respuestas: 0.0051%; 0.0000307%).

**Problema 1.5:** Utilizando 3 y 5 términos en la serie, evalúe  $\cos(\pi/3)$ . Considerando como solución exacta 0.50, obtener los errores absoluto y relativo de cada caso. (Respuestas: 0.3592%; 0.0000867%).

## Referencias

- C1.** D. F. Campos Aranda. *Procesos del Ciclo Hidrológico*. Capítulo 6: Infiltración, lluvia en exceso y humedad del suelo, pp. 6-1 a 6-57. Editorial Universitaria Potosina. San Luis Potosí, S.L.P. Noviembre de 1998. Tercera reimpresión.
- C2.** D. F. Campos Aranda. *Procesos del Ciclo Hidrológico*. Anexo C: Regresión y correlación lineales, pp. C-1 a C-12. Editorial Universitaria Potosina. San Luis Potosí, S.L.P. Noviembre de 1998. Tercera reimpresión.
- C3.** S. C. Chapra y R. P. Canale. *Métodos Numéricos para Ingenieros*. Parte 1, capítulo 1: Modelos matemáticos y solución de problemas en ingeniería, pp. 3-24. McGraw-Hill Interamericana Editores, S. A. de C. V. México, D. F. 1999. Tercera edición.
- D1.** R. D. Dodson, "Advances in Hydrologic Computation", Chapter 23, pp. 23-1 to 23.24 in *Handbook of Hydrology*, editor in chief David R. Maidment, McGraw-Hill, Inc. New York, U.S.A. 1993.
- E1.** G. Echávez Aldape. "Galileo y la Torre de Pisa: de una vez por todas". *Ciencia y Desarrollo*, Vol. XVIII, Número 107, pp. 18-30, noviembre/diciembre de 1992.
- E2.** G. Echávez Aldape. "Galileo y la Torre de Pisa: de una vez por todas". *Ingeniería Hidráulica en México*, Vol. VIII, Número 1, pp. 43-53, enero-abril de 1993.
- H1.** R. W. Hornbeck. *Numerical Methods*. Chapter 1: Introductory topics, pp. 1-6. Quantum Publishers, Inc. New York, U.S.A. 1975.
- L1.** J. Leyva Ramos. La evolución de las computadoras personales. *Ciencia y Desarrollo*, Vol. XX, Número 117, pp. 26-32, julio/agosto de 1994.
- L2.** J. Leyva Ramos. Las generaciones de computadoras. *Ciencia y Desarrollo*, Vol. XXV, Número 149, pp 45-51, noviembre/diciembre de 1999.
- L3.** J. Lipka. *Computaciones Gráficas y Mecánicas*. Capítulo 6: Fórmulas empíricas-curvas no periódicas, pp. 153-208. Compañía Editorial Continental, S. A., México, D. F. 1967.
- S1.** E. F. Schulz. *Problems in Applied Hydrology*. Section four: Infiltration and analysis of soil moisture, pp. 159-195. Water Resources Publications. Fort Collins, Colorado, U.S.A. 1976. Revised edition.
- W1.** J. Williams. *The Weather Book*. Chapter 5: What makes rain?. pp. 63-82. Vintage Books, New York, USA. 1997. Second edition.

## PCN1: MODLIN

```
1000 REM PROGRAMA "MODLIN" (MODELO LINEAL)
1010 REM ESTE PROGRAMA APLICA LAS ECUACIONES 1.10 A 1.17
1020 REM LEE DATOS Y PRESENTA RESULTADOS EN PANTALLA.
1030 CLS:PRINT"CALCULO DE PARAMETROS DEL MODELO LINEAL":PRINT
1040 READ N:DIM X(N),Y(N)
1050 FOR I=1 TO N:READ X(I):X(I)=.4342945*LOG(X(I))
1060 SX=SX+X(I):SX2=SX2+X(I)^2:NEXT I
1070 FOR I=1 TO N:READ Y(I):Y(I)=.4342945*LOG(Y(I))
1080 SY=SY+Y(I):SY2=SY2+Y(I)^2:NEXT I
1090 FOR I=1 TO N:SXY=SXY+X(I)*Y(I):NEXT I
1100 XM=SX/N:YM=SY/N:VX=SX2/N-XM^2:VY=SY2/N-YM^2
1110 COV=SXY/N-XM*YM:RXY=COV/SQR(VX*VY)
1120 M=COV/VX:B=YM-M*XM
1130 REM INICIA IMPRESION DE RESULTADOS
1140 PRINT"MEDIA DE LAS x" =";:PRINT USING"####.###";XM
1150 PRINT"MEDIA DE LAS y" =";:PRINT USING"####.###";YM
1160 PRINT"ORDENADA AL ORIGEN b" =";:PRINT USING"####.###";B
1170 PRINT"PENDIENTE m" =";:PRINT USING"####.###";M
1180 PRINT"COEF.DE CORRELACION Rxy" =";:PRINT USING"###.#####";RXY
1190 END
1200 REM INICIAN DATOS DE LA APLICACION DIDACTICA 1
1210 DATA 7
1220 DATA 1.853,2.748,4.28,6.992,14,26.36,53.92
1230 DATA 250.3,163.3,101.9,60.4,28.83,14.7,6.86
1240 REM INICIAN DATOS DE LA APLICACION DIDACTICA 2
1250 DATA 10
1260 DATA 2,5,8,11,14,17,27,31,35,44
1270 DATA 94.8,87.9,81.3,74.9,68.7,64,49.3,44,39.1,31.6
1280 REM INICIAN DATOS DE LA APLICACION PRACTICA 1 (t-f)
1290 DATA 8
1300 DATA 2,5,10,20,30,60,90,150
1310 DATA 87.58,79,64.46,46.77,35.87,17.56,11.02,7.48
1320 REM INICIAN DATOS DE LA APLICACION PRACTICA 1 (t-F)
1330 DATA 8
1340 DATA 2,5,10,20,30,60,90,150
1350 DATA 2.89,6.84,12.19,20,25.98,34.77,40.28,47.76
```

# Capítulo 2:

## Interpolación mediante polinomios

### Resumen

Se comienza por mencionar la utilidad de la interpolación a través de polinomios. En seguida se expone la teoría y formulación matemática de los dos primeros polinomios de Newton, el lineal y el cuadrático. A continuación se describen matemáticamente los polinomios de Lagrange de grado  $n$ . Ambos polinomios se aplican a un ejemplo didáctico simple. Posteriormente, se describe con detalle una aplicación práctica, cuyo propósito fue complementar la tabla de factores de frecuencia (K) de la distribución Pearson tipo III, para poder realizar estimaciones directas con probabilidad de excedencia del 75%. Las interpolaciones necesarias se realizaron con base en un programa del polinomio de Newton, cuyo listado se presenta.

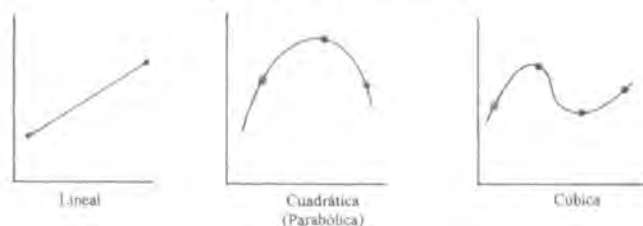
### 2.1 Concepto y utilidad

Con bastante frecuencia resulta necesario estimar valores intermedios entre magnitudes conocidas, o bien estimar cantidades que no han ocurrido; el primer caso se conoce como *interpolación* y el segundo como *extrapolación* o pronóstico. Cuando el número de datos disponibles es reducido para intentar obtener una ecuación o modelo matemático que los represente, o simplemente se requiere una estimación rápida de un valor intermedio, o fuera del intervalo de observación, resulta conveniente recurrir a la aproximación polinomial. Un polinomio de  $n$ -ésimo orden tiene la fórmula siguiente:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n \quad (2.1)$$

y puede ser ajustado a  $n+1$  puntos, de manera que existe uno y sólo un polinomio de  $n$ -ésimo orden que pasa a través de todos los puntos. Lo anterior se ilustra en la Figura 2.1. Para obtener el polinomio de  $n$ -ésimo orden existen diversos procedimientos, dos de ellos son los conocidos como polinomios de Newton y Lagrange.

Figura 2.1  
Ejemplos de interpolación polinomial



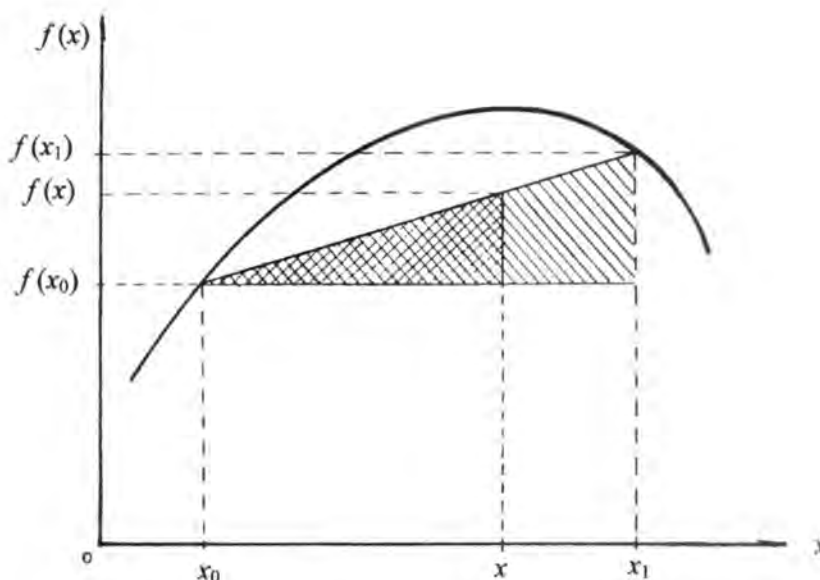
## 2.2 Polinomios de interpolación de Newton

### Interpolación lineal

*Teoría.* En la figura 2.2 los triángulos semejantes destacados con rayado permiten establecer que <sup>[C7,C8]</sup>:

Figura 2.2

### Representación gráfica de la interpolación lineal



$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

por lo tanto:

$$f_1(x) = f(x_0) + \left[ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right] (x - x_0) \quad (2.2)$$

$f_1(x)$  es la interpolación de primer orden; el término entre paréntesis rectangular es la pendiente de la línea recta que conecta los dos puntos, y como se verá en el capítulo 6, es una aproximación de diferencias divididas finitas a la primera derivada. En general, entre más pequeño es el intervalo  $(x_1 - x_0)$  más exacta es la aproximación.

**Ejemplo 2.1.** Para la función  $f(x) = \text{sen } x$ , con la variable  $x$  en grados, se requiere hacer una interpolación para  $x = 75^\circ$ , utilizando puntos en  $x = 70^\circ$  y  $80^\circ$ , con los valores siguientes para tal función: 0.9397 y 0.9848. Utilizar como solución exacta 0.965926 para evaluar el error relativo.

Llevando los datos a la ecuación 2.2 se tiene:

$$f_1(75^\circ) = f(70^\circ) + \frac{f(80^\circ) - f(70^\circ)}{80^\circ - 70^\circ} (75^\circ - 70^\circ) = 0.9397 + \frac{0.9848 - 0.9397}{10^\circ} 5^\circ$$



$$f_1(75^\circ) = 0.96225 \quad \epsilon_r = |0.965926 - 0.96225| / 0.965926 = 0.003806$$

$$\epsilon_r = 0.381\%$$

□

### Interpolación cuadrática

Para reducir el error de la interpolación resulta conveniente aproximar una curva a la función. Si se dispone de tres puntos, se ajusta un polinomio cuadrático. Para esto es conveniente ahora definir el polinomio de la forma siguiente [C7,C8]:

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) \quad (2.3)$$

el cual es equivalente al de la ecuación 2.1 como se demuestra a continuación. Eliminando paréntesis se tiene:

$$f_2(x) = b_0 + b_1 x - b_1 x_0 + b_2(x^2 - x x_1 - x x_0 + x_0 x_1)$$

$$f_2(x) = b_0 + b_1 x - b_1 x_0 + b_2 x^2 + b_2 x_0 x_1 - b_2 x x_0 - b_2 x x_1$$

haciendo:

$$a_0 = b_0 - b_1 x_0 + b_2 x_0 x_1$$

$$a_1 = b_1 - b_2 x_0 - b_2 x_1$$

$$a_2 = b_2$$

se tiene

$$f_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Para evaluar  $b_0$  se hace  $x = x_0$  en la ecuación 2.3 y se obtiene:

$$b_0 = f(x_0) \quad (2.4)$$

sustituyendo ahora a  $b_0$  y haciendo  $x = x_1$  se deduce:

$$f(x_1) = f(x_0) + b_1(x_1 - x_0) \therefore b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (2.5)$$

al sustituir las ecuaciones 2.4 y 2.5 en la 2.3 y haciendo  $x = x_2$  se obtiene

$$f(x_2) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x_2 - x_0) + b_2 (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$f(x_2) - f(x_0) = (x_2 - x_0) \left[ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + b_2 (x_2 - x_1) \right]$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + b_2 (x_2 - x_1)$$

$$b_2 = \left[ \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right] / (x_2 - x_1) \quad (2.6)$$

Sin embargo, para que  $b_2$  tenga una expresión similar a  $b_1$  (ec. 2.5), es decir que también sea una diferencia dividida finita de la segunda derivada se debe expresar así:

$$b_2 = \left[ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right] / (x_2 - x_0) \quad (2.7)$$

en la aplicación didáctica 2 se comprobará que las ecuaciones 2.6 y 2.7 son equivalentes. El cambio anterior fue necesario para volver más fácil la generalización al polinomio de grado  $n$  ajustado a  $n+1$  puntos, lo cual se puede consultar en las referencias [C7 y C8].

**Ejemplo 2.2.** Resolver el ejemplo 2.1 utilizando interpolación cuadrática con el siguiente punto adicional  $x = 60^\circ$ ,  $f(60^\circ) = 0.8660$ . Entonces ahora se tiene que:

$$\begin{array}{ll} x_0 = 60^\circ & f(60^\circ) = 0.8660 \\ x_1 = 70^\circ & f(70^\circ) = 0.9397 \\ x_2 = 80^\circ & f(80^\circ) = 0.9848 \end{array}$$

$$b_0 = 0.8660$$

$$b_1 = \frac{0.9397 - 0.8660}{70^\circ - 60^\circ} = 0.00737$$

$$b_2 = \frac{\frac{0.9848 - 0.8660}{80^\circ - 60^\circ} - \frac{0.9397 - 0.8660}{70^\circ - 60^\circ}}{80^\circ - 70^\circ} = \frac{-0.00143}{10^\circ} = -0.000143 \quad (2.6)$$

$$b_1 = \frac{\frac{0.9848 - 0.9397}{80^\circ - 70^\circ} - \frac{0.9397 - 0.8660}{70^\circ - 60^\circ}}{80^\circ - 60^\circ} = \frac{-0.00268}{20^\circ} = -0.000143 \quad (2.7)$$

$$f_2(75^\circ) = 0.8660 + 0.00737(75^\circ - 60^\circ) - 0.000143(75^\circ - 60^\circ)(75^\circ - 70^\circ) \quad (2.3)$$

$$f_2(75^\circ) = 0.8660 + 0.11055 - 0.010725 = 0.965825 \quad (2.3)$$

$$\epsilon_R = |0.965926 - 0.965825| / 0.965926 = 0.0001046 \quad \epsilon_R = 0.0105\%$$

□

### 2.3 Polinomios de interpolación de Lagrange

En términos concretos, este polinomio es una reformulación del de Newton que evita los cálculos de las diferencias divididas y que por lo tanto, resulta más fácil de aplicar manualmente y con computadora. Su desarrollo parte de considerar que cualquier polinomio de grado  $n$  se puede escribir como [C7, C8, L1]:

$$\begin{aligned} f_n(x) = & L_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \dots (x-x_n) + \\ & L_1(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3) \dots (x-x_n) + \\ & L_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3) \dots (x-x_n) + \dots + \\ & L_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_{n-1}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

los coeficientes  $L_0, L_1, L_2, \dots, L_n$  se determinan de manera que la curva del polinomio pase por todos y cada uno de los puntos especificados (datos). Entonces, si  $x = x_0$  en la ecuación 2.8  $f_n(x)$  será  $f(x_0)$  y se obtendrá:

$$f(x_0) = L_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3) \dots (x_0-x_n)$$

de donde:

$$L_0 = \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3) \dots (x_0-x_n)} \quad (2.9)$$

Si  $x = x_1$ ,  $f_n(x) = f(x_1)$  y entonces:

$$f(x_1) = L_1(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3) \dots (x_1-x_n)$$

por lo cual:

$$L_1 = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)} \tag{2.10}$$

de manera similar se obtienen:

$$L_2 = \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n)} \tag{2.11}$$

y

$$L_n = \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1})} \tag{2.12}$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.9 a 2.12 en la 2.8 se obtiene el polinomio de interpolación de Lagrange de orden  $n$ :

$$\begin{aligned} f_n(x) = & \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \dots (x_0 - x_n)} f(x_0) + \\ & \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)} f(x_1) + \\ & \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n)} f(x_2) + \dots + \\ & \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1})} f(x_n) \end{aligned} \tag{2.13}$$

lo anterior en notación condensada es igual a:

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) \cdot f(x_i) \tag{2.14}$$

en la cual

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{2.15}$$

en donde  $\prod$  mayúscula significa "el producto de", de manera que para  $n = 1$  se tiene:

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \tag{2.16}$$

para  $n = 2$  se obtiene:

$$f_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \tag{2.17}$$

De la ecuación 2.15 se deduce que  $L_i(x)$  es igual a uno en  $x = x_i$  y cero en todos los demás puntos, por lo tanto cada producto  $L_i(x)$  por  $f(x_i)$  toma el valor de  $f(x_i)$  en el punto  $x_i$ ; entonces la sumatoria de tales productos (ecuación 2.13) es el único polinomio de  $n$ -ésimo orden que pasa exactamente por los  $n+1$  puntos <sup>[C7,C8,L1]</sup>.

**Ejemplo 2.3.** Resolver el ejemplo 2.1 mediante el polinomio de Lagrange. De acuerdo a los datos se tiene:

$$f_1(x) = \frac{75^\circ - 80^\circ}{70^\circ - 80^\circ} 0.9397 + \frac{75^\circ - 70^\circ}{80^\circ - 70^\circ} 0.9848 = 0.96225 \quad (2.16)$$

resultado idéntico al obtenido mediante el polinomio de Newton, por lo cual:

$$\epsilon_R = |0.965926 - 0.96225| / 0.965926 = 0.003806 \quad \epsilon_R = 0.381\%$$

□

**Ejemplo 2.4.** Resolver el ejemplo 2.2 mediante el polinomio de Lagrange. Ahora se aplica la ecuación 2.17 y se tiene:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{(75^\circ - 70^\circ)(75^\circ - 80^\circ)}{(60^\circ - 70^\circ)(60^\circ - 80^\circ)} 0.8660 + \frac{(75^\circ - 60^\circ)(75^\circ - 80^\circ)}{(70^\circ - 60^\circ)(70^\circ - 80^\circ)} 0.9397 + \\ &\quad \frac{(75^\circ - 60^\circ)(75^\circ - 70^\circ)}{(80^\circ - 60^\circ)(80^\circ - 70^\circ)} 0.9848 = -0.10825 + 0.704775 + 0.3693 = 0.965825 \end{aligned}$$

resultado también idéntico al del ejemplo 2.2, por lo cual:

$$\epsilon_R = |0.965926 - 0.965825| / 0.965926 = 0.0001046 \quad \epsilon_R = 0.0105\%$$

□

## 2.4 Aplicación Práctica

### Concepto de precipitación confiable

Cuando se estudia probabilísticamente la precipitación anual y sobre todo la mensual, para tener aproximaciones más confiables relativas a su disponibilidad o caracterización del temporal, una de las estimaciones fundamentales es la conocida como Precipitación Confiable ( $P_c$ ); que se define como el valor asociado a una probabilidad de excedencia del 75%, es decir, el valor mensual que es excedido en 3 de cada 4 años <sup>[C2,H11]</sup>.

Para realizar una estimación o predicción de la  $P_c$ , se les ajusta a los valores o datos disponibles en cada mes una función de distribución de probabilidades, por ejemplo la Pearson tipo III que ha demostrado ser bastante adecuada a este tipo de información climática <sup>[H1,C1,K11]</sup>. La manera más simple de realizar el ajuste citado y por lo tanto la estimación de la  $P_c$ , es a través de la llamada Fórmula General del Análisis de Frecuencia Hidrológico <sup>[C9,C3,C5]</sup>, que es la siguiente:

$$P_c = P_m + K \cdot S \quad (2.18)$$

en la cual:

- $P_m$  = media aritmética de la precipitación mensual que se analiza, en milímetros.
- $S$  = desviación estándar de la precipitación mensual que se analiza, en milímetros.
- $K$  = factor de frecuencia o variable estandarizada Pearson tipo III, depende de la probabilidad asociada al valor que se estima, en este caso la  $P_c$ , y del coeficiente de asimetría  $C_s$ .

Las expresiones para calcular  $P_m$ ,  $S$  y  $C_s$  son <sup>[C4]</sup>:

$$P_m = (1/n) \sum_1^n p_i \quad (2.19)$$

$$S = \left[ \frac{\sum_1^n (p_i - P_m)^2}{(n-1)} \right]^{1/2} \quad (2.20)$$

$$Cs = \frac{n \sum_{i=1}^n (p_i - P_m)^2}{(n-1)(n-2) \cdot S^2} \tag{2.21}$$

en las expresiones anteriores  $p_i$  es la precipitación mensual y  $n$  el número de años del registro o de datos disponibles. Cuando alguno de los valores  $p_i$  es cero, el ajuste se realiza mediante el modelo probabilístico mixto [C1].

Una de las tablas más completas del factor de frecuencia  $K$ , lo presenta para 31 magnitudes de probabilidad de no excedencia y valores de  $Cs$  variando de 0.0 a 9.0 en incrementos de 0.10, según se ilustra en las Figuras 2.3 y 2.4 [U1]. Desafortunadamente dicha tabla no contiene el valor de  $K$  para una probabilidad de no excedencia del 25%, es decir, para la correspondiente probabilidad de excedencia del 75%, por ello se recurrió a interpolar sus valores para cada  $Cs$  tabulado.

**Programa de cómputo e interpolaciones realizadas**

Con base en el listado expuesto en la Figura 11.7 de la referencia [C7], página 360, se elaboró el programa NEWTON cuyo listado se tiene al final del capítulo. En las Figuras 2.5 y 2.6 se presentan pruebas de este programa. En este programa el error calculado para cada interpolación corresponde a la diferencia entre el resultado del polinomio de orden  $n+1$  y el de orden  $n$ .

Para cada valor del  $Cs$  se realizaron 3 interpolaciones para  $x = 0.25$ , una lineal, otra cuadrática y una cúbica con polinomios de Newton, con la siguiente ubicación de puntos o valores dato, por ejemplo para  $Cs = G1 = 0.0$  (ver figura 2.3):

Interpolación:	Probabilidad de no excedencia (P)			
	0.10	0.20	0.30	0.40
Lineal		$f(x_0) = -0.84162$	$f(x_1) = -0.52440$	
Cuadrática	$f(x_2) = -1.28155$	$f(x_0) = -0.84162$	$f(x_1) = -0.52440$	
Cúbica	$f(x_2) = -1.28155$	$f(x_0) = -0.84162$	$f(x_1) = -0.52440$	$f(x_3) = -0.25335$

En la figura 2.6 se muestran los resultados de las dos primeras interpolaciones de acuerdo al programa NEWTON y en la Tabla 2.1 siguiente se presentan los factores de frecuencia  $K$  interpolados para los coeficientes de asimetría de 0.0 a 5.0, con 0.10 de incremento.

**Tabla 2.1**

**Factores de Frecuencia (K) de la distribución Pearson tipo III interpolados para una probabilidad de excedencia del 75% en función del coeficiente de asimetría (Cs)**

Cs	K	Cs	K	Cs	K	Cs	K
0.00	-0.67246	1.30	-0.73491	2.60	-0.66077	3.90	-0.50607
0.10	-0.68137	1.40	-0.73433	2.70	-0.64994	4.00	-0.49481
0.20	-0.68966	1.50	-0.73288	2.80	-0.63866	4.10	-0.48385
0.30	-0.69731	1.60	-0.73056	2.90	-0.62700	4.20	-0.47320
0.40	-0.70431	1.70	-0.72734	3.00	-0.61505	4.30	-0.46288
0.50	-0.71064	1.80	-0.72323	3.10	-0.60288	4.40	-0.45289
0.60	-0.71628	1.90	-0.71823	3.20	-0.59058	4.50	-0.44324
0.70	-0.72122	2.00	-0.71237	3.30	-0.57821	4.60	-0.43391
0.80	-0.72544	2.10	-0.70564	3.40	-0.56585	4.70	-0.42491
0.90	-0.72891	2.20	-0.69811	3.50	-0.55356	4.80	-0.41623
1.00	-0.73162	2.30	-0.68980	3.60	-0.54138	4.90	-0.40787
1.10	-0.73353	2.40	-0.68077	3.70	-0.52939	5.00	-0.39980
1.20	-0.73463	2.50	-0.67107	3.80	-0.51760	5.10	-0.39203

**Estimación de la precipitación confiable**

**Ejemplo 2.5.** La estación climatológica San Juan de los Llanos en el estado de Guanajuato, tiene un registro disponible de precipitaciones de 1925 a 1989, con el año 1969 y el periodo de 1971 a 1978 faltantes, por lo cual se dispone de 56 datos de precipitación. Para los meses de julio y agosto se obtuvieron los siguientes parámetros estadísticos según ecuaciones 2.19 a 2.21 <sup>(C6)</sup>:

Parámetro estadístico:	Julio	Agosto
Media aritmética ( $P_m$ )	104.8 mm.	85.6 mm.
Desviación estándar ( $S$ )	57.7 mm.	45.2 mm.
Coefficiente de asimetría ( $C_s$ )	0.823	0.387

Con base en los datos de la Tabla 2.1 y el programa NEWTON se obtuvieron los valores del factor de frecuencia  $K$  correspondientes a los coeficientes de asimetría de cada mes, con una interpolación cúbica, éstos fueron:  $-0.72630$  para julio y  $-0.70344$  para agosto. Aplicando la ecuación 2.18 se obtienen los valores de precipitación confiable en cada mes.

para julio se tiene:  $P_c = 104.8 + (-0.72630) 57.7 = 62.9$  mm.

para agosto se tiene:  $P_c = 85.6 + (-0.70344) 45.2 = 53.8$  mm.

**Problemas propuestos**

**Problema 2.1:** Para la función  $f(x) = \sin x$ , con la variable  $x$  en grados, se requiere una interpolación con los polinomios de Newton y Lagrange de segundo orden para  $x = 12^\circ$ , utilizando puntos en  $x = 10, 11$  y  $13^\circ$ . Emplear 5 cifras decimales en todos los cálculos. (Respuesta: 0.20791 <sup>(A11)</sup>)

**Problema 2.2:** Usar polinomios de segundo orden de Newton y Lagrange y de este último de cuarto orden para interpolar el valor de  $f(2.5)$ , si se sabe que: (Respuestas: 0.498212, 0.4980705 <sup>(B11)</sup>)

$x$	$f(x)$
2.2	0.5207843
2.4	0.5104147
2.6	0.4813306
2.0	0.5103757
2.8	0.4359160

**Problema 2.3:** Utilizando el polinomio de interpolación de Lagrange, encontrar el valor de la función  $f(x)$  cuando  $x = 2$  y  $11$ , dado el siguiente conjunto de datos experimentales. (Respuestas: 6, 4.74 <sup>(L11)</sup>)

$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$
0	2	4	18
1	3	6	38

**Problema 2.4:** Para el siguiente conjunto de datos de  $x$  y  $f(x)$ , obtener el valor de  $f(x)$  cuando  $x = 3.2$ , utilizando el polinomio de interpolación de Lagrange. (Respuesta: 31.568 <sup>(L11)</sup>)

$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$
0	2	6	212
2	8	8	506
4	62	10	992

**Problema 2.5:** Realizar un programa de cómputo para el polinomio de interpolación de Lagrange (se sugiere consultar la referencia [C8], como guía).

## Referencias

- A1.** B. M. Ayyub & R. H. McCuen. *Numerical Methods for Engineers*, Chapter 6: Numerical interpolation, pp. 146-179, Prentice Hall, New Jersey, USA, 1996.
- B1.** R. L. Burden y J. D. Faires. *Análisis Numérico*. Capítulo 3: Interpolación y aproximación polinómica, pp. 93-153. Grupo Editorial Iberoamérica, México, D. F. 1985.
- C1.** D. F. Campos Aranda. Función de distribución de probabilidades Gamma Mixta: Soluciones y aplicaciones. *10° Congreso Nacional de Hidráulica (AMH)*, Tomo II, Subtema 6, pp. 318-322. 18 al 21 de octubre de 1988, Morelia, Mich.
- C2.** D. F. Campos Aranda, Guías para la elaboración de Estudios Agroclimáticos de Cultivos (Propuesta Normativa). *Ingeniería Hidráulica en México*, Vol. X, Núm. 1, pp. 15-33. Enero-abril de 1995.
- C3.** D. F. Campos Aranda. Hidrología Probabilística: Conceptos y procedimientos. *Ciencia y Desarrollo*, Vol. XXIV, Número 141, pp. 58-69. Julio/agosto 1998.
- C4.** D. F. Campos Aranda. *Procesos del Ciclo Hidrológico*. Anexo A: Nociones fundamentales de Estadística, pp. A-1 a A-14. Editorial Universitaria Potosina. San Luis Potosí, S.L.P. Noviembre de 1998. Tercera reimpresión.
- C5.** D. F. Campos Aranda. *Procesos del Ciclo Hidrológico*. Anexo B: Funciones de distribución utilizadas en el análisis probabilístico de precipitaciones y escurrimientos anuales, y lluvias máximas diarias, pp. B-1 a B-16. Editorial Universitaria Potosina. San Luis Potosí, S.L.P. Noviembre de 1998. Tercera reimpresión.
- C6.** D. F. Campos Aranda. Estudio agroclimático de la zona de riego de la presa San Juan de los Llanos en el estado de Guanajuato. *Simposio Internacional sobre Aprovechamiento Integral del Agua en Regiones Semiáridas*. Memoria en CD. Facultad de Ingeniería de la U.A.Q. 19 y 20 de noviembre de 1999. Querétaro, Qro.
- C7.** S. C. Chapra y R. P. Canale. *Métodos Numéricos para Ingenieros (con aplicaciones en computadoras personales)*. Capítulo 11: Interpolación, pp. 349-385, McGraw-Hill/Interamericana de México, S. A. de C. V. México, D. F. 1988. Primera edición.
- C8.** S. C. Chapra y R. P. Canale. *Métodos Numéricos para Ingenieros*. Capítulo 18: Interpolación, pp. 502-536. McGraw-Hill Interamericana Editores, S. A. de C. V. México, D. F. 1999. Tercera edición.
- C9.** V. T. Chow. "Statistical and probability analysis of hydrologic data. Part I: Frequency analysis". Section 8-1, pp. 8-1 to 8-42 in *Handbook of Applied Hydrology*, editor-in-chief Ven Te Chow, McGraw-Hill Book Co. New York, USA, 1964.
- H1.** G. H. Hargreaves. "Moisture Availability and Crop Production". *Transactions of the ASAE*, pp. 980-984. St. Joseph, Michigan, USA, 1975.
- I1.** Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática. *Cantidad de Lluvia más Frecuente (moda) en la República Mexicana*. INEGI. México, D. F. 1984. (10 páginas y 12 planos).
- K1.** N. T. Kottegoda. *Stochastic Water Resources Technology*. Chapter 3, theme 3.2: "Pearson density functions", pp. 71-75. The MacMillan Press Ltd, London, England, 1980.

- L1. R. Luthe, A. Olivera y F. Schutz. *Métodos Numéricos*. Capítulo 6: Aproximación polinomial, pp. 155-181. Editorial Limusa. México, D. F. 1978.
- U1. U. S. Department of Agriculture. *New Tables of Percentage Points of the Pearson Type III Distribution*. Soil Conservation Service, Technical Release No. 38. Central Technical Unit. Washington, D. C., USA. March, 1976. Revised edition (pp. 17).

Figura 2.3

## Presentación de la tabla de factores de frecuencia (K) de la distribución Pearson tipo III

Table 1.--Percentage Points of Pearson Type III Distribution,  $P(K_p, G_1)^{1/}$   
For Positive Skewness  
 $G_1 = 0.0(0.1) 9.0$

The values in the body of the table are the values of  $K_p$ , standardized units, that correspond to these values of  $G_1$  for  $P = 0.0001, 0.0005, 0.0010, 0.0020, 0.0050, 0.0100, 0.0200, 0.0250, 0.0400, 0.0500, 0.1000, 0.2000, 0.3000, 0.4000, 0.4296, 0.5000, 0.5704, 0.6000, 0.7000, 0.8000, 0.9000, 0.9500, 0.9600, 0.9750, 0.9800, 0.9900, 0.9950, 0.9980, 0.9990, 0.9995, \text{ and } 0.9999$  cumulative probability equal to or less than. Five decimals have been retained. The Return Period (T) is defined as  $1/Q$ , and  $P + Q = 1.0$ .

Example: Given  $G_1 = + 1.0$  Find  $K_p$  for  $P = 0.9900$  and  $Q = .0100$  or  $T = 100$   
 $G_1 = + 1.0$   $K_p = + 3.02256$   
 Find  $K_p$  for  $P = Q = 0.5000$  or  $T = 2$   
 $G_1 = + 1.0$   $K_p = - 0.16397$

Where  $G_1$  is the coefficient of skewness  
 $P$  is the cumulative probability equal to or less than  
 $Q$  is the cumulative probability equal to or greater than  
 $T$  is the return period and/or recurrence interval  
 $K_p$  is the K-value for selected percentage points and skewness

<sup>1/</sup> This table was computed on the IBM 7094 by Dr. H. Leon Harter, Senior Scientist (Mathematical Statistician), Applied Mathematics Research Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 45433, by special arrangements for the Soil Conservation Service, USDA, Central Technical Unit, 269 Federal Building, Hyattsville, Maryland 20782. This table was published in *Technometrics*, Vol 11, No. 1, Feb. 1969, pp 177-187, and Vol 13, No. 1 Feb. 1971, pp 203-204, "A New Table of Percentage Points of the Pearson Type III Distribution" and "More Percentage Points of the Pearson Distribution," respectively.



Figura 2.4

Ejemplo de los factores de frecuencia (K) de la distribución Pearson tipo III

TABLE 1. PERCENTAGE POINTS OF PEARSON TYPE III DISTRIBUTION (SKEWNESS G1)

P	G1=0.0	G1=0.1	G1=0.2	G1=0.3	G1=0.4	G1=0.5	G1=0.6	Q	T
0.000100	-3.71902	-3.50703	-3.29921	-3.09631	-2.89907	-2.70836	-2.52507	0.9999	1.0001
0.000500	-3.29053	-3.12767	-2.96698	-2.80889	-2.65390	-2.50257	-2.35549	0.9995	1.0005
0.001000	-3.09023	-2.94834	-2.80786	-2.66915	-2.53261	-2.39867	-2.26780	0.9990	1.0010
0.002000	-2.87816	-2.75706	-2.63672	-2.51741	-2.39942	-2.28311	-2.16884	0.9980	1.0020
0.005000	-2.57583	-2.48187	-2.38795	-2.29423	-2.20092	-2.10825	-2.01644	0.9950	1.0050
0.010000	-2.32635	-2.25258	-2.17840	-2.10394	-2.02933	-1.95472	-1.88029	0.9900	1.0101
0.020000	-2.05375	-1.99973	-1.94499	-1.88959	-1.83361	-1.77716	-1.72033	0.9800	1.0204
0.025000	-1.95996	-1.91219	-1.86360	-1.81427	-1.76427	-1.71366	-1.66253	0.9750	1.0256
0.040000	-1.75069	-1.71580	-1.67999	-1.64329	-1.60574	-1.56740	-1.52830	0.9600	1.0417
0.050000	-1.64485	-1.61594	-1.58607	-1.55527	-1.52357	-1.49101	-1.45762	0.9500	1.0526
0.100000	-1.28155	-1.27037	-1.25824	-1.24516	-1.23114	-1.21618	-1.20028	0.9000	1.1111
0.200000	-0.84162	-0.84611	-0.84986	-0.85285	-0.85508	-0.85653	-0.85718	0.8000	1.2500
0.300000	-0.52440	-0.53624	-0.54757	-0.55839	-0.56867	-0.57840	-0.58757	0.7000	1.4286
0.400000	-0.25335	-0.26882	-0.28403	-0.29897	-0.31362	-0.32796	-0.34198	0.6000	1.6667
0.429624	-0.17733	-0.19339	-0.20925	-0.22492	-0.24037	-0.25558	-0.27047	0.5704	1.7532
0.500000	0.0	-0.01662	-0.03325	-0.04993	-0.06651	-0.08302	-0.09945	0.5000	2.0000
0.570376	0.17733	0.16111	0.14472	0.12820	0.11154	0.09478	0.07791	0.4296	2.3276
0.600000	0.25335	0.23763	0.22168	0.20552	0.18916	0.17261	0.15589	0.4000	2.5000
0.700000	0.52440	0.51207	0.49927	0.48600	0.47228	0.45812	0.44352	0.3000	3.3333
0.800000	0.84162	0.83639	0.83044	0.82377	0.81638	0.80829	0.79950	0.2000	5.0000
0.900000	1.28155	1.29178	1.30105	1.30936	1.31671	1.32309	1.32850	0.1000	10.000
0.950000	1.64485	1.67279	1.69971	1.72562	1.75048	1.77428	1.79701	0.0500	20.000
0.960000	1.75069	1.78462	1.81756	1.84949	1.88039	1.91022	1.93896	0.0400	25.000
0.975000	1.95996	2.00688	2.05290	2.09795	2.14202	2.18505	2.22702	0.0250	40.000
0.980000	2.05375	2.10697	2.15935	2.21081	2.26133	2.31084	2.35931	0.0200	50.000
0.990000	2.32635	2.39961	2.47226	2.54421	2.61539	2.68572	2.75514	0.0100	100.00
0.995000	2.57583	2.66965	2.76321	2.85636	2.94900	3.04102	3.13232	0.0050	200.00
0.998000	2.87816	2.99978	3.12169	3.24371	3.36566	3.48737	3.60872	0.0020	500.00
0.999000	3.09023	3.23322	3.37703	3.52139	3.66608	3.81090	3.95567	0.0010	1000.0
0.999500	3.29053	3.45513	3.62113	3.78820	3.95605	4.12443	4.29311	0.0005	2000.0
0.999900	3.71902	3.93453	4.15301	4.37394	4.59687	4.82141	5.04718	0.0001	10000.

P	G1=0.7	G1=0.8	G1=0.9	G1=1.0	G1=1.1	G1=1.2	G1=1.3	Q	T
0.000100	-2.35015	-2.18448	-2.02891	-1.88410	-1.75053	-1.62838	-1.51752	0.9999	1.0001
0.000500	-2.21328	-2.07661	-1.94611	-1.82241	-1.70603	-1.59738	-1.49673	0.9995	1.0005
0.001000	-2.14053	-2.01739	-1.89894	-1.78572	-1.67825	-1.57695	-1.48216	0.9990	1.0010
0.002000	-2.05701	-1.94806	-1.84244	-1.74062	-1.64305	-1.55016	-1.46232	0.9980	1.0020
0.005000	-1.92580	-1.83660	-1.74919	-1.66390	-1.58110	-1.50114	-1.42439	0.9950	1.0050
0.010000	-1.80621	-1.73271	-1.66001	-1.58838	-1.51808	-1.44942	-1.38267	0.9900	1.0101
0.020000	-1.66325	-1.60604	-1.54886	-1.49188	-1.43529	-1.37929	-1.32412	0.9800	1.0204
0.025000	-1.61099	-1.55914	-1.50712	-1.45507	-1.40314	-1.35153	-1.30042	0.9750	1.0256
0.040000	-1.48852	-1.44813	-1.40720	-1.36584	-1.32414	-1.28225	-1.24028	0.9600	1.0417
0.050000	-1.42345	-1.38855	-1.35299	-1.31684	-1.28019	-1.24313	-1.20578	0.9500	1.0526
0.100000	-1.18347	-1.16574	-1.14712	-1.12762	-1.10726	-1.08608	-1.06413	0.9000	1.1111
0.200000	-0.85703	-0.85607	-0.85426	-0.85161	-0.84809	-0.84369	-0.83841	0.8000	1.2500
0.300000	-0.59615	-0.60412	-0.61146	-0.61815	-0.62415	-0.62944	-0.63400	0.7000	1.4286
0.400000	-0.35565	-0.36889	-0.38186	-0.39434	-0.40638	-0.41794	-0.42899	0.6000	1.6667
0.429624	-0.28516	-0.29961	-0.31368	-0.32740	-0.34075	-0.35370	-0.36620	0.5704	1.7532
0.500000	-0.11578	-0.13199	-0.14807	-0.16397	-0.17968	-0.19517	-0.21040	0.5000	2.0000
0.570376	0.06097	0.04397	0.02693	0.00987	-0.00719	-0.02421	-0.04116	0.4296	2.3276
0.600000	0.13901	0.12199	0.10486	0.08763	0.07032	0.05297	0.03560	0.4000	2.5000
0.700000	0.42851	0.41309	0.39729	0.38111	0.36458	0.34772	0.33054	0.3000	3.3333
0.800000	0.79002	0.77986	0.76902	0.75752	0.74537	0.73257	0.71915	0.2000	5.0000
0.900000	1.33294	1.33640	1.33889	1.34039	1.34092	1.34047	1.33904	0.1000	10.000
0.950000	1.81864	1.83916	1.85856	1.87683	1.89395	1.90992	1.92472	0.0500	20.000
0.960000	1.96660	1.99311	2.01848	2.04269	2.06573	2.08758	2.10823	0.0400	25.000
0.975000	2.26790	2.30764	2.34623	2.38364	2.41984	2.45482	2.48855	0.0250	40.000
0.980000	2.40670	2.45298	2.49811	2.54206	2.58480	2.62631	2.66657	0.0200	50.000
0.990000	2.82359	2.89101	2.95735	3.02256	3.08660	3.14944	3.21103	0.0100	100.00
0.995000	3.22281	3.31243	3.40109	3.48874	3.57530	3.66073	3.74497	0.0050	200.00
0.998000	3.72957	3.84981	3.96932	4.08802	4.20582	4.32263	4.43839	0.0020	500.00
0.999000	4.10022	4.24439	4.38807	4.53112	4.67344	4.81492	4.95549	0.0010	1000.0
0.999500	4.46189	4.63057	4.79899	4.96701	5.13449	5.30130	5.46735	0.0005	2000.0
0.999900	5.27389	5.50124	5.72899	5.95691	6.18480	6.41249	6.63980	0.0001	10000.

Figura 2.5

**Comprobación del programa NEWTON mediante  
Ejemplo 11.5, página 361, referencia [C7]**

INTERPOLACION MEDIANTE POLINOMIOS DE NEWTON  
DESCRIPCION DE LOS DATOS: EJEMPLO 11.5. PAG.361

No.	DATO (x)	FUNCION [f(x)]
1	1.000000	0.000000
2	4.000000	1.386294
3	6.000000	1.791760
4	5.000000	1.609438
5	3.000000	1.098612
6	1.500000	0.405465
7	2.500000	0.916291
8	3.500000	1.252763

VALOR PARA EL CUAL SE INTERPOLA: 2.000000

INTERPOLACION DE ORDEN: 1  
VALOR INTERPOLADO = 0.462098  
ERROR DE TAL INTERPOLACION: 0.1037

INTERPOLACION DE ORDEN: 2  
VALOR INTERPOLADO = 0.565844  
ERROR DE TAL INTERPOLACION: 0.0629

INTERPOLACION DE ORDEN: 3  
VALOR INTERPOLADO = 0.628769  
ERROR DE TAL INTERPOLACION: 0.0470

INTERPOLACION DE ORDEN: 4  
VALOR INTERPOLADO = 0.675722  
ERROR DE TAL INTERPOLACION: 0.0218

INTERPOLACION DE ORDEN: 5  
VALOR INTERPOLADO = 0.697514  
ERROR DE TAL INTERPOLACION: -0.0036

INTERPOLACION DE ORDEN: 6  
VALOR INTERPOLADO = 0.693898  
ERROR DE TAL INTERPOLACION: -0.0005

INTERPOLACION DE ORDEN: 7  
VALOR INTERPOLADO = 0.693439

Figura 2.6

## Primeras dos interpolaciones de la aplicación práctica

INTERPOLACION MEDIANTE POLINOMIOS DE NEWTON

DESCRIPCION DE LOS DATOS: K de Pearson Tipo III para  $Cs=G1=0.0$ 

No.	DATO (x)	FUNCION [f(x)]
1	0.200000	-0.841620
2	0.300000	-0.524400
3	0.100000	-1.281550
4	0.400000	-0.253350

VALOR PARA EL CUAL SE INTERPOLA: 0.250000

INTERPOLACION DE ORDEN: 1  
 VALOR INTERPOLADO = -0.68301  
 ERROR DE TAL INTERPOLACION: 0.0153

INTERPOLACION DE ORDEN: 2  
 VALOR INTERPOLADO = -0.66767  
 ERROR DE TAL INTERPOLACION: -0.0048

INTERPOLACION DE ORDEN: 3  
 VALOR INTERPOLADO = -0.67246

INTERPOLACION MEDIANTE POLINOMIOS DE NEWTON

DESCRIPCION DE LOS DATOS: K de Pearson Tipo III para  $Cs=G1=0.1$ 

No.	DATO (x)	FUNCION [f(x)]
1	0.200000	-0.846110
2	0.300000	-0.536240
3	0.100000	-1.270370
4	0.400000	-0.268820

VALOR PARA EL CUAL SE INTERPOLA: 0.250000

INTERPOLACION DE ORDEN: 1  
 VALOR INTERPOLADO = -0.69118  
 ERROR DE TAL INTERPOLACION: 0.0143

INTERPOLACION DE ORDEN: 2  
 VALOR INTERPOLADO = -0.67688  
 ERROR DE TAL INTERPOLACION: -0.0045

INTERPOLACION DE ORDEN: 3  
 VALOR INTERPOLADO = -0.68137

## PCN2: NEWTON

```

1000 REM PROGRAMA "NEWTON2" (ajusta polinomios de NEWTON de n-esimo orden 2)
1010 REM ESTE PROGRAMA ES UNA ADAPTACION DEL PRESENTADO POR S. C. CHAPRA
1020 REM Y R. P. CANALE EN LA PAGINA 360 DEL LIBRO METODOS NUMERICOS PARA
1030 REM INGENIEROS. PRIMERA EDICION. 1988. EL ERROR QUE EVALUA ES LA
1040 REM DIFERENCIA ENTRE LA INTERPOLACION DE ORDEN n+1 Y LA n. MARZO,2001
1050 REM SE INTRODUCEN DATOS POR PANTALLA Y RESULTADOS EN I M P R E S O S
1060 CLS:PRINT"INTERPOLACION MEDIANTE POLINOMIO DE NEWTON"
1070 PRINT:INPUT"DESCRIPCION DE LOS DATOS: ";DD$
1080 PRINT:INPUT"No.DE PAREJAS DE DATOS =";N
1090 DIM X(N),FX(N,N)
1100 FOR I=1 TO N
1110 INPUT"SE INTRODUCE X Y LA FUNCION:";X(I),FX(I,1)
1120 NEXT I
1130 REM INICIAN CALCULOS DE DIFERENCIAS DIVIDIDAS
1140 FOR J=1 TO N-1:K=J+1
1150 FOR I=1 TO N-J
1160 FX(I,K)=(FX(I+1,J)-FX(I,J))/(X(I+J)-X(I))
1170 NEXT I,J
1180 REM SE INTRODUCE EL VALOR PARA EL CUAL SE REALIZA LA INTERPOLACION
1190 PRINT:INPUT"VALOR PARA EL CUAL SE INTERPOLA:";X
1200 REM INICIA IMPRESION DE DATOS Y RESULTADOS
1210 LPRINT"INTERPOLACION MEDIANTE POLINOMIOS DE NEWTON":LPRINT
1220 LPRINT"DESCRIPCION DE LOS DATOS: ";DD$:LPRINT
1230 LPRINT" No. DATO (x) FUNCION [f(x)]"
1240 FOR I=1 TO N:LPRINT USING"###";I:LPRINT USING"#####.#####";X(I):
1250 LPRINT USING"#####.#####";FX(I,1):NEXT I:LPRINT
1252 LPRINT"VALOR PARA EL CUAL SE INTERPOLA:";:LPRINT USING"#####.#####";X
1260 FA=1:Y=0
1270 FOR J=1 TO N
1280 Y=Y+FX(1,J)*FA
1290 IF J=1 THEN 1330
1300 LPRINT:LPRINT"INTERPOLACION DE ORDEN: ";J-1
1310 LPRINT"VALOR INTERPOLADO =";
1320 LPRINT USING"#####.#####";Y
1330 FA=FA*(X-X(J))
1340 IF J>=N THEN 1400
1350 EA=FA*FX(1,J+1)
1360 IF J=1 THEN 1390
1370 LPRINT"ERROR DE TAL INTERPOLACION: ";
1380 LPRINT USING"#####.#####";EA
1390 NEXT J
1400 END

```

# Capítulo 3:

## Solución de Ecuaciones No Lineales

### Resumen

Cuando se estudia una parte del mundo real a través de un sistema físico, es común que se obtenga una ecuación no lineal cuya solución analítica es difícil o imposible de obtener. Tales ecuaciones se clasifican como algebraicas o trascendentales y su solución o raíz buscada se puede estimar por medio de métodos numéricos como el de bisección, falsa posición, Newton-Raphson y de la secante. Estos métodos son descritos con detalle e ilustrados mediante ejemplos numéricos simples. A continuación se presentan dos aplicaciones prácticas, en la primera se utiliza el procedimiento de bisección para estimar el valor del parámetro de ubicación de la distribución de probabilidades Log-Pearson tipo III (LP3), cuando se emplea el método de ajuste de máxima verosimilitud; en la segunda, por medio del criterio de Newton-Raphson se estima el parámetro de escala de la LP3, cuando se aplica como método de ajuste el de los promedios diversos. En seguida, ambos procedimientos se desarrollan numéricamente con base en datos reales de crecimientos máximas anuales y se comentan sus resultados. Finalmente, se cita otra aplicación práctica del método de bisección, ahora para resolver un algoritmo de infiltración que define la lluvia en exceso de una tormenta.

### 3.1 Generalidades

En el diseño en ingeniería se utilizan un conjunto de principios fundamentales (balances o conservación del calor, masa, fuerza y energía, así como las leyes del movimiento y de Kirchhoff), de cuya aplicación a un sistema en particular se deducen ecuaciones matemáticas o modelos predictivos de ciertas variables dependientes (las que interesan), en función de variables independientes (datos) y de parámetros o características constantes del sistema. En general, las variables dependientes ( $y$ ) reflejan el estado o funcionamiento del sistema, las variables independientes ( $x$ ) son comúnmente dimensiones como tiempo y espacio, por medio de las cuales el comportamiento del sistema es investigado y los parámetros representan o caracterizan propiedades o composición del sistema <sup>(C7)</sup>.

La solución a tal problema está a través de los métodos numéricos, dando a la ecuación la forma  $f(x) = 0$ , de manera que el valor de  $x$  que hace que se cumpla, es la raíz buscada. Tales raíces pueden ser reales o complejas, en este curso únicamente se presentan procedimientos para obtener valores reales, éstos serán: método de bisección, de la falsa posición, de Newton-Raphson y de la secante.

Muchas de estas ecuaciones o modelos de una sola variable y de uno o varios paráme-

tros, utilizados en el diseño ingenieril son ecuaciones de tipo algebraico o trascendental<sup>[C7]</sup>. Una ecuación  $y=f(x)$  es *algebraica* si se puede expresar de la manera siguiente:

$$f_n y^n + f_{n-1} y^{n-1} + \dots + f_1 y + f_0 = 0$$

donde las  $f_i$  son polinomios de  $i$ -ésimo orden en  $x$ . Los polinomios son un caso simple de funciones algebraicas representadas como:

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

donde las  $a$  son constantes, por ejemplo:

$$f(x) = 5 + 8.49 x + 10.25 x^2 - 3.27 x^3$$

$$f(x) = 3 x^2 - x^4 + 10.2 x^7$$

Una función es *trascendental* cuando no es algebraica, debido a que incluye principalmente logaritmos, exponenciales y/o funciones trigonométricas, por ejemplo:

$$f(x) = e^{-5x} - 3x + \tan x$$

$$f(x) = \ln x^3 - 78$$

$$f(x) = x^7 - \exp(x - \sin x^3) + \log(25 x^2)$$

$$f(x) = -n \cdot \Psi(\kappa) + \sum_{i=1}^n \ln(y_i - x) - n \ln(\alpha)$$

El procedimiento más simple en la búsqueda de las raíces de una ecuación [ $f(x) = 0$ ] es lo que se podría llamar el *método gráfico*, éste consiste en evaluar la función para muchos valores de  $x$  y dibujar los resultados. El punto  $x_1$  donde la curva o gráfica de la función corta al eje de las abscisas es la raíz o solución buscada.

El intervalo de valores en los que se calcula y dibuja la función estarán comúnmente definidos de acuerdo a los aspectos físicos del problema real o sistema que se analiza y lógicamente, la solución encontrada solo será aproximada y dependerá de la precisión que aporte el dibujo realizado, pero su importancia es bastante relevante, tanto para comprobar que realmente existe una raíz, o varias, así como para disponer de los valores necesarios para iniciar alguno de los métodos que se describen posteriormente, y sobre todo para tener una manera cuantitativa de verificar el resultado.

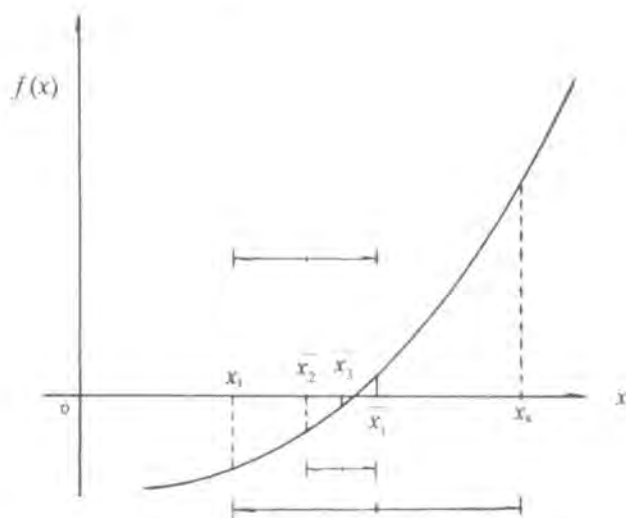
En la aplicación del método gráfico resulta de gran ayuda el conocimiento matemático que se tenga de las funciones en general, incluyendo las ecuaciones empíricas, tanto de su comportamiento *per se*, como de sus puntos especiales y otras particularidades.

### 3.2 Método de Bisección

Conocido también como método de Bolzano, de corte binario o de partición en dos intervalos iguales, es un método que usa un intervalo para buscar la raíz, en tal lapso la función cambia de signo<sup>[C7,H1]</sup>. Su planteamiento puede ser explicado fácilmente en forma gráfica, ya sea que se trate de funciones monotónicamente crecientes o decrecientes, como se ilustra en la Figura 3.1 siguiente.

Figura 3.1

## Descripción gráfica del método de Bisección



El requisito básico para que sea aplicable el método es que la función sea continua entre los límites inferior ( $x_1$ ) y superior ( $x_5$ ), y que únicamente tenga una sola raíz. Lo anterior se puede verificar dibujando la función, si se intuye o sospecha un comportamiento raro entre los límites adoptados, lo anterior a través del entendimiento físico del problema donde se originó la ecuación o modelo matemático bajo estudio.

Para el inicio del método se requiere que el producto  $f(x_1) \cdot f(x_5)$  sea menor que cero, esto es que un valor de la función sea positivo y el otro negativo, según como sea dicha función (creciente o decreciente). En seguida se calcula el punto medio del intervalo:

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1 + x_5}{2}$$

y se evalúa para éste la función  $f(\bar{x})$ , según su signo con el que coincida sustituye al límite inferior o al superior, para acortar el intervalo de búsqueda de la raíz. Así por ejemplo, con respecto a la Figura 3.1 los siguientes valores medios serán:

$$\bar{x}_2 = \frac{x_1 + \bar{x}_1}{2}$$

$$\bar{x}_3 = \frac{\bar{x}_2 + \bar{x}_1}{2}$$

El método termina cuando se alcanza la precisión deseada:

$$|x_n - x_s| \leq \text{TOL} \quad (3.1)$$

la tolerancia común es 0.0001, donde  $x_n$  y  $x_s$  son las raíces de la nueva iteración o tanteo y de la anterior. Otra manera de concluir las iteraciones (ITE) es cuando la función  $f(\bar{x})$  es ya muy cercana a cero.

La ventaja fundamental del método es que siempre converge a la solución, si se cumplen sus requisitos, su desventaja radica en que es un proceso lento; se recomienda cuando no se conoce ningún valor cercano a la raíz.

**Ejemplo 3.1.** Encontrar con el método de bisección la raíz de la ecuación  $y = e^{-x} - x$ . Esta ecuación <sup>(c7)</sup> es una función exponencial, con exponente negativo, por lo tanto decrece

en forma continua desde un cierto valor. Como puntos especiales se pueden estudiar  $x = 0$  y  $x = 1.0$ ; para tales valores se obtiene  $f(x) = 1.0000$  y  $-0.6321$ , indicando que en tal intervalo existe una raíz. El método gráfico <sup>(C7)</sup> permite una aproximación a  $x_r \cong 0.57$ . Los cálculos del método de bisección son los siguientes:

ITE	$x_i$	$f(x_i)$	$x_s$	$f(x_s)$	$\bar{x}$	$f(\bar{x})$
1	0.0000	1.0000	1.0000	-0.6321	0.50000	0.10653
2	0.5000	0.1065	1.0000	-0.6321	0.75000	-0.27763
3	0.5000	0.1065	0.7500	-0.2776	0.62500	-0.08974
4	0.5000	0.1065	0.6250	-0.0897	0.56250	0.00728
5	0.5625	0.0073	0.6250	-0.0897	0.59375	-0.04150
6	0.5625	0.0073	0.5938	-0.0415	0.57813	-0.01718

Llevando los cálculos hasta la iteración 12 se obtiene  $x_i = 0.5671387$

□

**Ejemplo 3.2.** Encontrar mediante el método de bisección una aproximación a la raíz de la ecuación:  $y = \cos \pi x - 5x^3 - 2 \cdot \text{sen } x^2 + 2$ , que se encuentra en el intervalo  $[0,1]$ , realizando sólo 8 iteraciones.

ITE	$x_i$	$f(x_i)$	$x_s$	$f(x_s)$	$\bar{x}$	$f(\bar{x})$
1	0.0000	3.0000	1.0000	-5.6829	0.5000	0.8802
2	0.5000	0.8802	1.0000	-5.6829	0.7500	-1.8831
3	0.5000	0.8802	0.7500	-1.8831	0.6250	-0.3649
4	0.5000	0.8802	0.6250	-0.3649	0.5625	0.2927
5	0.5625	0.2927	0.6250	-0.3649	0.5938	-0.0275
6	0.5625	0.2927	0.5938	-0.0275	0.5781	0.1348
7	0.5781	0.1348	0.5938	-0.0275	0.5859	0.0542
8	0.5859	0.0542	0.5938	-0.0275	0.5898	0.0135

□

El programa BISEC cuyo listado se presenta al final del capítulo, aplica el método de bisección, con un límite de 50 iteraciones (línea 1150) y tolerancia adoptada (línea 1060) para la cercanía de la función a cero. La función se introduce o accesa mediante una definición de función (ver Apéndice A) en la línea 1080.

### 3.3 Método de la Falsa Posición

El método de bisección tiene el serio inconveniente de dividir el intervalo  $x_i$  a  $x_s$  en partes iguales, por lo tanto no toma en cuenta la magnitud de  $f(x_i)$  ni de  $f(x_s)$ , y si por ejemplo,  $f(x_i)$  es mucho más pequeña que  $f(x_s)$ , es lógico que la raíz esté más cerca de  $x_i$  que de  $x_s$ . Un método alternativo se basa en unir por una recta los puntos de  $f(x_i)$  y de  $f(x_s)$ , la intersección de esta recta con el eje  $x$  proporciona una mejor estimación de la raíz, aunque con una "falsa posición" de ahí uno de sus nombres, de la regla falsa (del latín *regula falsi*), o de interpolación lineal <sup>1A2,C7)</sup>.

De acuerdo a los triángulos semejantes opuestos por el vértice de la Figura 3.2, se tiene:

$$\frac{-f(x_i)}{x_i - x_r} = \frac{f(x_s)}{x_s - x_r} \quad \text{ó} \quad \frac{f(x_i)}{x_i - x_r} = \frac{f(x_s)}{x_s - x_r}$$

de donde se obtiene:

$$x_r = \frac{x_s \cdot f(x_i) - x_i \cdot f(x_s)}{f(x_i) - f(x_s)} \quad (3.2)$$



en cambio para los triángulos semejantes mayores se tiene:

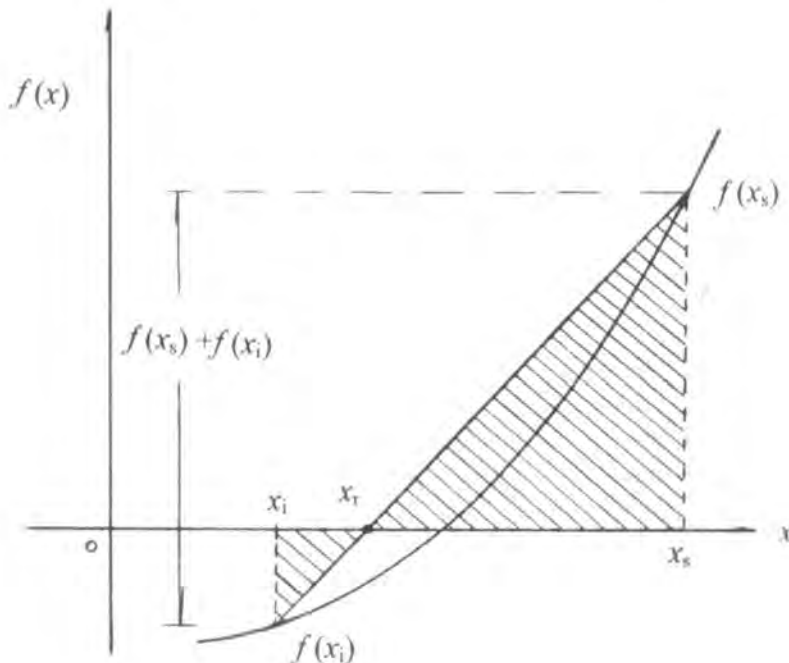
$$\frac{f(x_s)}{x_s - x_r} = \frac{f(x_s) - f(x_i)}{x_s - x_i}$$

por lo tanto:

$$x_s = x_r - \frac{f(x_s) \cdot (x_s - x_i)}{f(x_s) - f(x_i)} \quad (3.3)$$

Figura 3.2

### Descripción gráfica del método de Falsa Posición



El método funciona así: el valor calculado con la ecuación 3.2 ó 3.3 reemplaza a uno de los dos valores  $x_i$  o a  $x_s$  que produzca un valor de la función que tenga el mismo signo que tiene  $f(x_i)$ , con lo anterior, los nuevos valores de  $x_i$  y  $x_s$  siempre contienen a la raíz. El proceso se repite hasta que la aproximación de la raíz sea adecuada, es decir se cumple con la tolerancia adoptada (ecuación 3.1). En determinados casos el método de falsa posición funciona deficientemente.

Los métodos de bisección y de falsa posición se conocen como **convergentes** ya que su aplicación repetida siempre genera valores más cercanos a la raíz. Los siguientes dos métodos (Newton-Raphson y de la Secante) se conocen como **métodos abiertos**; se basan en fórmulas que requieren un solo valor de  $x$ , o un par de ellos pero que no necesariamente encierran a la raíz, por ello algunas veces divergen o sea que se alejan de la raíz, sin embargo cuando convergen lo hacen muy rápidamente.

**Ejemplo 3.3.** Resolver el ejemplo 3.1 mediante el método de falsa posición. Aplicando la ecuación 3.2 y el procedimiento del método, se tiene:

ITE	$x_i$	$f(x_i)$	$x_s$	$f(x_s)$	$x_r$	$f(x_r)$
1	0.0000	1.0000	1.00000	-0.63212	0.61270	-0.07081
2	0.0000	1.0000	0.61270	-0.07081	0.57218	-0.00789
3	0.0000	1.0000	0.57218	-0.00789	0.56770	-0.00087
4	0.0000	1.0000	0.56770	-0.00087	0.56721	-0.00010
5	0.0000	1.0000	0.56721	-0.00010	0.56715	-0.00001
6	0.0000	1.0000	0.56715	-0.00001	0.56714	0.00001

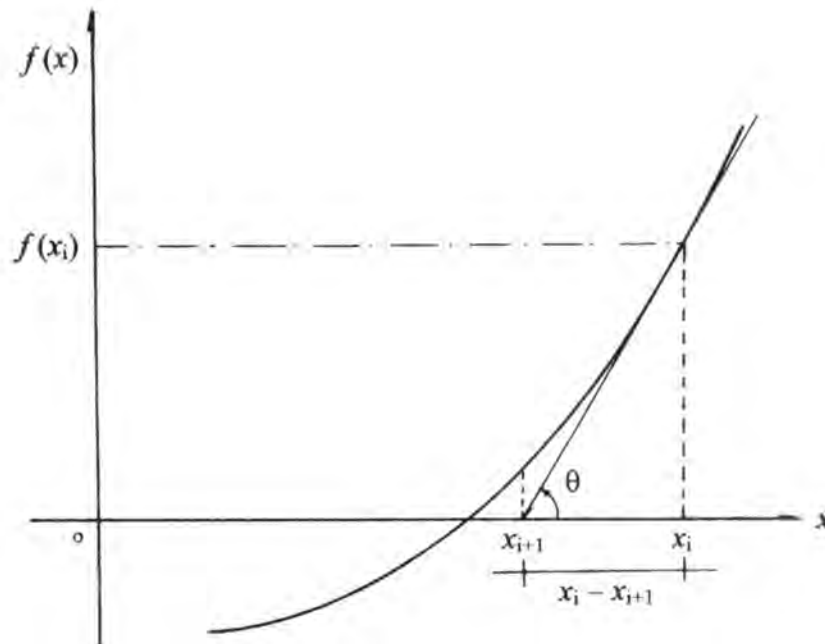
□

### 3.4 Método de Newton-Raphson

Este método también conocido como de las tangentes, se puede deducir gráficamente y a través de la serie de Taylor, su principio de funcionamiento es el siguiente: desde un punto inicial  $x_i$  cercano a la raíz, se traza la pendiente a la función y por el punto donde dicha tangente corta al eje  $x$  se obtiene una mejor aproximación a la raíz, el proceso se repite hasta obtener la aproximación deseada <sup>[A2,H1]</sup>.

Figura 3.3

#### Descripción gráfica del método de Newton-Raphson



Por lo tanto de acuerdo a la figura 3.3 del método se tiene que la primera derivada en  $x_i$  es:

$$\tan \theta = f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

de donde:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (3.4)$$

**Ejemplo 3.4.** Resolver el ejemplo 3.1 mediante el método de Newton-Raphson. Para este problema y con base en las fórmulas de las derivadas se tiene que:

$$f'(x) = -e^x - 1 \quad (3.5)$$

entonces de acuerdo a la ecuación 3.4 y al procedimiento ilustrado en la figura 3.3 se obtiene:

ITE	$x_i$	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$x_{i+1}$
1	0.0000000	1.0000000	-2.0000000	0.5000000
2	0.5000000	0.1065307	-1.6065307	0.5663110
3	0.5663110	0.0013045	-1.5676155	0.5671432
4	0.5671432	0.0000002	-1.5671434	0.5671433

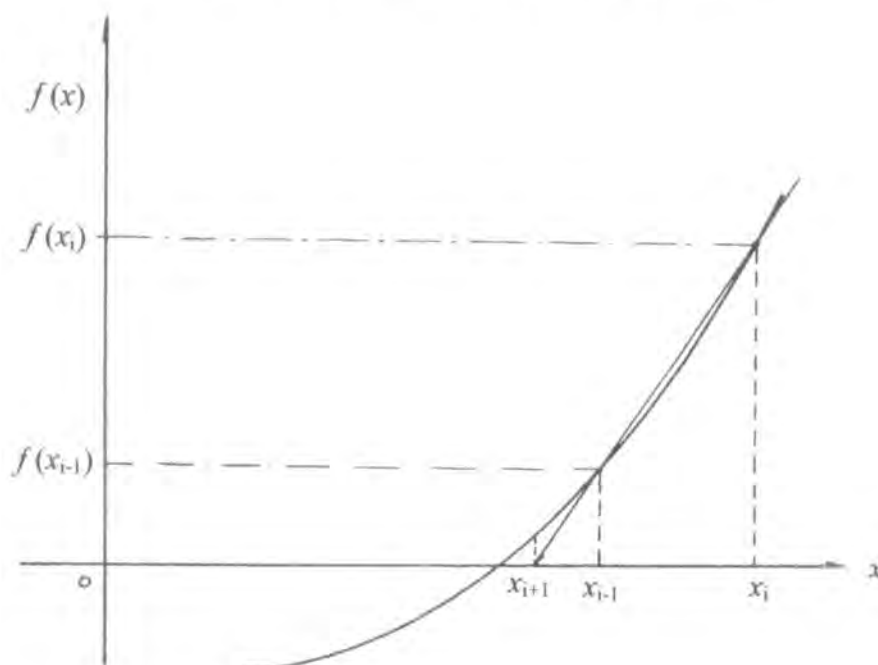
□

### 3.5 Método de la Secante.

El mayor inconveniente para la aplicación del método de Newton-Raphson es la evaluación de la derivada, pues existen muchas funciones para las cuales resulta extremadamente difícil obtener su expresión, no así en polinomios y otras funciones elementales. Entonces, cuando la ecuación de la derivada es difícil o imposible de obtener, se puede aproximar mediante una diferencia dividida <sup>[A2.H1]</sup>, como se indica en la figura 3.4 siguiente, entonces se tiene que:

Figura 3.4

#### Descripción gráfica del método de la Secante



$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

por lo cual ecuación 3.4 se transforma en:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i) \cdot (x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} \quad (3.6)$$

**Ejemplo 3.4.** Resolver el ejemplo 3.1 mediante el método de la secante. Aplicando la ecuación 3.6 y el proceso del método de Newton-Raphson se obtiene:

ITE	$x_{i-1}$	$f(x_{i-1})$	$x_i$	$f(x_i)$	$x_{i+1}$	$f(x_{i+1})$
1	0.00000	1.00000	1.00000	-0.63212	0.61270	-0.07081
2	1.00000	-0.63212	0.61270	-0.07081	0.56384	0.00518
3	0.61270	-0.07081	0.56384	0.00518	0.56717	-0.00004
4	0.56384	0.00518	0.56717	-0.00004	0.56714	$5.157 \cdot 10^{-6}$

□

### 3.6 Aplicación Práctica 1

#### Métodos del análisis de frecuencia de crecientes

Uno de los problemas fundamentales de la hidrología superficial consiste en la estimación de crecientes de diseño a partir de un registro hidrométrico generalmente corto. Cuando las magnitudes observadas, crecientes anuales en  $m^3/s$ , son dibujadas en un papel de probabilidad describen un cierto comportamiento y entonces el problema es cómo utilizar esta información para estimar más allá de los datos disponibles el evento de diseño.

Lo anterior constituye el objetivo del análisis de frecuencia de crecientes (AFC), dentro del cual se han propuesto diversas funciones de densidad de probabilidades (*fdp*), como es la Log-Pearson tipo III (LP3) cuyas primeras aplicaciones datan de comienzos de los años sesentas, cuando se sugirió ajustar una función Pearson tipo III <sup>[K1, K3]</sup> a los logaritmos decimales de las crecientes anuales. Posteriormente, una comparación entre la distribución LP3 y varios modelos probabilísticos que estaban en uso, fue llevada a cabo y condujo a la recomendación en 1967 del empleo sistemático <sup>[W1]</sup> de tal función para la modelación probabilística de crecientes anuales en U.S.A.

En el AFC existen dos fuentes de error, la primera se debe a que no se conoce cual de las diferentes distribuciones de probabilidad es la verdadera. Una vez que una función de probabilidades ha sido seleccionada, la segunda fuente de error aparece y se debe a la estimación de sus parámetros de ajuste a partir de la muestra o registro disponible. Para minimizar tal error la técnica de ajuste debe ser tan eficiente como sea posible. Existen básicamente cuatro procedimientos: 1) el gráfico; 2) el método de momentos; 3) el de máxima verosimilitud y 4) el de mínimos cuadrados.

En el segundo método se igualan los momentos de orden  $r$ , respecto al origen o centrales de la población con los muestrales y de tales ecuaciones se despejan los parámetros de ajuste. Por otra parte, el principio de máxima verosimilitud establece que para una distribución con *fdp* definida como  $f(x; \alpha, \beta, \gamma, \dots)$ , donde  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  son los parámetros de ajuste por estimar, la probabilidad de obtener un valor dado de  $x, x_i$  es proporcional a  $p(x_i; \alpha, \beta, \gamma, \dots)$  y la probabilidad conjunta ( $L$ ) de obtener una muestra de  $n$  eventos  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  es proporcional al producto:

$$L = \prod_{i=1}^n p(x_i; \alpha, \beta, \gamma, \dots) \quad (3.7)$$

Entonces, maximizando  $L$  se obtienen los mejores parámetros de ajuste, lo cual se realiza diferenciando a  $L$  con respecto a cada parámetro e igualando a cero. Frecuentemente se emplea el logaritmo natural de  $L$  para simplificar los cálculos.

### Resumen de aspectos teóricos de la distribución LP3

Si  $y_i = \ln x_i$  es una variable con distribución Pearson Tipo III con parámetros de ubicación ( $u$ ), escala ( $\alpha$ ) y forma ( $\kappa$ ), entonces  $x_i = \exp(y_i)$  sigue una distribución LP3. La función de densidad de probabilidad ( $f_{dp}$ ) de la LP3 está dada por <sup>[B3, B4]</sup>:

$$f_{dp_{LP}}(x_i; u, \alpha, \kappa) = \frac{|\alpha| e^{\alpha u}}{\Gamma(\kappa) x_i^{1+\alpha}} (\alpha[\ln(x_i) - u])^{\kappa-1} \quad (3.8)$$

en la cual,  $\Gamma(\cdot)$  es la función gamma. Como en el caso de la distribución Pearson, los parámetros  $\kappa$  y  $u$  de la función LP3 son  $\kappa > 0$  y  $-\infty < u < +\infty$ . El dominio de variación de la variable LP3 depende del parámetro de escala, de la manera siguiente:

Si  $\alpha > 0$  entonces  $f_{dp_{LP}}$  tiene sesgo positivo con:  $\exp(u) \leq x_i < +\infty$

Si  $\alpha < 0$  entonces  $f_{dp_{LP}} = 0$  en  $x = 0$ , y su sesgo depende de los valores de  $\alpha$  y  $\kappa$  además:  $0 \leq x_i \leq \exp(u) = x_{\max}$

Otros conceptos teóricos relativos a la distribución Pearson tipo III, se pueden consultar en [K1, K3, C1]. Las formas diferentes que adopta la  $f_{dp_{LP}}$  han sido expuestas analítica y gráficamente por [B2] y [B4].

### Método clásico de momentos

Cuando la distribución LP3 fue prescrita como el modelo probabilístico base para los AFC, en las agencias gubernamentales de U.S.A., el método propuesto de estimación de sus parámetros de ajuste, fue el de momentos en el dominio logarítmico <sup>[W1]</sup>. En este método se obtienen los logaritmos naturales de los datos ( $y_i$ ) y se calculan media la logarítmica ( $Y_m$ ), la desviación logarítmica ( $S_y$ ) y el coeficiente de asimetría ( $g$ ), por medio de las expresiones siguientes <sup>[C4, Y1]</sup>:

$$Y_m = \frac{\sum_{i=1}^n \ln x_i}{n} \quad (3.9)$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\ln x_i - Y_m)^2}{(n-1)}} \quad (3.10)$$

$$g = \frac{n \sum_{i=1}^n (\ln x_i - Y_m)^3}{(n-1)(n-2) S_y^3} \quad (3.11)$$

siendo  $n$  el número de datos  $x_i$ .

Como resultado de un análisis de contraste de diferentes procedimientos de ajuste de la distribución LP3 a través del método de momentos, se ha encontrado que es conveniente para mejorarlo, corregir el sesgo del coeficiente  $g$  por medio de los factores siguientes <sup>[B5]</sup>:

$$FC1 = \left(1 + \frac{8.5}{n}\right) \quad (3.12)$$

$$FC2 = \frac{\sqrt{n(n-1)}}{(n-2)} \quad (3.13)$$

entonces ahora se tiene que:

$$g_c = FC1 \cdot FC2 \cdot g \quad (3.14)$$

En este método, denominado indirecto de momentos, se igualan a las expresiones poblacionales correspondientes con los parámetros estadísticos ( $Y_m$ ,  $S_y$  y  $g_c$ ) y se despejan los parámetros de ajuste, resultando:

$$u = Y_m - 2 \frac{S_y}{g_c} \quad (3.15)$$

$$\alpha = \frac{S_y \cdot g_c}{2} \quad (3.16)$$

$$\kappa = \left( \frac{2}{g_c} \right)^2 \quad (3.17)$$

Para la estimación de los valores asociados a un determinado periodo de retorno ( $Y_{Tr}$ ), cuyo recíproco es la probabilidad de excedencia, o de las crecientes de diseño ( $X_{Tr}$ ), se emplea la llamada fórmula general del AFC <sup>[Ca]</sup> en el dominio logarítmico, ésta es:

$$Y_{Tr} = Y_m + K \cdot S_y \quad (3.18)$$

por lo cual, finalmente:

$$X_{Tr} = \exp(Y_{Tr}) \quad (3.19)$$

en donde,  $K$  es el llamado Factor de Frecuencia, función de la probabilidad y del modelo probabilístico utilizado, por ello es una variable estandarizada Pearson tipo III; su expresión aproximada es la siguiente <sup>[K1]</sup>:

$$K = t + (t^2 - 1) G + (t^3 - 6t) G^2 / 3 - (t^2 - 1) G^3 + t G^4 + G^5 / 3 \quad (3.20)$$

Siendo  $G = g_c / 6$  y  $t$  la desviación normal estándar, la cual es función de la probabilidad de excedencia ( $p$ ) utilizada o de diseño, se estima con la aproximación siguiente <sup>[A1]</sup>:

$$t = z - \frac{2.307357 + 0.27061 z}{1 + 0.99229 z + 0.04481 z^2} \quad (3.21)$$

$$z = \sqrt{\ln(1/p^2)} \quad (3.22)$$

cuando  $p > 0.50$  se utiliza  $p = 1 - p$  en la expresión 3.22 y el resultado de la ecuación 3.21 se le cambia el signo.

#### Método de máxima verosimilitud

Sustituyendo la ecuación 3.8 en la 3.7 se obtiene la función logarítmica de verosimilitud, ésta es <sup>[B4]</sup>:

$$\begin{aligned} \ln L = n \ln(\alpha) - n \ln[\Gamma(\kappa)] + \sum \alpha \cdot u - (1 + \alpha) \sum \ln x_i \\ + (\kappa - 1) \sum \ln [\alpha (\ln x_i - u)] \end{aligned} \quad (3.23)$$

las sumatorias abarcan de 1 a  $n$ , o tamaño de la muestra. Las estimaciones de  $u$ ,  $\alpha$  y  $\kappa$  se obtienen resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\delta \ln L / \delta \alpha = (n \cdot \kappa / \alpha) - \sum (\ln x_i - u) = 0 \quad (3.24)$$

$$\delta \ln L / \delta \kappa = n \cdot \Psi(\kappa) + \sum \ln[\alpha(\ln x_i - u)] = 0 \quad (3.25)$$

$$\delta \ln L / \delta u = n \cdot \alpha - (\kappa - 1) \sum 1/(\ln x_i - u) = 0 \quad (3.26)$$

en donde  $\Psi(\kappa)$  es la función digamma; para su estimación se utilizó la fórmula o aproximación siguiente <sup>(A1)</sup>:

$$\Psi(\kappa) = \ln \kappa - \frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{2\kappa^2} + \frac{1}{120\kappa^4} - \frac{1}{252\kappa^6} + \dots \quad (3.27)$$

A partir de las ecuaciones 3.24 a 3.26 se obtiene el sistema:

$$\alpha = (1/n) \sum (y_i - u) - n \left[ \sum 1/(y_i - u) \right]^{-1} \quad (3.28)$$

$$\kappa = \left\{ 1 - n^2 \left[ \sum (y_i - u) \sum 1/(y_i - u) \right]^{-1} \right\}^{-1} \quad (3.29)$$

$$F(u) = -n \cdot \Psi(\kappa) + \sum \ln (y_i - u) - n \ln(\alpha) = 0 \quad (3.30)$$

todas las sumatorias anteriores abarcan de 1 a  $n$ . El sistema anterior se resuelve simultáneamente, proponiendo en la ecuación 3.30 un valor del parámetro de ubicación ( $u$ ) y aplicando un método numérico, en este caso se propuso utilizar el procedimiento de bisección, como se detalla posteriormente al describir someramente el programa de cómputo desarrollado. Con base en la siguiente ecuación se obtiene el coeficiente de oblicuidad ( $g$ ):

$$g = \left( \frac{\alpha}{|\alpha|} \right) \left( \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \right) \quad (3.31)$$

y a partir de las ecuaciones 3.15 y 3.16 el resto de parámetros estadísticos, dado que este método trabaja en el dominio logarítmico:

$$S_y = 2 \frac{\alpha}{g} \quad (3.16)$$

$$Y_m = u + 2 \frac{S_y}{g} \quad (3.15)$$

Posteriormente, para la estimación de los valores asociados a determinados periodos de retorno ( $X_{T_p}$ ), se emplean las ecuaciones 3.18 y 3.19, con sus auxiliares 3.20 a 3.22, empleando los parámetros estadísticos previamente calculados.

El programa de cómputo LP3MV en *Basic*, tiene la estructura general siguiente: lee y ordena los datos, a continuación calcula las cantidades estadísticas necesarias de las ecuaciones 3.28 a 3.30 para obtener los parámetros de ajuste y después los parámetros estadísticos (ecuaciones 3.31, 3.16 y 3.15); posteriormente, se calcula el error EEA y por último, 13 valores asociados de diversos periodos de retorno.

Para el cálculo de los parámetros de ajuste emplea el método numérico de bisección para resolver la ecuación 3.30, asignando un valor inicial del parámetro de ubicación ( $u_0$ ), con el cual se definen magnitudes superiores ( $u_1 = 3 u_0$ ) e inferiores ( $u_2 = u_0 / 10$ ) para tener una evaluación positiva y otra negativa de la función (ecuación 3.30) y poder iniciar el método numérico. El criterio de convergencia adoptado fue  $|F(u)| \leq 10^{-4}$ . Se pueden probar diversos valores  $u_0$  para buscar la convergencia rápida.

### Medida numérica de la bondad de ajuste

Para realizar un contraste numérico objetivo entre métodos de ajuste, así como entre modelos probabilísticos, es común utilizar el llamado error estándar de ajuste (EEA), entre los gastos máximos anuales observados ( $x_i$ ) y los calculados  $X_{Tr}$ , el cual ha sido definido como <sup>[K2]</sup>:

$$EEA = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - X_{Tr})^2}{(n - np)}} \quad (3.32)$$

$np$  es igual al número de parámetros de ajuste, es decir, tres. Los gastos  $X_{Tr}$  se calculan para la misma probabilidad de no excedencia  $F(x)$  asignada a los gastos  $x_i$ , estimada ésta con la fórmula de Weibull <sup>[B1]</sup>:

$$F(x) = 1 - 1/Tr = m / (n + 1) \quad (3.33)$$

$m$  es el número de orden de los gastos  $x_i$  en secuencia de menor a mayor, el cual varía lógicamente, de 1 a  $n$ .

### Método de los promedios diversos

Este es un método de momentos que utiliza el menor orden en éstos, con lo cual se reduce su sesgo y por lo tanto la variancia de las estimaciones; además, trabaja en el dominio real. El método de los promedios diversos (MPD) se basa en las medias aritmética ( $X_m$ ), armónica ( $H$ ) y logarítmica ( $Y_m$ ) de la muestra y su relación con las expresiones teóricas de la distribución LP3, que son <sup>[B3, B4]</sup>:

$$X_m = (1/n) \sum x_i = \exp(u) / (1 - 1/\alpha)^\kappa \quad (3.34)$$

$$1/H = (1/n) \sum 1/x_i = \exp(-u) / (1 + 1/\alpha)^\kappa \quad (3.35)$$

$$Y_m = (1/n) \sum \ln(x_i) = u + \kappa/\alpha \quad (3.36)$$

en donde las sumatorias abarcan de 1 a  $n$ , siendo  $n$  el número de datos de la muestra;  $u$ ,  $\alpha$  y  $\kappa$  son los parámetros de ajuste de ubicación, escala y forma, respectivamente. A partir de las ecuaciones anteriores se obtienen las expresiones de los parámetros de ajuste, éstas son:

$$f(\alpha) = \{[\ln(C) + 1/\alpha]/\ln(B)\} - \{[\ln(X_m) - Y_m] / [\ln(X_m) - \ln(H)]\} = 0 \quad (3.37)$$

$$\kappa = [\ln(H) - \ln(X_m)] / \ln(B) \quad (3.38)$$

$$u = Y_m - \frac{\kappa}{\alpha} \quad (3.39)$$

siendo  $C = (1 - 1/\alpha)$  y  $B = (1 - 1/\alpha^2)$ . La ecuación 3.37 se puede resolver mediante el método numérico de Newton-Raphson, el cual requiere la derivada de  $f(\alpha)$ , cuya expresión obtenida fue:

$$f'(\alpha) = [(\alpha - 2)/\alpha(1 - \alpha)] - \{[\ln(B) + 2/(\alpha^2 - 1)]/\alpha^2[\ln(B)]^2\} \quad (3.40)$$

una vez que ha sido estimada, se emplean las ecuaciones 3.38 y 3.39 para calcular  $\kappa$  y  $u$ . Para la estimación de los valores asociados a determinados periodos de retorno ( $X_{Tr}$ ), se emplean las ecuaciones 3.18 y 3.19, con sus auxiliares 3.20 a 3.22, empleando como parámetros estadísticos, a parte de  $Y_m$ , el  $g$  calculado con la ecuación 3.31 y <sup>[B3, B4]</sup>:



$$S_y = \sqrt{\frac{\kappa}{\alpha^2}} \quad (3.41)$$

En el programa LP3PD, después de calcular las medias, se accesa un valor inicial del parámetro de escala ( $\alpha_1$ ) y se observa en pantalla la evolución de éste. Debido a que el método numérico de Newton-Raphson en este caso converge lentamente, se detiene el programa y se prueba otro  $\alpha_1$ . El criterio de convergencia se adoptó para la función  $f(\alpha)$ , ecuación 3.37, cuando cumple con ser menor de  $10^{-5}$ .

### Ajuste de la distribución LP3

**Ejemplo 3.5.** La estación hidrométrica Tzararacua sobre Río Cupatitzio drena 1,320 km<sup>2</sup> y se localiza dentro del municipio de Uruapan, en el estado de Michoacán. Las mediciones comenzaron el 14 de marzo de 1950 y se encuentran publicadas hasta 1979 con el registro siguiente de 28 gastos máximos anuales (Q) en m<sup>3</sup>/s <sup>[C6]</sup>.

Año	Q	Año	Q	Año	Q	Año	Q
1951	83.6	1958	108.7	1966	49.2	1973	60.5
1952	75.3	1959	68.0	1967	48.6	1974	79.9
1953	83.2	1960	42.9	1968	42.8	1975	69.6
1954	68.5	1962	78.6	1969	44.6	1976	62.6
1955	123.9	1963	47.7	1970	59.3	1977	43.9
1956	73.6	1964	71.9	1971	67.2	1978	85.0
1957	101.2	1965	65.3	1972	53.8	1979	86.9

Para el registro anterior se presentan a continuación sus parámetros estadísticos insesgados calculados con base en las fórmulas estadísticas respectivas <sup>[C6, Y1]</sup> y las ecuaciones 3.9 a 3.11.

Media aritmética (m <sup>3</sup> /s)	69.5	Coficiente de curtosis (Ck)	3.855
Desviación estándar (m <sup>3</sup> /s)	20.4	Media logarítmica (Ym)	1.824703
Coficiente de variación	0.293	Desviación logarítmica (Sy)	0.124665
Coficiente de asimetría (Cs)	0.780	Cs de los log. naturales (g)	0.108264

A continuación se presentan los resultados de la aplicación de los métodos de ajuste (MA), de momentos (MO), máxima verosimilitud (MV) y promedios diversos (PD), según los procedimientos y programas de cómputo descritos. Los tanteos finales de los métodos de MV y PD se realizaron con  $u_1 = -0.10$  y  $\alpha_1 = 75.0$ , respectivamente.

MA:	Parámetros de ajuste:			EEA (m <sup>3</sup> /s)	Periodos de retorno en años					
	$u$	$\alpha$	$\kappa$		10	25	50	100	1,000	10,000
MO	-0.09486	0.01918	224.02	3.6	97	112	123	134	172	211
MV	-0.15500	0.01822	239.15	3.8	96	110	120	129	161	193
PD	-1.72807	74.9615	444.49	3.9	96	109	119	129	160	192

Para este caso particular los resultados son bastante consistentes, incluso en los grandes periodos de retorno (Tr) y además coinciden con los de otros criterios estadísticos, como son los métodos de Lebediev y Nash <sup>[C6]</sup>, los cuales son aplicados como procedimientos estándar por CFE <sup>[C6]</sup>, sus resultados son:

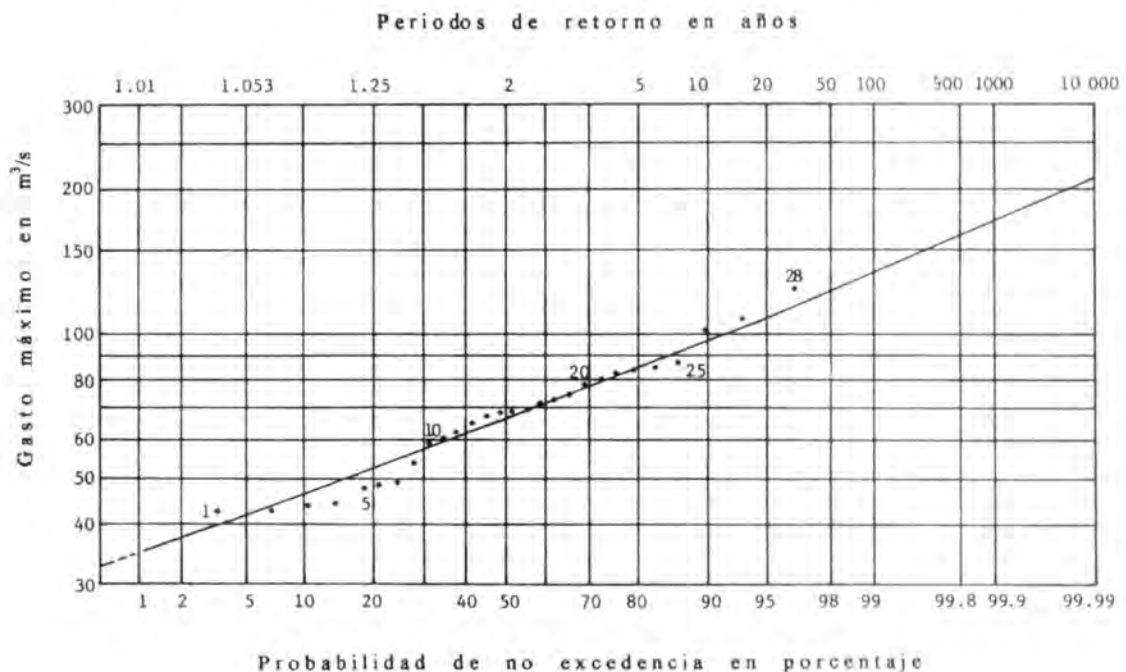
Método:	Tr = 100 años	Tr = 1,000 años	Tr = 10,000 años
Lebediev	135	168	197
Nash	142	184	225

La Figura 3.5 procede de un papel de probabilidad log-normal en el cual se han dibujado los 28 gastos máximos anuales, según sus probabilidades de no excedencia calculadas con base en la ecuación 3.33. El ajuste Log-Pearson tipo III corresponde al de momentos. Aunque la comparación entre modelos probabilísticos se acostumbra realizarla a través del error estándar de ajuste (ecuación 3.32), el contraste gráfico (Figura 3.5) es muy conveniente para fines de verificación.

□

Figura 3.5

Ajuste de la distribución Log-Pearson tipo III con base en el método de momentos, a los 28 datos de gastos máximos anuales en la estación hidrométrica Tzararacua en el Río Cupatitzio en el estado de Michoacán.



### 3.7 Aplicación Práctica 2

#### Tiempo de encharcamiento

La parte de la precipitación que da origen al escurrimiento se le conoce como lluvia o precipitación en exceso y la porción restante, o pérdidas, está integrada por la intercepción, el almacenamiento en depresiones, la evapotranspiración y la infiltración. Durante las fuertes tormentas, la magnitud más importante de las pérdidas es la infiltración, por ello, este proceso determina la cantidad y distribución en el tiempo y en el espacio del escurrimiento <sup>[M2]</sup>.

Cuando existe una lámina de agua sobre el suelo, la capacidad de infiltración  $f_c$  (ver aplicaciones prácticas del capítulo 1), está limitada sólo por las características del suelo y por el sellamiento o taponamiento de su superficie por los coloides transportados por el agua. Pero cuando se aplica una intensidad constante de lluvia  $P$  menor que  $f_c$ , ésta última es igual a  $P$  y conforme la infiltración ocurre, se va humedeciendo el suelo

y  $f_c$  va disminuyendo hasta que se hace igual a  $P$ . A partir de ese instante  $f_c$  es menor que  $P$  y comienza la lluvia en exceso. El tiempo transcurrido ( $t_e$ ) desde el inicio de la lluvia hasta que una lámina o película de agua comienza a formarse sobre el terreno se define como tiempo de encharcamiento <sup>[M2]</sup>.

### Algoritmo de infiltración de Morel-Seytoux

Durante la década de los años setenta se desarrollaron diversos algoritmos para estimar el  $t_e$ , la  $f_c$  y la lámina infiltrada total ( $F$ ). El algoritmo expuesto en las referencias [M1] y [C2] tiene una base teórica sólida y ha sido probado con éxito; depende de los dos principales parámetros hidráulicos del suelo:  $K_s$  y  $S_p$ , denominados infiltración final (cm/h) y factor de succión-almacenamiento (cm). Estos parámetros han sido relacionados <sup>[M3]</sup> con el número  $N$  de la curva de escurrimiento <sup>[C3]</sup> y por ello este algoritmo de infiltración es univariado, permitiendo su calibrado con datos reales de tormentas y sus respuestas.

### Calibrado del algoritmo de infiltración por bisección

A partir de un hietograma ponderado para una cuenca, su correspondiente hidrograma de gasto directo, el área o magnitud de ésta y el incremento seleccionado de discretización, se cuantifican la precipitación total ( $PT$ ) y el volumen bajo el hidrograma, el cual se expresa en lámina uniforme sobre tal cuenca de precipitación en exceso ( $ESC$ ); entonces la infiltración total ( $FT$ ) ocurrida será:

$$FT = PT - ESC \quad (3.42)$$

El proceso de calibrado consiste en encontrar un valor de  $N$  que iguale a  $FT$  con la lámina infiltrada hasta el final de la tormenta ( $F$ ), obtenida ésta por medio de las ecuaciones del algoritmo de Morel-Seytoux <sup>[M1, C2]</sup>. Este proceso se realiza con base en el método de bisección aceptando una tolerancia de 0.001 para la diferencia absoluta en milímetros entre  $FT$  y  $F$ . Al terminar el proceso de calibrado se define la variable o raíz buscada ( $N$ ) y están definidos el  $t_e$ , la  $f_c$  y  $F$  del evento lluvia-escurrimiento empleado.

## Problemas propuestos

**Problema 3.1:** La función  $f(x) = x - e^{1/x}$  tiene una raíz en el intervalo  $[1, 2]$ . Mediante el método de bisección realizar solo 5 iteraciones para encontrar una aproximación del valor de  $x$  que hace cero la función. (Respuesta: 1.78125 <sup>[A2]</sup>).

**Problema 3.2:** Resolver el problema anterior mediante el método de Newton-Raphson tomando como punto inicial  $x = 1.5$  (Respuesta: 1.763229 <sup>[A2]</sup>).

**Problema 3.3:** Resolver el problema 3.1 mediante el método de la secante efectuando únicamente 5 iteraciones. (Respuesta: 1.763223 <sup>[A2]</sup>).

**Problema 3.4:** Encontrar el valor de la raíz del polinomio  $f(x) = 4x^4 - 2.5x^3 - x + 0.50$  por medio del método de Newton-Raphson utilizando como punto inicial  $-0.80$  (Respuesta: 0.3035763 <sup>[P1]</sup>).

**Problema 3.5:** ¿Cuántas raíces tiene  $f(x) = x^2 |\sec x| - 4$  en el intervalo  $[0, 4]$ ; estimar la menor con el método de bisección y contrastar el resultado con otro procedimiento. (Respuesta: 3.478508 <sup>[M1]</sup>).

**Problema 3.6:** Ajustar la distribución LP3 mediante los métodos de máxima verosimilitud y promedios diversos para obtener la creciente de periodo de retorno 1,000 años en la estación hidrométrica Salvatierra del Río Lerma para el siguiente registro de 20 gastos máximos anuales ( $m^3/s$ ) de 1943 a 1962 expuesto en la referencia [C5]:

Año	Gasto	Año	Gasto	Año	Gasto	Año	Gasto
1943	300.0	1948	203.0	1953	45.2	1958	246.0
1944	188.0	1949	48.8	1954	47.9	1959	156.0
1945	147.0	1950	36.2	1955	141.0	1960	47.9
1946	105.0	1951	56.3	1956	98.2	1961	54.9
1947	165.0	1952	56.8	1957	53.6	1962	52.0

(Respuestas:  $Q_{MV} = 683 \text{ m}^3/\text{s}$ , con  $EEA = 22.2 \text{ m}^3/\text{s}$ , utilizando  $|F(u)| \leq 10^{-3}$  y  $Q_{pd} = 678 \text{ m}^3/\text{s}$  con  $EEA = 23.0 \text{ m}^3/\text{s}$  con  $TOL = 10^{-5}$ ).

## Referencias

- A1.** M. Abramowitz & I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Chapter 6: Gamma function and related functions, pp. 253-293. Dover Publications, Inc. New York, USA. 1972. Ninth Printing.
- A2.** L. V. Atkinson y P. J. Harley. *Introducción a los Métodos Numéricos con Pascal*, Capítulo 3: Ecuaciones algebraicas no lineales, pp. 47-83. Addison-Wesley Iberoamericana, S. A. Wilmington, Delaware, U.S.A. 1987.
- B1.** M. A. Benson. Plotting positions and economics of engineering planning. *Journal of Hydraulics Division*, Vol. 88, HY6, pp. 57-71. 1962.
- B2.** B. Bobée. The Log Pearson Type 3 distribution and its application in hydrology. *Water Resources Research*, Vol. 11, No. 5, pp. 681-689. 1975.
- B3.** B. Bobée & F. Ashkar. Generalized method of moments applied to LP3 distribution. *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 114, No. 8, pp. 899-909. 1988.
- B4.** B. Bobée & F. Ashkar. *The Gamma family and derived distributions applied in hydrology*. Chapter 7: Log-Pearson type 3 distribution  $LP(\alpha, \lambda, m)$ , pp. 76-120. Water Resources Publications. Littleton, CO., USA. 1991.
- B5.** B. Bobée & R. Robitaille. The use of the Pearson Type 3 and Log Pearson Type 3 distributions revisited. *Water Resources Research*, Vol. 13, No. 2, pp. 427-443. 1977.
- C1.** D. F. Campos Aranda. Función de distribución de probabilidades Gamma Mixta: Soluciones y aplicaciones. *10° Congreso Nacional de Hidráulica*, Tomo II, pp. 318-332. Morelia, Michoacán. 1988.
- C2.** D. F. Campos Aranda. Modelo matemático determinístico para pronóstico de crecientes en cuencas rurales. *Ingeniería Hidráulica en México*, Vol. IX, Núm. 1, pp. 43-62. Enero-abril de 1994.
- C3.** D. F. Campos Aranda. *Procesos del Ciclo Hidrológico*. Anexo D: Números de la curva de escurrimiento (N) de los complejos hidrológicos suelo-cobertura del U. S. Soil Conservation Service, pp. D-1 a D-10. Librería Universitaria Potosina. San Luis Potosí, S.L.P. Noviembre de 1998. Tercera reimpresión.
- C4.** D. F. Campos Aranda. Contraste de 6 métodos de ajuste de la distribución Log-Pearson tipo III en 31 registros históricos de eventos máximos anuales. *Ingeniería Hidráulica en México*, Vol. XVII, Núm. 2, pp. 77-97. Abril-junio del 2002.

- C5.** Comisión Federal de Electricidad. *Manual de Diseño de Obras Civiles*. Sección A: Datos hidrológicos y geológicos; tema 1.5: Determinación de la avenida máxima, pp. 50-64 y 130-136. CFE, México, D. F. 1970.
- C6.** Comisión Federal de Electricidad. *Boletín Hidrométrico No. 13 - El Balsas Medio*. Tomo II, pp. 570-590. CFE, México, D. F. 1979.
- C7.** S. C. Chapra y R. P. Canale. *Métodos Numéricos para Ingenieros*. Parte 2, capítulos 5 a 8: Raíces de ecuaciones, pp. 119-232. McGraw-Hill Interamericana Editores, S. A. de C. V. México, D. F. 1999. Tercera edición.
- C8.** V. T. Chow. Statistical and probability analysis of hydrologic data. Part I: Frequency analysis. Section 8-1, pp. 8-1 to 8-42 in *Handbook of Applied Hydrology*, editor-in-chief Ven Te Chow. McGraw-Hill Book Co. New York, USA, 1964.
- H1.** R. W. Hornbeck. *Numerical Methods*. Chapter 5: Roots of equations, pp. 64-84. Quantum Publishers, Inc. New York, U.S.A. 1975.
- K1.** G. W. Kite. *Frequency and Risk Analyses in Hydrology*. Chapter 9: Pearson type III distribution, pp. 105-122. Water Resources Publications. Fort Collins, CO., USA. 1977.
- K2.** G. W. Kite. *Frequency and Risk Analyses in Hydrology*. Chapter 12: Comparison of frequency distributions, pp. 156-168. Water Resources Publications. Fort Collins, CO., USA. 1977.
- K3.** N. T. Kottegoda. *Stochastic Water Resources Technology*. Chapter 6, theme 6.6: Pearson type III function applied to extreme values, pp. 236-241. The MacMillan Press Ltd, London, England. 1980.
- M1.** H. J. Morel-Seytoux. Application of infiltration theory for the determination of excess rainfall hyetograph. *Water Resources Bulletin*, Vol. 17, No. 6, pp. 1012-1022. 1981.
- M2.** H. J. Morel-Seytoux & T. G. Sanders. Abstractions, excess rainfall and direct runoff. Chapter 3, pp. 81-139 in *Hydrology for Transportation Engineers*, edited by T. G. Sanders. Federal Highway Administration. U. S. Department of Transportation, Washington, D.C., USA. 1980.
- M3.** H. J. Morel-Seytoux & J. P. Verdin. Correspondence between the SCS CN and infiltration parameters (K,Sf). Proceedings of the ASCE Speciality Conference on *Advances in Irrigation and Drainage: Surviving external Pressures*. J. Borelli, V. R. Hasfurther and R. D. Burman, co-editors. Jackson, Wyoming, USA. July 20-22, 1983.
- P1.** L. Poole, M. Borchers y D. M. Castlewitz. *Algunos Programas de Uso Común en BASIC*. Programa: Raíces reales de polinomios (Método de Newton), pp. 97-98. Osborne/McGraw-Hill. México, D.F. 1983.
- W1.** Water Resources Council. *Guidelines for Determining Flood Flow Frequency*. Bulletin # 17A of the Hydrology Committee. WRC. Washington, D. C., USA. 1977. Revised edition.
- Y1.** V. Yevjevich. *Probability and Statistics in Hydrology*. Chapter 6: Parameters and order-statistics as descriptors of distributions, pp. 99-117. Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, U.S.A. 1972.

## PCN3: BISEC

```
1000 REM PROGRAMA "BISEC" (metodo de BISECCion)
1010 CLS:PRINT"METODO DE BISECCION":PRINT
1020 PRINT"la funcion se introduce en la linea 1080"
1030 REM SE INTRODUCEN DATOS
1040 PRINT:INPUT"VALOR INFERIOR DEL INTERVALO: ";XI
1050 INPUT"VALOR SUPERIOR DEL INTERVALO: ";XS
1060 INPUT"TOLERANCIA ADOPTADA: ";TOL:NI=0
1070 REM SE DEFINE LA FUNCION f(x)
1080 DEF FNF(X)=COS(3.1415927#*X)-5*X^3-2*SIN(X^2)+2
1090 REM SE VERIFICA QUE LOS LIMITES CONTENGAN A LA RAIZ
1100 IF FNF(XI)*FNF(XS)>0 THEN 1210
1110 REM INICIAN CALCULOS DEL METODO
1120 XR=(XI+XS)/2:NI=NI+1
1130 LOCATE 10.2:PRINT"ITERACION NUMERO: ";NI
1140 IF ABS(FNF(XR))<TOL THEN 1200
1150 IF NI>=50 THEN 1220
1160 PF=FNF(XI)*FNF(XR)
1170 IF PF>0 THEN XI=XR ELSE XS=XR
1180 GOTO 1120
1190 REM INICIA IMPRESION DE DATOS Y RESULTADOS
1200 PRINT:PRINT"LA SOLUCION (raiz) BUSCADA ES: x = ";XR:GOTO 1240
1210 PRINT:PRINT"LOS LIMITES NO CONTIENEN A LA RAIZ":GOTO 1240
1220 PRINT:PRINT"NO SE ENCONTRO LA RAIZ EN 50 ITERACIONES"
1230 PRINT:PRINT"ULTIMO VALOR CALCULADO DE LA RAIZ = ";XR
1240 END
```

## PCN4:LP3MV

```

1000 REM PROGRAMA "LP3MV" (Log-Pearson 3 ajustada por Maxima Verosimilitud)
1010 REM ESTE PROGRAMA PERMITE AJUSTAR UNA FUNCION DE DISTRIBUCION
1020 REM LOG-PEARSON TIPO III POR EL METODO DE MAXIMA VEROSIMILITUD CON
1030 REM SOLUCION INICIAL (parametro de ubicacion) POR TANTEOS. FEBRERO 2001.
1040 REM SE LEEN LOS DATOS Y LOS RESULTADOS SE OBTIENEN IMPRESOS
1050 REM SE INTRODUCEN Y ORDENAN LOS DATOS
1060 CLS:PRINT"AJUSTE DE LA DISTRIBUCION LOG-PEARSON TIPO III POR"
1070 PRINT"          EL METODO DE MAXIMA VEROSIMILITUD":PRINT
1080 INPUT"NOMBRE DE LA ESTACION CLIMATOLOGICA: ";NES:READ N:PRINT
1090 DIM X(N),XO(N),Y(N),P(13),TR(13),XTR(13)
1100 FOR I=1 TO N:READ X(I):XO(I)=X(I)
1110 Y(I)=LOG(X(I)):NEXT I
1120 REM INICIA CALCULO DE PARAMETROS ESTADISTICOS DE COMPROBACION DE DATOS
1130 FOR I=1 TO N:S1=S1+X(I):NEXT I
1140 XM=S1/N:FOR I=1 TO N:S2=S2+(X(I)-XM)^2:NEXT I
1150 S=SQR(S2/(N-1)):CV=S/XM:PRINT"MEDIA =";:PRINT USING"#####.##";XM
1160 PRINT"DESV. ESTANDAR =";:PRINT USING"#####.##";S
1170 PRINT"COEF. DE VARIACION =";:PRINT USING"###.###";CV:PRINT
1180 S1=0:S2=0:STOP
1190 REM INICIA ORDENAMIENTO DE DATOS
1200 FOR I=1 TO N-1:FOR J=I+1 TO N
1210 IF XO(J)>XO(I) THEN 1230
1220 XO1=XO(I):XO(I)=XO(J):XO(J)=XO1
1230 NEXT J,I
1240 REM INICIA METODO DE MAXIMA VEROSIMILITUD
1250 REM SE PLANTEA METODO DE BISECCION
1260 INPUT"VALOR INICIAL DEL PARAMETRO DE UBICACION (u):";U
1270 TOL=.0001:US=3*U:U0=US:GOSUB 1790:FUNS=FUN0
1280 UI=U/10:U0=UI:GOSUB 1790:FUNI=FUN0
1290 PRINT"INICIA METODO DE BISECCION:"
1300 PRINT"FUNCION SUPERIOR =";FUNS:PRINT"          FUNCION INFERIOR =";FUNI
1310 INPUT"ESTAN CORRECTOS LOS LIMITES ASIGNADOS A u (S/N):";A$
1320 IF A$="S" OR A$="s" THEN 1330 ELSE 1260
1330 ITE=ITE+1:MED=(US+UI)/2:U0=MED:GOSUB 1790
1340 IF FUN0<0 THEN UI=MED ELSE US=MED
1350 IF ABS(FUN0)<=TOL THEN UBIC=MED:GOTO 1360 ELSE 1330
1360 REM SE ESTIMAN PARAMETROS ESTADISTICOS
1370 GY=(ALFA/ABS(ALFA))*2/SQR(KAPPA):SY=2*ALFA/GY:MY=UBIC+2*SY/GY
1380 REM FUNCIONES PARA CALCULO DEL FACTOR DE FRECUENCIA (FF)
1390 DEF FNZ(T)=T-(2.30753+.27061*T)/(1+.99229*T+.04481*T^2)
1400 DEF FNF1(Z,GY)=Z+(Z^2-1)*GY+(1/3)*(Z^3-6*Z)*GY^2
1410 DEF FNF2(Z,GY)=- (Z^2-1)*GY^3+Z*GY^4+(1/3)*GY^5
1420 REM INICIA IMPRESION DE DATOS Y RESULTADOS
1430 LPRINT"AJUSTE LOG-PEARSON TIPO III POR METODO DE MAXIMA VEROSIMILITUD"
1440 LPRINT:LPRINT"NOMBRE DE LA ESTACION CLIMATOLOGICA: ";NES
1450 LPRINT"NO. DE DATOS = ";N:LPRINT"  X(1) =";X(1):LPRINT"  X(N) =";X(N)
1460 LPRINT:LPRINT"PARAMETRO DE UBICACION INICIAL =";U
1470 LPRINT"NO. DE ITERACIONES DEL METODO DE BISECCION =";ITE;
1480 LPRINT"  TOL. UTIL. =";TOL
1490 LPRINT"PARAMETRO DE UBICACION (u) = ";UBIC
1500 LPRINT"PARAMETRO DE ESCALA (a)   = ";ALFA
1510 LPRINT"PARAMETRO DE FORMA (k)   = ";KAPPA
1520 IF A<0 THEN 1530 ELSE 1540
1530 LPRINT"EXISTE LIMITE SUPERIOR EN ";EXP(UBIC)
1540 GY=GY/6:GOSUB 1870:EE=EAA:EA=EAA
1550 LPRINT"ERROR ESTANDAR DE AJUSTE (EAA) = ";:LPRINT USING"###.###";EE
1560 LPRINT"ERROR ABSOLUTO DE AJUSTE (EAA) = ";:LPRINT USING"###.###";EA
1570 REM INICIA CALCULO DEL VALOR ASOCIADO A UN PERIODO DE RETORNO
1580 P(1)=.01:P(2)=.05:P(3)=.1:P(4)=.2:P(5)=.5:P(6)=.8:P(7)=.9
1590 P(8)=.96:P(9)=.98:P(10)=.99:P(11)=.998:P(12)=.999:P(13)=.9999

```

```

1600 TR(1)=1.01:TR(2)=1.05:TR(3)=1.11:TR(4)=1.25:TR(5)=2:TR(6)=5:TR(7)=10
1610 TR(8)=25:TR(9)=50:TR(10)=100:TR(11)=500:TR(12)=1000:TR(13)=10000
1620 REM FUNCIONES PARA CALCULO DEL FACTOR DE FRECUENCIA (FF)
1630 DEF FNZ(T)=T-(2.30753+.27061*T)/(1+.99229*T+.04481*T^2)
1640 DEF FNF1(Z,GY)=Z+(Z^2-1)*GY+(1/3)*(Z^3-6*Z)*GY^2
1650 DEF FNF2(Z,GY)=- (Z^2-1)*GY^3+Z*GY^4+(1/3)*GY^5
1660 LPRINT:LPRINT"      P(X<x)          años      MAXIMA VEROSIMILITUD"
1670 GY=GY/6:NE=2.7182818#
1680 FOR I=1 TO 13:P=1/TR(I)
1690 IF P>.5 THEN P=1-P:CO=-1 ELSE CO=1
1700 T=SQR(LOG(1/P^2)):Z=CO*FNZ(T)
1710 FF=FNF1(Z,GY)+FNF2(Z,GY)
1720 YTR=MY+FF*SY:XTR(I)=NE^YTR
1730 LPRINT USING"#####.####";P(I);
1740 IF I<=4 THEN 1750 ELSE 1760
1750 LPRINT USING"#####.###";TR(I);:GOTO 1770
1760 LPRINT USING"#####";TR(I);
1770 LPRINT USING"#####.##";XTR(I):NEXT I:LPRINT:LPRINT
1780 END
1790 REM INICIA SUBROUTINA DE LA FUNCION DEL PARAMETRO DE UBICACION (U0)
1800 SUM1=0:SUM2=0:SUM3=0
1810 FOR I=1 TO N:DIF=(Y(I)-U0)
1820 SUM1=SUM1+DIF:SUM2=SUM2+1/DIF:SUM3=SUM3+LOG(DIF):NEXT I
1830 ALFA=SUM1/N-N/SUM2:KAPPA=1/(1-N^2*(1/(SUM1*SUM2))):K=KAPPA
1840 DIGAM=LOG(K)-1/(2*K)-1/(12*K^2)+1/(120*K^4)-1/(252*K^6)
1850 FUN0=-N*DIGAM+SUM3-N*LOG(ALFA)
1860 RETURN
1870 REM INICIA SUBROUTINA DE CALCULO DE LOS ERRORES DE AJUSTE (EEA y EAA)
1880 SUM=0:SABS=0:NE=2.7182818#
1890 FOR I=1 TO N:P=1-I/(N+1)
1900 IF P>.5 THEN P=1-P:CO=-1 ELSE CO=1
1910 T=SQR(LOG(1/P^2)):Z=CO*FNZ(T)
1920 FF=FNF1(Z,GY)+FNF2(Z,GY):YE=MY+FF*SY:XE=NE^YE
1930 SUM=SUM+(XO(I)-XE)^2:SABS=SABS+ABS(XO(I)-XE):NEXT I
1940 EEA=SQR(SUM/(N-3)):EAA=SABS/(N-3)
1950 RETURN
5000 REM INICIAN DATOS DEL RIO CUPATITZIO EN LA HIDROMETRICA: TZARARACUA
5010 DATA 28
5020 DATA 83.6,75.3,83.2,68.5,123.9,73.6,101.2,108.7,68,42.9,78.6,47.7
5030 DATA 71.9,65.3,49.2,48.6,42.8,44.6,59.3,67.2,53.8,60.5,79.9,69.6
5040 DATA 62.6,43.9,85,86.9

```



## PCN5: LP3PD

```

1000 REM PROGRAMA "LP3PD" (Log-Pearson 3 ajustada por Promedios Diversos)
1010 REM ESTE PROGRAMA PERMITE AJUSTAR UNA FUNCION DE DISTRIBUCION
1020 REM LOG-PEARSON TIPO III POR EL METODO DE LOS PROMEDIOS DIVERSOS
1030 REM (Sundry Averages Method). UTILIZA EL METODO DE NEWTON-RAPHSON
1040 REM PARA ESTIMAR EL PARAMETRO DE ESCALA (alfa). MARZO DEL 2001.
1050 REM SE LEEN LOS DATOS Y LOS RESULTADOS SE OBTIENEN IMPRESOS
1060 REM SE INTRODUCEN Y ORDENAN LOS DATOS
1070 CLS:PRINT"AJUSTE DE LA DISTRIBUCION LOG-PEARSON TIPO III POR"
1080 PRINT"          EL METODO DE LOS PROMEDIOS DIVERSOS":PRINT
1090 INPUT"NOMBRE DE LA ESTACION CLIMATOLOGICA: ";NE$:READ N:PRINT
1100 DIM X(N),XO(N),Y(N),P(13),TR(13),XTR(13)
1110 FOR I=1 TO N:READ X(I):XO(I)=X(I)
1120 Y(I)=LOG(X(I)):NEXT I
1130 REM INICIA CALCULO DE PARAMETROS ESTADISTICOS DE COMPROBACION DE DATOS
1140 FOR I=1 TO N:S1=S1+X(I):NEXT I
1150 XM=S1/N:FOR I=1 TO N:S2=S2+(X(I)-XM)^2:NEXT I
1160 S=SQR(S2/(N-1)):CV=S/XM:PRINT"MEDIA =";:PRINT USING"#####.##":XM
1170 PRINT"DESV. ESTANDAR =";:PRINT USING"#####.##":S
1180 PRINT"COEF. DE VARIACION =";:PRINT USING"#####.###":CV:PRINT
1190 REM INICIA ORDENAMIENTO DE DATOS
1200 FOR I=1 TO N-1:FOR J=I+1 TO N
1210 IF XO(J)>=XO(I) THEN 1230
1220 X01=XO(I):XO(I)=XO(J):XO(J)=X01
1230 NEXT J,I
1240 REM INICIA METODO DE LOS PROMEDIOS DIVERSOS
1250 FOR I=1 TO N:SUMX=SUMX+X(I):SUMY=SUMY+Y(I):SUMR=SUMR+1/X(I):NEXT I
1260 XM=SUMX/N:H=N/SUMR:MY=SUMY/N
1270 PRINT:PRINT"INICIA METODO DE NEWTON-RAPHSON"
1280 INPUT"SE INTRODUCE VALOR INICIAL DEL PARAMETRO DE ESCALA (alfa):";AI:A=AI
1290 ITE=ITE+1:TOL=.00001
1300 B=1-1/A^2:C=1-1/A:FA=(LOG(C)+1/A)/LOG(B)-(LOG(XM)-MY)/(LOG(XM)-LOG(H))
1310 DA=(A-2)/(A*(1-A))-(LOG(B)+2/(A^2-1))/(A^2*(LOG(B))^2):AN=A-FA/DA
1320 PRINT"ITE.No. ";ITE:PRINT"  FUNCION DE ALFA =";
1330 PRINT USING"#####.#####":FA:PRINT"  NUEVO ALFA =";
1340 PRINT USING"#####.###":AN
1350 IF ABS(FA)<=TOL THEN ALFA=AN:GOTO 1360 ELSE A=AN:GOTO 1290
1360 KAPPA=(LOG(H)-LOG(XM))/LOG(1-1/ALFA^2):UBIC=MY-KAPPA/ALFA
1370 REM SE ESTIMAN PARAMETROS ESTADISTICOS
1380 SY=SQR(KAPPA/ALFA^2)
1390 GY=(ALFA/ABS(ALFA))*2/SQR(KAPPA)
1400 REM FUNCIONES PARA CALCULO DEL FACTOR DE FRECUENCIA (FF)
1410 DEF FNZ(T)=T-(2.30753+.27061*T)/(1+.99229*T+.04481*T^2)
1420 DEF FNF1(Z,GY)=Z+(Z^2-1)*GY+(1/3)*(Z^3-6*Z)*GY^2
1430 DEF FNF2(Z,GY)=- (Z^2-1)*GY^3+Z*GY^4+(1/3)*GY^5
1440 REM INICIA IMPRESION DE DATOS Y RESULTADOS
1450 LPRINT"AJUSTE LOG-PEARSON TIPO III POR EL METODO DE PROMEDIOS DIVERSOS"
1460 LPRINT:LPRINT"NOMBRE DE LA ESTACION CLIMATOLOGICA: ";NE$
1470 LPRINT"No. DE DATOS = ";N:LPRINT"  X(1) =";X(1):LPRINT"  X(N) =";X(N)
1480 LPRINT"PARAMETRO DE ESCALA INICIAL =";AI:LPRINT"  TOL. UTIL. =";TOL
1490 LPRINT"No. DE ITERACIONES DEL METODO DE NEWTON-RAPHSON ";ITE
1500 LPRINT"PARAMETRO DE UBICACION (u) = ";UBIC
1510 LPRINT"PARAMETRO DE ESCALA (a)   = ";ALFA
1520 LPRINT"PARAMETRO DE FORMA (k)   = ";KAPPA
1530 IF A<0 THEN 1540 ELSE 1550
1540 LPRINT"EXISTE LIMITE SUPERIOR EN ";EXP(UBIC)
1550 GY=GY/6:GOSUB 1800:EE=EAA:EA=EAA
1560 LPRINT"ERROR ESTANDAR DE AJUSTE (EEA) = ";:LPRINT USING"#####.###":EE
1570 LPRINT"ERROR ABSOLUTO DE AJUSTE (EAA) = ";:LPRINT USING"#####.###":EA
1580 REM INICIA CALCULO DEL VALOR ASOCIADO A UN PERIODO DE RETORNO
1590 P(1)=.01:P(2)=.05:P(3)=.1:P(4)=.2:P(5)=.5:P(6)=.8:P(7)=.9

```

```

1600 P(8)=.96:P(9)=.98:P(10)=.99:P(11)=.998:P(12)=.999:P(13)=.9999
1610 TR(1)=1.01:TR(2)=1.05:TR(3)=1.11:TR(4)=1.25:TR(5)=2:TR(6)=5:TR(7)=10
1620 TR(8)=25:TR(9)=50:TR(10)=100:TR(11)=500:TR(12)=1000:TR(13)=10000
1630 REM FUNCIONES PARA CALCULO DEL FACTOR DE FRECUENCIA (FF)
1640 DEF FNZ(T)=T-(2.30753+.27061*T)/(1+.99229*T+.04481*T^2)
1650 DEF FNF1(Z,GY)=Z+(Z^2-1)*GY+(1/3)*(Z^3-6*Z)*GY^2
1660 DEF FNF2(Z,GY)=- (Z^2-1)*GY^3+Z*GY^4+(1/3)*GY^5
1670 LPRINT:LPRINT"   P(X<x)           años   PROMEDIOS DIVERSOS"
1680 GY=GY/6:NE=2.7182818#
1690 FOR I=1 TO 13:P=1/TR(I)
1700 IF P>.5 THEN P=1-P:CO=-1 ELSE CO=1
1710 T=SQR(LOG(1/P^2)):Z=CO*FNZ(T)
1720 FF=FNF1(Z,GY)+FNF2(Z,GY)
1730 YTR=MY+FF*SY:XTR(I)=NE^YTR
1740 LPRINT USING"####.####";P(I);
1750 IF I<=4 THEN 1760 ELSE 1770
1760 LPRINT USING"#####.###";TR(I);:GOTO 1780
1770 LPRINT USING"#####.###";TR(I);
1780 LPRINT USING"#####.###";XTR(I):NEXT I:LPRINT
1790 END
1800 REM INICIA SUBROUTINA DE CALCULO DE LOS ERRORES DE AJUSTE (EEA y EAA)
1810 SUM=0:SABS=0:NE=2.7182818#
1820 FOR I=1 TO N:P=1-I/(N+1)
1830 IF P>.5 THEN P=1-P:CO=-1 ELSE CO=1
1840 T=SQR(LOG(1/P^2)):Z=CO*FNZ(T)
1850 FF=FNF1(Z,GY)+FNF2(Z,GY):YE=MY+FF*SY:XE=NE^YE
1860 SUM=SUM+(XO(I)-XE)^2:SABS=SABS+ABS(XO(I)-XE):NEXT I
1870 EEA=SQR(SUM/(N-3)):EAA=SABS/(N-3)
1880 RETURN

```

# Capítulo 4:

## Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

### Resumen

En la primera parte se presenta una síntesis sobre las definiciones, conceptos y operaciones básicas de las matrices; lo anterior debido a que los Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL), se representan matricialmente y se resuelven con métodos que trabajan con tales arreglos numéricos; además de que la aplicación práctica está formulada y resuelta con base en matrices. En seguida se define que es un SEL y se exponen las operaciones fundamentales de los renglones de dichos sistemas, como base del método de eliminación de Gauss. Después de describir este método, se continúa con el de Gauss-Jordan que evita la sustitución hacia atrás para obtener la solución del sistema. Posteriormente se abordan los métodos iterativos o de aproximaciones sucesivas de Jacobi y Gauss-Seidel, exponiendo sus condiciones de convergencia. Finalmente se describe la aplicación práctica, la cual consiste en obtener las ordenadas del hidrograma unitario de una cuenca, por medio del método de mínimos cuadrados, conocidos el hidrograma de precipitaciones en exceso y el correspondiente hidrograma de respuesta en gastos directos, ambos discretizados apropiadamente.

### 4.1 Conceptos y operaciones de matrices

#### Definiciones y terminología

Una *matriz* es un arreglo rectangular de números, caracterizado por su tamaño, el cual lo definen su número de renglones ( $m$ ) y columnas ( $n$ ). Una matriz se expresa de manera general como:

$$W = [W_{ij}] = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \dots & W_{1n} \\ W_{21} & W_{22} & \dots & W_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ W_{m1} & W_{m2} & \dots & W_{mn} \end{bmatrix}$$

$W$  se refiere al arreglo total, cuyos elementos son  $W_{ij}$  o  $w_{ij}$ . Una matriz rectangular de  $m$  renglones y  $n$  columnas se dice que es de orden  $m \times n$ , si  $m = n$  la matriz es cuadrada de orden  $n$ . Las matrices o vectores columna y renglón son:

$$D = d' = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 3.25 \\ 9.1 \end{bmatrix}$$

$$E = e = [0.5 \quad 3 \quad 12 \quad 4.5]$$

Las matrices cuadradas tienen ciertas configuraciones especiales que son de interés, éstas serán indicadas con una matriz de cuarto orden ( $n = 4$ ), pero lógicamente se aplican a matrices de cualquier tamaño <sup>[12]</sup>.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}$$

La diagonal principal consiste de los elementos  $c_{11}$ ,  $c_{22}$ ,  $c_{33}$  y  $c_{44}$ . Una matriz es simétrica si  $c_{ij} = c_{ji}$ . Una matriz triangular superior es aquella cuyos elementos debajo de la diagonal principal son cero. Estas matrices se acostumbra a representar así, es decir, sin indicar los ceros:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ & & c_{33} & c_{34} \\ & & & c_{44} \end{bmatrix}$$

La matriz triangular inferior tiene sus elementos arriba de la diagonal principal igual a cero.

Una matriz diagonal es aquella en la cual todos sus elementos son cero, excepto los de diagonal principal. Una matriz diagonal importante es la unitaria o identidad ( $\mathbf{I}$ ).

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

Finalmente, una matriz bandeada tiene todos sus elementos cero, excepto los de una banda centrada en la diagonal principal, por ejemplo una matriz de este tipo tridiagonal será:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & & \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \\ & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ & & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}$$

#### Operaciones básicas con matrices

La transpuesta  $\mathbf{F}^T$  de una matriz  $\mathbf{F}$  se obtiene intercambiando renglones por columna, por ejemplo <sup>[11]</sup>:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \\ f_{13} & f_{23} \end{bmatrix}$$

La suma de matrices es  $\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$  y está definida por:  $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ , por lo cual las matrices

que se suman deben tener idénticas dimensiones  $m \times n$ . La operación de resta de matrices es una adición negativa y ambas operaciones son conmutativas <sup>[H2]</sup>.

La definición de multiplicación establece que dos matrices se pueden multiplicar únicamente si el número de columnas de la primera es igual al número de renglones de la segunda. Las matrices que cumplen tal condición se dice que son conformables <sup>[V1]</sup>. Entonces se tiene:

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

$$P_{ij} = \sum_{k=1}^p A_{ik} B_{kj} \quad (4.1)$$

en donde los órdenes de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{P}$  son  $m \times p$ ,  $p \times n$  y  $m \times n$ , respectivamente. Obviamente, en matrices rectangulares la multiplicación es en general no conmutativa ( $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ ).

**Ejemplo 4.1.** Para ilustrar numéricamente la multiplicación de matrices se presenta el producto siguiente <sup>[H2]</sup>:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

□

La división de matrices no está definida. Sin embargo, si  $\mathbf{C}$  es una matriz cuadrada, puede existir otra matriz  $\mathbf{C}^{-1}$  llamada *inversa* de  $\mathbf{C}$ , que se define como <sup>[H1, H2, V1]</sup>:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{I} \quad \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{I} \quad (\mathbf{C}^{-1})^{-1} = \mathbf{C}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{C}}{|\mathbf{C}|} \quad (4.2)$$

en donde,  $|\mathbf{C}|$  es el determinante de los elementos de  $\mathbf{C}$  y no debe ser nulo, entonces  $\mathbf{C}$  es no singular;  $\text{adj } \mathbf{C}$  es la llamada matriz *adjunta* de  $\mathbf{C}$ , se construye reemplazando cada elemento de  $\mathbf{C}$  por su cofactor y transponiendo. El cofactor de un elemento en el  $i$ -ésimo renglón y la  $j$ -ésima columna de la matriz cuadrada  $\mathbf{C}$ , es el determinante formado al considerar la matriz como un determinante, suprimiendo el renglón  $i$  y la columna  $j$ , y multiplicando por  $(-1)^{i+j}$ . Una matriz cuadrada  $\mathbf{C}$  es llamada *ortogonal* si:  $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}^{-1}$ .

**Ejemplo 4.2.** A continuación se muestra <sup>[H1]</sup> la matriz  $\mathbf{C}$ , su matriz de cofactores y por último su inversa  $\mathbf{C}^{-1}$ .

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 56 & -12 & -4 \\ -28 & 62 & -12 \\ 0 & -28 & 56 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.14286 & -0.07143 & 0 \\ -0.03061 & 0.15816 & -0.07143 \\ -0.01020 & -0.03061 & 0.14286 \end{bmatrix}$$

□

#### Programas de cómputo MULMA y INVMA

En el listado PCN6 del final del capítulo se presenta el programa MULMA para MULTIplicación de dos MATrices <sup>[P1]</sup>.

**Ejemplo 4.3.** Como resultado de una aplicación numérica se obtuvo <sup>[E1]</sup> la matriz  $\mathbf{X}$  y su inversa:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4.000000000 & 9.755414652 & 0.5424738670 & 10.968622610 \\ 9.755414652 & 24.635458930 & 1.1194807200 & 27.403826940 \\ 0.542473867 & 1.119480730 & 0.1431011031 & 1.330183056 \\ 10.968622610 & 27.403826940 & 1.3301830560 & 30.633529010 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} 47.227410 & 1.608213 & -35.3010400 & -16.8160200 \\ 1.608213 & 16.016200 & 11.9762200 & -15.4234800 \\ -35.301040 & 11.976220 & 48.9845700 & -0.2007213 \\ -16.816020 & -15.423480 & -0.2007213 & 19.8598700 \end{bmatrix}$$

Con base en el programa MULMA comprobar que la matriz  $\mathbf{X}^{-1}$  es la inversa de la matriz  $\mathbf{X}$ . *Respuesta:* se multiplican las matrices y se obtiene la matriz identidad.

□

La inversión de una matriz por medio de la matriz adjunta y el valor de su determinante es un proceso sumamente laborioso y tardado, por el gran número de operaciones aritméticas involucradas, sobre todo en matrices de orden mayor de 5. Por lo anterior, para obtener la matriz inversa ( $\mathbf{C}^{-1}$ ) de una matriz  $\mathbf{C}$  se hace uso de su definición o propiedad  $\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{I}$ , así como de método de Gauss-Jordan que se expone en el inciso 4.3, de la manera siguiente: se aplica este método a la matriz  $\mathbf{C}$  y todas las operaciones fundamentales que en ella se realicen se aplican simultáneamente a la matriz  $\mathbf{I}$ , con lo cual ésta se transforma en la matriz inversa buscada <sup>(P1)</sup>. Esta es la mecánica operativa del programa de cómputo INVMA, cuyo listado se tiene al final del capítulo como PCN7.

**Ejemplo 4.4.** Haciendo uso del programa INVMA obtener las inversas ( $\mathbf{C}^{-1}$  y  $\mathbf{X}^{-1}$ ) de las matrices  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{X}$  de los ejemplos 4.2 y 4.3.

□

## 4.2 Métodos de solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

### ¿Qué es un Sistema de Ecuaciones Lineales (SEL)?

Un SEL es un conjunto de la forma:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
 \vdots & \\
 a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

el cual con base en la definición de multiplicación de matrices (ecuación 4.1) se puede representar como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

sistema que en una notación abreviada se escribe como:

$$\mathbf{A} = \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$$

en donde:

$A$  matriz cuadrada de coeficientes

$\underline{x}$  vector columna de incógnitas

$\underline{b}$  vector columna de términos independientes

#### Clasificación de los métodos de solución de un SEL

Se le denomina *solución* del SEL al conjunto de  $n$  valores  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  que satisfacen en forma simultánea a todas las ecuaciones. Los métodos numéricos de solución de los SEL se clasifican en Directos e Indirectos, los primeros incluyen el analítico o de cálculo de la matriz inversa y los que se basan en las propiedades del álgebra lineal, como son el de Gauss y Gauss-Jordan; los segundos también se conocen como de Aproximaciones e incluyen por ejemplo a los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel.

#### Tipos de soluciones y matriz ampliada

En la obtención de la solución de un SEL se pueden presentar los tres casos siguientes:

- 1°. Que el SEL tenga una sola solución. Entonces el sistema es compatible y determinado.
- 2°. Que el SEL tenga más de una solución. El sistema es compatible pero indeterminado.
- 3°. Que el SEL no tenga solución. El sistema es incompatible.

Se denomina matriz ampliada o aumentada a la que está formada por la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes, los cuales se acostumbra separar con una línea de puntos.

$$[A, \underline{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & \vdots & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & \vdots & b_n \end{bmatrix}$$

### 4.3 Métodos de Gauss y Gauss-Jordan

#### Método de Gauss

Consiste en obtener sistemas equivalentes, a partir del SEL original dado, utilizando las operaciones fundamentales en los renglones de la matriz ampliada, con el propósito de llegar a una matriz triangular superior, cuya forma es:

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} & \dots & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & \vdots & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{33} & \dots & a'_{3n} & \vdots & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{nn} & \vdots & b'_n \end{bmatrix}$$

La nueva matriz ampliada representa un SEL en forma triangular que puede resolverse por medio de un proceso de sustitución hacia atrás, es decir, que de la ecuación  $n$  se obtiene el valor de  $x_n$ , el cual se sustituye en la ecuación  $n-1$  para calcular el de  $x_{n-1}$ , y así sucesivamente hasta obtener las  $n$  magnitudes de las  $x_n$  incógnitas. Las operaciones fundamentales (OF) a utilizar son las siguientes:

- 1ª. Multiplicar todos los elementos de un renglón ( $R_i$ ) por un escalar diferente de cero. Equivale a multiplicar la ecuación por una constante. Es decir que:  $c \cdot R_i \Rightarrow R_i$ .
- 2ª. Multiplicar todos los elementos de un renglón ( $j$ ) por un escalar y sumarlos término a término con los elementos de otro renglón ( $i$ ). Es decir que:  $(c \cdot R_j + R_i) \Rightarrow R_j$ .
- 3ª. Intercambiar un renglón por otro, lo cual equivale a reordenar las ecuaciones. Es decir que:  $R_i \Rightarrow R_j$ .

El algoritmo o secuencia de pasos a seguir en el método de Gauss son:

- Paso 1) Es conveniente que el elemento de la diagonal principal se haga igual a uno. Para convertirlo hay que multiplicar todo el renglón por el recíproco de dicho elemento (1ª. OF). Si fuera cero hay que intercambiar renglones (3ª. OF).
- Paso 2) Convertir en ceros todos los elementos que se encuentren debajo del término de la diagonal principal, utilizando la 2ª. OF.
- Paso 3) Repetir los pasos 1 y 2 para todas las columnas de la matriz de coeficientes para obtener la matriz triangular superior.
- Paso 4) Resolver por sustitución hacia atrás el sistema triangular, para obtener los valores de las incógnitas.

**Ejemplo 4.5.** Resolver el siguiente SEL por medio del método de Gauss.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= -1 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 3 \end{aligned} \quad (4.4)$$

La matriz ampliada del sistema es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Como el elemento (1,1) ya es la unidad, se procede a hacer que todos los elementos que se encuentran debajo de él sean ceros, lo cual se logra a través de las operaciones siguientes:  $R_2 - 2 \cdot R_1 = R_2$ ;  $R_3 + R_1 = R_3$ ;  $R_4 - 2 \cdot R_1 = R_4$ . Lo cual conduce al sistema equivalente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & 3 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

Se procede ahora con el elemento (2,2) = -4, el cual se debe convertir a la unidad, multiplicando el renglón 2 por  $-1/4$ , y posteriormente transformar en ceros los térmi-



nos debajo de él con las operaciones:  $R_4 + 5 \cdot R_2 = R_4$ . Se obtiene el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -0.75 & 0.25 & 2.75 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1.25 & 2.25 & 6.75 \end{bmatrix}$$

El elemento de la diagonal principal (3,3) es un cero, por lo cual hay que intercambiar renglones ( $R_3 \leftrightarrow R_4$ ), para después hacer tal término la unidad multiplicándolo por  $1/1.25$ , quedando:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -0.75 & 0.25 & 2.75 \\ 0 & 0 & 1 & 1.8 & 5.4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Por último, se divide el renglón 4 entre 3 para hacer (4,4) igual a la unidad, obteniéndose finalmente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -0.75 & 0.25 & 2.75 \\ 0 & 0 & 1 & 1.8 & 5.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

el SEL equivalente del original será:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \\ x_2 - 0.75x_3 + 0.25x_4 &= 2.75 \\ x_3 + 1.8x_4 &= 5.4 \\ x_4 &= 3 \end{aligned} \quad (4.4)$$

la sustitución hacia atrás conduce a la solución, ésta es:

$$\begin{array}{lll} x_4 = 3 & \therefore & x_4 = 3 \\ x_3 - 1.8(3) = 5.4 & \therefore & x_3 = 0 \\ x_2 - 0.75(0) + 0.25(3) = 2.75 & \therefore & x_2 = 2 \\ x_1 + 3(2) - 0 + 3 = 5 & \therefore & x_1 = -4 \end{array}$$

A continuación se expone el algoritmo <sup>[F2]</sup> con el que trabaja el programa de cómputo GAUSS, cuyo listado se presenta al final del capítulo con la designación PCN8.

Paso 1) Se construye y accesa la matriz aumentada.

Paso 2) Sea  $i = 1$ . Si  $a_{ii} \neq 0$  ir al paso 4.

Paso 3) Sea  $p$  el número de un renglón tal que:  $a_{ii} = a_{i+1,i} = \dots = a_{p,i} = 0$  pero  $a_{p,i} \neq 0$ . Si existe tal renglón  $p$ , se efectúa la operación  $R_p \Rightarrow R_i$  y se continúa. Si no existe  $p$ , el SEL no tiene solución única y el procedimiento debe detenerse.

Paso 4) Sea  $m_{ij} = a_{ij}/a_{ii}$  para  $j = i+1, i+2, \dots, n$ . Efectuar la operación:  
 $(R_j - m_{ij} \cdot R_i) \Rightarrow R_j$

Paso 5) Hacer  $i = i+1$ . Si  $i < n$  regresar al paso 3; si  $i = n$  continuar.

Paso 6) Si  $a_{nn} = 0$  el sistema no tiene solución única. Si  $a_{nn} \neq 0$  se aplica el procedimiento de sustitución hacia atrás.

$$x_n = b_n/a_{nn} \quad ; \quad x_i = (b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j)/a_{ii} \quad \text{para } i = n-1, n-2, \dots, 1$$

### Método de Gauss-Jordan

Este procedimiento es una modificación del método de Gauss que consiste en transformar a la matriz de coeficientes en una matriz identidad; entonces este método evita la sustitución hacia atrás, ya que las soluciones son directas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b'_n \end{bmatrix}$$

es decir que:  $x_1 = b'_1$ ,  $x_2 = b'_2$  y así sucesivamente hasta  $x_n = b'_n$ .

El algoritmo para este método es bastante similar al de Gauss, pero en el paso 2 hay que convertir en ceros todos los elementos que se encuentran tanto abajo como arriba de la diagonal principal.

**Ejemplo 4.6.** Resolver mediante el método de Gauss-Jordan el siguiente SEL:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \\ 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned} \quad (4.5)$$

la matriz ampliada será:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

realizando:  $R_1/2 = R_1$ ;  $R_2 - 3R_1 = R_2$ ;  $R_3 - R_1 = R_3$ , se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & 3.5 & -2.5 & 4.5 & -1 \\ 0 & 1.5 & 0.5 & -1.5 & 7 \\ 0 & 4 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ahora efectuando:  $R_2/3.5 = R_2$ ;  $R_1 + 0.5 \cdot R_2 = R_1$ ;  $R_3 - 1.5 \cdot R_2 = R_3$ ;  $R_4 - 4 \cdot R_2 = R_4$ , se llega a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.14286 & 0.14286 & -0.14286 \\ 0 & 1 & -0.71429 & 1.28571 & -0.28571 \\ 0 & 0 & 1.57143 & -0.42857 & -7.42857 \\ 0 & 0 & 0.85714 & -2.14284 & 2.14284 \end{bmatrix}$$

las operaciones:  $R_1/1.57143 = R_3$ ;  $R_1 - 0.14286 \cdot R_3 = R_1$ ;  $R_2 + 0.71429 \cdot R_3 = R_2$  conducen a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.18182 & -0.18182 \\ 0 & 1 & 0 & 1.09091 & 3.09091 \\ 0 & 0 & 1 & -0.27273 & 4.72727 \\ 0 & 0 & 0 & -1.90909 & -1.90909 \end{bmatrix}$$

finalmente con base en:  $R_4/-1.90909 = R_3$ ;  $R_1 - 0.18182 \cdot R_4 = R_1$ ;  $R_2 - 1.09091 \cdot R_4 = R_2$ ;  $R_1 + 0.27273 \cdot R_4 = R_2$  se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$  la solución es:  $x_1 = -1$        $x_2 = 2$        $x_3 = 5$        $x_4 = 1$        $\square$

#### 4.4 Método de Jacobi

Este método y el siguiente forman parte de los procesos o técnicas iterativas, las cuales son recomendadas en grandes SEL con alto número de ceros. Requieren una solución inicial arbitraria, comúnmente  $x_i = 0$  ó  $x_i = 1$ , misma que va generando nuevas soluciones más próximas a la que satisface el SEL. En el método de Jacobi el procedimiento consiste de los 4 pasos siguientes:

Paso 1) Despejar de cada ecuación una incógnita, es decir, dado el SEL definido en la ecuación 4.1 se obtiene:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n) \\ x_3 &= \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - \dots - a_{3n}x_n) \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Paso 2) Se propone una solución inicial arbitraria:  $[x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0]$ , comúnmente  $x_i^0 = 1$  ó  $0$

Paso 3) La solución inicial se sustituye en el sistema 4.6 para obtener la siguiente aproximación a la solución  $[x_1^1, x_2^1, x_3^1, \dots, x_n^1]$ , en la cual el superíndice corresponde a la iteración que se realiza, por lo cual en general se tiene:

$$\begin{aligned}x_1^{k+1} &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \dots - a_{1n}x_n^k) \\x_2^{k+1} &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k - \dots - a_{2n}x_n^k) \\x_3^{k+1} &= \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31}x_1^k - a_{32}x_2^k - \dots - a_{3n}x_n^k) \\&\vdots \\x_n^{k+1} &= \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1^k - a_{n2}x_2^k - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^k)\end{aligned}\tag{4.7}$$

Paso 4) Se repite el paso anterior hasta que se cumpla con la tolerancia establecida para la diferencia entre la solución actual  $x_i^{k+1}$  y la anterior  $x_i^k$ , es decir que:

$$|x_i^{k+1} - x_i^k| \leq \text{Tolerancia, para todas las } i$$

**Ejemplo 4.7.** Resolver el siguiente SEL con base en el método de Jacobi, utilizando 0.01 como tolerancia.

$$\begin{aligned}6x_1 - x_2 &= 4 \\-x_1 + 4x_2 - x_3 &= 6 \\-x_2 + 4x_3 &= 2\end{aligned}\tag{4.8}$$

Primeramente se despeja una incógnita de cada ecuación, esto es:

$$\begin{aligned}x_1 &= (1/6)(4 + x_2) \\x_2 &= (1/4)(6 + x_1 + x_3) \\x_3 &= (1/4)(2 + x_2)\end{aligned}\tag{4.9}$$

se propone como solución inicial arbitraria  $x_i = 0$ , entonces el sistema 4.9 conduce a:

$$\begin{aligned}x_1^1 &= (1/6)(4 + 0) = 2/3 = 0.667 \\x_2^1 &= (1/4)(6 + 0 + 0) = 3/2 = 1.500 \\x_3^1 &= (1/4)(2 + 0) = 1/2 = 0.500\end{aligned}$$

esta solución al sustituirse en el sistema 4.9 permite obtener los nuevos valores de las variables:

$$\begin{aligned}x_1^2 &= (1/6)(4 + 1.500) = 0.9167 \\x_2^2 &= (1/4)(6 + 0.667 + 0.500) = 1.7918 \\x_3^2 &= (1/4)(2 + 1.500) = 0.8750\end{aligned}$$

al repetir el proceso anterior hasta la 6ª. iteración ( $k$ ) se cumple la tolerancia adoptada, y se deduce que la solución converge a:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$  y  $x_3 = 1$ ; según se observa en la tabulación siguiente:

k	$x_1^k$	$x_2^k$	$x_3^k$
3	0.9653	1.9479	0.9480
4	0.9913	1.9783	0.9870
5	0.9963	1.9945	0.9945
6	0.9991	1.9977	0.9986

□

La condición necesaria para la convergencia del método de Jacobi, es que los elementos de la diagonal principal de la matriz de coeficientes sean mayores, en valor absoluto, que los demás elementos del renglón. Si esto se cumple, no se puede asegurar la convergencia, pero si no se cumple, se asegura la no convergencia del método. Por otra parte, existe una condición suficiente para la convergencia del método de Jacobi, ésta ocurre siempre y cuando los elementos de la diagonal principal sean *dominantes*, es decir, son mayores en valor absoluto que la suma de los restantes elementos del renglón, también en valor absoluto. Con respecto al ejemplo 4.5, se tiene:

$$\begin{array}{lll} |6| > |-1| & 6 > 1 & \\ |4| > |-1| + |-1| & 4 > 2 & \therefore \text{ el método converge.} \\ |4| > |-1| & 4 > 2 & \end{array}$$

Con base en el algoritmo 8.1 expuesto en [B2] se desarrolló el programa de cómputo denominado JACOBI, cuyo listado PCN9 se tiene al final del capítulo.

#### 4.5 Método de Gauss-Seidel

Este método es muy similar al de Jacobi, la diferencia consiste en que una vez que se calcula la aproximación, ésta se usa inmediatamente en la misma iteración, por lo cual las ecuaciones 4.7 toman la forma siguiente:

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12} x_2^k - a_{13} x_3^k - \dots - a_{1n} x_n^k) \\ x_2^{k+1} &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21} x_1^{k+1} - a_{23} x_3^k - \dots - a_{2n} x_n^k) \\ x_3^{k+1} &= \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31} x_1^{k+1} - a_{32} x_2^{k+1} - \dots - a_{3n} x_n^k) \\ &\vdots \\ x_n^{k+1} &= \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1} x_1^{k+1} - a_{n2} x_2^{k+1} - \dots - a_{n,n-1} x_{n-1}^{k+1}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Como el método de Gauss-Seidel tiene una convergencia más rápida que el Jacobi, para las mismas condiciones, tiene más difusión y aceptación.

**Ejemplo 4.8.** Resolver el siguiente SEL <sup>[B2]</sup>, por medio del método de Gauss-Seidel.

$$\begin{aligned} -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 15 \\ 10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 &= -11 \end{aligned} \quad (4.11)$$

este SEL no cumple con las condiciones de convergencia, pero puede ser reacomodado de la manera siguiente para satisfacer la condición de convergencia <sup>[B2]</sup>:

$$\begin{array}{rcl}
 10x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 6 \\
 -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 & = & 25 \\
 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 & = & -11 \\
 3x_2 - x_3 + 8x_4 & = & 15
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 |10| > |-1| + |2| \\
 |11| > |-1| + |-1| + |3| \\
 |10| > |2| + |-1| + |-1| \\
 |8| > |3| + |-1|
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 10 > 3 \\
 11 > 5 \\
 10 > 4 \\
 8 > 4
 \end{array}$$

las ecuaciones para las incógnitas serán:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= (1/10)(6 + x_2 - 2x_3) \\
 x_2 &= (1/11)(25 + x_1 + x_3 - 3x_4) \\
 x_3 &= (1/10)(-11 - 2x_1 + x_2 + x_4) \\
 x_4 &= (1/8)(15 - 3x_2 + x_3)
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

La solución inicial propuesta es:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$ ,  $x_4 = 4$  y los resultados de la aplicación del método se exponen en la tabulación siguiente:

$k$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
0	1.000	2.000	3.000	4.000
1	0.200	1.473	-0.593	1.249
2	0.866	1.957	-0.953	1.022
3	0.986	1.997	-0.995	1.001
4	0.999	2.000	-1.000	1.000
5	1.000	2.000	-1.000	1.000

□

## 4.6 Aplicación práctica

### ¿Qué es el hidrograma unitario (HU)?

Los hidrólogos han utilizado la técnica del hidrograma unitario (HU) durante setenta años, para el análisis y pronóstico de la respuesta de las cuencas a la lluvia; en la actualidad, el HU es una de las herramientas más confiables para realizar estimaciones de crecientes o avenidas de diseño <sup>[M2]</sup>. L. K. Sherman lo propuso en 1932, aceptando la *linealidad* de manera implícita, ya que fue definido como el hidrograma de escurrimiento directo proveniente de una cuenca debido a una tormenta unitaria. La tormenta unitaria es aquella cuya lluvia en exceso es la unidad (un cm) y tiene distribución uniforme en la cuenca, tanto temporal como espacial.

### Teoría matemática del HU

Desde principios de los años sesenta, la linealidad está explícita en la teoría del HU, pues las cuencas comenzaron a ser analizadas como sistemas lineales invariantes <sup>[D1, M2]</sup>. Con tal enfoque de sistemas, conocido como de *caja negra*, la atención se centra en la relación entre la lluvia en exceso y el gasto directo generado, sin estimar los procesos físicos que operan a nivel micro y/o macro dentro de la cuenca, por ello tal relación puede ser representada matemáticamente por la integral de convolución <sup>[D1, L1, C3]</sup>:

$$q(t) = \int_0^{tm} u(\tau) \cdot r(t - \tau) d\tau \tag{4.13}$$

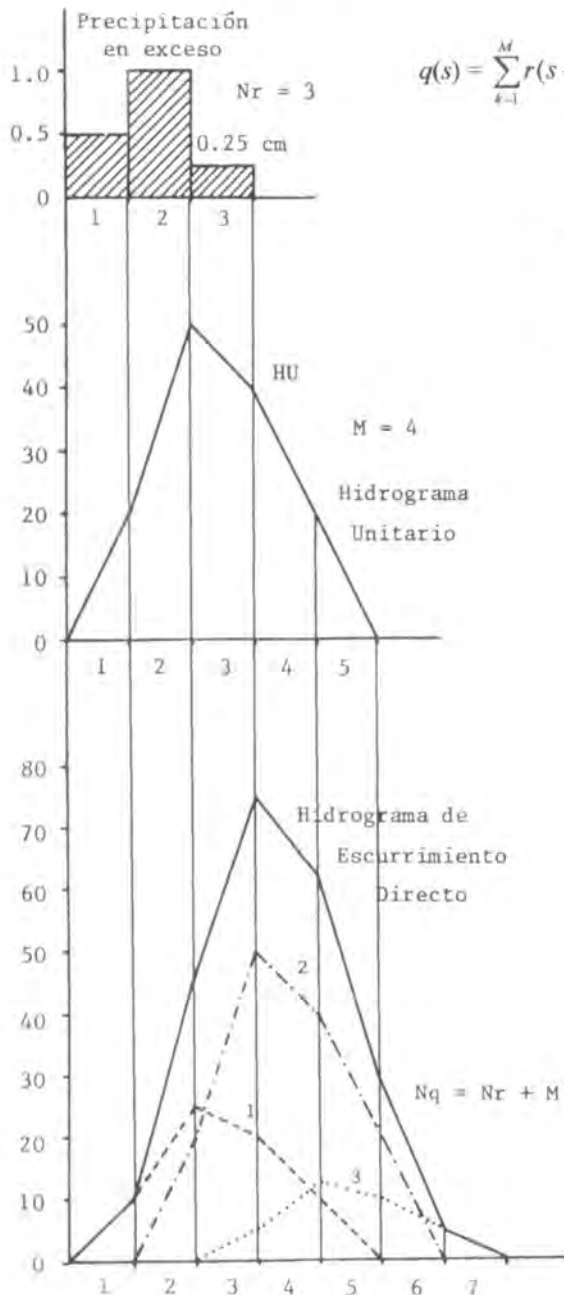
donde,  $q(\cdot)$  es el gasto directo de salida,  $r(\cdot)$  es la entrada o lluvia en exceso,  $u(\cdot)$  es la respuesta impulso de la cuenca o HU y  $tm$  es la longitud de memoria del sistema. Para una entrada global y una respuesta muestreada o discretizada a intervalos unitarios  $D$  iguales, la ecuación anterior corresponde a <sup>[B1]</sup>:

$$q(s) = \sum_{k=1}^M r(s - k + 1) \cdot u(k) \quad ; \quad s = 1, 2, 3, \dots, Nq \tag{4.14}$$

en la cual,  $M$  es la memoria del sistema definida por  $M = Nq - Nr + 1$ , es decir, el número de ordenadas del HU,  $Nq$  es el número de gastos directos del hidrograma de respuesta y  $Nr$  el número de lluvias en exceso. En la Figura 4.1 se muestra gráficamente la mecánica operativa del HU para un caso muy simple, el desarrollo respectivo de la ecuación 4.14 y la estructura matricial del sistema formado. La generalización del sistema mostrado en la Figura 4.1 es la siguiente:

$$R \cdot U = Q \tag{4.15}$$

**Figura 4.1**  
Descripción gráfica y matemática del hidrograma unitario



$$q(s) = \sum_{k=1}^M r(s-k+1) \cdot u(k) \quad ; \quad s = 1, 2, 3, \dots, Nq$$

$$\begin{aligned} q(1) &= r(1) \cdot u(1) \\ q(2) &= r(1) \cdot u(2) + r(2) \cdot u(1) \\ q(3) &= r(1) \cdot u(3) + r(2) \cdot u(2) + r(3) \cdot u(1) \\ q(4) &= r(1) \cdot u(4) + r(2) \cdot u(3) + r(3) \cdot u(2) \\ q(5) &= r(2) \cdot u(4) + r(3) \cdot u(3) \\ q(6) &= r(3) \cdot u(4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R \times U &= Q \\ (6 \times 4) \times (4 \times 1) &= (6 \times 1) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} r(1) & 0 & 0 & 0 \\ r(2) & r(1) & 0 & 0 \\ r(3) & r(2) & r(1) & 0 \\ 0 & r(3) & r(2) & r(1) \\ 0 & 0 & r(3) & r(2) \\ 0 & 0 & 0 & r(3) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u(1) \\ u(2) \\ u(3) \\ u(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q(1) \\ q(2) \\ q(3) \\ q(4) \\ q(5) \\ q(6) \end{bmatrix}$$

$$Nq = Nr + M - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$$

donde,  $Q$  es un vector columna de  $Nq$  elementos,  $U$  es otro vector columna de  $M$  elementos y  $R$  es una matriz de  $Nq \times M$ , llamada matriz de convolución <sup>(B1)</sup>, cuya estructura se muestra en la ecuación 4.16, con  $i = Nr$ .

$$\begin{bmatrix} r(1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ r(2) & r(1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ r(i) & r(i-1) & r(i-2) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & r(i) & r(i-1) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r(i) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r(i) & r(i-1) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(2) \\ \vdots \\ u(M-1) \\ u(M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q(1) \\ q(2) \\ \vdots \\ q(i+1) \\ q(i+2) \\ \vdots \\ q(Nq-1) \\ q(Nq) \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

#### Métodos de identificación del HU

El problema de obtener o identificar la respuesta (HU) de un sistema lineal invariante en el tiempo, involucra la solución de un sistema *sobredeterminado* de ecuaciones lineales simultáneas, conocidos los valores de los vectores  $q$  y  $r$ ; si la cuenca realmente se comportara como tal sistema, y si los valores medidos de  $r$  y  $q$  estuvieran libres de errores, entonces la estimación de su respuesta sería un asunto trivial y cualquiera de las ecuaciones 4.14 sería consistente, de manera que una solución obtenida para alguno de los valores del vector  $U$ , también sería solución de las otras ecuaciones <sup>(L1)</sup>.

En la realidad, las mediciones de la lluvia y del gasto de la avenida correspondiente, así como la obtención de la lluvia en exceso y del gasto directo, introducen errores en los datos. Además, como la transformación de la lluvia en exceso en escurrimiento es un proceso de suavizado, la inversión de este proceso, implícita en la identificación del hidrograma unitario, es por lo tanto, una operación inestable <sup>(B1)</sup>. Lo anterior significa que pequeños errores en los datos pueden producir graves discrepancias en las ordenadas identificadas del HU, llegando a obtener valores oscilantes y hasta negativos.

Las técnicas disponibles para identificar las ordenadas del HU, pueden ser clasificadas en los cuatro grupos siguientes <sup>(B1)</sup>:

- 1o. solución directa de  $M$  ecuaciones del sistema (4.16).
- 2o. solución aproximada de todas las  $Nq$  ecuaciones, obtenida por optimización no restringida de alguna función objetivo. En este grupo se incluyen las técnicas de mínimos cuadrados.
- 3o. técnicas que involucran la transformación de la convolución discreta del dominio del tiempo a otro dominio, cuya solución en éste se regresa al dominio del tiempo. Este grupo comprende los métodos de Fourier y Meixner.
- 4o. técnicas de optimización sujetas a varias restricciones. Aquí se incluyen los procedimientos basados en programación lineal y no lineal.

#### Unidades de las ordenadas del HU

El método de identificación discretizada del HU, a partir del hidrograma de gasto directo originado por una tormenta cuya lluvia en exceso ha sido estimada, define clara-



mente las unidades de sus ordenadas, como cocientes del escurrimiento entre la lluvia. Como el escurrimiento puede ser expresado como gasto ( $L^3/T$ ) y como gasto específico ( $Q_e$  en  $L^3/T/L^2$ ), es decir, gasto por unidad de área de la cuenca ( $A$  en  $km^2$ ), entonces, empleando la lluvia en exceso ( $P$ ) en centímetros, se definen tres posibles tipos de HU <sup>(D1)</sup>:

$$\begin{aligned} HU_w &= Q/P && (m^3/s/cm) \\ HU_v &= Q_e/P = Q/(A \cdot P) && (m^3/s/km^2/cm) \\ HU_u &= 0.36 Q_e/P = 0.36 Q/(A \cdot P) && (cm/h/cm = 1/h) \end{aligned}$$

con áreas bajo el HU iguales a:  $A/0.36$ ,  $2.778$  y  $1.000$ , respectivamente. Con fines prácticos de comparación de resultados, y sobre todo con el propósito de normalización, se sugiere <sup>(C2)</sup> identificar HU del tipo  $w$  y  $u$ , esto es, emplear los gastos directos en  $m^3/s$  ó en  $cm/h$ ; comúnmente será la primera opción.

### Identificación del HU mediante mínimos cuadrados

La manera usual de juzgar la calidad de un HU identificado, consiste en examinar la diferencia entre el gasto observado ( $q$ ) y aquél que es estimado ( $Q$ , ecuación 4.15) utilizando tal HU, esto es:

$$e = q - (R \times U) \quad (4.17)$$

donde,  $e$  es un vector de residuos. El método de mínimos cuadrados selecciona al HU estimado como aquél que minimiza la suma de cuadrados de los residuos, es decir que:

$$\sum_{i=1}^{Nq} e_i^2 = \text{mínimo} \quad (4.18)$$

El mínimo está dado por la solución de las ecuaciones normales, las cuales se establecen o generan al resolver para  $U$  en la ecuación 4.15; tal desarrollo requiere la matriz inversa de  $R$ , la cual debe ser cuadrada y tener determinante no nulo. La matriz  $R$  no cumple tales condiciones, sin embargo, usando su transpuesta ( $R^T$ ), una matriz cuadrada y simétrica ( $R^T \times R$ ) es generada, de manera que:

$$(R^T \times R) \times U = R^T \times Q \quad (4.19)$$

La ecuación anterior, genera las ecuaciones normales simultáneas para la solución de mínimos cuadrados y permite una solución explícita para  $U$  definida como <sup>(N1,M1)</sup>:

$$U = (R^T \times R)^{-1} \times (R^T \times Q) \quad (4.20)$$

La matriz  $(R^T \times R)$  y su inversa  $(R^T \times R)^{-1}$ , son simétricas y tipo Toeplitz <sup>(F1)</sup>, en las cuales sus  $ij$ -ésimos elementos son una función de únicamente  $i - j$ ; entonces para este caso el número máximo de elementos diferentes que pueden tener es  $M$ , es decir, la memoria del sistema. Estas características permiten hacer reducciones drásticas en los requerimientos computacionales <sup>(F1)</sup>.

### Identificación del HU mediante mínimos cuadrados suavizados

A finales de los años sesenta se sugirió <sup>(K1)</sup> que un proceso de *suavizado* realizado a *priori* durante la obtención del HU, puede ser incorporado resolviendo las siguientes ecuaciones en lugar de las normales:

$$(R^T \times R + k \times I) \times U = R^T \times Q \quad (4.21)$$

en las cuales,  $k$  es un parámetro seleccionado por el usuario e  $I$  es una matriz unitaria. En la ecuación 4.21 la matriz del paréntesis también es simétrica y tipo Toeplitz, que difiere de la matriz  $R^T \times R$  únicamente en su diagonal, la cual está caracterizada por un

solo número,  $r(1)$ , y por ello, la aplicación del método de mínimos cuadrados suavizados implica solamente **sumar**  $k$  a  $r(1)$  y resolver las ecuaciones 4.20 <sup>[B1]</sup>.

### Breve descripción del programa HUIMCS

Esta designación corresponde a Hidrograma Unitario Identificado por Mínimos Cuadrados Suavizados (MCS), y en realidad resuelve los dos métodos, el de mínimos cuadrados ( $k = 0$ ) y el de MCS ( $k > 0$ ). Las características básicas de este programa se pueden englobar en las dos siguientes: primera, genera el arreglo de la matriz  $R$  y por lo tanto, de la matriz  $R^T$ ; segunda, obtiene la solución del sistema (vector  $U$ ) definido por la ecuación 4.20, por medio de la subrutina TPSLV <sup>[F1]</sup> desarrollada en Fortran para la solución de un sistema de ecuaciones lineales que involucran una matriz Toeplitz simétrica, haciendo uso de sus propiedades para alcanzar un manejo eficiente.

Se considera que la interpretación del programa HUIMCS no debe ofrecer dificultad, pues la designación de variables corresponde a la utilizada en las ecuaciones 4.13 a 4.21; además se han incluido suficientes comentarios (REM), y su estructura es sumamente sencilla: captura de datos (lluvias en exceso y gastos directos); desarrollo de las matrices  $R$ ,  $R^T$ ,  $R^T \times R$  y  $R^T \times Q$ ; aplicación de la subrutina TPSLV, y por último, impresión de datos y resultados. El programa ofrece la opción de imprimir las matrices  $R$  y  $R^T \times R$ , con fines didácticos o de comprobación.

### Proceso operativo

Inicialmente, como medida de comprobación del programa HUIMCS, se resolvieron diversos ejemplos de la literatura especializada <sup>[C2]</sup>. Con respecto a la selección del parámetro de suavizado ( $k$ ), su valor se sugiere <sup>[C2]</sup> que sea del orden del 1, 5, 10 y 25% de la magnitud característica de la matriz  $R^T \times R$ , es decir, del elemento  $r(1,1)$  cuyo valor depende de la primera precipitación en exceso.

Al aplicar los parámetros de suavizado, se observa cómo aumenta el error medio cuadrático y se *aplana* el hidrograma unitario a cambio de reducir sus oscilaciones y/o eliminar sus ordenadas negativas. En el transcurso de este proceso se determina el valor mínimo necesario del parámetro de suavizado  $k$ , que conduzca a un hidrograma unitario bien formado, con un error medio cuadrático tan cercano, como sea posible, al obtenido con el método de mínimos cuadrados. El error medio cuadrático (EMC) se define como:

$$EMC = \left[ (1/Nq) \sum_1^{Nq} (q - Q)^2 \right]^{1/2} \quad (4.22)$$

siendo,  $q$  el gasto directo observado al final de cada intervalo de discretización ( $D$ ), y  $Q$  el gasto directo estimado por convolución por medio de la ecuación 4.14, haciendo uso del hidrograma unitario que se identificó. El EMC tiene lógicamente unidades de gasto.

### Identificación de un HU por mínimos cuadrados

**Ejemplo 4.9.** En la Tabla 4.1 de la página siguiente se presentan los resultados <sup>[C6-C8]</sup> de la identificación del HU por mínimos cuadrados ( $k = 0$ ) y a través del programa HUIMCS, en una cuenca de gran tamaño ( $A = 7,510 \text{ km}^2$ ) correspondiente a la estación hidrométrica San Bernardo, en el Río Mayo, Sonora, con tormenta de dos aguaceros y localizada en clima semiárido.

Aún bajo tales condiciones extremas de tamaño y clima esta cuenca se comporta como un sistema lineal, ya que su HU obtenido está libre de valores negativos y de oscilaciones, además de que su EMC es muy bajo. Probablemente la ponderación previa de la tormenta en tal cuenca con base en las isoyetas totales <sup>[B2]</sup> de tal evento meteorológico, influyó en el comportamiento lineal citado.

Como comprobación aproximada se tiene que la suma de las ordenadas del HU identificado es de  $2610.4 \text{ m}^3/\text{s}$ , cuyo producto por el incremento de tiempo (8 horas) conduce a un valor de 20883, el cual prácticamente corresponde a  $A/0.36 = 20861$ .

□

#### Identificación de un HU por mínimos cuadrados suavizados

**Ejemplo 4.10.** En la Tabla 4.2 se presenta la aplicación del método de mínimos cuadrados suavizados ( $k \neq 0$ ), a la identificación del HU para la tormenta ocurrida en una cuenca de  $2,266 \text{ km}^2$  en el North Branch Potomac River<sup>[51]</sup>, discretizada en intervalos de 4 horas.

En la citada Tabla 4.2 se observa que el HU obtenido por mínimos cuadrados presenta oscilaciones y dos ordenadas negativas. Por lo anterior, se procedió a realizar tanteos con valores crecientes de  $k$ . Con  $k = 1.000$ , que equivale al 6.2% del término  $R^T \times R(1,1) = 16.041$ , desaparecen las ordenadas negativas, son todavía oscilantes, pero el error medio cuadrático (EMC) sigue siendo reducido, un 27% mayor que el de mínimos cuadrados que es de  $37.1 \text{ m}^3/\text{s}$ . Finalmente, con un parámetro de suavizado del 9.4% del elemento  $R^T \times R(1,1)$ , el HU está bien formado, pero su EMC creció un 47% en relación al mínimo. Una comprobación de los cálculos consiste en estimar el área aproximada bajo el HU, que es:  $0.2485(4) = 0.994 \approx 1.000$ , en el caso del método de mínimos cuadrados.

Tabla 4.1

Identificación del hidrograma unitario por el método de mínimos cuadrados ( $k = 0$ ) para la creciente del 28 de octubre al 3 de noviembre de 1971, en la Estación hidrométrica San Bernardo, del Río Mayo, Sonora.

Incremento de tiempo = 8 horas.

$M = Nq - Nr + 1 = 19 - 4 + 1 = 16$

Error Medio Cuadrático =  $7.3 \text{ m}^3/\text{s}$

Incremento de Tiempo	Gasto Directo Observado ( $\text{m}^3/\text{s}$ )	Precipitación en Exceso (cm)	Ordenadas del HU ( $\text{m}^3/\text{s}/\text{cm}$ )	Gasto Directo Calculado ( $\text{m}^3/\text{s}$ )
1	0.0	0.86	29.61	25.5
2	506.7	3.41	464.31	500.3
3	2306.7	0.00	843.02	2308.3
4	3360.0	0.11	560.03	3359.6
5	2186.7		262.83	2186.8
6	1106.7		136.86	1106.7
7	608.0		92.69	608.0
8	400.0		63.98	400.0
9	266.7		38.92	266.7
10	168.0		29.17	168.0
11	128.0		24.98	128.0
12	106.7		20.05	106.7
13	85.3		15.97	85.3
14	66.7		11.03	66.7
15	48.0		9.50	48.0
16	40.0		7.44	40.6
17	26.7			26.6
18	18.7			1.0
19	2.0			0.8

Tabla 4.2

**Identificación del hidrograma unitario (HU) por el método de mínimos cuadrados suavizados ( $k \neq 0$ ) para una creciente en el North Branch Potomac River <sup>[S1]</sup>.**

Incremento de tiempo = 4 horas.

$$M = Nq - Nr + 1 = 16 - 5 + 1 = 12$$

Intervalo No.	Gasto directo observado (cm/h)	Precipitación en exceso (cm)	$k = 0.00$		$k = 0.20$		$k = 1.00$		$k = 1.50$	
			Ordenadas del HU (1/h)	Gasto directo calculado (cm/h)	Ordenadas del HU (1/h)	Gasto directo calculado (cm/h)	Ordenadas del HU (1/h)	Gasto directo calculado (cm/h)	Ordenadas del HU (1/h)	Gasto directo calculado (cm/h)
1	0.0076	0.3048	0.0049	0.0015	0.0047	0.0014	0.0054	0.0016	0.0060	0.0018
2	0.0279	2.2352	0.0322	0.0207	0.0333	0.0206	0.0344	0.0225	0.0343	0.0239
3	0.0914	2.0320	0.0606	0.1003	0.0596	0.1021	0.0566	0.1051	0.0551	0.1058
4	0.2286	2.5400	0.0582	0.2308	0.0563	0.2299	0.0530	0.2262	0.0520	0.2241
5	0.3556	0.6096	0.0275	0.3462	0.0292	0.3432	0.0320	0.3339	0.0327	0.3291
6	0.3556		0.0169	0.3583	0.0179	0.3568	0.0195	0.3500	0.0198	0.3457
7	0.2790		0.0262	0.2863	0.0237	0.2859	0.0196	0.2837	0.0185	0.2820
8	0.2083		0.0129	0.2021	0.0130	0.2019	0.0129	0.2009	0.0127	0.2002
9	0.1448		-0.0016	0.1412	0.0004	0.1408	0.0036	0.1388	0.0044	0.1377
10	0.0940		0.0071	0.1016	0.0060	0.1003	0.0044	0.0972	0.0040	0.0959
11	0.0635		0.0049	0.0629	0.0041	0.0630	0.0029	0.0627	0.0025	0.0623
12	0.0356		-0.0012	0.0288	-0.0004	0.0302	0.0008	0.0325	0.0011	0.0331
13	0.0203			0.0243		0.0230		0.0210		0.0205
14	0.0102			0.0143		0.0133		0.0116		0.0111
15	0.0051			-0.0001		0.0015		0.0039		0.0043
16	0.0025			-0.0007		-0.0002		0.0005		0.0007
Error Medio Cuadrático:			0.0059 cm/h		0.0060 cm/h		0.0075 cm/h		0.0087	
Suma de ordenadas del HU:			0.2485		0.2478		0.2451		0.2432	

## Problemas propuestos

**Problema 4.1:** Para la siguiente matriz  ${}^{[C4]}$ , obtener su inversa y comprobar su validez por medio de los programas INVMA y MULMA, respectivamente.

$$\begin{bmatrix} 10.00000 & 4.81953 & 15.06685 \\ 4.81953 & 4.44254 & 5.35019 \\ 15.06685 & 5.35019 & 24.58600 \end{bmatrix}$$

**Problema 4.2:** Encontrar la solución del siguiente SEL, por medio del método de Gauss. (Respuestas:  $x_1 = 3, 2, 1$   ${}^{[A1]}$ ).

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 &= 28 \\ 2x_1 + 4x_2 + 17x_3 &= 31 \end{aligned}$$

**Problema 4.3:** Obtener la solución del siguiente SEL, por medio del método de Gauss. (Respuestas:  $x_1 = 0.3415, 6.797, -0.8047$   ${}^{[F2]}$ ).

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1.5x_2 + 4x_3 &= 8 \\ 0.21x_1 + 0.23x_2 + x_3 &= 0.83 \\ 2x_1 + 8x_2 + 10x_3 &= 47 \end{aligned}$$

**Problema 4.4:** A través del método de Gauss-Jordan obtener la solución del siguiente SEL. (Respuestas:  $x = 4, y = 1, z = 2$   ${}^{[C6]}$ ).

$$\begin{aligned} 2x - 7y + 4z &= 9 \\ x + 9y - 6z &= 1 \\ -3x + 8y + 5z &= 6 \end{aligned}$$

**Problema 4.5:** Mediante el método de Jacobi con solución inicial  $x_1 = 0$  y haciendo sólo 8 iteraciones obtener la solución del siguiente SEL. (Respuestas:  $x_1 = 1.0006, 1.9987, -0.9990, 0.9989$   ${}^{[B2]}$ ).

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 &= -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 15 \end{aligned}$$

**Problema 4.6:** Resolver el problema anterior mediante el método de Gauss-Seidel, efectuando únicamente 4 iteraciones (Respuestas:  $x_1 = 1.0009, 2.0003, -1.0003, 0.9998$ ).

**Problema 4.7:** Resolver el siguiente SEL, mediante el método de Gauss-Seidel, con solución inicial  $x_1 = 0$  y haciendo únicamente 5 iteraciones. (Respuestas:  $x_1 = 0.9999, 1.0, 1.0$   ${}^{[M1]}$ ).

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 9 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 2 \end{aligned}$$

**Problema 4.8:** Modificar los programas de cómputo PCN8 (GAUSS) y PCN9 (JACOBI) para obtener los códigos de los algoritmos de Gauss-Jordan y de Gauss-Seidel, respectivamente.

## Referencias

- A1.** L. V. Atkinson y P. J. Harley. *Introducción a los Métodos Numéricos con Pascal*. Capítulo 4: Ecuaciones algebraicas lineales, pp. 84-138. Addison-Wesley Iberoamericana, S. A. Wilmington, Delaware, U.S.A. 1987.
- B1.** M. Bruen & J. C. I. Dooge. An efficient and robust method for estimating unit hydrograph ordinates. *Journal of Hydrology*, Vol. 70, pp. 1-24. 1984.
- B2.** R. L. Burden, J. D. Faires & A. C. Reynolds. *Numerical Analysis*. Chapter 8: Iterative techniques in matrix algebra, pp. 366-438. Prindle, Weber & Schmidt. Boston, Massachusetts, USA. 1981. Second edition.
- C1.** D. F. Campos Aranda. Ecuaciones de regresión para estimar avenidas de diseño en cuencas sin aforos, en la Región Hidrológica No. 37 (El Salado). *VI Congreso Nacional de Hidráulica*, Vol. II, pp. 478-488. 15 al 19 de Noviembre de 1980, Mérida, Yucatán.
- C2.** D. F. Campos Aranda. *Métodos Computacionales para la Identificación de Hidrogramas Unitarios*. Informe del Proyecto de Investigación (CIEP-3). Facultad de Ingeniería de la UASLP. San Luis Potosí, S.L.P. Marzo de 1992. (32 páginas).
- C3.** D. F. Campos Aranda. Programa en Basic para identificar hidrogramas unitarios con técnicas de mínimos cuadrados. *XII Congreso Nacional de Hidráulica*. Tema 5, ponencia 5.40. 7 al 10 de octubre de 1992. Puerto Vallarta, Jalisco.
- C4.** D. F. Campos Aranda. *Procesos del Ciclo Hidrológico*. Anexo C: Regresión y correlación lineales, pp. C-1 a C-12. Editorial Universitaria Potosina. San Luis Potosí, S.L.P. 1998. Tercera reimpresión.
- C5.** D. F. Campos Aranda. Modelo matemático determinístico para pronóstico de crecientes en cuencas rurales. *Ingeniería Hidráulica en México*, Vol. IX, Núm.1, pp. 43-62, enero-abril de 1994.
- C6.** B. Carnahan, H. A. Luther & J. O. Wilkes. *Applied Numerical Methods*. Chapter 5: System of equations, pp. 269-340. John Wiley & Sons, Inc. New York, USA, 1969.
- D1.** M. H. Diskin. Some dimensional considerations in the unit hydrograph theory. *Journal of Hydrology*, Vol. 42, pp. 199-208. 1979.
- F1.** D. C. Farden. Solution of a Toeplitz set of linear equations. *I.E.E.E. Trans. Antennas & Propag.* AP-24, pp. 906-907. 1976.
- F2.** O. A. Fuentes Mariles y P. Martínez Austria. *Introducción a los métodos numéricos aplicados a la hidráulica*. Capítulo 3: Solución de sistemas de ecuaciones lineales, pp. 31-55. Serie Divulgación 5. Coordinación de Investigación. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. Jiutepec, Morelos. 1988.
- H1.** F. E. Hohn. *Algebra de matrices*. Capítulo 3: Inversa de una matriz, pp. 115-137. Editorial Trillas. México, D. F. 1979.
- H2.** R. W. Hornbeck. *Numerical Methods*, Chapter 6, theme 6.1: Basic matrix terminology and operations, pp. 85-88. Quantum Publishers, Inc. New York, U.S.A. 1975.
- K1.** L. S. Kuchment. Solution of inverse problems for linear flow models. *Soviet Hydrology Select Papers*, Vol. 2, pp. 194-199. 1967.
- L1.** R. K. Linsley, M. A. Kohler y J. L. H. Paulhus. *Hidrología para Ingenieros*. Capítulo 7: Hidrogramas de Crecientes, pp. 183-210. Editorial McGraw-Hill Latinoamericana, S.A. Bogotá, Colombia. 1977. 2a. edición.

- M1.** L. W. Mays & L. Coles. Optimization of unit hydrograph determination. *Journal of Hydraulics Division*, Vol. 106, No. HY1, pp. 85-97. 1980.
- M2.** L. W. Mays & C-K. Taur. Unit hydrographs via nonlinear programming. *Water Resources Research*, Vol. 18, No. 4, pp. 744-752. 1982.
- M3.** D. D. McCracken y W. S. Dorn. *Métodos Numéricos y Programación Fortran*. Capítulo 8: Ecuaciones algebraicas lineales simultáneas, pp. 243-300, Editorial Limusa. México, D. F. 1966.
- N1.** D. W. Newton & J. W. Vinyard. Computer-determined unit hydrograph from floods. *Journal of Hydraulics Division*, Vol.93, No. HY5, pp. 219-235. 1967.
- P1.** L. Poole, M. Borchers y D. M. Castlewitz. *Algunos programas de uso común en Basic*. Programas: Multiplicación matricial e inversión matricial, pp. 113-118. Libros McGraw-Hill de México. 1983.
- S1.** K. P. Singh. Unit hydrograph - A comparative study. *Water Resources Bulletin*, Vol. 12, No. 2, pp. 381-392. 1976.
- S2.** Secretaria de Recursos Hidráulicos. *Boletín Hidrológico No. 40*, Región Hidrológica No. 9, Sonora Sur. Tomo III, periodo 1970-1974. SRH. México, D. F. 1975.
- V1.** W. Viessman, J. W. Knapp, G. L. Lewis & T. E. Harbaugh. *Introduction to Hydrology*. Appendix A: Matrices, pp. 675-678. Harper & Row Publishers. New York, USA. 1977. Second edition.

## PCN6: MULMA

```
1000 REM PROGRAMA "MULMA" (MULTiplicacion de MATrices)
1010 REM SE INTRODUCEN LAS DIMENSIONES DE LAS MATRICES
1020 CLS:PRINT"PROGRAMA PARA MULTIPLICAR DOS MATRICES":PRINT
1030 INPUT"DIMENSIONES DE LA MATRIZ A (R,C):";RA,CA
1040 INPUT"DIMENSIONES DE LA METRIZ B (R,C):";RB,CB
1050 DIM A(RA,CA),B(RB,CB)
1060 REM SE PRUEBA SI LAS MATRICES SON CONFORMABLES
1070 IF CA<>RB THEN 1080 ELSE 1100
1080 PRINT"ERROR:LAS MATRICES NO SON CONFORMABLES":END
1090 REM SE INTRODUCEN LOS ELEMENTOS DE CADA MATRIZ
1100 PRINT:PRINT"ELEMENTOS DE LA MATRIZ A:"
1110 FOR J=1 TO RA:PRINT"  RENGLON ";J
1120 FOR I=1 TO CA:PRINT"      COLUMNA ";I;:INPUT" = ";A(J,I)
1130 NEXT I,J
1140 PRINT:PRINT"ELEMENTOS DE LA MATRIZ B: "
1150 FOR J=1 TO RB:PRINT"  RENGLON ";J
1160 FOR I=1 TO CB:PRINT"      COLUMNA ";I;:INPUT" = ";B(J,I)
1170 NEXT I,J
1180 REM SE REALIZA LA MULTIPLICACION
1190 PRINT:PRINT"ELEMENTOS DE LA MATRIZ RESULTANTE:":PRINT
1200 FOR I=1 TO RA:FOR J=1 TO CB
1210 SUM=0:FOR K=1 TO CA
1220 SUM=SUM+A(I,K)*B(K,J):NEXT K
1230 PRINT USING "####.####";SUM;
1240 NEXT J:PRINT:NEXT I
1250 END
```



## PCN7: INVMA

```
1000 REM PROGRAMA "INVMA" (INVersion de una Matriz)
1010 REM SE INTRODUCE EL ORDEN O DIMENSION DE LA MATRIZ
1020 CLS:PRINT"PROGRAMA PARA INVERTIR UNA MATRIZ";PRINT
1030 INPUT"DIMENSION DE LA MATRIZ CUADRADA:";D
1040 DIM A(D,D),I(D,D)
1050 REM SE INTRODUCEN LOS ELEMENTOS LA MATRIZ
1060 PRINT:PRINT"ELEMENTOS DE LA MATRIZ:"
1070 FOR J=1 TO D:PRINT" REGLON ";J
1080 FOR I=1 TO D:PRINT"     COLUMNA ";I;:INPUT" = ";A(J,I)
1090 NEXT I:I(J,J)=1
1100 NEXT J:PRINT:PRINT
1110 REM SE MUESTRA LA MATRIZ POR INVERTIR
1120 FOR I=1 TO D:FOR J=1 TO D
1130 PRINT A(I,J);" ";:NEXT J
1140 PRINT:NEXT I
1150 PRINT:PRINT"LA SOLUCION ES:":PRINT
1160 REM INICIA LA INVERSION MATRICIAL
1170 FOR J=1 TO D:FOR I=J TO D
1180 IF A(I,J)<>0 THEN 1210
1190 NEXT I
1200 PRINT"LA MATRIZ ES SINGULAR":END
1210 FOR K=1 TO D:Z=A(J,K)
1220 A(J,K)=A(I,K):A(I,K)=Z
1230 Z=I(J,K):I(J,K)=I(I,K)
1240 I(I,K)=Z:NEXT K
1250 F=1/A(J,J)
1260 FOR K=1 TO D
1270 A(J,K)=F*A(J,K)
1280 I(J,K)=F*I(J,K)
1290 NEXT K
1300 FOR H=1 TO D
1310 IF H=J THEN 1370
1320 F=-A(H,J)
1330 FOR K=1 TO D
1340 A(H,K)=A(H,K)+F*A(J,K)
1350 I(H,K)=I(H,K)+F*I(J,K)
1360 NEXT K
1370 NEXT H,J
1380 REM SE IMPRIME LA MATRIZ INVERSA
1390 FOR I=1 TO D:FOR J=1 TO D
1400 PRINT USING"#####.#####";I(I,J);
1410 NEXT J:PRINT:NEXT I
1420 END
```

## PCN8: GAUSS

```
1000 REM PROGRAMA "GAUSS"
1010 REM SE INTRODUCEN LOS COEFICIENTES DE LA MATRIZ AUMENTADA
1020 CLS:PRINT"SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES"
1030 PRINT"      POR MEDIO DEL ALGORITMO DE G A U S S":PRINT
1040 PRINT"SE INTRODUCEN LOS COEFICIENTES DE LA MATRIZ AUMENTADA:"
1050 PRINT:INPUT"ORDEN DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES";N:PRINT
1060 DIM A(N,N+1),X(N),C(N,N+1),M(N+1)
1070 FOR I=1 TO N
1080 PRINT"SE INTRODUCEN LOS COEFICIENTES DEL RENGLON ";I;
1090 PRINT" DE LA MATRIZ AUMENTADA:"
1100 FOR J=1 TO N+1
1110 PRINT"A(";I;",";J;")= ";:INPUT A(I,J)
1120 NEXT J,I
1130 REM INICIA ALGORITMO DE GAUSS
1140 I=1
1150 IF A(I,I)<>0 THEN 1240
1160 P=I+1
1170 IF A(I,P)<>0 THEN 1200
1180 IF P>=N THEN 1370
1190 P=P+1:GOTO 1170
1200 FOR J=1 TO N+1
1210 C(I,J)=A(I,J):NEXT J
1220 FOR J=1 TO N+1
1230 A(I,J)=A(P,J):A(P,J)=C(I,J):NEXT J
1240 FOR J=I+1 TO N
1250 M(J)=A(J,I)/A(I,I):NEXT J
1260 FOR J=I+1 TO N:FOR P=1 TO N+1
1270 A(J,P)=A(J,P)-M(J)*A(I,P):NEXT P,J
1280 I=I+1
1290 IF I<N THEN 1150
1300 IF A(I,I)=0 THEN 1370
1310 X(N)=A(N,N+1)/A(N,N)
1320 FOR I=N-1 TO 1 STEP-1
1330 S=0:FOR J=I+1 TO N
1340 S=S+A(I,J)*X(J):NEXT J
1350 X(I)=(A(I,N+1)-S)/A(I,I):NEXT I
1360 GOTO 1380
1370 PRINT:PRINT"EL SISTEMA NO TIENE SOLUCION UNICA":GOTO 1420
1380 PRINT:PRINT"LA SOLUCION DEL SISTEMA ES:":PRINT
1390 FOR I=1 TO N
1400 PRINT"X(";I;")=",X(I)
1410 NEXT I
1420 END
```

## PCN9: JACOBI

```

1000 REM PROGRAMA "JACOBI"
1010 REM LOS VALORES INICIALES SON X(I)=0;I=1,2...,N Y LA TOL=0.00001
1020 REM SE ACCESAN DATOS BASICOS Y COEFICIENTES DE ECUACIONES
1030 CLS:PRINT"SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES SIMULTANEAS"
1040 PRINT"      POR MEDIO DEL METODO ITERATIVO DE  J A C O B I":PRINT
1050 PRINT:INPUT"No.DE ECUACIONES DEL SISTEMA: ";N:NMI=100:PRINT
1060 DIM A(N,N),B(N),X(N,100)
1070 PRINT"SE INTRODUCEN ELEMENTOS DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES:"
1080 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N
1090 PRINT"REGLON";I;:PRINT"COEFICIENTE ";J;:INPUT A(I,J)
1100 NEXT J:PRINT:NEXT I:PRINT
1110 PRINT"SE INTRODUCE EL VECTOR DE TERMINOS INDEPENDIENTES:"
1120 FOR I=1 TO N
1130 PRINT"ELEMENTO DEL REGLON";I;:INPUT B(I)
1140 NEXT I:K=1
1150 IF K>NMI THEN 1370
1160 FOR I=1 TO N:S=0:FOR J=1 TO N
1170 IF J=I THEN 1190
1180 S=S+(-A(I,J)*X(J,K-1))
1190 NEXT J
1200 X(I,K)=(S+B(I))/A(I,I)
1210 NEXT I
1220 REM SE REvisa SI SE CUMPLE YA LA TOLERANCIA
1230 ITO=0:FOR I=1 TO N
1240 IF ABS(X(I,K)-X(I,K-1))<.00001 THEN ITO=ITO+1
1250 NEXT I:IF ITO=N THEN 1390
1260 REM INICIA IMPRESION DE RESULTADOS PARCIALES
1270 IF IZ=0 THEN 1280 ELSE 1290
1280 PRINT:INPUT"DESEA IMPRESION DE RESULTADOS PARCIALES (S/N)":A$
1290 IZ=1:IF A$="N" OR A$="n" THEN 1350
1300 PRINT:PRINT"RESULTADOS PARCIALES:"
1310 PRINT"      ITERACION No. = ";K
1320 FOR I=1 TO N
1330 PRINT"INCOGNITA X(";I;:PRINT") =":PRINT USING"#####.#####";X(I,K)
1340 NEXT I:STOP
1350 K=K+1:GOTO 1150
1360 REM MENSAJE DE ERROR
1370 PRINT:PRINT"SE HA EXCEDIDO EL NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES"
1380 PRINT"IGUAL A 100. LOS VALORES FINALES FUERON:"GOTO 1410
1390 REM INICIA IMPRESION DE RESULTADOS FINALES
1400 PRINT"RESULTADOS FINALES:";:PRINT"      No.TOTAL DE ITERACIONES =";K
1410 FOR I=1 TO N
1420 PRINT"INCOGNITA X(";I;:PRINT") =":PRINT USING"#####.#####";X(I,K)
1430 NEXT I
1440 END

```

## PCN10: HUIMCS

```

1000 REM PROGRAMA "HUIMCS"(HU Identificado por Minimos Cuadrados Suavizados)
1010 REM OBTIENE ORDENADAS DEL HU POR SOLUCION MATRICIAL CON LA SUBROUTINA
1020 REM TPSTLV (FARDEN,1976),PARA SOLUCION DE UN SEL CON MATRIZ TOEPLITZ.
1030 REM EL PROGRAMA CONSTRUYE LA MATRIZ R DE PRECIPITACIONES EN EXCESO.
1040 REM PROGRAMA D.F.CAMPOS ARANDA. FEBRERO,1992. RESULTADOS IMPRESOS.
1050 REM SE INTRODUCE DATOS BASICOS
1060 CLS:PRINT"OBTENCION DE LAS ORDENADAS DEL HUI POR SOLUCION MATRICIAL"
1070 PRINT"          DE LA TECNICA DE MINIMOS CUADRADOS":PRINT
1080 INPUT"NOMBRE DEL PROY.O ESTACION HIDROMETRICA:";NE$:PRINT
1090 INPUT"INTRODUCIR EL NUMERO DE GASTOS DIRECTOS:";NQ
1100 INPUT"INTRODUCIR EL NUMERO DE PRECIP.EN EXCESO:";NR:M=NQ-NR+1
1110 DIM Q(NQ),U(NQ),P(NQ),R(NQ,M),RT(M,NQ)
1120 DIM RTR(M,M),RTQ(M),VCR(M),PS(M),E(M),QDC(NQ)
1130 PRINT:PRINT"INTRODUCIR PRECIPITACIONES EN EXCESO EN cm:"
1140 PRINT:FOR I=1 TO NR
1150 PRINT"PRECIPITACION EN EXCESO No.":PRINT I::INPUT P(I)
1160 NEXT I:PRINT
1170 PRINT:FOR I=1 TO NQ
1180 PRINT"INTRODUCIR GASTO DIRECTO No.":PRINT I::INPUT Q(I)
1190 NEXT I:PRINT
1200 INPUT"Que unidades son?      A:m^3/s      B:cm/h ";A$:PRINT
1210 IF A$="A" THEN G$="m^3/s" ELSE G$="cm/h"
1220 IF Z1=0 THEN K1=0:GOTO 1240
1230 PRINT:INPUT"INTRODUCIR EL PARAMETRO DE SUAVIZADO (K):";K1
1240 IF Z1=1 THEN 1450
1250 REM INICIA INTREGRACION DE LA MATRIZ R
1260 CLS:LOCATE 10,14:PRINT"INTEGRACION DE MATRICES"
1270 FOR K=1 TO NR:FOR I=1 TO NQ:FOR J=1 TO M
1280 IF I=J THEN R(I,J)=P(1):GOTO 1310
1290 IF (I+K)=J THEN R(I+K,J-K)=P(K+1):GOTO 1310
1300 IF I>M AND J=I-K THEN R(I,J)=P(K+1)
1310 NEXT J,I,K
1320 REM SE FORMA LA MATRIZ TRANSPUESTA RT
1330 FOR I=1 TO NQ:FOR J=1 TO M
1340 RT(J,I)=R(I,J):NEXT J,I
1350 REM SE CALCULA EL PRODUCTO DE RTxR=RTR
1360 FOR I=1 TO M:FOR J=1 TO M
1370 S=0:FOR K=1 TO NQ
1380 S=S+RT(I,K)*R(K,J)
1390 RTR(I,J)=S:NEXT K,J,I
1400 REM SE CALCULA EL PRODUCTO DE MATRICES RTxQ=RTQ
1410 FOR I=1 TO M:S=0:FOR K=1 TO NQ
1420 S=S+RT(I,K)*Q(K)
1430 RTQ(I)=S:NEXT K,I
1440 REM SE APLICA PARAMETRO DE SUAVIZADO
1450 FOR I=1 TO M:VCR(I)=RTR(I,1):NEXT I
1460 VCR(1)=VCR(1)+K1
1470 REM SE INICIALIZAN MATRICES DE TRABAJO
1480 FOR I=1 TO M:PS(I)=RTQ(I)
1490 E(I)=0:U(I)=0:NEXT I
1500 REM INICIAN CALCULOS DE LA SUBROUTINA TOEPLITZ
1510 LOCATE 12,14:PRINT"SOLUCION AL SISTEMA DE EC.LINEALES"
1520 NM1=M-1:CINV=1!/VCR(1)
1530 FOR J=1 TO NM1:VCR(J)=CINV*VCR(J+1)
1540 PS(J)=CINV*PS(J):NEXT J
1550 PS(M)=CINV*PS(M)
1560 U(1)=PS(1):E(1)=-VCR(1)
1570 AMB=1!-VCR(1)^2
1580 FOR JI=1 TO NM1:I1=JI+1
1590 THET=PS(I1):ET=-VCR(I1)

```

```

1600 FOR L1=1 TO JI:LI=JI-L1+1
1610 THET=THET-U(L1)*VCR(LI)
1620 ET=ET-VCR(L1)*E(LI):NEXT L1
1630 C1=THET/AMB:C2=ET/AMB
1640 I1=JI+1:IBAR=INT(I1/2)
1650 FOR L2=1 TO JI:LI=I1-L2
1660 U(L2)=U(L2)+C1*E(LI):NEXT L2
1670 FOR L3=1 TO IBAR:LI=I1-L3
1680 C3=E(L3):E(L3)=C3+C2*E(LI)
1690 E(LI)=E(LI)+C2*C3:NEXT L3
1700 IF (IBAR-JI/2)<=0 THEN 1720
1710 E(IBAR)=C3*(1+C2)
1720 U(I1)=C1:E(I1)=C2
1730 AMB=AMB-C2*ET:NEXT JI
1740 REM INICIA IMPRESION DE DATOS Y RESULTADOS
1750 LOCATE 14,14:PRINT"IMPRESION DE DATOS Y RESULTADOS"
1760 LPRINT" METODO DE MINIMOS CUADRADOS SUAVIZADOS PARA OBTENCION"
1770 LPRINT" DE LAS ORDENADAS DEL HIDROGRAMA UNITARIO":LPRINT
1780 LPRINT"NOMBRE DEL PROYECTO O EST. HIDROMETRICA: ";NE$:LPRINT
1790 LPRINT"PARAMETRO DE SUAVIZADO =":LPRINT USING"###.###";K1:LPRINT
1800 LPRINT" No. GASTO DIRECTO PRECIP. EN ORDENADAS GASTO DIRECTO"
1810 IF A$="A" THEN 1840
1820 LPRINT" OBSER. cm/h EXCESO EN cm DEL HU EN l/h CALC. EN cm/h"
1830 GOTO 1860
1840 LPRINT" OBSER.m^3/s EXCESO EN cm HU m^3/s/cm CALC. m^3/s"
1850 REM SE REALIZA LA CONVOLUCION
1860 FOR I=1 TO NQ:QDC(I)=0:NEXT I
1870 FOR I=1 TO M:FOR J=1 TO NR
1880 QDC(I+J-1)=QDC(I+J-1)+U(I)*P(J)
1890 NEXT J,I:SU=0
1900 FOR I=1 TO NQ
1910 LPRINT USING"###";I:LPRINT USING"#####.###";Q(I);
1920 LPRINT USING"#####.###";P(I);
1930 LPRINT USING"#####.###";U(I):SU=SU+U(I)
1940 LPRINT USING"#####.###";QDC(I)
1950 NEXT I:LPRINT
1960 REM SE REALIZA CALCULO DE ERROR MEDIO CUADRATICO
1970 S=0:FOR I=1 TO NQ
1980 S=S+(Q(I)-QDC(I))^2
1990 NEXT I:EMC=SQR(S/NQ)
2000 LPRINT"ERROR MEDIO CUADRATICO =":LPRINT USING"#####.###";EMC;
2010 LPRINT" ";G$:LPRINT"SUMA DE ORDENADAS DE HUI =";
2020 LPRINT USING"#####.###";SU:LPRINT
2030 PRINT:PRINT:PRINT"PRIMER ELEMENTO DE LA MATRIZ RTR: ";
2040 PRINT USING"###.###";RTR(1,1)
2050 PRINT:INPUT"DESEA ASIGNAR OTRO PARAMETRO DE SUAVIZADO (S/N)":B$
2060 IF B$="S" OR B$="s" THEN Z1=1:CLS:GOTO 1230
2070 PRINT:INPUT"DESEA IMPRESION DE LA MATRIZ R (S/N)":C$
2080 IF C$="N" OR C$="n" THEN 2130
2090 WIDTH "LPT1:",120:LPRINT"MATRIZ R:":LPRINT
2100 FOR I=1 TO NQ:FOR J=1 TO M
2110 LPRINT USING"###.###";R(I,J);
2120 NEXT J:LPRINT:NEXT I:LPRINT
2130 PRINT:INPUT"DESEA IMPRESION DE LA MATRIZ RTR (S/N)":D$
2140 IF D$="N" OR D$="n" THEN 2190
2150 LPRINT"MATRIZ RTR:":LPRINT
2160 FOR I=1 TO M:FOR J=1 TO M
2170 LPRINT USING"###.###";RTR(I,J);
2180 NEXT J:LPRINT:NEXT I:LPRINT
2190 END

```

# C

## apítulo 5:

### Ajuste de Curvas

#### Resumen

**A**l principio se destaca la importancia de la regresión y correlación en el diseño ingenieril y en particular en la Hidrología Superficial, citando ejemplos de sus aplicaciones clásicas. A continuación se describen con detalle los conceptos de regresión, correlación, diagrama de dispersión y principio de mínimos cuadrados, como bases para el desarrollo matemático detallado de la regresión y correlación lineales. En seguida, de manera intuitiva se generalizan los resultados anteriores, para establecer en forma matricial las ecuaciones normales del ajuste del polinomio de grado  $m$ . Posteriormente, se establece el concepto de regresión lineal múltiple, incluyendo el planteamiento matricial de su sistema de ecuaciones de ajuste. Finalmente, se describen con detalle las siguientes cuatro aplicaciones prácticas: primera, ampliación de la información hidrológica disponible; segunda, análisis de frecuencia de crecientes mediante mínimos cuadrados; tercera, transformación de funciones curvas a ecuaciones de polinomio de grado  $m$ , y cuarta, ajuste de regresiones lineales múltiples para obtener ecuaciones empíricas. Cada aplicación incluye un desarrollo numérico con datos reales.

#### 5.1 Conceptos de apoyo

##### Importancia de la regresión y correlación

En muchas áreas de la ingeniería es conveniente o necesario investigar si existen relaciones entre dos o más variables. Tales relaciones deben estar apoyadas en bases teóricas que establezcan claramente el principio de causa-efecto para tal fenómeno. La búsqueda de la relación se realiza por medio de las herramientas de la Estadística conocidas como regresión y correlación. Actualmente estos análisis están bastante difundidos y han conducido a desarrollar muchos procedimientos y algoritmos para diseños y revisiones en la ingeniería.

En el campo de la Hidrología Superficial, los análisis de regresión y correlación son una de las técnicas numéricas más antiguas que fueron utilizadas para deducir datos faltantes y ampliar registros, tanto pluviométricos como hidrométricos, con base en una o más estaciones cercanas <sup>[C9]</sup>. Actualmente sus aplicaciones son variadísimas, e incluyen la obtención de fórmulas empíricas <sup>[C1,C5]</sup> y el establecimiento de relaciones de carácter *regional*, por ejemplo entre el tamaño de las cuencas y su gasto máximo medio anual <sup>[C3]</sup>, o el escurrimiento promedio anual <sup>[K2]</sup>.

Son ejemplos típicos de las relaciones causa-efecto entre dos variables en la Hidrología Superficial, el estudio de los procesos <sup>[Y1]</sup> siguientes: lluvia-escurrimiento, sedimen-

to-gasto, contenido de oxígeno-temperatura del agua, etc. Dentro de las relaciones que involucran más variables se tienen los estudios del escurrimiento como resultado de la lluvia y de las características de la cuenca, tanto geométricas, como edafológicas, de cobertura vegetal y de contenido de humedad, etc.

Finalmente, como resultado de la disponibilidad de los sistemas de cómputo, muchos procedimientos que empleaban gráficas deben ser transformados a algoritmos numéricos y por ello es necesario representar curvas por ecuaciones que no sean subjetivas; entonces los análisis de regresión y correlación son extraordinariamente útiles.

### Conceptos de regresión y correlación

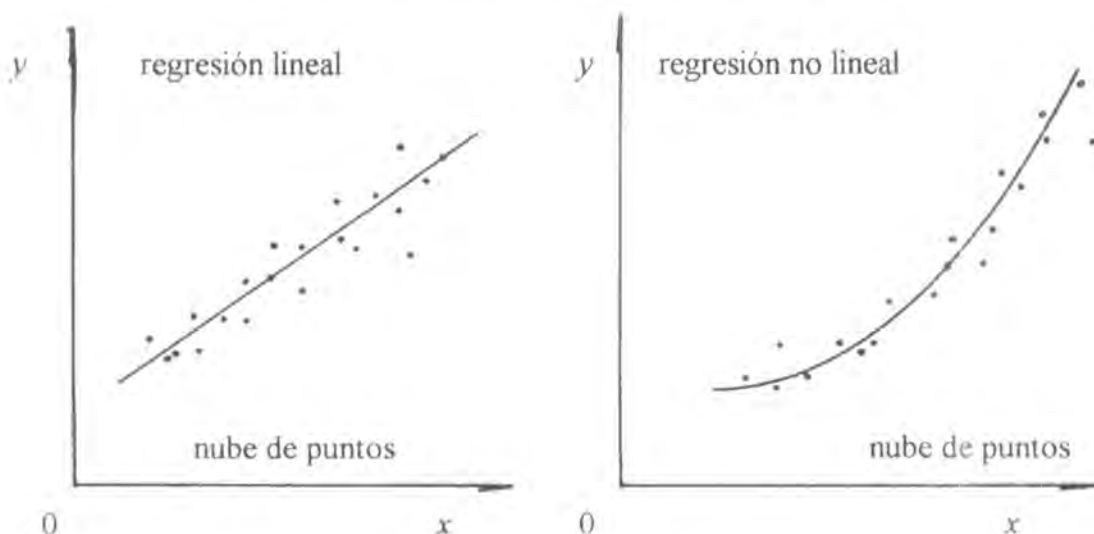
La diferencia entre regresión y correlación es bastante clara, la *regresión* se refiere a la obtención de la ecuación matemática que relaciona a la variable dependiente ( $y$ ), con otra ( $x$ ) u otras llamadas variables independientes ( $x_1, x_2, x_3$ , etc.), que son conocidas y por lo tanto, permiten estimar valores de  $y$  a partir de los de  $x$ . En contraste, la *correlación* mide o cuantifica el grado de dependencia o asociación entre las variables dependiente [ $y$ ] y la(s) dependiente(s) [ $x$ ], y está representada numéricamente por el llamado coeficiente de correlación.

### Diagrama de dispersión y modelos de regresión

Un diagrama o gráfica en la que se indican los valores experimentales o de la muestra disponible, dibujados sobre el plano cartesiano  $xy$ , se conoce como: *diagrama de dispersión*. Con base en tal diagrama se puede detectar si los datos siguen un modelo *lineal*, o uno *no lineal*; es decir, si los puntos se aproximan a una línea recta o a una curva. El diagrama de dispersión permite además definir la nube de puntos y en consecuencia los llamados *valores dispersos*, los cuales posiblemente sean datos erróneos. En la Figura 5.1 se ilustra lo anterior.

Figura 5.1

### Diagramas de dispersión y modelos de regresión



La detección de los valores dispersos permite que éstos sean eliminados del análisis de regresión, mejorando el ajuste de la recta o curva a la nube de puntos, lo cual se

refleja en un mayor coeficiente de correlación. El número de puntos que es factible eliminar, depende de varios factores como son: número de puntos dibujados ( $n$ ), naturaleza de los datos, forma de la nube de puntos, etc. Con fines prácticos y en una primera aproximación se puede aceptar que el 10% de  $n$  sean los puntos que es posible eliminar para mejorar el ajuste [C5].

La ecuación o regresión de la relación o modelo lineal entre dos grupos de datos, se representa por medio de una línea recta o polinomio de grado uno, en cambio, una relación no lineal (curva) se reproduce matemáticamente a través de un polinomio de grado ( $m$ ) superior, esto es:

$$\text{regresión lineal de dos variables:} \quad y = a_0 + a_1 \cdot x$$

$$\text{regresión no lineal de dos variables:} \quad y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_m \cdot x^m$$

$$\text{regresión lineal múltiple:} \quad y = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_m \cdot x_m$$

### Principio de mínimos cuadrados

Para evitar un criterio subjetivo al determinar la recta o curva que mejor se ajusta o representa a la nube de puntos, es necesario una definición rígida y precisa de la "recta o curva de mejor ajuste". Lo anterior se logra con base en el principio de mínimos cuadrados, el cual establece que de todas las rectas o curvas que representan a una nube de puntos, la que tiene la suma mínima de los cuadrados de las distancias de cada punto a tal recta o curva, es la de mejor ajuste. Se utilizan los cuadrados de las distancias, porque de esa forma no importa si el punto está por arriba o por debajo de la recta o curva de mejor ajuste. Existen tres formas de medir la distancia de cada punto a la recta de mejor ajuste, éstas son: perpendicularmente, verticalmente o paralela al eje de las ordenadas y horizontalmente o paralela al eje de las abscisas; en cada caso se definen las *rectas*: ortogonal, de  $y$  sobre  $x$  y de  $x$  sobre  $y$ .

Para el caso de una nube de puntos que define un comportamiento lineal, resulta lógico esperar que la recta de mejor ajuste cumpla con la condición siguiente: que pase por el centro de gravedad o punto imaginario que representa a dicha nube de puntos, mismo que está definido por las coordenadas  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ , es decir las medias aritméticas de todos los datos.

## 5.2 Regresión y correlación lineales

### Recta de regresión de $y$ sobre $x$

Dado un conjunto de parejas de datos representados por las variables dependiente  $y$  e independiente  $x$ , que definen una relación lineal, la ecuación general de la recta que las relaciona y representa es un polinomio de grado uno, con ordenada al origen  $b$  y pendiente  $m$ , es decir:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x = b + m \cdot x \quad (5.1)$$

El principio de mínimos cuadrados, para las distancias verticales ( $e$ ) de cada punto ( $y_i$ ) a la recta ( $\hat{y}$ ) estará dado por la expresión siguiente:

$$\sum_1^n e_i^2 = \sum_1^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_1^n [y_i - (b + m \cdot x_i)]^2 = \sum_1^n (y_i - m \cdot x_i - b)^2 = f(m, b)$$

en donde  $n$  es el número de parejas de datos. Para obtener el mínimo de  $e$  se deriva parcialmente  $f$  primero con respecto a  $b$  y después a  $m$ , y se iguala a cero, esto es:



$$\frac{\delta f}{\delta b} = \sum_1^n \frac{\delta}{\delta b} (y_i - m \cdot x_i - b)^2 = \sum_1^n 2(y_i - m \cdot x_i - b)(-1) = -2 \sum_1^n (y_i - m \cdot x_i - b) = 0$$

$$\sum_1^n y_i - m \sum_1^n x_i - \sum_1^n b = 0$$

reacomodando se tiene:

$$\sum_1^n y_i = m \sum_1^n x_i + n \cdot b = 0 \quad (5.2)$$

despejando a  $b$  se obtiene:

$$b = \frac{\sum_1^n y_i}{n} - m \frac{\sum_1^n x_i}{n} \quad \text{es decir que:} \quad b = \bar{y} - m \bar{x} \quad (5.3)$$

expresión que indica que efectivamente la mejor recta de ajuste pasa por el centro de gravedad de la nube de puntos. Ahora:

$$\frac{\delta f}{\delta m} = \sum_1^n \frac{\delta}{\delta m} (y_i - m \cdot x_i - b)^2 = \sum_1^n 2(y_i - m \cdot x_i - b)(-x_i) = -2 \sum_1^n (y_i - m \cdot x_i - b)x_i = 0$$

$$\sum_1^n (y_i \cdot x_i - m \cdot x_i^2 - b \cdot x_i) = 0$$

reacomodando se tiene:

$$b \sum_1^n x_i = \sum_1^n x_i \cdot y_i - m \sum_1^n x_i^2 \quad (5.4)$$

despejando a  $b$  se obtiene:

$$b = \frac{\sum_1^n x_i \cdot y_i - m \sum_1^n x_i^2}{\sum_1^n x_i} = \frac{\sum_1^n x_i \cdot y_i - m \sum_1^n x_i^2}{n \bar{x}} \quad (5.5)$$

igualando las ecuaciones 5.3 y 5.5 y despejando a  $m$  se obtiene:

$$\sum_1^n x_i \cdot y_i - m \sum_1^n x_i^2 = n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} - n \cdot m \cdot \bar{x}^2$$

$$m \left( \sum_1^n x_i^2 - n \bar{x}^2 \right) = \sum_1^n x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}$$

por lo tanto:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2} \quad (5.6)$$

El denominador de la expresión anterior en notación estadística corresponde a la variancia de las  $x$ , es decir, el segundo momento central; en cambio el numerador, es la covariancia, o sea el segundo momento central por  $y_i$ . Entonces:

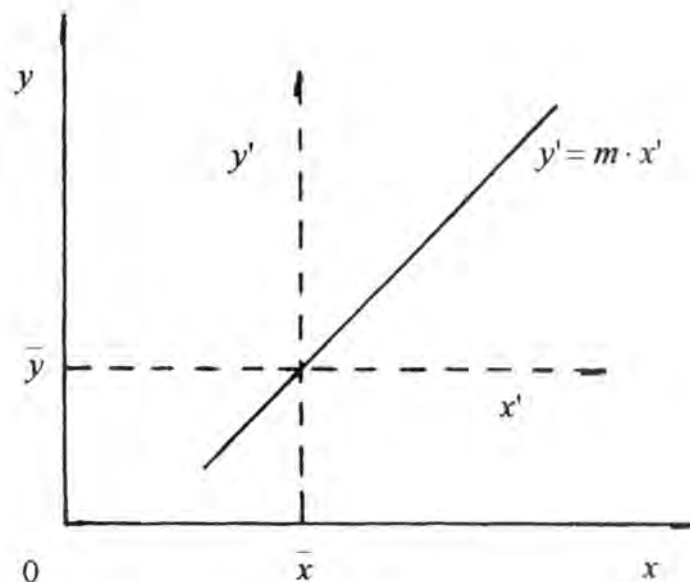
$$m = \frac{\text{Covariancia}}{\text{Variancia de las } x} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}$$

#### Coefficiente de correlación lineal

En la Figura 5.2 se muestra la recta de mejor ajuste referida a unos ejes  $x'$ ,  $y'$  que pasan por el centro de gravedad de la nube de puntos ( $b = 0$ ), entonces prescindiendo del subíndice  $i$ , el principio de mínimos cuadrados se transforma en:

Figura 5.2

#### Gráfica auxiliar para la deducción del coeficiente de correlación lineal



$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n e_i^2 &= \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - m \cdot x_i)^2 = \sum_{i=1}^n [y_i^2 - 2m \cdot x_i y_i + (m \cdot x_i)^2] = \\ &= \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2m \sum_{i=1}^n x_i y_i + m^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{aligned}$$

pero ahora:

$$m = \frac{\sum_1^n x^i y^i}{\sum_1^n x^{i2}} \quad \text{ya que} \quad \bar{x} = \bar{y} = 0$$

entonces sustituyendo a  $m$  y reduciendo se tiene:

$$\sum_1^n e_i^2 = \sum_1^n y^{i2} - \frac{(\sum_1^n x^i y^i)^2}{\sum_1^n x^{i2}} = \sum_1^n y^{i2} \left[ 1 - \frac{(\sum_1^n x^i y^i)^2}{\sum_1^n x^{i2} \cdot \sum_1^n y^{i2}} \right]$$

regresando a los ejes originales  $x, y$ , y considerando el subíndice  $i$  se obtiene:

$$\sum_1^n e_i^2 = \sum_1^n (y_i - \bar{y})^2 \left\{ 1 - \frac{\left[ \sum_1^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right]^2}{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_1^n (y_i - \bar{y})^2} \right\}$$

haciendo el quebrado igual a  $r_{xy}^2$  se obtiene finalmente:

$$\sum_1^n e_i^2 = \sum_1^n (y_i - \bar{y})^2 [1 - r_{xy}^2]$$

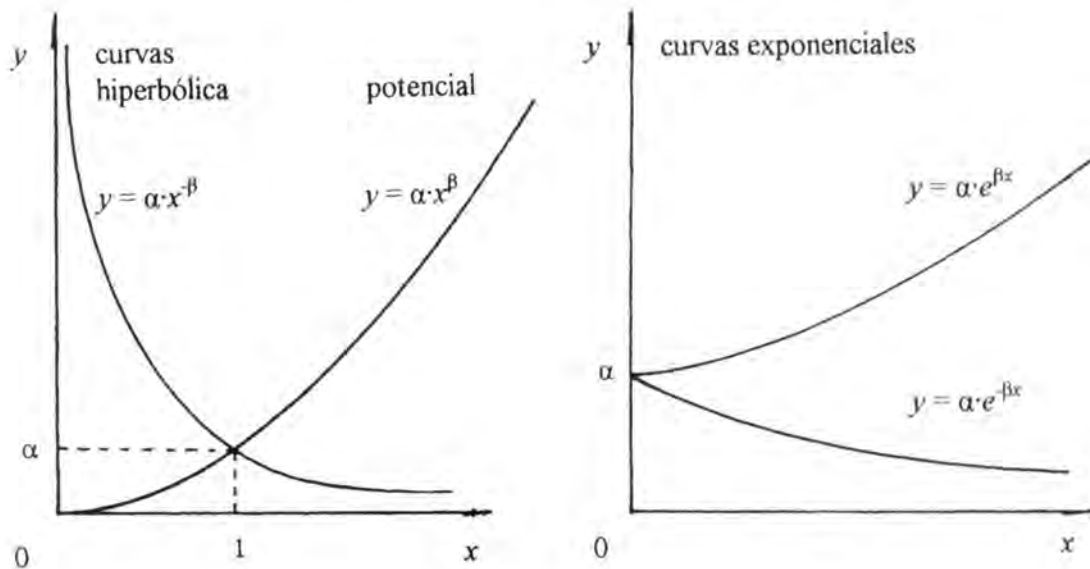
Para que la suma de los errores sea cero, es decir, que los puntos o datos están sobre la recta de regresión,  $r_{xy}$  debe ser igual a 1.00; en cambio, cuando  $r_{xy} = 0$  la suma de los errores es máxima, indicando que los puntos están dispersos y no definen un modelo lineal. El máximo valor de  $e_i^2$  es la variancia de la variable dependiente. Cuando  $r_{xy}$  es negativo, la dependencia es inversa, esto es, cuando crece  $x$ ,  $y$  decrece y la pendiente de la recta de regresión es negativa. En notación estadística se tiene que el coeficiente de correlación lineal es:

$$r_{xy} = \frac{\left[ \sum_1^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right]}{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_1^n (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\text{Covariancia}}{\sqrt{Sx^2 \cdot Sy^2}} \quad (5.7)$$

### Linealización de curvas

En la Figura 5.3 se ilustran varios tipos de curvas que son ampliamente utilizadas para representar datos experimentales.

Figura 5.3  
Curvas empíricas más comunes



La curva potencial o *parabólica* ( $\beta > 0$ ) pasa por el origen y el punto  $(1, \alpha)$  y cuando aumenta  $x$  también lo hace  $y$ ; en cambio la curva *hiperbólica* ( $\beta < 0$ ) pasa por el punto  $(1, \alpha)$ , es asíntota a los ejes coordenados y cuando  $x$  aumenta,  $y$  disminuye. La fórmula matemática de ambas curvas es:

$$y = \alpha \cdot x^\beta \quad (5.8)$$

aplicando logaritmos se tiene:

$$\log y = \log \alpha + \beta \log x$$

haciendo las equivalencias siguientes:

$$\begin{array}{ll} \log y = Y & \log x = X \\ \log \alpha = b & \beta = m \end{array}$$

se obtiene la ecuación 5.1, de manera que  $\alpha = 10^b$

**Ejemplo 5.1:** Dibujar los siguientes datos experimentales <sup>[6.1]</sup> para comprobar que éstos siguen una curva potencial y obtener su ecuación.

Pareja	$x$	$y$
1	73	29.4
2	83	33.3
3	88	35.2
4	93	37.2
5	113	45.8
6	133	55.2
7	153	65.6
8	173	77.3

Aplicando el programa PCN1: MODLIN a los logaritmos decimales de los datos  $y, x$  se obtienen:

$$\begin{array}{lll} n = 8 & b = -0.6239 & \therefore \alpha = 0.2377 \\ m = 1.117 & r_{xy} = 0.9987 & \end{array}$$

entonces la expresión buscada es:

$$y = 0.2377 x^{1.117}$$

□

Otra familia de curvas que son bastante utilizadas son las de decaimiento ( $\beta < 0$ ) o crecimiento ( $\beta > 0$ ) exponencial, las cuales pasan por el punto  $(0, \alpha)$  y tienen por fórmula general la siguiente:

$$y = \alpha \cdot e^{\beta x} \quad (\alpha > 0) \quad (5.9)$$

Tomando logaritmos y haciendo las siguientes equivalencias se obtiene la ecuación 5.1 de la recta:

$$\begin{array}{ll} \log y = Y & \log \alpha = b \\ \beta \log e = m & x = X \end{array}$$

**Ejemplo 5.2:** Dibujar los datos experimentales <sup>[11]</sup> del Ejemplo 1.2 para comprobar que éstos siguen una curva de decaimiento exponencial y obtener su ecuación. Aplicando el PCN1: MODLIN con las equivalencias indicadas se obtienen:

$$\begin{array}{lll} b = 2.0014 & \therefore \alpha = 100.328 \\ m = -0.011747 = \beta \log e & \therefore \beta = -0.02705 \\ r_{xy} = -0.9968 & & \end{array}$$

por lo tanto:

$$y = 100.328 e^{-0.02705 x}$$

□

Existen otras linealizaciones factibles para ecuaciones que incluyen dos o más constantes, éstas se pueden consultar en las referencias [L1, A1 y Y1].

### 5.3 Regresión y correlación polinomial

#### Polinomio cuadrático o parabólico

Este polinomio se denomina de segundo orden porque la variable dependiente  $x$  está elevada a tal potencia, es decir:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$

La ecuación 5.2 se puede reacomodar y escribir en notación de polinomios como:

$$n \cdot b + m \sum_1^n x_i = \sum_1^n y_i$$

$$n \cdot a_0 + a_1 \sum_1^n x_i = \sum_1^n y_i^2$$

la generalización de la ecuación anterior al polinomio de segundo orden será:

$$n \cdot a_0 + a_1 \sum_1^n x_i + a_2 \sum_1^n x_i^2 = \sum_1^n y_i \quad (5.10)$$

Por otra parte, la ecuación 5.4 también se puede reacomodar y escribir en notación de polinomios como:

$$b \sum_1^n x_i + m \sum_1^n x_i^2 = \sum_1^n x_i \cdot y_i$$

$$a_0 \sum_1^n x_i + a_1 \sum_1^n x_i^2 = \sum_1^n x_i \cdot y_i$$

la generalización de la ecuación anterior al polinomio de segundo orden será:

$$a_0 \sum_1^n x_i + a_1 \sum_1^n x_i^2 + a_2 \sum_1^n x_i^3 = \sum_1^n x_i \cdot y_i \quad (5.11)$$

Observando la estructura de las ecuaciones 5.10 y 5.11 se puede construir intuitivamente la tercera ecuación necesaria, la cual se hubiera obtenido al derivar parcialmente la función  $f$  con respecto a  $a_2$ , ésta es:

$$a_0 \sum_1^n x_i^2 + a_1 \sum_1^n x_i^3 + a_2 \sum_1^n x_i^4 = \sum_1^n x_i^2 \cdot y_i \quad (5.12)$$

Las ecuaciones 5.10 a 5.12 en arreglo matricial quedan como sigue:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_1^n x_i & \sum_1^n x_i^2 \\ \sum_1^n x_i & \sum_1^n x_i^2 & \sum_1^n x_i^3 \\ \sum_1^n x_i^2 & \sum_1^n x_i^3 & \sum_1^n x_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_1^n y_i \\ \sum_1^n x_i \cdot y_i \\ \sum_1^n x_i^2 \cdot y_i \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

### Polinomios de grado 3 (cúbico) y de grado $m$

Su ecuación respectiva es la siguiente:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \dots + a_m \cdot x^m$$

La generalización del sistema 5.13 al polinomio de grado  $m$ , en forma matricial e incluyendo en tal sistema a las ecuaciones del polinomio de grado 3 o cúbico, serán:

en notación matricial se tiene:  $\mathbf{X} \cdot \underline{a} = \mathbf{B} \quad \therefore \quad \underline{a} = \mathbf{X}^{-1} \cdot \mathbf{B}$

siendo  $\mathbf{X}$  una matriz cuadrada de coeficientes con inversa  $\mathbf{X}^{-1}$ ,  $\underline{a}$  un vector columna de incógnitas y  $\mathbf{B}$  otro vector columna de términos independientes, todas estas matrices son de  $m+1$  renglones.

$$\begin{bmatrix}
 n & \sum_1^n x_i & \sum_1^n x_i^2 & \sum_1^n x_i^3 & \dots & \sum_1^n x_i^m \\
 \sum_1^n x_i & \sum_1^n x_i^2 & \sum_1^n x_i^3 & \sum_1^n x_i^4 & \dots & \sum_1^n x_i^{m+1} \\
 \sum_1^n x_i^2 & \sum_1^n x_i^3 & \sum_1^n x_i^4 & \sum_1^n x_i^5 & \dots & \sum_1^n x_i^{m+2} \\
 \sum_1^n x_i^3 & \sum_1^n x_i^4 & \sum_1^n x_i^5 & \sum_1^n x_i^6 & \dots & \sum_1^n x_i^{m+3} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \sum_1^n x_i^m & \sum_1^n x_i^{m+1} & \sum_1^n x_i^{m+2} & \sum_1^n x_i^{m+3} & \dots & \sum_1^n x_i^{2m}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 a_0 \\
 a_1 \\
 a_2 \\
 a_3 \\
 \vdots \\
 a_m
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \sum_1^n y_i \\
 \sum_1^n x_i y_i \\
 \sum_1^n x_i^2 y_i \\
 \sum_1^n x_i^3 y_i \\
 \vdots \\
 \sum_1^n x_i^m y_i
 \end{bmatrix}
 \quad (5.14)$$

### Coefficiente de determinación y error estándar de la estimación

La medida que cuantifique la *correlación* de un ajuste polinomial debe estar indudablemente relacionada con la dispersión de la variable dependiente  $Sy^2$  y con la suma de los cuadrados de los residuos  $Se^2$ . La primera mide la dispersión existente antes de la regresión, es el segundo momento central y por lo tanto su expresión es:

$$Sy^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (5.15)$$

La segunda equivale a la dispersión que existe después de la regresión polinomial de grado  $m$ , por lo tanto es igual a:

$$Se^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 \dots - a_m x_i^m)^2 \quad (5.16)$$

La medida de la correlación debe ser grande cuando el grado de asociación sea alto y pequeña cuando éste sea bajo, además debe ser independiente de las unidades de las variables. Bajo tales condiciones se define el coeficiente de determinación ( $R^2$ ) como:

$$R^2 = \frac{Sy^2 - Se^2}{Sy^2} \quad (5.17)$$

El numerador de la expresión anterior cuantifica la mejora o reducción del error debido a la regresión polinomial, por lo tanto  $R^2$  al expresarse en % indica qué porcentaje de la variabilidad presente es explicada por la curva que se ajusta, ya que si  $Se^2 = 0$  se tiene que  $R^2 = 100\%$ . Como  $Se^2$  siempre es menor que  $Sy^2$ , entonces  $R^2$  varía de cero a la unidad (100%). La raíz cuadrada de  $R^2$  es una medida del coeficiente de correlación polinomial.

Otra medida sumamente importante de la bondad del ajuste de la regresión polinomial es el llamado error estándar de la estimación (EEE), es la magnitud media de los errores o dispersiones que se tendrán al utilizar la curva que se ajusta, por lo tanto su expresión es la siguiente:

$$EEE = \sqrt{\frac{Se^2}{n - (m + 1)}} \quad (5.18)$$

el número entre paréntesis representa los grados de libertad perdidos, ya que se estiman  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$  incógnitas.

**Programa de cómputo REGPOL**

Este programa es una adaptación del expuesto en la referencia [P2], desarrolla las ecuaciones 5.14 a 5.18 y su listado se presenta al final del capítulo como PCN11: REGPOL (REGresión POLinomial). Aunque su notación es diferente a la utilizada en las ecuaciones que resuelve, su interpretación y comprensión no debe ofrecer grandes dificultades. La inversión de la matriz de coeficientes se realiza por el método de Gauss-Jordan modificado, al igual que en el programa PCN7: INVMA. El programa REGPOL permite realizar ajustes de polinomios de grado 1 (recta) a grado 10.

**Ejemplo 5.3:** Para los siguientes datos experimentales, obtener una curva cuadrática que los represente y sus indicadores de bondad de ajuste.

x	0	1	2	3	4	5
y	2.1	7.7	13.6	27.2	40.9	61.1

A partir de los datos, el sistema 5.13 adquiere los valores siguientes:

$$\begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 152.6 \\ 585.6 \\ 2488.8 \end{bmatrix}$$

resolviendo con alguno de los métodos expuestos en el capítulo 4 se obtienen:  $a_0 = 2.4786$ ,  $a_1 = 2.3593$  y  $a_2 = 1.8607$ , por lo tanto el polinomio buscado será:

$$\hat{y} = 2.4786 + 2.3593 \cdot x + 1.8607 \cdot x^2$$

para la evaluación del  $R^2$  y EEE se realiza previamente la tabulación siguiente. Ahora con base en las ecuaciones 5.17 y 5.18 se obtienen:

$$R^2 = \frac{2513.3933 - 3.7466}{2513.3933} = 0.9985 \quad \therefore \quad r = 0.99925$$

No.	$y_i$	$\hat{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \hat{y})^2$
1	2.1	2.4786	544.4429	0.1433
2	7.7	6.6986	314.4699	1.0028
3	13.6	14.6400	140.0270	1.0816
4	27.2	26.3028	3.1212	0.8050
5	40.9	41.6870	239.2188	0.6194
6	61.1	60.7926	1272.1135	0.0945
$\sum_{i=1}^6$	152.6		2513.3933	3.7466
	$\bar{y} = 25.4333$	—		

$$EEE = \sqrt{\frac{3.7466}{6 - (2 + 1)}} = 1.1175$$

□



## 5.4 Regresión y correlación múltiple

Esta regresión es bastante útil cuando la variable dependiente ( $y$ ) no está relacionada únicamente con otra ( $x$ ), sino que depende de varias las cuales no están correlacionadas entre sí. La expresión de este modelo de regresión ya fue expuesto y es:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_m \cdot x_m \quad (5.19)$$

Las ecuaciones normales se obtienen igual que para la recta de regresión de  $y$  sobre  $x$  (inciso 5.2), pero ahora la función  $f$  depende de  $x_m$  variables y por lo tanto se establece igual número de ecuaciones; ya en forma matricial el sistema es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_1^n x_{1i} & \sum_1^n x_{2i} & \dots & \sum_1^n x_{mi} \\ \sum_1^n x_{1i} & \sum_1^n x_{1i}^2 & \sum_1^n x_{1i} x_{2i} & \dots & \sum_1^n x_{1i} x_{mi} \\ \sum_1^n x_{2i} & \sum_1^n x_{2i} x_{1i} & \sum_1^n x_{2i}^2 & \dots & \sum_1^n x_{2i} x_{mi} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_1^n x_{mi} & \sum_1^n x_{mi} x_{1i} & \sum_1^n x_{mi} x_{2i} & \dots & \sum_1^n x_{mi}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_1^n y_i \\ \sum_1^n x_{1i} y_i \\ \sum_1^n x_{2i} y_i \\ \vdots \\ \sum_1^n x_{mi} y_i \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

en notación matricial se tiene:  $\mathbf{X} \cdot \underline{a} = \mathbf{B} \quad \therefore \quad \underline{a} = \mathbf{X}^{-1} \cdot \mathbf{B}$

Para este modelo de regresión también se utilizan como medidas de bondad de ajuste las ecuaciones 5.17 y 5.18. La solución del sistema 5.20 y la aplicación de las ecuaciones 5.15 a 5.18 se puede realizar con base en el programa de cómputo <sup>(P11)</sup> denominado: PCN12: REGMUL (REGresión MULtiple), cuyo listado se presenta al final del capítulo, con observaciones similares a las expuestas para el programa REGPOL.

**Ejemplo 5.4:** Para los siguientes datos experimentales <sup>(A4)</sup> obtener la regresión lineal múltiple y sus medidas de bondad de ajuste.

$y$	2	2	3	3	5	6
$x_1$	1	2	2	5	4	5
$x_2$	2	3	1	5	6	4

A partir de los datos, el sistema 5.20 corresponde a:

$$\begin{bmatrix} 6 & 19 & 21 \\ 19 & 75 & 79 \\ 21 & 79 & 91 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 77 \\ 82 \end{bmatrix}$$

resolviéndolo con alguno de los métodos expuestos en el capítulo 4, se obtiene el polinomio buscado:

$$y = 1.30 + 0.75 \cdot x_1 - 0.05 \cdot x_2$$

para la evaluación del  $R^2$  y EEE se realiza la tabulación siguiente:

No.	$y_i$	$\hat{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \hat{y})^2$
1	2	1.95	2.25	0.0025
2	2	2.65	2.25	0.4225
3	3	2.75	0.25	0.0625
4	3	4.80	0.25	3.2400
5	5	4.00	2.25	1.0000
6	6	4.85	6.25	1.3225
$\sum_1^6$	21	—	13.50	6.0500
	$\bar{y} = 3.50$			

entonces con base en las ecuaciones 5.17 y 5.18 se tiene:

$$R^2 = \frac{13.50 - 6.05}{13.50} = 0.55185 \quad \therefore \quad r = 0.74287$$

$$EEE = \sqrt{\frac{6.05}{6 - (2 + 1)}} = 1.4201$$

□

## 5.5 Aplicaciones prácticas

### Ampliación de la información hidrométrica (niveles máximos anuales)

Es común que los grandes ríos antes de descargar al mar circulen por las llanuras costeras y entonces establezcan planicies de inundación, que se caracterizan por dos tipos de flujos, el de estiaje en el propio cauce y el que ocurre durante las crecientes o de desbordamiento en la planicie de inundación. La presencia de los flujos citados hace que la medición de los gastos en el río sea sumamente incierta, o en el mejor de los casos sólo aproximada <sup>[C6]</sup>. Por otra parte, es en la planicie de inundación donde se deben de diseñar y construir las obras de protección contra las crecientes del río y por ello la definición de los niveles máximos alcanzados por éste, es de vital importancia para tales diseños; afortunadamente esta información es más confiable al tener menor error de medición que los gastos.

**Ejemplo 5.5.** La cuenca del río Pánuco drena en total 84,956 km<sup>2</sup> y comprende parte de 9 estados, desde Puebla y el Estado de México en el sur hasta Tamaulipas y Nuevo León en el norte; la denominada *cuenca baja* se ubica dentro de la planicie costera del Golfo de México y abarca aproximadamente 25,000 km<sup>2</sup>, comprendiendo principalmente a los estados de Tamaulipas, San Luis Potosí y Veracruz <sup>[C6]</sup>. Los afluentes más importantes del río Pánuco en su cuenca baja son el Moctezuma y Tempoal que se unen frente al poblado de El Higo en Veracruz, la unión del primero con el Tampaón en Las Adjuntas forma el río Pánuco, el cual después de la ciudad de Pánuco recibe por margen izquierda al río Guayalejo o río Tamesí, después del sistema lagunario de éste, al inicio de la zona conurbada de Tampico.

Para la revisión y reconstrucción de las obras de protección de la ciudad de Pánuco, Veracruz, después de las crecientes de 1993, se empleará el registro de niveles máximos anuales de tal estación hidrométrica (P), el cual abarca de 1955 a 1993, con los años faltantes siguientes: 1956, 1957 y de 1959 a 1965. La estación hidrométrica más cercana es Las Adjuntas (LA) y cuenta con tal información, misma que se presenta en la Tabla 5.1 de la página siguiente.

Con base en los 30 datos comunes se realizó un diagrama de dispersión que se muestra en la Figura 5.4, cuyo coeficiente de correlación lineal resultó de 0.964, éste fue mejorado al eliminar tres puntos dispersos correspondientes a los años de 1955, 1975 y 1990, aumentando a 0.983 y definiendo la siguiente ecuación de regresión:  $P = -3.243 + 0.632 \cdot LA$ , con base en la cual se estimaron los valores de la estación Pánuco indicados entre paréntesis en la Tabla 5.1.

**Tabla 5.1**  
Niveles máximos anuales\* (m.s.n.m.) en las estaciones hidrométricas indicadas <sup>[C6]</sup>

Año	Pánuco	Las Adjuntas	Año	Pánuco	Las Adjuntas	Año	Pánuco	Las Adjuntas
1955	9.12	22.08	1968	5.00	13.64	1981	6.82	15.85
1956	(6.07)	14.75	1969	8.16	17.24	1982	1.38	7.72
1957	(2.49)	9.07	1970	6.94	16.37	1983	5.89	14.80
1958	7.61	17.38	1971	6.55	15.18	1984	8.18	17.90
1959	(4.05)	11.54	1972	6.38	14.66	1985	6.67	15.76
1960	(3.37)	10.47	1973	6.68	15.16	1986	3.90	11.28
1961	(5.25)	13.44	1974	8.40	18.02	1987	5.93	14.90
1962	(3.21)	10.21	1975	9.04	18.27	1988	7.01	17.29
1963	(6.16)	14.88	1976	8.28	17.57	1989	3.94	10.96
1964	(3.50)	10.67	1977	4.61	11.96	1990	7.09	17.84
1965	(4.36)	12.03	1978	7.20	17.10	1991	7.90	18.02
1966	6.88	16.53	1979	6.61	15.64	1992	6.72	15.63
1967	7.89	16.88	1980	5.87	14.82	1993	8.76	19.27

\* Los valores entre paréntesis fueron estimados por regresión lineal.

En la referencia [C6] se presentan los niveles máximos anuales y se describen otros cuatro análisis de regresión para completar valores faltantes; uno de ellos entre los datos de las estaciones hidrométricas Tamuín y El Pujal, en este caso los 24 valores comunes definen una regresión curva, con cuyos 22 valores se obtuvo  $R^2 = 0.977$  y el siguiente polinomio de grado 2:  $T = 6.7427 + 2.1935 \cdot EP - 0.06513 \cdot EP^2$ . Ver Problema 5.2.

□

#### Ampliación de la información hidrométrica (volúmenes escurridos anuales)

Tomando en cuenta que es frecuente que los registros pluviométricos sean más extensos que los de volúmenes escurridos anuales, se puede intentar ampliar estos últimos por medio de su relación (regresión) con la precipitación anual en la cuenca, estimada ésta a través de métodos como los polígonos de Thiessen, los dos ejes o la ponderación por bisectores <sup>[C10]</sup>.

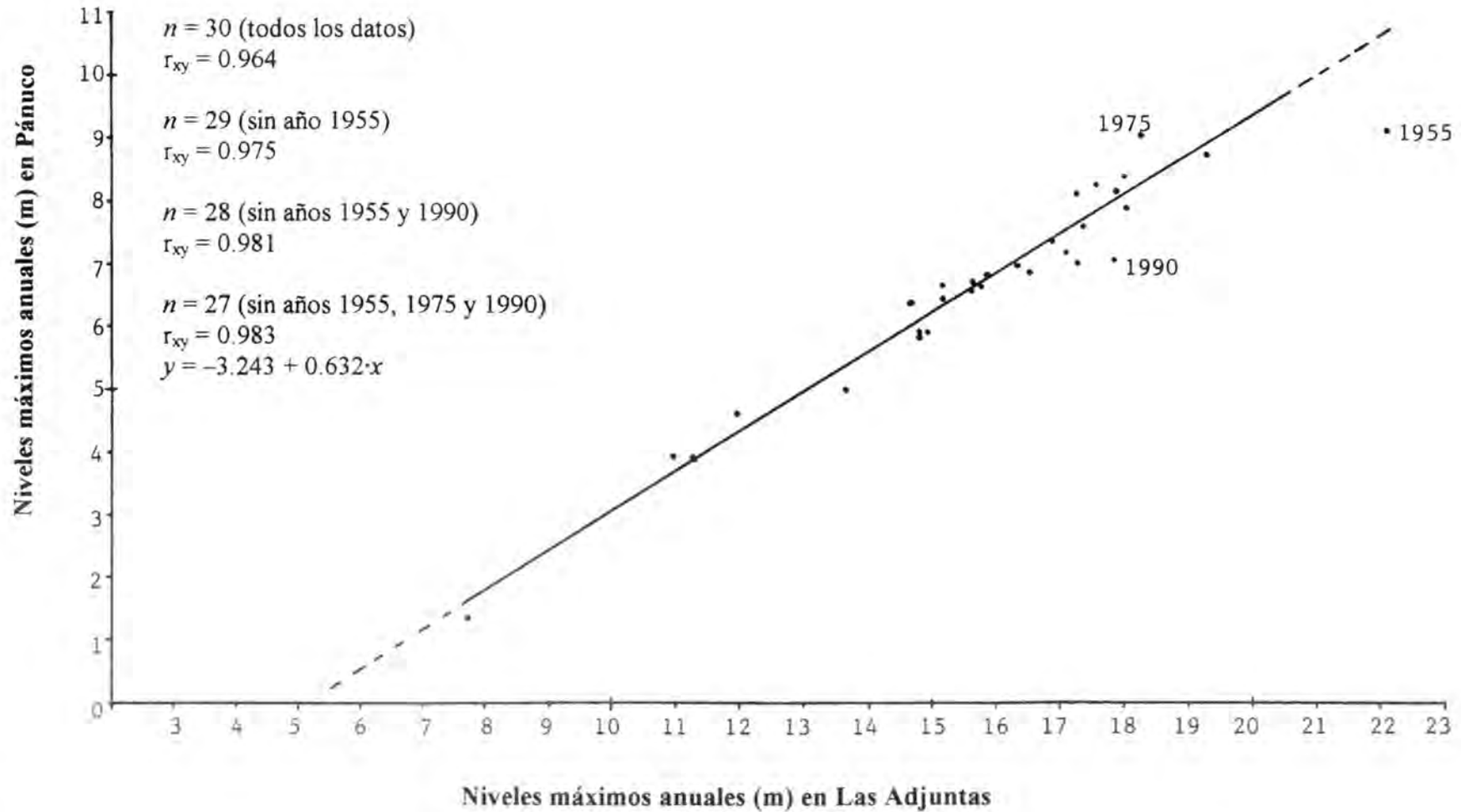
Cuando la ampliación de un registro de volúmenes escurridos anuales se plantea con base en la información disponible en otra estación de aforos, del mismo río o cercana, se debe investigar si la variancia asociada a la estimación de un parámetro estadístico, media y variancia, aumenta o disminuye con la ampliación de registro o "transporte" de la información a través de la regresión. En el modelo bidimensional se emplea un registro y el tridimensional, la extensión del registro se apoya en dos series auxiliares. Lo anterior se puede consultar en la referencia [C9].

#### Ampliación de la información pluviométrica

En la referencia [C5] se expone con detalle una aplicación de la regresión lineal para estimar las precipitaciones anuales faltantes en una estación pluviométrica, con base

Figura 5.4

Diagrama de dispersión de las estaciones hidrométricas indicadas y resultados de la regresión lineal



en las registradas en otra estación cercana y de la misma zona geográfica. Además, en tal ejemplo se aplica el concepto de eficiencia estadística para saber si las magnitudes deducidas ayudan a una mejor estimación de los parámetros estadísticos, por ejemplo, de la media aritmética.

#### Análisis de frecuencia de crecientes por mínimos cuadrados (criterio de Nash)

Este enfoque fue propuesto hacia finales de los años sesenta<sup>[C13,S2]</sup> y permite estimar el gasto máximo ( $Q_{Tr}$ ) asociado a un determinado periodo de retorno ( $Tr$ ), a través de una ecuación de regresión lineal (ecuaciones 5.6 y 5.3) que utiliza como variable dependiente  $y$  a  $Q_{Tr}$  y como variable independiente  $x$  a:

$$x = \log \cdot \log \frac{Tr}{Tr-1} \quad (5.21)$$

estimándose el  $Tr$  con:

$$Tr = \frac{n+1}{no} \quad (5.22)$$

siendo  $n$  el número total de datos ( $Q$ ) o crecientes máximas anuales y  $no$  el número de orden cuando los datos  $Q$  están ordenados en forma decreciente.

**Ejemplo 5.6.** Estimar los gastos máximos con periodos de retorno de 10 y 100 años en la estación hidrométrica Tzararacua en el Río Cupatitzio, cuyos 28 datos<sup>[C14]</sup> se tienen en el ejemplo 3.5. En la Tabla 5.2 siguiente se presentan los cálculos necesarios para una parte de los datos.

**Tabla 5.2**  
Parte de los datos y cálculos del ejemplo 5.6

$no$	$y = Q$ (m <sup>3</sup> /s)	$y^2$	$Tr$ (años)	$x$ (ec. 5.22)	$x^2$	$x \cdot y$
1	123.9	15351.21	29.0000	-1.817017	3.301552	-225.128500
4	86.9	7551.61	7.2500	-1.190723	1.417822	-103.473900
8	79.9	6384.01	3.6250	-0.853318	0.728152	-68.180110
12	71.9	5169.61	2.4167	-0.634607	0.402727	-45.628280
16	67.2	4515.84	1.8125	-0.457854	0.209630	-30.767770
20	59.3	3516.49	1.4500	-0.294003	0.086438	-17.434400
24	47.7	2275.29	1.2083	-0.117232	0.013743	-5.591966
28	42.8	1831.84	1.0357	0.165066	0.027247	7.064809
$\sum_{i=1}^{28}$	1946.3	146491.60	-	-16.638740	16.332340	-1422.70900

Con base en los valores del último renglón se tiene:

$$\bar{x} = \frac{-16.63874}{28} = -0.594241 \quad \bar{y} = \frac{1946.3}{28} = 69.51071$$

$$m = \frac{[-1422.709 - 28(-0.594241)(69.51071)]}{16.33234 - 28(-0.594241)^2} = -41.29424 \quad (5.6)$$

$$b = 69.51071 - (-41.29424)(-0.594241) = 44.97198 \quad (5.3)$$

$$S_{xx} = n \sum_1^n x_i^2 - (\sum_1^n x_i)^2 = 180.4579 \quad (5.23)$$

$$S_{yy} = n \sum_1^n y_i^2 - (\sum_1^n y_i)^2 = 313681.1 \quad (5.24)$$

$$S_{xy} = n \sum_1^n x_i y_i - \sum_1^n x_i \sum_1^n y_i = -7451.872 \quad (5.25)$$

$$r_{xy} = S_{xy} / \sqrt{S_{xx} \cdot S_{yy}} = -0.99045 \quad (5.7)$$

Para  $Tr = 10$  años se tiene:

$$x = -1.339538 \quad \therefore \quad y = 100.3 \text{ m}^3/\text{s} \quad (5.1)$$

y para  $Tr = 100$  años se tiene:

$$x = -2.360035 \quad \therefore \quad y = 142.4 \text{ m}^3/\text{s} \quad (5.1)$$

El criterio de Nash permite estimar el intervalo de variación del gasto máximo, por medio de la expresión<sup>(C13)</sup>:

$$\Delta y = \pm 2 \sqrt{\frac{S_{yy}}{n^2(n-1)} + (x - \bar{x})^2 \frac{S_{yy}(1-r_{xy}^2)}{(n-2)S_{xx}}} \quad (5.26)$$

Entonces para  $Tr = 10$  y 100 años se obtiene:

$$\Delta y = \pm 7.9 \text{ m}^3/\text{s} \quad \Delta y = \pm 8.7 \text{ m}^3/\text{s}$$

El criterio de Nash permite ser juzgado en su calidad de ajuste a los datos reales y por lo tanto en su confiabilidad de resultados, a través del coeficiente  $r_{xy}$  (ec. 5.7), el cual en términos generales debe ser superior a  $-0.99$  para que sea aceptable tal modelo estadístico.

#### Ajuste de la Distribución GVE (representación de funciones curvas)

Las distribuciones de valores extremos (VE) caracterizan los intentos para deducir sobre una base puramente teórica, cómo se distribuyen las crecientes o avenidas máximas anuales. Existe una familia de distribuciones de VE, cada miembro caracterizado por su parámetro de forma  $k$ ; A. F. Jenkinson obtuvo su ecuación general denominada distribución General de Valores Extremos (GVE), cuya solución inversa es<sup>(11)</sup>:

$$X = u + \left( \frac{\alpha}{\kappa} \right) [1 - \exp(-k \cdot y)] \quad (5.27)$$

siendo  $X$  la variable que se estima probabilísticamente,  $u$  el parámetro de ubicación, con unidades idénticas a  $X$ ,  $\alpha$  es el parámetro de escala,  $k$  el de forma,  $y$  la variable reducida de Gumbel, función de la probabilidad de no excedencia  $F(x)$ , con la expresión siguiente:

$$y = -\ln \{-\ln [F(x)]\} \quad (5.28)$$

Las tres familias de distribuciones de VE se definen de acuerdo al signo del parámetro  $k$  de la manera siguiente:

$k = 0$ ; distribución Fisher-Tippett Tipo I, de Gumbel o VE1, es una familia de rectas en el papel Gumbel-Powell <sup>[C15]</sup>, con la expresión:  $X = u + \alpha \cdot y$ .

$k < 0$ ; distribución Fisher-Tippett Tipo II, de Fréchet, log-Gumbel o VE2, es una familia de curvas con concavidad hacia arriba en el papel Gumbel-Powell y frontera inferior en  $X = u - \alpha/k$ .

$k > 0$ ; distribución Fisher-Tippett Tipo III, de Weibull o VE3, es una familia de curvas de concavidad hacia abajo en el papel Gumbel-Powell y frontera superior en  $X = u + \alpha/k$ .

Los procedimientos de ajuste de la distribución GVE a una muestra estiman automáticamente su tipo a través de la magnitud de  $k$ , utilizándose actualmente <sup>[C11]</sup> cinco métodos: momentos, sextiles, momentos L, máxima verosimilitud y optimización de una función objetivo.

El método de sextiles fue expuesto por A. F. Jenkinson en 1969 <sup>[11]</sup> y consiste en ordenar los datos históricos ( $x_i$ ) en forma creciente en magnitud y entonces desarrollarlos en sextiles, esto es:

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n$$

$$x_1, x_1, x_1, x_1, x_1, x_1, x_2, x_2, x_2, x_2, x_2, x_2, \dots, x_n, x_n, x_n, x_n, x_n, x_n$$

Se habrá formado una secuencia  $Z_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, 6n$ , la cual se divide en seis grupos de  $n$  elementos cada uno (*sextiles*) y se obtienen sus medias, que estarán definidas por la siguiente expresión <sup>[C12]</sup>:

$$\bar{w}_j = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1+n(j-1)}^{n+n(j-1)} Z_i \quad \text{para } j=1, 2, \dots, 6 \tag{5.29}$$

también se calculan la media y desviación estándar generales, esto es:

$$\bar{W} = \left(\frac{1}{6}\right) \sum_{j=1}^6 \bar{w}_j \tag{5.30}$$

$$S_w = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right) \sum_{j=1}^6 (\bar{w}_j - \bar{W})^2} \tag{5.31}$$

En seguida con base en el cociente  $L = (\bar{w}_2 - \bar{w}_1)/(\bar{w}_6 - \bar{w}_3)$  se obtiene el valor del parámetro de forma  $k$ , directamente de la Tabla 5.3 siguiente.

**Tabla 5.3**  
Valores auxiliares del método de sextiles <sup>[11]</sup>

$L$	$1/L$	$k$	$W$	$S_w$
0.08		-0.50	1.54	2.85
0.11		-0.40	1.22	2.24
0.16		-0.30	0.99	1.83
0.23		-0.20	0.82	1.55
0.32		-0.10	0.69	1.34
0.43		0.00	0.58	1.20
0.58		0.10	0.49	1.09
0.79		0.20	0.41	1.01
1.05	0.95	0.30	0.34	0.96
	0.72	0.40	0.28	0.92
	0.55	0.50	0.23	0.89
	0.42	0.60	0.18	0.88
	0.32	0.70	0.13	0.87

Los restantes parámetros se obtienen por medio de las expresiones siguientes:

$$\alpha = S_w / W \quad (5.32)$$

$$u = \bar{W} - \alpha \cdot W \quad (5.33)$$

en las cuales  $S_w$  y  $W$  son los valores poblacionales de los *sextiles*, se obtienen también de la Tabla 5.3 en función  $k$ .

Por otra parte, con fines de comparación entre métodos de ajuste de la distribución GVE y entre otros modelos probabilísticos, se utilizan dos medidas de bondad de ajuste, el error estándar medio (EEM) y el error absoluto medio (EAM), definidas como <sup>[K1,51]</sup>:

$$EEM = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - X_i)^2}{(n - np)}} \quad (5.34)$$

$$EAM = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - X_i|}{(n - np)} \quad (5.35)$$

en donde,  $np = 3$ , el número de parámetros de ajuste de la distribución GVE;  $x_i$  son los datos observados ordenados en forma creciente, para estimarles su probabilidad empírica de no excedencia por medio de la fórmula de Weibull <sup>[B1]</sup>:

$$F(x) = \eta / (n+1) \quad (5.36)$$

en la cual,  $\eta$  es el número de orden; finalmente,  $X_i$  son los valores estimados con la distribución GVE que se ajusta (ecuación 5.27), para la misma probabilidad asignada a los datos.

El listado del programa de cómputo PCN13: GVESEX (distribución GVE ajustada por SEXtiles) se tiene al final del capítulo y permite aplicar las ecuaciones 5.27 a 5.36. En tal programa la Tabla 5.3 fue incorporada a través de regresiones polinomiales que representan las relaciones o curvas entre  $k$  y  $L$ ,  $S_w$ ,  $W$ , mismas que se muestran en la Figura 5.5. Con base en el programa REGPOL se obtuvieron <sup>[C2]</sup> las ecuaciones siguientes:

Si  $L > 1.05$ , entonces:

$$k = 1.063526 - 1.322215 \cdot 1/L + 0.5474616 (1/L)^2 \quad (5.37)$$

$R^2 = 0.999375 \quad EEE = 0.00559$

para  $L \leq 1.05$

$$k = -0.6615385 + 2.558663 \cdot L - 2.833665 \cdot L^2 + 1.211286 \cdot L^3 \quad (5.38)$$

$R^2 = 0.9973 \quad EEE = 0.0180$

$$W = 0.57648 - 0.95040 \cdot k + 0.94979 \cdot k^2 - 1.44009 \cdot k^3 + 1.05070 \cdot k^4 \quad (5.39)$$

$R^2 = 0.99984 \quad EEE = 0.00663$

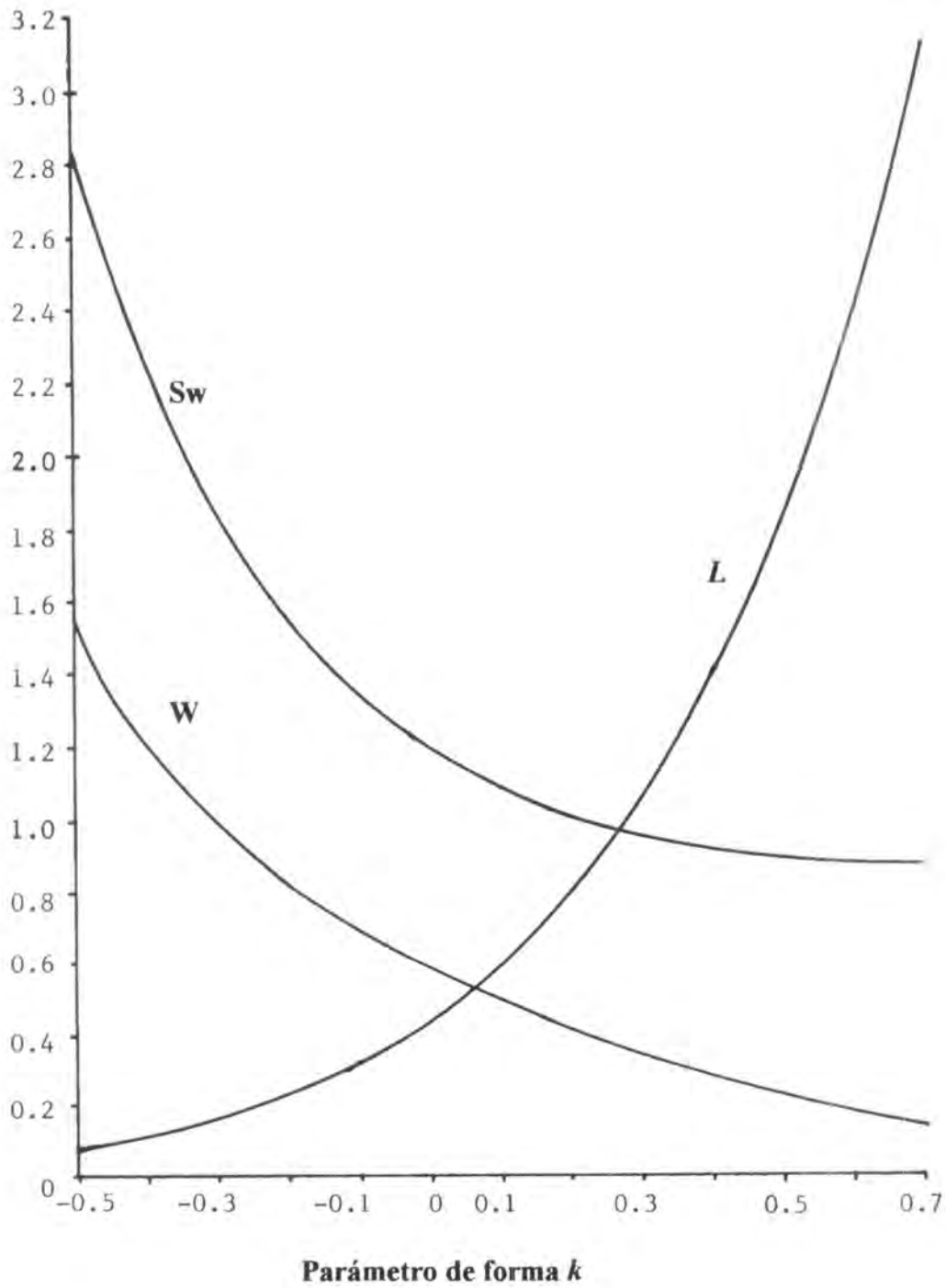
$$S_w = 1.19153 - 1.16964 \cdot k + 2.12568 \cdot k^2 - 3.13449 \cdot k^3 + 2.24183 \cdot k^4 \quad (5.40)$$

$R^2 = 0.99977 \quad EEE = 0.01149$

**Ejemplo 5.7.** Para ilustrar la aplicación de la distribución GVE a un registro hidrométrico de crecientes anuales, a continuación se ajusta tal modelo con base en el método de



Figura 5.5

Relaciones auxiliares del método de *sextiles* [J1]

sextiles, a los datos de la estación de aforos El Cuchillo sobre el Río San Juan afluente del Río Bravo, que se ubicó donde ahora está la presa de usos múltiples del mismo nombre. Las características relevantes de este embalse <sup>[C8]</sup>, son su cuenca de drenaje de 8,794 km<sup>2</sup>, su capacidad de conservación de 1,123 Mm<sup>3</sup> para el abastecimiento de 7,5 m<sup>3</sup>/s a la ciudad de Monterrey y el riego de 3,500 hectáreas.

Su vertedor es de cresta controlada, con una capacidad hasta el sobrealmacenamiento de 1,800 Mm<sup>3</sup> y el gasto máximo de la creciente de diseño fue estimado en 15,080 m<sup>3</sup>/s. El registro disponible es de los más extensos del país con 67 valores, los cuales se presentan en la Tabla 5.4 siguiente.

**Tabla 5.4**  
Gastos (m<sup>3</sup>/s) máximos anuales en la estación hidrométrica  
El Cuchillo, del Río San Juan, en el estado de Nuevo León <sup>[C8]</sup>.

No.	Año	Dato	No.	Año	Dato	No.	Año	Dato	No.	Año	Dato
1	1927	1817.0	18	1944	1584.8	35	1961	492.0	52	1978	3500.0
2	1928	54.4	19	1945	3358.0	36	1962	584.5	53	1979	355.0
3	1929	34.2	20	1946	526.4	37	1963	603.0	54	1980	225.9
4	1930	994.0	21	1947	1393.9	38	1964	348.2	55	1981	396.0
5	1931	332.5	22	1948	1173.1	39	1965	1274.0	56	1982	210.0
6	1932	162.8	23	1949	381.8	40	1966	726.8	57	1983	366.9
7	1933	2736.5	24	1950	469.0	41	1967	5540.0	58	1984	183.9
8	1934	393.5	25	1951	2084.4	42	1968	464.5	59	1985	115.2
9	1935	602.8	26	1952	167.4	43	1969	470.6	60	1986	963.7
10	1936	1307.0	27	1953	2511.5	44	1970	655.4	61	1987	688.6
11	1937	139.8	28	1954	302.7	45	1971	649.0	62	1988	8315.1
12	1938	6758.5	29	1955	384.5	46	1972	454.6	63	1989	505.3
13	1939	720.4	30	1956	125.0	47	1973	3355.5	64	1990	392.6
14	1940	404.0	31	1957	900.0	48	1974	1935.0	65	1991	161.5
15	1941	1194.0	32	1958	1927.0	49	1975	643.7	66	1992	153.9
16	1942	817.2	33	1959	177.0	50	1976	1081.0	67	1993	250.9
17	1943	675.5	34	1960	1677.6	51	1977	2000.0			

En primer término se calculan los parámetros estadísticos básicos: media aritmética ( $\bar{x}$ ), desviación estándar ( $S$ ) y coeficientes de asimetría ( $C_s$ ) y curtosis ( $C_k$ ), por medio de las expresiones siguientes <sup>[C11]</sup>:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (5.41)$$

Este parámetro estadístico ya fue definido implícitamente en la ecuación 5.3.

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{(n-1)}} \quad (5.42)$$

$$Cs = \frac{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{(n-1)(n-2)S^3} \quad (5.43)$$

$$Ck = \frac{n^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{(n-1)(n-2)(n-3)S^4} \quad (5.44)$$

Las ecuaciones anteriores conducen a los valores siguientes:

Media aritmética ( $\bar{x}$ )	1,139.6 m <sup>3</sup> /s	Coficiente de asimetría ( $Cs$ )	2,927
Mediana muestral ( $M$ )	602.8 m <sup>3</sup> /s	Coficiente de curtosis ( $Ck$ )	12,745
Desviación estándar ( $S$ )	1,517.5 m <sup>3</sup> /s	$Cs$ de los logaritmos decimales	0.031263

Los parámetros estadísticos de este registro indican que presenta un gran sesgo, ya que  $\bar{x} > M$  y  $Cs \gg 0$ , además su función de densidad es muy puntiaguda pues  $Ck \gg 3.0$ ; lo anterior orienta a esperar gran dificultad para modelar probabilísticamente<sup>[C8]</sup> tal registro, o que las predicciones a altos periodos de retorno sean inconsistentes. Durante el ajuste de la distribución GVE con el método de sextiles a los datos de la Tabla 5.4 se obtuvieron los valores siguientes:

Ecuación 5.29:  $\bar{w}_j = 135.233, 326.612, 477.37, 718.519, 1381.206$  y  $3798.418$

Ecuación 5.38:  $k = -0.4761217$  con  $L = 0.07917$

Ecuaciones 5.30 y 5.31:  $\bar{W} = 1139.5597$   $Sw = 1252.5472$

Ecuaciones 5.39 y 5.40:  $W = 1.453726$   $Sw = 2.683816$

Ecuaciones 5.32 y 5.43:  $\alpha = 466.7038$   $u = 461.1001$

Ecuaciones 5.28 y 5.27 para  $Tr = 10$  años:  $y = 2.2503673$   
 $X_{10} = 2342.7$  m<sup>3</sup>/s

idem para  $Tr = 100$  años:  $y = 4.6001492$   
 $X_{100} = 8241.1$  m<sup>3</sup>/s

Finalmente con las ecuaciones 5.34 y 5.35 se obtuvieron las magnitudes siguientes:

$$EEM = 428.2 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$EAM = 185.3 \text{ m}^3/\text{s}$$

Para este registro hidrométrico se pueden consultar otros resultados y comentarios de su análisis probabilístico en las referencias [C11] y [C8], respectivamente.

□

### Otras aplicaciones de la transformación de curvas a ecuaciones

Se tienen por ejemplo en los dos casos siguientes. Primero, en el ajuste de la distribución GVE a través del método iterativo de máxima verosimilitud<sup>[C2]</sup>, para el cual se deben estimar los valores de los coeficientes  $a, b, c, f, g$  y  $h$  de la matriz de variancia-covariancia, disponibles en forma tabular<sup>[J1, C11]</sup> y gráfica<sup>[C12]</sup>. Segundo, al desarrollar un algoritmo de cómputo para el método estadístico de D. M. Hershfield de estimación de la precipitación máxima probable<sup>[C7, W1]</sup>.

**Operación de un embalse**

**Ejemplo 5.8.** Una presa de almacenamiento ha operado por 12 años y se han registrado sus volúmenes anuales de entrada ( $E$ , en millones de  $m^3$  o  $Mm^3$ ) contra sus respectivas extracciones ( $S$ , en  $Mm^3$ ). Ahora que se ha establecido su modelo de pronóstico de entradas, se desea conocer la extracción recomendable ( $S_1$ ) de acuerdo a la operación histórica, para una entrada probable  $E_1 = 5.0 Mm^3$ . Un modelo elemental para resolver tal problema es el siguiente <sup>[C13]</sup>:

$$S_1 = \alpha \cdot E_1 + \beta \cdot E_{t-1} + \gamma S_{t-1} \quad (5.45)$$

en notación estadística (ecuación 5.19) se tiene:

$$y = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3$$

en la Tabla 5.5 siguiente se exponen datos <sup>[C13]</sup> y arreglo de cálculos necesarios para formar el sistema 5.20 correspondiente a la ecuación anterior, es decir, sin el primer renglón y primera columna de la matriz de coeficientes, pues no se está considerando el término  $a_0$ . Entonces el sistema matricial que permite obtener los coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} 514.6 & 478.5 & 328.3 \\ 478.5 & 521.9 & 368.0 \\ 328.3 & 368.0 & 417.9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 365.4 \\ 422.9 \\ 410.2 \end{bmatrix}$$

la inversa de la matriz de coeficientes, según el programa INVMA es:

$$\begin{bmatrix} 0.01326815 & -0.01270209 & 0.0007619937 \\ -0.01270209 & 0.01721473 & -0.005180487 \\ 0.0007619937 & -0.005180487 & 0.006356201 \end{bmatrix}$$

al multiplicar la matriz anterior por el vector de términos independientes se obtienen los coeficientes buscados:

$$\alpha = -0.21096 \quad \beta = 0.51373 \quad \gamma = 0.69492$$

**Tabla 5.5**  
Datos y cálculos necesarios <sup>[C13]</sup> para resolver la ecuación 5.45

$S_1$ (y)	$E_1$ (x1)	$E_{t-1}$ (x2)	$S_{t-1}$ (x3)	$\Sigma x_i^2$	$\Sigma x_1 \cdot x_2$	$\Sigma x_1 \cdot x_3$	$\Sigma x_2^2$	$\Sigma x_2 \cdot x_3$	$\Sigma x_3^2$	$\Sigma x_1 \cdot y$	$\Sigma x_2 \cdot y$	$\Sigma x_3 \cdot y$
3.2	3.3											
3.1	3.8	3.3	3.2	14.4	12.5	12.2	10.9	10.6	10.2	11.8	10.2	9.9
1.6	11.8	3.8	3.1	139.2	44.8	36.6	14.4	11.8	9.6	18.9	6.1	5.0
5.0	10.6	11.8	1.6	112.4	125.1	17.0	139.2	18.9	2.6	53.0	59.0	8.0
6.8	9.9	10.6	5.0	98.0	104.9	49.5	112.4	53.0	25.0	67.3	72.1	34.0
8.1	7.7	9.9	6.8	59.3	76.2	52.4	98.0	67.3	46.2	62.4	80.2	55.1
8.2	6.8	7.7	8.1	46.2	52.4	55.1	59.3	62.4	65.6	55.8	63.1	66.4
8.3	4.5	6.8	8.2	20.3	30.6	36.9	46.2	55.8	67.2	37.4	56.4	68.1
7.4	3.3	4.5	8.3	10.9	14.9	27.4	20.3	37.4	68.9	24.4	33.3	61.4
6.3	2.5	3.3	7.4	6.3	8.3	18.5	10.9	24.4	54.8	15.8	20.8	46.6
5.3	2.0	2.5	6.3	4.0	5.0	12.6	6.3	15.8	39.7	10.6	13.3	33.4
4.2	1.9	2.0	5.3	3.6	3.8	10.1	4.0	10.6	28.1	8.0	8.4	22.3
?	5.0	1.9	4.2									
			$\Sigma$	514.6	478.5	328.3	521.9	368.0	417.9	365.4	422.9	410.2

Por lo tanto, la solución al problema planteado será:

$$S_t = -0.211 \cdot E_t + 0.514 \cdot E_{t-1} + 0.695 \cdot S_{t-1} \quad (5.46)$$

$$S_t = -0.211(5.0) + 0.514(1.9) + 0.695(4.2) = 2.8406 \text{ Mm}^3$$

□

En la referencia [S2] se presenta otro tipo de aplicación de la regresión lineal múltiple, en este caso a la estimación de datos faltantes de crecientes, en redes de ríos.

### Estimación de crecientes (fórmulas empíricas)

Para realizar estimaciones rápidas de crecientes asociadas a diversos periodos de retorno ( $Q_T$ ), dentro de la Región Hidrológica No. 37 (El Salado), se propuso <sup>[C1]</sup> obtener una ecuación empírica del tipo:

$$Q_T = a \cdot A^b \cdot Sc^c \cdot Lc^d \quad (5.47)$$

en la cual:

$A$  área de cuenca, en  $\text{km}^2$ .

$Sc$  pendiente del colector principal <sup>[C4]</sup> estimada con la fórmula de Taylor & Schwarz, en porcentaje.

$Lc$  longitud total de todas las corrientes de la cuenca, en km.

Si en la ecuación anterior se toman logaritmos, ésta se transforma en una forma similar a la ecuación 5.19, con variables independientes iguales a los logaritmos de  $A$ ,  $Sc$  y  $Lc$  y como variable dependiente el logaritmo de las crecientes asociadas a cada periodo de retorno ( $Tr$ ).

**Ejemplo 5.9.** A finales de los años setenta únicamente existían cuatro estaciones hidrométricas en la región citada, con las características generales que se exponen en la Tabla 5.6 siguiente, misma que incluye los parámetros  $A$ ,  $Sc$  y  $Lc$  que se evaluaron <sup>[C1]</sup> con base en las cartas topográficas del INEGI de escala 1:50,000. El registro se refiere a los datos disponibles de crecientes máximas anuales, las cuales al ser procesadas estadísticamente permiten obtener los gastos ( $Q_T$ ) asociados a diversos periodos de retorno, dos de ellos mostrados en la Tabla 5.6.

Tabla 5.6

Magnitudes de las variables independientes y dependientes en las estaciones hidrométricas indicadas <sup>[C1]</sup>

Concepto:	Los Pilares	El Tule	El Grito	Tula
Longitud	101°02'	101°11'	101°07'	99°43'
Latitud	22°29'	22°50'	22°40'	23°00'
$A$ ( $\text{km}^2$ )	1,475	263	179	82
$Sc$ (%)	1.02	1.10	1.40	2.22
$Lc$ (km)	2,023	407	601	188
Registro (años)	1963-1978	1969-1978	1965-1978	1969-1978
$Q_{10}$ ( $\text{m}^3/\text{s}$ )	180	78	220	130
$Q_{100}$ ( $\text{m}^3/\text{s}$ )	1,075	190	400	480

A partir de los datos de la tabla anterior se formó la matriz  $\mathbf{X}$  del sistema 5.20, cuya inversa  $\mathbf{X}^{-1}$  ya fue obtenida en el ejemplo 4.2. El vector de términos independientes  $\mathbf{B}$  se evalúa para cada  $\text{Tr}$ . En la referencia [C1] se presentan ecuaciones 5.47 para  $\text{Tr} = 2, 5, 10, 25, 50, 100$  y 500 años. Para los datos expuestos en la Tabla 5.6, después de completar la solución del sistema 5.20, se obtienen las siguientes ecuaciones empíricas:

$$Q_{10} = 1.2318 \cdot A^{0.7092} \cdot S_c^{1.0154} \cdot L_c^{1.3319}$$

$$Q_{100} = 0.1540 \cdot A^{0.5397} \cdot S_c^{2.9171} \cdot L_c^{0.6378}$$

Debido al planteamiento abordado de estimar cuatro incógnitas ( $a, b, c$  y  $d$ ), utilizando cuatro ternas de datos, las ecuaciones empíricas encontradas reproducen sin dispersión o residuos (ecuación 5.16) los gastos  $Q_{\text{Tr}}$  respectivos. □

### Otras aplicaciones factibles

En las referencias [C5,A2] se describen con detalle el ajuste de una ecuación que representa a las curvas Intensidad-Duración-Periodo de retorno (I-D-Tr), con la expresión siguiente:

$$I = \frac{a \text{Tr}^b}{D^c} \quad (5.48)$$

aplicando logaritmos se obtiene:

$$\log I = \log a + b \cdot \log \text{Tr} - c \cdot \log D$$

considerando las equivalencias siguientes se llega a una regresión lineal múltiple (ecuación 5.19) que se resuelve con base al sistema 5.20:

$$\begin{array}{lll} \log I = y & \log a = a_0 & b = a_1 \\ \log \text{Tr} = x_1 & \log D = x_2 & -c = a_2 \end{array}$$

Por otra parte, los diagramas de dispersión que emplean el área de cuenca en las abscisas, contra la creciente media anual <sup>[C3]</sup>, o bien, el volumen escurrido medio anual <sup>[K2]</sup>, son ejemplos clásicos de las relaciones o regresiones que se han empleado en diversas estimaciones hidrológicas, por ejemplo en los análisis regionales de frecuencia de crecientes y en la estimación de volúmenes escurridos en cuencas sin afloros, respectivamente. Las relaciones citadas son válidas únicamente cuando los datos (cuencas) con los que son construidas proceden de la misma zona geográfica, lo cual implica similitud de clima, geología superficial, orografía, etc.

Finalmente, cuando se buscan nuevas relaciones hidrológicas, se debe tener cuidado especial en no incurrir en establecer relaciones espurias <sup>[B2]</sup> o incestuosas, que ocurren cuando los dos parámetros que se relacionan tienen algún elemento o variable común <sup>[K2]</sup>. La hidrología ofrece un campo propicio para tal error, debido a la preferencia por las variables adimensionales en los ejes de los diagramas de dispersión <sup>[K2]</sup>.

### Problemas propuestos

**Problema 5.1:** Estimar los datos faltantes de  $y$  con base en los de  $x$ . Utilizar regresión lineal. (Respuestas <sup>[C13]</sup>: 10.27, 11.10, 5.17 y 11.12). ¿Mejora el registro  $y$  con la estimación <sup>[C5]</sup>?

$x$	8.30	6.56	7.16	5.50	8.50	7.30	8.18	8.76	4.58	8.78
$y$	9.67	7.98	9.49	6.11	10.90	9.32	?	?	?	?

**Problema 5.2:** Estimar los valores faltantes de niveles máximos anuales en la estación hidrométrica Tamuín (ver tabulación siguiente), con base en la información de la estación El Pujal, ambas en el Río Tampoán de la Región Hidrológica No. 26 (Pánuco). [Respuestas <sup>(C6)</sup>: 1955 (25.18), 1960 (18.30), 1965 (19.35) y 1970 (23.21)].

Año	Tamuín	El Pujal	Año	Tamuín	El Pujal	Año	Tamuín	El Pujal
1955	SD	16.14	1968	SD	7.07	1981	21.44	8.49
1956	SD	9.10	1969	24.29	12.63	1982	16.06	4.92
1957	SD	5.26	1970	SD	11.29	1983	21.50	9.40
1958	23.67	10.85	1971	SD	8.43	1984	23.16	11.08
1959	SD	5.72	1972	SD	9.31	1985	20.38	8.24
1960	SD	6.54	1973	22.16	10.32	1986	18.80	7.22
1961	SD	7.62	1974	24.54	13.74	1987	19.45	7.54
1962	SD	5.43	1975	24.23	12.42	1988	22.04	1.57
1963	SD	8.28	1976	24.71	14.14	1989	17.68	6.25
1964	SD	5.06	1977	22.16	10.68	1990	23.16	12.88
1965	SD	7.35	1978	23.18	11.81	1991	24.17	SD
1966	22.50	10.56	1979	20.08	7.61	1992	21.82	10.69
1967	24.06	12.10	1980	19.93	7.82	1993	24.81	14.70

SD = Sin Datos

**Problema 5.3:** Aplicar el criterio de Nash para estimar la creciente de periodo de retorno 100 años y su intervalo de variación de los 20 gastos máximos anuales siguientes <sup>(C13)</sup>. (Respuestas <sup>(C13)</sup>:  $y = 392.2 \text{ m}^3/\text{s}$  y  $\Delta y = 48.1 \text{ m}^3/\text{s}$ )

$n$	$Q \text{ (m}^3/\text{s)}$	$n$	$Q \text{ (m}^3/\text{s)}$	$n$	$Q \text{ (m}^3/\text{s)}$	$n$	$Q \text{ (m}^3/\text{s)}$	$n$	$Q \text{ (m}^3/\text{s)}$
1	300.0	5	165.0	9	56.3	13	141.0	17	156.0
2	188.0	6	203.0	10	56.8	14	98.2	18	47.9
3	147.0	7	48.8	11	45.2	15	53.6	19	54.9
4	105.0	8	36.2	12	47.9	16	246.0	20	52.0

**Problema 5.4:** En la parte final del listado PCN13: GVESEX se tienen los 31 datos <sup>(C12)</sup> de crecientes máximas anuales ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) del Río Irwell, en Inglaterra. Ajustar la distribución GVE a través del método de sextiles y estimar las crecientes asociadas a los periodos de retorno de 10 y 100 años. (Respuestas <sup>(C12,C11)</sup>:  $\bar{w}_1 = 106.6613$ ,  $\bar{w}_6 = 370.6645$ ,  $L = 0.697984$ ,  $k = 0.155749$ ,  $u = 196.290 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $\alpha = 79.206$ ,  $X_{10} = 346.6 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $X_{100} = 456.4 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $\text{EEM} = 21.5 \text{ m}^3/\text{s}$  y  $\text{EAM} = 14.5 \text{ m}^3/\text{s}$ ).

**Problema 5.5:** En la tabulación <sup>(P2)</sup> siguiente se presentan las distancias ( $y$ ) de frenado de un automóvil, las cuales son función de su velocidad ( $x$ ). Con base en un ajuste cuadrático, estimar la distancia de frenado cuando la velocidad sea de 88.5 km/h. (Respuesta <sup>(P2)</sup>: 75.373 m.)

$y \text{ (m)}$	16.5	27.4	42.1	62.8	89.0	120.7
$x \text{ (km/h)}$	32.2	48.3	64.4	80.5	96.5	112.6

**Problema 5.6:** Para los datos <sup>(A3)</sup> de la tabulación de la página siguiente, obtener la regresión múltiple (ecuación 5.19) entre el gasto máximo anual ( $y$ ) en  $\text{m}^3/\text{s}$ , el área de cuenca ( $x_1$ ) en  $\text{km}^2$  y la precipitación máxima diaria ( $x_2$ ) en  $\text{mm}$ . (Respuestas:  $a_0 = 165.278$ ,  $a_1 = 1.318$ ,  $a_2 = 0.131$ ,  $R^2 = 0.9866$ ,  $\text{EEE} = 404.8 \text{ m}^3/\text{s}$ )

Estación:	y	x1	x2	Estación:	y	x1	x2
1	1550	1250	17	8	1800	1400	27
2	850	870	21	9	880	300	29
3	8550	5690	19	10	830	320	29
4	10500	8270	19	11	360	180	28
5	2480	1620	21	12	190	150	27
6	380	180	24	13	1650	870	21
7	180	150	32	14	280	90	29

## Referencias

- A1.** T. J. Akai. *Métodos Numéricos aplicados a la ingeniería*. Capítulo 4: Estadística y aproximación por mínimos cuadrados, pp. 177-207. Noriega Editores. México, D. F. 1999.
- A2.** F. J. Aparicio Mijares. *Fundamentos de Hidrología de Superficie*. Capítulo 6: Precipitación, pp. 113-176. Noriega Editores. México, D. F. 1989.
- A3.** F. J. Aparicio Mijares. *Fundamentos de Hidrología de Superficie*. Apéndice B: Regresión y correlación, pp. 291-303. Noriega Editores. México, D. F. 1989.
- A4.** B. M. Ayyub & R. H. McCuen. *Numerical Methods for Engineers*. Chapter 10: Curve fitting and regression analysis, pp. 293-352. Prentice Hall, New Jersey, USA.
- B1.** M. A. Benson. Plotting positions and economics of engineering planning. *Journal of Hydraulics Division*, Vol. 88, No. 6, pp. 57-71. 1962.
- B2.** M. A. Benson. Spurious correlation in hydraulics and hydrology. *Journal of the Hydraulics Division*, Vol. 9, HY4, pp. 35-42. 1965.
- C1.** D. F. Campos Aranda. Ecuaciones de regresión para estimar avenidas de diseño en cuencas sin aforos, en la Región Hidrológica No. 37 (El Salado). *VI Congreso Nacional de Hidráulica*, Vol. II, pp. 478-488. 15 al 19 de Noviembre de 1980, Mérida, Yucatán.
- C2.** D. F. Campos Aranda. Programa en Basic para el ajuste de la función de distribución de probabilidades GVE. *II Congreso Nacional de Informática (AMII)*, Diskette No. 2, 15 al 17 de Mayo de 1991. Puebla, Puebla.
- C3.** D. F. Campos Aranda. Aplicación del método del índice de crecientes en la Región Hidrológica Número 10, Sinaloa. *Ingeniería Hidráulica en México*, Vol. IX, Número 3, pp. 41-55, septiembre-diciembre de 1994.
- C4.** D. F. Campos Aranda. *Procesos del Ciclo Hidrológico*. Capítulo 2: Geomorfología de la cuenca, pp. 2-1 a 2-29. Editorial Universitaria Potosina. San Luis Potosí, S.L.P. 1998. Tercera reimpresión.
- C5.** D. F. Campos Aranda. *Procesos del Ciclo Hidrológico*. Anexo C: Regresión y correlación lineales, pp. C-1 a C-12. Editorial Universitaria Potosina. San Luis Potosí, S.L.P. 1998. Tercera reimpresión.
- C6.** D. F. Campos Aranda. Caracterización hidrológica de crecientes en la cuenca baja del Río Pánuco, con base en niveles máximos anuales. *Ingeniería Hidráulica en México*, Vol. XI, Número 2, pp. 15-31, Mayo-Agosto de 1996.



- C7. D. F. Campos Aranda. Estimación estadística de la precipitación máxima probable en San Luis Potosí. *Ingeniería Hidráulica en México*, Vol. XIII, Núm. 3, pp. 45-66. Septiembre-diciembre de 1998.
- C8. D. F. Campos Aranda. Revisión de la creciente de diseño de la presa El Cuchillo, en el estado de Nuevo León, México (Enfoque probabilístico Global). *XVIII Congreso Latinoamericano de Hidráulica (IAHR)*, Vol. 1, 349-357. 13 al 16 de octubre, Oaxaca, Oax. 1998.
- C9. D. F. Campos Aranda. Uso de la correlación y la regresión lineal para ampliar registros de volúmenes escurridos anuales. *Ingeniería (UNAM)*, Vol. I, No. 2, enero-marzo, pp. 59-71, 1999.
- C10. D. F. Campos Aranda. Variabilidad en la estimación de los coeficientes de escurrimiento mensuales. (Estudio de un caso). *XVI Congreso Nacional de Hidráulica*, pp. 767-772. 8 al 10 de noviembre del 2000. Morelia, Michoacán.
- C11. D. F. Campos Aranda. Contraste de cinco métodos de ajuste de la distribución GVE en 31 registros históricos de eventos máximos anuales. *Ingeniería Hidráulica en México*, Vol. XVI, número 2, pp. 77-92, abril-junio del 2001.
- C12. R. T. Clarke. *Mathematical models in Hydrology*. Chapter 5: The estimation of floods with given return period, pp. 130-146. Irrigation and drainage paper No. 19: Food and Agriculture Organization of the U. N. Rome, Italy, 1973.
- C13. Comisión Federal de Electricidad, *Manual de Diseño de Obras Civiles*. Sección A: Datos hidrológicos y geológicos (183 páginas). Instituto de Investigaciones de la Industria Eléctrica, CFE. México, D. F. 1970.
- C14. Comisión Federal de Electricidad. *Boletín Hidrométrico No. 13 - El Balsas Medio*, Tomo II, pp. 570-590. CFE. México, D. F. 1979.
- C15. V. T. Chow. Statistical and probability analysis of hydrologic data. Part I: Frequency analysis. Section 8-1, pp. 8-1 to 8-42 in *Handbook of Applied Hydrology*, editor-in-chief Ven Te Chow, McGraw-Hill Book Co. New York, USA. 1964.
- J1. A. F. Jenkinson. Statistics of Extremes. Chapter 5, pp. 183-210, in *Estimation of Maximum Floods*. Technical Note No. 98. World Meteorological Organization. Geneva, Switzerland. 1969.
- K1. G. W. Kite. *Frequency and Risk Analyses in Hydrology*. Chapter 12: Comparison of frequency distributions, pp. 156-168. Water Resources Publication, Fort Collins, CO., U.S.A. 1977.
- K2. G. W. Kite. Algunas observaciones estadísticas. *Ingeniería Hidráulica en México*, Número Especial (Hidrología, Ciencia de la Tierra), pp. 142-147, octubre de 1990.
- L1. J. Lipka. *Computaciones Gráficas y Mecánicas*. Capítulo 6: Fórmulas Empíricas-Curvas No Periódicas, pp. 153-208. Compañía Editorial Continental, S. A., México, D. F. 1967.
- P1. L. Poole, M. Borchers y D. M. Castlewitz., *Algunos Programas de Uso Común en BASIC*. Programa: Regresión lineal múltiple, pp. 151-154. Osborne/McGraw-Hill, México, D. F. 1983.
- P2. L. Poole, M. Borchers y D. M. Castlewitz., *Algunos Programas de Uso Común en BASIC*. Programa: Regresión de orden N, pp. 155-157. Osborne/McGraw-Hill, México, D. F. 1983.

- S1.** V. P. Singh & K. Singh. Parameter estimation for Log-Pearson Type III distribution by POME. *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 114, No. 1, pp. 112-122. 1988.
- S2.** R. Springall G. *Análisis estadístico y probabilístico de datos hidrológicos*. Hidrología. Capítulo 8. Facultad de Ingeniería de la UNAM. México, D. F. (140 pág.)
- W1.** World Meteorological Organization. *Manual for Estimation of Probable Maximum Precipitation*. Chapter 4: Statistical estimates, pp. 95-107. Operational Hydrology Report No. 1. Geneva, Switzerland. 1973.
- Y1.** V. Yevjevich. *Probability and Statistics in Hydrology*. Chapter 11: Correlation and regression, pp. 232-276. Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, U.S.A. 1972.

## PCN11: REGPOL

```

1000 REM PROGRAMA "REGPOL" (REGresion POLinomial)
1010 REM AJUSTA UN POLINOMIO DE GRADO n A UNA SERIE DE PAREJAS DE DATOS
1020 REM SE INTRODUCEN E IMPRIMEN LOS DATOS
1030 CLS:PRINT"AJUSTE DE UN POLINOMIO DE GRADO n<10":PRINT
1040 INPUT"NUMERO DE PAREJAS DE DATOS =";N
1050 DIM X(N),Y(N),A(22),R(12,12),T(12)
1060 PRINT:FOR I=1 TO N
1070 PRINT"PUNTO NUMERO";I;:INPUT":VALORES DE X,Y";X(I),Y(I)
1080 NEXT I:PRINT
1090 INPUT"ESTA CORRECTA LA INFORMACION ANTERIOR (S/N)";A$
1100 IF A$="N" OR A$="n" THEN 1110 ELSE 1150
1110 PRINT:INPUT"INTRODUCIR No.DE PAREJA POR CORREGIR";I
1120 INPUT"INTRODUCIR VALORES CORRECTOS X e Y:";X(I),Y(I)
1130 INPUT"DESEA CORREGIR OTRA PAREJA";B$
1140 IF B$="S" OR B$="s" THEN 1110
1150 LPRINT"REGRESION POLINOMIAL DE ORDEN n":LPRINT
1160 LPRINT"INFORMACION UTILIZADA:"
1170 FOR I=1 TO N
1180 LPRINT"PUNTO";I;:LPRINT": X = ";X(I)
1190 LPRINT"PUNTO";I;:LPRINT": Y = ";Y(I)
1200 NEXT I:PRINT
1210 INPUT"INTRODUCIR EL GRADO DE POLINOMIO DESEADO:";D
1220 REM SE CALCULAN LOS ELEMENTOS DE LAS MATRICES DEL SISTEMA
1230 A(1)=N:FOR I=1 TO N
1240 FOR J=2 TO 2*D+1
1250 A(J)=A(J)+X(I)^(J-1):NEXT J
1260 FOR K=1 TO D+1
1270 R(K,D+2)=T(K)+Y(I)*X(I)^(K-1)
1280 T(K)=T(K)+Y(I)*X(I)^(K-1):NEXT K
1290 T(D+2)=T(D+2)+Y(I)^2:NEXT I
1300 REM SE RESUELVE EL SISTEMA DE ECUACIONES
1310 FOR J=1 TO D+1:FOR K=1 TO D+1
1320 R(J,K)=A(J+K-1):NEXT K,J
1330 FOR J=1 TO D+1:K=J
1340 IF R(K,J)<>0 THEN 1370
1350 K=K+1:IF K<=D+1 THEN 1340
1360 LPRINT"NO EXISTE SOLUCION UNICA":END
1370 FOR I=1 TO D+2
1380 S=R(J,I):R(J,I)=R(K,I):R(K,I)=S
1390 NEXT I:Z=1/R(J,J)
1400 FOR I=1 TO D+2
1410 R(J,I)=Z*R(J,I):NEXT I
1420 FOR K=1 TO D+1
1430 IF K=J THEN 1470
1440 Z=-R(K,J):FOR I=1 TO D+2
1450 R(K,I)=R(K,I)+Z*R(J,I)
1460 NEXT I
1470 NEXT K,J
1480 REM IMPRESION DE RESULTADOS

```

```
1490 CLS:LPRINT:LPRINT"GRADO DEL POLINOMIO AJUSTADO = ";D
1500 LPRINT"VALOR DE LA CONSTANTE = ";R(1,D+2)
1510 FOR J=1 TO D
1520 LPRINT"COEF.DE LA VARIABLE X A LA POTENCIA ";J;:LPRINT"= ";R(J+1,D+2)
1530 NEXT J:LPRINT
1540 REM SE EVALUA EL COEFICIENTE DE CORRELACION
1550 P=0:FOR J=2 TO D+1
1560 P=P+R(J,D+2)*(T(J)-A(J)*T(1)/N):NEXT J
1570 Q=T(D+2)-T(1)^2/N
1580 W=Q-P:I=N-D-1:CC=P/Q
1590 LPRINT"COEFICIENTE DE CORRELACION = ";SQR(CC)
1600 LPRINT"ERROR ESTANDAR DE ESTIMACION = ";SQR(W/I)
1610 INPUT"DESEA AJUSTAR OTRO POLINONIO (S/N)";A$
1620 IF A$="N" THEN 1680
1630 INPUT"GRADO DEL NUEVO POLINOMIO =";D
1640 FOR I=1 TO 12
1650 A(I)=0:R(I,I)=0:A(I+10)=0
1660 T(I)=0:NEXT I:GOTO 1230
1670 REM SE CALCULA EL VALOR ESTIMADO DE Y PARA UN VALOR X
1680 CLS:INPUT"DESEA REALIZAR UNA ESTIMACION DE Y (S/N)";B$
1690 IF B$="N" THEN 1760
1700 INPUT"VALOR DE LA VARIABLE X = ";X
1710 P=R(1,D+2):FOR J=1 TO D
1720 P=P+R(J+1,D+2)*X^J:NEXT J
1730 LPRINT:LPRINT"VALOR DE LA VARIABLE X = ";X
1740 LPRINT"VALOR ESTIMADO PARA Y = ";P
1750 GOTO 1680
1760 END
```

## PCN12: REGMUL

```
1000 REM PROGRAMA "REGMUL" (REGresion MULTiple)
1010 CLS:PRINT"REGRESION LINEAL MULTIPLE"
1020 PRINT:INPUT"NUMERO DE PUNTOS CONOCIDOS:";N
1030 DIM X(N+1),S(N+1),T(N+1),A(N+1,N+2)
1040 INPUT"NUMERO DE VARIABLES CONOCIDAS:";V
1050 IF V=>N THEN 1060 ELSE 1070
1060 PRINT"ERROR: EL No.DE VARIABLES NO DEBE IGUALAR AL DE DATOS":END
1070 INPUT"DESEA UNA ECUACION LINEAL(L) O EXPONENCIAL(E)";A$
1080 LPRINT"REGRESION LINEAL MULTIPLE":LPRINT
1090 IF A$="L" THEN LPRINT"ECUACION LINEAL"
1100 IF A$="E" THEN LPRINT"ECUACION EXPONENCIAL"
1110 X(1)=1:FOR I =1 TO N
1120 PRINT"PUNTO ";I;
1130 LPRINT:LPRINT"PUNTO ";I
1140 FOR J =1 TO V
1150 PRINT;TAB(16);"VARIABLE";J;TAB(27)
1160 INPUT" : ";X(J+1)
1170 LPRINT"VARIABLE";J;:LPRINT"= ";X(J+1)
1180 IF A$="E" THEN X(J+1)=LOG(X(J+1))
1190 NEXT J
1200 INPUT"      VARIABLE DEPENDIENTE : ";X(V+2)
1210 LPRINT"VARIABLE DEPENDIENTE =";X(V+2)
1220 IF A$="E" THEN X(V+2)=LOG(X(V+2))
1230 REM INICIAN CALCULOS.
1240 FOR K=1 TO V+1:FOR L=1 TO V+2
1250 A(K,L)=A(K,L)+X(K)*X(L):S(K)=A(K,V+2)
1260 NEXT L,K
1270 S(V+2)=S(V+2)+X(V+2)^2:NEXT I
1280 FOR I=2 TO V+1:T(I)=A(1,I):NEXT I
1290 FOR I=1 TO V+1:J=I
1300 IF A(J,I)<>0 THEN 1340
1310 J = J+1
1320 IF J<=V+1 THEN 1300
1330 LPRINT"NO HAY SOLUCION UNICA":END
1340 FOR K=1 TO V+2:B=A(I,K)
1350 A(I,K)=A(J,K):A(J,K)=B
1360 NEXT K:Z=1/A(I,I)
1370 FOR K=1 TO V+2
1380 A(I,K)=Z*A(I,K):NEXT K
1390 FOR J=1 TO V+1
1400 IF J=I THEN 1450
1410 Z=-A(J,I)
1420 FOR K=1 TO V+2
1430 A(J,K)=A(J,K)+Z*A(I,K)
1440 NEXT K
1450 NEXT J,I
1460 CLS:LPRINT
```

```
1470 LPRINT"COEFICIENTES DE LA ECUACION:"
1480 IF A$="E" THEN A(1,V+2)=2.7182818#^A(1,V+2)
1490 LPRINT"  CONSTANTE      = ";A(1,V+2)
1500 FOR I=2 TO V+1
1510 LPRINT"  VARIABLE (";I-1;" )=";A(I,V+2)
1520 NEXT I
1530 P=0:FOR I=2 TO V+1
1540 P=P+A(I,V+2)*(S(I)-T(I)*S(1)/N):NEXT I
1550 R=S(V+2)-S(1)^2/N:Z=R-P:L=N-V-1:I=P/R
1560 LPRINT:LPRINT"COEFICIENTE DE CORRELACION MULTIPLE =" ;SQR(I):LPRINT
1570 LPRINT"ERROR ESTANDAR DE ESTIMACION =" ;SQR(ABS(Z/L))
1580 REM ESTIMACION DE LA VARIABLE DEPENDIENTE.
1590 INPUT"DESEA UNA ESTIMACION DE LA VARIABLE DEPENDIENTE (S/N)";B$
1600 IF B$="N" THEN END
1610 LPRINT:LPRINT"ESTIMACION DE VARIABLE DEPENDIENTE:"
1620 IF A$="E" THEN 1710
1630 P=A(1,V+2):FOR J=1 TO V
1640 PRINT"VALOR DE LA VARIABLE ";J;
1650 INPUT"  : ";X
1660 LPRINT"VALOR DE LA VARIABLE ";J;:LPRINT"= ";X
1670 P=P+A(J+1,V+2)*X:NEXT J
1680 PRINT"VARIABLE DEPENDIENTE =" ;P
1690 LPRINT"VARIABLE DEPENDIENTE =" ;P
1700 PRINT:GOTO 1590
1710 P=A(1,V+2):FOR J=1 TO V
1720 PRINT"VALOR DE LA VARIABLE ";J;
1730 INPUT"  : ";X
1740 LPRINT"VALOR DE LA VARIABLE ";J;:LPRINT"= ";X
1750 P=P*X^A(J+1,V+2):NEXT J
1760 PRINT"VARIABLE DEPENDIENTE =" ;P
1770 LPRINT"VARIABLE DEPENDIENTE =" ;P
1780 PRINT:GOTO 1590
1790 END
```

## PCN13: GVESEX

```

1000 REM PROGRAMA "GVESEX" (General de Valores Extremos por SEXtiles)
1010 REM AJUSTE DE LA DISTRIBUCION GVE POR EL METODO DE SEXTILES
1020 REM SE LEEN Y ORDENAN LOS VALORES DE LA SERIE (DATOS)
1030 CLS:PRINT"DISTRIBUCION GENERAL DE VALORES EXTREMOS":PRINT
1040 INPUT"NOMBRE DE LA ESTACION HIDROMETRICA:";NE$:PRINT
1050 INPUT"NUMERO TOTAL DE DATOS (n) =";N:PRINT
1060 DIM X(N),XO(N),Z(6*N),XE(N),P(13),TR(13),XC(13)
1070 FOR I=1 TO N:READ X(I):XO(I)=X(I):NEXT I
1080 REM INICIA ORDENAMIENTO DE DATOS (m-M)
1090 FOR I=1 TO N-1:FOR J=I+1 TO N
1100 IF XO(J)>=XO(I) THEN 1120
1110 X1=XO(I):XO(I)=XO(J):XO(J)=X1
1120 NEXT J,I
1130 REM INICIAN CALCULOS DEL METODO DE SEXTILES
1140 KK=0:FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO 6
1150 KK=KK+1:Z(KK)=XO(I):NEXT J,I
1160 FOR J=1 TO 6:LL=N*(J-1)
1170 FOR I=1+LL TO N+LL
1180 W(J)=W(J)+Z(I):NEXT I
1190 W(J)=W(J)/N:S1=S1+W(J)
1200 S2=S2+W(J)^2:NEXT J
1210 WM=S1/6:WS=SQR((S2-6*WM^2)/6)
1220 L=(W(2)-W(1))/(W(6)-W(5))
1230 IF L>1.05 THEN 1240 ELSE 1250
1240 L=1/L:K=1.063526-1.322215*L+.5474616*L^2:GOTO 1260
1250 K=-.6615385+2.558663*L-2.833665*L^2+1.211286*L^3
1260 MW=.576483-.9504*K+.94979*K^2-1.44009*K^3+1.0507*K^4
1270 SW=1.19153-1.16964*K+2.12568*K^2-3.13449*K^3+2.24183*K^4
1280 A=WS/SW:U=WM-A*MW
1290 REM INICIA IMPRESION DE DATOS Y RESULTADOS
1300 LPRINT"DISTRIBUCION GVE AJUSTADA CON EL METODO DE SEXTILES":LPRINT
1310 LPRINT"ESTACION HIDROMETRICA:";NE$
1320 LPRINT" DATO No. VALOR VALOR ORDENADO P(X<x)"
1330 FOR I=1 TO N:LPRINT USING"#####";I::LPRINT USING"#####.###";X(I);
1340 LPRINT USING"#####.###";XO(I)::LPRINT USING"#####.###";I/(N+1)
1350 NEXT I:LPRINT
1360 LPRINT"PARAMETROS DE AJUSTE:"
1370 LPRINT"PARAMETRO DE UBICACION (u) = ";:LPRINT USING"#####.###";U
1380 LPRINT"PARAMETRO DE ESCALA (a) = ";:LPRINT USING"#####.###";A
1390 LPRINT"PARAMETRO DE FORMA (k) = ";:LPRINT USING"###.#####";K
1400 GOSUB 1580:LPRINT
1410 LPRINT"ERROR ESTANDAR DE AJUSTE (EEA) = ";:LPRINT USING"#####.###";EE
1420 LPRINT"ERROR ABSOLUTO DE AJUSTE (EAA) = ";:LPRINT USING"#####.###";EA
1430 REM SUBROUTINA DE CALCULO DEL VALOR ASOCIADO A UN TR
1440 P(1)=.01:P(2)=.05:P(3)=.1:P(4)=.2:P(5)=.5:P(6)=.8:P(7)=.9
1450 P(8)=.95:P(9)=.98:P(10)=.99:P(11)=.998:P(12)=.999:P(13)=.9999
1460 TR(1)=1.01:TR(2)=1.05:TR(3)=1.11:TR(4)=1.25:TR(5)=2:TR(6)=5:TR(7)=10
1470 TR(8)=20:TR(9)=50:TR(10)=100:TR(11)=500:TR(12)=1000:TR(13)=10000

```

```

1480 LPRINT:LPRINT"PROBABILIDAD      Tr      VALOR ESTIMADO:"
1490 LPRINT"      P(X<x)      (años)      SEXTILES"
1500 FOR I=1 TO 13:VR=1-(-LOG(P(I)))^K
1510 XC(I)=U+A*VR/K:IF XC(I)<0 THEN XC(I)=0
1520 LPRINT USING"#####.####";P(I);
1530 IF I<=4 THEN 1540 ELSE 1550
1540 LPRINT USING"#####.##";TR(I);:GOTO 1560
1550 LPRINT USING"#####.##";TR(I);
1560 LPRINT USING"#####.##";XC(I):NEXT I
1570 END
1580 REM SUBROUTINA DE CALCULO DEL ERROR DE AJUSTE (EEA y EAA)
1590 SE=0:SA=0:FOR I=1 TO N
1600 P=I/(N+1):VR=1-(-LOG(P))^K
1610 XE(I)=U+A*VR/K:SE=SE+(XO(I)-XE(I))^2
1620 SA=SA+ABS(XO(I)-XE(I)):NEXT I
1630 EE=SQR(SE/(N-3)):EA=SA/(N-3)
1640 RETURN
1650 REM GASTOS MAXIMOS ANUALES (m^3/s) EST. HIDROM. EL CUCHILLO (n=67)
1660 REM SEGUN DATOS DE 1981-1993 DE LA GERENCIA ESTATAL EN N.L. 1927-1993
1670 DATA 1817,54.4,34.2,994,332.5,162.8,2736.5,393.5,602.8,1307
1680 DATA 139.8,6758.5,720.4,404,1194,817.2,675.5,1584.8,3358,526.4
1690 DATA 1393.9,1173.1,381.8,469,2084.4,167.4,2511.5,302.7,384.5,125
1700 DATA 900,1927,177,1677.6,492,584.5,603,348.2,1274,726.8
1710 DATA 5540,464.5,470.6,655.4,649,454.6,3355.5,1935,643.7,1081
1720 DATA 2000,3500,355,225.9,396,210,366.9,183.9,115.2,963.7
1730 DATA 688.6,8315.1,505.3,392.6,161.5,153.9,250.9
1740 REM DATOS (n=31) DEL EJEMPLO 5.2.1.1 DE R.T. CLARK. PAG. 136 (m^3/s)
1750 DATA 377.19,99.84,229.56,186.24,205.1,186.24,246.0,249.11,495.75,101.08
1760 DATA 271.8,101.86,292.26,111.37,230.23,188.52,378.02,216.49,295.35,152.05
1770 DATA 227.76,114.08,176.21,251.62,256.64,287.64,137.12,320.08,238.15
1780 DATA 286.61,271.8

```



# Capítulo 6:

## Derivación Numérica

### Resumen

Los procesos de derivación e integración son muy importantes en las aplicaciones del Cálculo orientadas a resolver problemas de ingeniería, pero en la mayoría de éstas tales procesos no pueden ser obtenidos analíticamente, debido a complejidad algebraica o porque la función únicamente es conocida con base en datos experimentales o mediciones reales; entonces se debe recurrir a sus aproximaciones numéricas. Para la primera derivada se desarrollan las fórmulas de la aproximación de primer orden, según diferenciación *hacia delante*, *hacia atrás* y *central*. En seguida se plantea la obtención de las ecuaciones de las derivadas con mayor precisión o aproximaciones de segundo orden; lo anterior para la primera, segunda y tercera derivadas. Posteriormente, se describe brevemente el programa de cómputo que aplica las 18 fórmulas expuestas. Por último, se aborda el problema del ajuste de un modelo matemático o fórmula compleja de decaimiento exponencial, mediante un proceso de tanteos basado en las primeras derivadas de la función objetivo con respecto a cada uno de los 4 parámetros de ajuste.

### 6.1 Introducción

La diferenciación y la integración son dos procesos fundamentales del Cálculo, que definen dos de sus áreas principales. En teoría, siempre es posible determinar la forma analítica de la derivada de una función dada, así como obtener la integral de cualquier función. Sin embargo, en la práctica es común que la expresión analítica de la derivada, o el proceso de integración sean demasiado complicados algebraicamente hablando, o bien que para el objetivo buscado puede ser suficiente una aproximación numérica rápida de tales procesos. Por otra parte, cuando únicamente se dispone de la función bajo un conjunto de datos experimentales, la diferenciación e integración numéricas son la solución a la obtención de las derivadas en un punto y a la evaluación de la integral bajo tal función <sup>[A1, A2, A3]</sup>.

### 6.2 Aproximación por diferencias de primer orden

Existen dos enfoques para obtener el valor de la derivada. El primero consiste en ajustar una curva o polinomio de grado  $n$  a los datos experimentales disponibles, o a un conjunto de puntos en que la función es evaluada; después se obtiene la expresión analítica de la derivada de tal polinomio y con ésta se calcula la derivada buscada <sup>[A3]</sup>. Dentro de este enfoque se puede utilizar la aproximación mediante los polinomios de Lagrange <sup>[A2]</sup>. En el segundo enfoque, la función es evaluada en el punto donde se

requiere su derivada y en las cercanías de éste, a una distancia  $\Delta x$ , y entonces se aplica la definición matemática de la derivada, ésta es <sup>[A3]</sup>:

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (6.1)$$

cuando

$$\Delta x \rightarrow 0$$

En realidad la ecuación 6.1 es una fórmula de diferencia *hacia delante*, porque utiliza el punto base  $x$  y un valor mayor  $\Delta x$ . Entonces, la fórmula siguiente es una diferencia *hacia atrás* <sup>[A3]</sup>:

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} \quad (6.2)$$

Existe una alternativa a las ecuaciones 6.1 y 6.2, denominada diferencia *central*, que consiste en calcular el valor de la función en puntos  $x+\Delta x$  y  $x-\Delta x$ , de manera que:

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} \quad (6.3)$$

En muchas funciones altamente variables la fórmula de la diferencia central, también conocida como de *doble paso*, conduce a mejores estimaciones que las aproximaciones por diferencias hacia delante y hacia atrás <sup>[A3]</sup>.

**Ejemplo 6.1.** Obtener la primera derivada  $[f'(x)]$  del polinomio siguiente <sup>(G1)</sup>, en  $x = 0.50$  utilizando  $\Delta x = 0.25$  como tamaño del paso.

$$f(x) = -0.10x^4 - 0.15x^3 - 0.50x^2 - 0.25x + 1.20$$

La solución exacta o analítica es  $f'(x) = -0.91250$

Las estimaciones de la función y la aplicación de las ecuaciones 6.1 a 6.3 conduce a:

$$f(0.25) = 1.10352$$

$$f(0.50) = 0.92500$$

$$f(0.75) = 0.63633$$

Ecuación:	6.1	6.2	6.3
Estimación de $f'(x)$ :	-1.15468	-0.71408	-0.93438
Error relativo $\varepsilon_r$ (%)	26.5	21.7	2.4

□

### 6.3 Aproximación por diferencias de segundo orden

Al utilizar la expansión en serie de Taylor (ver Apéndice 2) hacia delante se obtiene <sup>[A8]</sup>:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{df(x)}{dx} \Delta x + \frac{df^2(x)}{dx^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{df^3(x)}{dx^3} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \quad (6.4)$$

Ignorando los términos de la segunda derivada y posteriores se obtiene la ecuación siguiente:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + \frac{df(x)}{dx} \Delta x \quad (6.5)$$

Despejando a

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

resulta la ecuación 6.1; por lo tanto, esta expresión es una aproximación de primer orden a la primera derivada de  $f(x)$ . Una aproximación de segundo orden se obtendrá al incluir el término de la segunda derivada en 6.4 y despejando para  $f'(x)$ :

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{df^2(x)}{dx^2} \frac{\Delta x}{2!} \quad (6.6)$$

la segunda derivada se puede estimar aplicando dos veces la ecuación 6.1, esto es:

$$\frac{df^2(x)}{dx^2} = \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^2} \quad (6.7)$$

La expresión anterior es una aproximación *hacia delante* de primer orden a la segunda derivada. Ahora sustituyendo la ecuación 6.7 en la 6.6, se obtendrá la aproximación de segundo orden a la primera derivada:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{-f(x+2\Delta x) + 4f(x+\Delta x) - 3f(x)}{2\Delta x} \quad (6.8)$$

De manera similar se puede obtener la estimación de segundo orden de la segunda derivada por diferencias *hacia delante*<sup>(A3)</sup>:

$$\frac{df^2(x)}{dx^2} = \frac{-f(x+3\Delta x) + 4f(x+2\Delta x) - 5f(x+\Delta x) + 2f(x)}{(\Delta x)^2} \quad (6.9)$$

Por otra parte, las aproximaciones de primer y segundo orden a la tercera derivada, según planteamiento de diferencias *hacia delante* son<sup>(G1)</sup>:

$$\frac{df^3(x)}{dx^3} = \frac{f(x+3\Delta x) - 3f(x+2\Delta x) + 3f(x+\Delta x) - f(x)}{(\Delta x)^3} \quad (6.10)$$

$$f'''(x) = \frac{-3f(x+4\Delta x) + 14f(x+3\Delta x) - 24f(x+2\Delta x) + 18f(x+\Delta x) - 5f(x)}{2(\Delta x)^3} \quad (6.11)$$

En la Tabla 6.1 se han concentrado las fórmulas de las aproximaciones de primer y segundo orden a las primera, segunda y tercera derivadas en diferencias *hacia atrás* y *centrales*; deducidas bajo el planteamiento de expansión serie de Taylor, idéntico al expuesto para las diferencias *hacia delante*, ecuaciones 6.1, 6.8, 6.7, 6.9, 6.10 y 6.11, respectivamente.

**Ejemplo 6.2.** Resolver el problema 6.1 empleando las fórmulas con aproximación de segundo orden. Las evaluaciones necesarias de la función  $f(x)$  y los resultados<sup>(C1)</sup> son:

$$f(x-2\Delta x) = f(0) = 1.20000$$

$$f(x+\Delta x) = f(0.75) = 0.63633$$

$$f(x-\Delta x) = f(0.25) = 1.10352$$

$$f(x+2\Delta x) = f(1.00) = 0.20000$$

$$f(x) = f(0.50) = 0.92500$$

$$f''(0.50) = \frac{-0.20 + 4(0.63633) - 3(0.925)}{2(0.25)} = -0.85936 \quad (6.8)$$

$$\varepsilon_r = 5.8\%$$

Tabla 6.1

**Aproximaciones de primer y segundo orden para las primera, segunda y tercera derivadas según diferencias hacia delante, hacia atrás y centrales** <sup>[A3,C1,N1]</sup>

<i>Ecuación:</i>	<i>Error</i>	<i>Ec.</i>
Primera derivada. Diferencias hacia delante.		
$f'(x) = [f(x + \Delta x) - f(x)]/\Delta x$	$O(\Delta x)$	6.1
$f'(x) = [-f(x + 2\Delta x) + 4f(x + \Delta x) - 3f(x)]/2\Delta x$	$O(\Delta x^2)$	6.8
Primera derivada. Diferencias hacia atrás.		
$f'(x) = [f(x) - f(x - \Delta x)]/\Delta x$	$O(\Delta x)$	6.2
$f'(x) = [3f(x) - 4f(x - \Delta x) + f(x - 2\Delta x)]/2\Delta x$	$O(\Delta x^2)$	6.12
Primera derivada. Diferencias centrales.		
$f'(x) = [f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)]/2\Delta x$	$O(\Delta x^2)$	6.3
$f'(x) = [-f(x+2\Delta x) + 8f(x+\Delta x) - 8f(x-\Delta x) + f(x-2\Delta x)]/12\Delta x$	$O(\Delta x^4)$	6.13
Segunda derivada. Diferencias hacia delante.		
$f''(x) = [f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)]/(\Delta x)^2$	$O(\Delta x)$	6.7
$f''(x) = [-f(x+3\Delta x) + 4f(x+2\Delta x) - 5f(x+\Delta x) + 2f(x)]/(\Delta x)^2$	$O(\Delta x^2)$	6.9
Segunda derivada. Diferencias hacia atrás.		
$f''(x) = [f(x) - 2f(x-\Delta x) + f(x-2\Delta x)]/(\Delta x)^2$	$O(\Delta x)$	6.14
$f''(x) = [2f(x) - 5f(x-\Delta x) + 4f(x-2\Delta x) - f(x-3\Delta x)]/(\Delta x)^2$	$O(\Delta x^2)$	6.15
Segunda derivada. Diferencias centrales.		
$f''(x) = [f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)]/(\Delta x)^2$	$O(\Delta x^2)$	6.16
$f''(x) = [-f(x+2\Delta x) + 16f(x+\Delta x) - 30f(x) + 16f(x-\Delta x) - f(x-2\Delta x)]/12(\Delta x)^2$	$O(\Delta x^4)$	6.17
Tercera derivada. Diferencias hacia delante.		
$f'''(x) = [f(x+3\Delta x) - 3f(x+2\Delta x) + 3f(x+\Delta x) - f(x)]/(\Delta x)^3$	$O(\Delta x)$	6.10
$f'''(x) = [-3f(x+4\Delta x) + 14f(x+3\Delta x) - 24f(x+2\Delta x) + 18f(x+\Delta x) - 5f(x)]/2(\Delta x)^3$	$O(\Delta x^2)$	6.11
Tercera derivada. Diferencias hacia atrás.		
$f'''(x) = [f(x) - 3f(x-\Delta x) + 3f(x-2\Delta x) - f(x-3\Delta x)]/(\Delta x)^3$	$O(\Delta x)$	6.18
$f'''(x) = [5f(x) - 18f(x-\Delta x) + 24f(x-2\Delta x) - 14f(x-3\Delta x) + 3f(x-4\Delta x)]/2(\Delta x)^3$	$O(\Delta x^2)$	6.19
Tercera derivada. Diferencias centrales.		
$f'''(x) = [f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + 2f(x-\Delta x) - f(x-2\Delta x)]/2(\Delta x)^3$	$O(\Delta x^2)$	6.20
$f'''(x) = [-f(x+3\Delta x) + 8f(x+2\Delta x) - 13f(x+\Delta x) + 13f(x-\Delta x) - 8f(x-2\Delta x) + f(x-3\Delta x)]/8(\Delta x)^3$	$O(\Delta x^4)$	6.21

$$f'(0.50) = \frac{3(0.925) - 4(1.10352) + 1.20}{2(0.256)} = -0.87816 \quad (6.12)$$

$$\varepsilon_r = 3.8\%$$

$$f'(0.50) = \frac{-0.20 + 8(0.63633) - 8(1.10352) + 1.20}{12(0.25)} = -0.912507 \quad (6.13)$$

$$\varepsilon_r \approx 0\%$$

□

**Ejemplo 6.3.** Dada la función  $f(x) = (\sin x)^{e^x}$  estimar  $f'(1.0)$  utilizando  $\Delta x = 0.025$  <sup>(H1)</sup>, aproximaciones de primer orden y central de segundo orden como solución exacta. Las estimaciones necesarias y resultados son:

$$f(0.950) = 0.58627$$

$$f(1.025) = 0.64562$$

$$f(0.975) = 0.60572$$

$$f(1.050) = 0.66602$$

$$f(1.000) = 0.62551$$

la solución exacta será:

$$f'(1.0) = \frac{-0.66602 + 8(0.64562) - 8(0.60572) + 0.58627}{12(0.025)} = 0.79817 \quad (6.13)$$

$$f'(1.0) = \frac{0.64562 - 0.62551}{0.025} = 0.80440 \quad \varepsilon_r = 0.78\% \quad (6.1)$$

$$f'(1.0) = \frac{0.62551 - 0.60572}{0.025} = 0.79160 \quad \varepsilon_r = 0.82\% \quad (6.2)$$

$$f'(1.0) = \frac{0.64562 - 0.60572}{2(0.025)} = 0.79800 \quad \varepsilon_r = 0.021\% \quad (6.3)$$

□

**Ejemplo 6.4.** Para  $f(x) = x \cdot e^x$  obtener aproximaciones de primer orden de  $f''(2)$  con  $\Delta x = 0.10$ , evaluando el error relativo sabiendo que la solución exacta es 29.556224 <sup>(B2)</sup>. Las estimaciones necesarias de la función son:

$$f(1.80) = 10.889365$$

$$f(2.10) = 17.148957$$

$$f(1.90) = 12.703199$$

$$f(2.20) = 19.855030$$

$$f(2.00) = 14.778112$$

$$f''(2.0) = \frac{19.855030 - 2(17.148957) + 14.778112}{(0.10)^2} = 33.522800 \quad (6.7)$$

$$\varepsilon_r = 13.42\%$$

$$f''(2.0) = \frac{14.778112 - 2(12.703199) + 10.889365}{(0.10)^2} = 26.107900 \quad (6.14)$$

$$\varepsilon_r = 11.67\%$$

$$f''(2.0) = \frac{17.148957 - 2(14.778112) + 12.703199}{(0.10)^2} = 29.593200 \quad (6.16)$$

$$\varepsilon_r = 0.125\%$$

□

## 6.4 Programa de cómputo

Al final de este capítulo se presenta el listado del programa denominado DERIV123, el cual aplica las 18 fórmulas de aproximaciones por diferencias que se han concentrado en la Tabla 6.1 y por lo tanto permite estimar la primera, segunda y tercera derivadas de una función analítica, por medio de aproximaciones de primer y segundo orden. Para su aplicación sólo se deben acceder tres datos: en la línea 1050 los relativos al punto de evaluación ( $x = PX$ ) y al intervalo utilizado ( $h = H$ ), y en la línea 1070 la función analítica  $f(x)$ , la cual se define con la instrucción DEF FNF(X)=, por ello únicamente se completa tal sentencia con la función respectiva escrita en Basic (ver Apéndice 1). El listado citado (PCN14: DERIV123) presenta los datos del ejemplo 6.3, que son:  $x = 1.00$ ,  $h = 0.025$  y  $f(x) = (\sin x)^{e^x}$ .

## 6.5 Aplicación práctica

Como se indicó en el capítulo 1, un problema común en la ingeniería es el ajuste de modelos matemáticos a los datos disponibles. Cuando el modelo es simple, como una recta, una curva o un plano se utilizan para su ajuste las técnicas del capítulo precedente, mismas que se resumen en el principio de mínimos cuadrados de los errores ( $e$ ). Entonces una función objetivo ( $FO$ ) para ser minimizada será <sup>[A3]</sup>:

$$FO = \min \sum_{i=1}^n e_i^2 = \min \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \quad (6.22)$$

en la cual  $n$  es el número de datos o tamaño de la muestra,  $Y_i$  son las observaciones de la variable dependiente y  $\hat{Y}_i$  las predicciones correspondientes a cada dato realizadas con el modelo que se ajusta.

Si el modelo propuesto para predecir  $f(x)$  es relativamente simple, la ecuación 6.22 se puede diferenciar analíticamente con respecto a los parámetros de ajuste del modelo para buscar el mínimo. Pero si el modelo es más complejo, entonces un enfoque analítico no es posible, o bien es muy complicado y una solución numérica de las derivadas es necesaria para obtener los valores de los parámetros que hacen mínima a la  $FO$ .

Por ejemplo, un modelo o ecuación que emplean los ingenieros ambientales para predecir el déficit de oxígeno disuelto ( $\hat{Y}$ ), en ppm, en un cauce como una función del tiempo ( $t$ ) en días después del vertido, es <sup>[A3]</sup>:

$$\hat{Y} = \frac{K_1}{1 + e^{-K_2(t - t_0)}} - K_3 \quad (6.23)$$

$K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  y  $t_0$  son los parámetros de ajuste que deben ser estimados con base en los datos o mediciones de campo.

**Ejemplo 6.5.** En la tabulación siguiente se tienen las mediciones ( $Y_i$ ) realizadas a 152.4 metros aguas abajo del punto donde una planta industrial descarga sus residuos a un cauce <sup>[A3]</sup>:

$i$	1	2	3	4	5
$t$ (días)	0	1	2	3	4
$Y_i$ (ppm)	0	0.62	1.82	3.03	3.64

Al sustituir la ecuación 6.23 en la 6.22 e intentar derivar  $FO$  con respecto a cada parámetro de ajuste, la solución analítica no es fácil y por ello se recurre a una aproximación numérica, cuyo procedimiento consiste en adoptar unos valores iniciales, por

ejemplo:  $K_1 = 4.5$ ,  $K_2 = 1.0$ ,  $K_3 = 0.10$  y  $tw = 2.0$ ; en seguida con tales valores y la ecuación 6.23 se realizan predicciones ( $\hat{Y}$ ) del déficit de oxígeno disuelto para el mismo tiempo ( $t$ ) en días de los muestreos, en este caso se obtienen: 0.44, 1.11, 2.15, 3.19 y 3.86 ppm. Entonces  $FO$  será:

$$FO = (0-0.44)^2 + (0.62-1.11)^2 + (1.82-2.15)^2 + (3.03-3.19)^2 + (3.64-3.86)^2 = 0.6166$$

Para estimar la derivada de  $FO$  con respecto a  $K_1$  se incrementa este parámetro en  $\Delta K_1 = 0.10$ , se calculan nuevas predicciones (0.45, 1.14, 2.20, 3.26 y 3.95) y se evalúa  $FO$  ahora designada  $FO_1$  obteniéndose:

$$FO_1 = (0-0.45)^2 + (0.62-1.14)^2 + (1.82-2.20)^2 + (3.03-3.26)^2 + (3.64-3.95)^2 = 0.7663$$

La estimación de la derivada según la fórmula de diferencias hacia adelante es:

$$\frac{\Delta FO}{\Delta K_1} = \frac{FO_1 - FO}{\Delta K_1} = \frac{0.7663 - 0.6166}{0.10} = 1.497$$

Como se desea minimizar  $FO$ ,  $K_1$  se debe reducir, ya que con un incremento en  $K_1$  también aumentó  $FO$ . El caso contrario se presenta para  $K_2$ , pues al incrementarlo  $\Delta K_2 = 0.05$  se obtiene:

$$FO_2 = (0-0.39)^2 + (0.62-1.07)^2 + (1.82-2.15)^2 + (3.03-3.23)^2 + (3.64-3.91)^2 = 0.5764$$

$$\frac{\Delta FO}{\Delta K_2} = \frac{FO_2 - FO}{\Delta K_2} = \frac{0.5764 - 0.6166}{0.05} = -0.804$$

Entonces  $K_2$  debe ser incrementado para hacer descender  $FO$ . Otra conclusión que se deduce de los resultados de las estimaciones de las primeras derivadas de  $FO$ , es que  $K_2$  está más cerca de su valor óptimo que  $K_1$ , pues su primera derivada está más próxima a cero. El procedimiento anterior se completa para los cuatro parámetros de ajuste, con base en sus resultados se proponen unos nuevos valores iniciales y se repite este proceso de tanteos, mismo que una vez que ha sido programado se puede realizar fácilmente.

El problema anterior se resolvió mediante el algoritmo de búsqueda automática de Rosembröck <sup>[K11]</sup> de múltiples variables no restringidas (ver Capítulo 9). Utilizando como valores iniciales los citados anteriormente, después de 8 etapas y 111 evaluaciones de la función objetivo se obtuvieron los siguientes resultados:

Valores: iniciales	finales	$Y$	$\hat{Y}$
$K_1 = 4.5$	$K_1 = 3.9643$	0.00	0.07
$K_2 = 1.0$	$K_2 = 1.4589$	0.62	0.59
$K_3 = 0.10$	$K_3 = 0.1208$	1.82	1.80
$tw = 2.0$	$tw = 2.0412$	3.03	3.06
$FO = 0.6069$	$FO = 0.00718$	3.64	3.63

A) realizar el análisis expuesto, es decir, incrementar sensiblemente cada parámetro, conservando constantes el resto, por ejemplo utilizando  $K_1 = 3.96$  y  $3.97$ , la  $FO$  fluctúa cercana a 0.0072 de manera que la expresión  $\Delta FO/\Delta K_1$  es muy próxima a cero, indicando con esto la cercanía de tal parámetro a su valor óptimo.

## Problemas propuestos

**Problema 6.1:** Para la función  $f(x) = 2^x \cdot \sin x$  obtener  $f'(1.05)$  usando intervalos de 0.05 y 0.01 y diferencias centrales <sup>[B1]</sup>. (Respuestas: 2.27403 y 2.275101).

**Problema 6.2:** Estimar la primera derivada de la función  $f(x) = x^2 \cdot e^x$  en  $x = 1.70$ , empleando  $\Delta x = 0.05$  y diferencias hacia delante de segundo orden. (Respuesta<sup>[11]</sup>: 34.3389,  $\epsilon_r = 0.268\%$ ).

**Problema 6.3:** Para la función  $f(x) = 3x \cdot e^x - \cos x$  obtener  $f''(1.30)$  usando intervalos de 0.10 y 0.01 y diferencias centrales<sup>[B1]</sup>. (Respuestas: 36.642 y 36.602).

**Problema 6.4:** Resolver el ejemplo 6.4 utilizando aproximaciones de segundo orden. (Respuestas: 29.096, 29.197 y 29.555).

**Problema 6.5:** Verificar por medio del programa DERIV123 los resultados de todos los ejemplos y problemas anteriores. ¿Existen diferencias numéricas? ¿Porqué?

## Referencias

- A1.** T. J. Akai. *Métodos Numéricos aplicados a la Ingeniería*. Capítulo 6: Diferenciación e integración, pp. 229-257. Limusa. Noriega Editores. México, D. F. 1999.
- A2.** L. V. Atkinson y P. J. Harley. *Introducción a los Métodos Numéricos con Pascal*. Capítulo 7: Diferenciación e integración, pp. 210-244. Addison-Wesley Ibero-americana, S. A. Wilmington, Delaware, U.S.A. 1987.
- A3.** B. M. Ayyub & R. H. McCuen. *Numerical Methods for Engineers*. Capítulo 7: Differentiation and integration, pp. 180-211. Prentice-Hall. New Jersey, U.S.A. 1996.
- B1.** R. L. Burden, J. D. Faires & A. C. Reynolds. *Numerical Analysis*. Chapter 4: Numerical differentiation and integration, pp. 124-179. Prindle, Weber & Schmidt. Boston, Massachusetts, USA. 1981. Second edition.
- B2.** R. L. Burden y J. D. Faires. *Análisis Numérico*. Capítulo 4: Diferenciación e integración numérica, pp. 155-219. Grupo Editorial Iberoamérica. México, D. F. 1985. (Tercera edición en inglés).
- C1.** S. C. Chapra y R. P. Canale. *Métodos Numéricos para Ingenieros*. Capítulo 23: Diferenciación numérica, pp. 666-679. McGraw-Hill Interamericana Editores, S. A. de C. V. México, D. F. 1999. Tercera edición.
- H1.** R. W. Hornbeck. *Numerical Methods*. Chapter 3: The finite difference calculus, pp. 16-34. Quantum Publishers, Inc. New York, U.S.A. 1975.
- I1.** J. M. Izar Landeta. *Elementos de Métodos Numéricos para Ingeniería*. Capítulo VII: Derivación numérica, pp. 105-113. Editorial Universitaria Potosina. San Luis Potosí, S.L.P. 1998.
- K1.** J. L. Kuester & J. H. Mize. *Optimization Techniques with Fortran*. Chapter 9: ROSEN algorithm, pp. 320-330. McGraw-Hill Book, Co. New York, U.S.A. 1973.
- N1.** S. Nakamura. *Métodos Numéricos Aplicados con Software*. Capítulo 5: Diferenciación numérica, pp. 155-183. Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A. México, D. F. 1992.



## PCN14: DERIV123

```

1000 REM PROGRAMA "DERIV2" (DERIVadas numericas 2)
1010 REM ESTE PROGRAMA CALCULA LAS PRIMERA, SEGUNDA Y TERCERA DERIVADAS
1020 REM DE UNA FUNCION ANALITICA, MEDIANTE APROXIMACIONES DE PRIMER Y
1030 REM SEGUNDO ORDEN. RESULTADOS POR I M P R E S O S. SEPT. 2001.
1040 REM SE ASIGNAN LOS DATOS BASICOS (x,h)
1050 PX=3.15:H=.1
1060 REM SE INTRODUCE LA FUNCION f(x)
1070 DEF FNF(X)=X^3-3*X^2+4*X+2
1080 REM SE EVALUAN LAS FUNCIONES NECESARIAS
1090 FX=FNF(PX)
1100 FOR I=1 TO 4:XAD=PX+I*H:XAT=PX-I*H
1110 FD(I)=FNF(XAD):FT(I)=FNF(XAT):NEXT I
1120 REM SE CALCULAN LAS PRIMERAS DERIVADAS
1130 F1=(FD(1)-FX)/H
1140 F2=(FX-FT(1))/H
1150 F3=(FD(1)-FT(1))/(2*H)
1160 F4=(-FD(2)+4*FD(1)-3*FX)/(2*H)
1170 F5=(3*FX-4*FT(1)+FT(2))/(2*H)
1180 F6=(-FD(2)+8*FD(1)-8*FT(1)+FT(2))/(12*H)
1190 REM SE CALCULAN LAS SEGUNDAS DERIVADAS
1200 F7=(FD(2)-2*FD(1)+FX)/H^2
1210 F8=(FX-2*FT(1)+FT(2))/H^2
1220 F9=(FD(1)-2*FX+FT(1))/H^2
1230 F10=(-FD(3)+4*FD(2)-5*FD(1)+2*FX)/H^2
1240 F11=(2*FX-5*FT(1)+4*FT(2)-FT(3))/H^2
1250 F12=(-FD(2)+16*FD(1)-30*FX+16*FT(1)-FT(2))/(12*H^2)
1260 REM SE CALCULAN LAS TERCERAS DERIVADAS
1270 F13=(FD(3)-3*FD(2)+3*FD(1)-FX)/H^3
1280 F14=(FX-3*FT(1)+3*FT(2)-FT(3))/H^3
1290 F15=(FD(2)-2*FD(1)+2*FT(1)-FT(2))/(2*H^3)
1300 F16=(-3*FD(4)+14*FD(3)-24*FD(2)+18*FD(1)-5*FX)/(2*H^3)
1310 F17=(5*FX-18*FT(1)+24*FT(2)-14*FT(3)+3*FT(4))/(2*H^3)
1320 F18=(-FD(3)+8*FD(2)-13*FD(1)+13*FT(1)-8*FT(2)+FT(3))/(8*H^3)
1330 REM INICIA IMPRESION DE DATOS Y RESULTADOS
1340 CLS:LPRINT"ESTIMACION DE LA PRIMERA, SEGUNDA Y TERCERAS DERIVADAS"
1350 LPRINT"      MEDIANTE FORMULAS DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN":LPRINT
1360 LPRINT"LA FUNCION ES:";LPRINT" f(x) = _____"
1370 LPRINT"PUNTO DE EVALUACION (x) =";LPRINT PX
1380 LPRINT"INCREMENTO UTILIZADO (h) =";LPRINT H
1390 LPRINT"DERIVADA      FORMULAS DE PRIMER ORDEN";
1400 LPRINT"      FORMULAS DE SEGUNDO ORDEN";
1410 LPRINT"      D.ADEL. D.ATRAS D.CENTRALES";
1420 LPRINT"      D.ADEL. D.ATRAS D.CENTRALES":LPRINT
1430 LPRINT" f' ";LPRINT USING"#####.#####";F1;LPRINT USING"###.#####";F2;
1440 LPRINT USING"#####.#####";F3;LPRINT USING"#####.#####";F4;
1450 LPRINT USING"###.#####";F5;LPRINT USING"#####.#####";F6
1460 LPRINT" f''";LPRINT USING"#####.#####";F7;LPRINT USING"###.#####";F8;
1470 LPRINT USING"#####.#####";F9;LPRINT USING"#####.#####";F10;
1480 LPRINT USING"###.#####";F11;LPRINT USING"#####.#####";F12
1490 LPRINT" f'''";LPRINT USING"#####.#####";F13;LPRINT USING"###.#####";F14;
1500 LPRINT USING"#####.#####";F15;LPRINT USING"#####.#####";F16;
1510 LPRINT USING"###.#####";F17;LPRINT USING"#####.#####";F18
1520 LPRINT:LPRINT:END

```

# apítulo 7:

## Integración Numérica

### Resumen

Primera mente se analiza el concepto de integración y se expone su forma numérica general. En seguida se aborda con detalle el método conocido como regla del trapecio, aplicado a un tramo y en forma extensiva o repetitiva a varios intervalos. Se desarrolla su corrección, la cual es base de la integración Romberg. A continuación se exponen las fórmulas de Simpson 1/3 y 3/8. Después se describe el programa de cómputo que aplica los criterios anteriores. Posteriormente, se estudia la integración con intervalos desiguales y las cuadraturas de Gauss. Por último, se desarrolla una aplicación numérica consistente en estimar el tirante normal ( $y_n$ ) de un cauce natural, por ello se requiere el área hidráulica de la sección, la cual se estima mediante la fórmula del trapecio. Para tales cálculos se elaboró un programa de cómputo, que utiliza además la interpolación cuadrática de Newton para estimar el  $y_n$ .

### 7.1 Introducción

La integración es un proceso u operación del Cálculo que se utiliza comúnmente para valuar el área ( $A$ ) bajo una curva o función  $f(x)$  continua, entre los límites inferior y superior  $a$  y  $b$ , respectivamente, de manera que entonces <sup>[A3]</sup>:

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad (7.1)$$

En algunas de las aplicaciones de ingeniería la evaluación de la integral definida anterior no es factible porque la función no tiene una antiderivada explícita o ésta no es fácil de obtener, por su complejidad algebraica. El método básico que involucra aproximar la operación integral es llamada *cuadratura numérica* y consiste en <sup>[B1]</sup>:

$$\sum_{i=0}^n a_i f(x_i) \quad (7.2)$$

es decir, evaluar la función en ciertos puntos [ $f(x_i)$ ] y aplicar a estas magnitudes unos factores de ponderación ( $a_i$ ) que están definidos según la técnica numérica empleada.

Por otra parte, en muchas aplicaciones o problemas de ingeniería, los datos están disponibles en valores discretos de la variable dependiente. Por ejemplo, en cauces naturales su área transversal es irregular, las mediciones de la velocidad del flujo ( $V_i$ ) se realizan a intervalos regulares o variables y a diferentes elevaciones <sup>[A3]</sup>; entonces el gasto total ( $Q$ ) es la suma de los gastos parciales ( $q_i$ ) de cada subárea ( $A_i$ ), es decir:

$$Q = \int V \, dA = \sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n V_i A_i$$

Al igual que en la derivación numérica, en la integración existen dos enfoques para su evaluación, el primero se basa en ajustar un polinomio a la función o datos discretos y después integrar analíticamente tal polinomio<sup>[A2]</sup>. El segundo, consiste en aproximar el área bajo la función por medio de formas geométricas simples definidas en puntos adyacentes. Estos métodos son intrínsecamente equivalentes, como se deduce en los dos incisos siguientes, aunque difieren en su mecánica operativa<sup>[A3]</sup>.

## 7.2 Regla del Trapecio

### De un tramo

Para obtener analíticamente la fórmula o regla del Trapecio se aproxima la función de la ecuación 7.1 mediante un polinomio de Lagrange de primer grado (ecuación 2.16) o aproximación lineal, haciendo  $x_0 = a$ ,  $x_1 = b$  y  $\Delta x = h = b - a$ , esto es<sup>[A2, B1]</sup>:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} f(x_1) \right] dx = \frac{x_1-x_0}{2} [f(x_0) + f(x_1)]$$

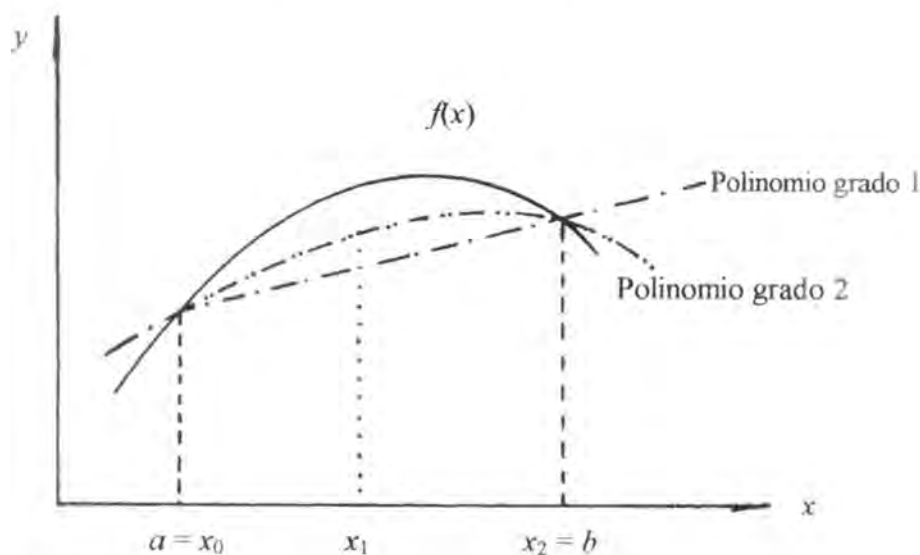
entonces la regla del Trapecio es:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] \quad (7.3)$$

La expresión anterior se conoce como *fórmula del trapecio*, ya que aproxima el área bajo la función por medio de tal figura geométrica, como se deduce de la ilustración siguiente.

Figura 7.1

### Significado geométrico de la regla del trapecio y de la fórmula de Simpson 1/3<sup>[B1]</sup>



**Ejemplo 7.1.** Integrar las funciones  $x$ ,  $x^2$ ,  $x^3$ ,  $x^4$  y  $e^x$  en el intervalo 0 a 2 por medio de la regla del trapecio, evaluando errores relativos <sup>(B1)</sup>.

$f(x)$	$x$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$e^x$
Solución exacta	2	2.667	4	6.40	6.389
Regla del trapecio	2	4	8	16	8.389
$\varepsilon_r(\%)$	0	50	100	150	31.3

□

### Por intervalos o extendida

La ecuación 7.3 se puede aplicar repetidamente al dividir el intervalo de integración  $h$  en  $n$  incrementos igualmente espaciados, por ejemplo para  $n = 2$  y utilizando la notación de subíndices se tiene <sup>(B1)</sup>:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} (f_a + 2f_i + f_b)$$

entonces para  $n$  intervalos se obtiene:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-2} + 2f_{n-1} + f_n) \approx \frac{h}{2} (f_0 + f_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i) \quad (7.4)$$

donde ahora:  $f_0 = f(a)$  y  $f_n = f(b)$ .

**Ejemplo 7.2.** Obtener aproximaciones a la integral  $\int_0^{0.8} e^{-x^2}$  mediante la regla del trapecio aplicada con 4 y 8 intervalos (la solución exacta es <sup>(B1)</sup>: 0.6576698).

Con  $n = 4$  se tiene:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= 1 = \frac{(0.8/4)}{2} [f(0) + 2f(0.2) + 2f(0.4) + 2f(0.6) + f(0.8)] = \\ &= 0.10[1 + 2(0.9607894) + 2(0.8521438) + 2(0.6976763) + 0.5272924] = \\ &= 0.10(6.5485115) = 0.6548512 \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\varepsilon_r = 0.429\%$$

Con  $n = 8$  se obtiene:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{(0.8/8)}{2} [f(0) + 2f(0.1) + 2f(0.2) + 2f(0.3) + 2f(0.4) + 2f(0.5) + 2f(0.6) \\ &\quad + 2f(0.7) + f(0.8)] = 0.05[1 + 2(0.9900498) + 2(0.9607894) + \\ &\quad 2(0.9139312) + 2(0.8521438) + 2(0.7788008) + 2(0.6976763) + \\ &\quad 2(0.6126264) + 0.5272924] = 0.05(13.139328) = 0.6569664 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_r = 0.107\%$$

□

### Corrección en la regla del trapecio

El error en la regla del trapecio (E) se define como <sup>(B1)(B1)</sup>:

$$E = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \quad (7.5)$$

El primer término es la integral exacta y el segundo es la solución a través de la regla del trapecio. Al aplicar el desarrollo en serie de Taylor (ver Apéndice B) de las funciones  $f(x)$ ,  $f(a)$  y  $f(b)$  en torno a  $\bar{x}=(a+b)/2$ , y con la hipótesis de que la función es analítica en  $a \leq x \leq b$ , se tiene:

$$f(x) = f(\bar{x}) + zf'(\bar{x}) + \frac{z^2}{2}f''(\bar{x}) + \dots \quad \text{donde: } z = x - \bar{x}$$

de manera que los límites de la integral serán:

$$\text{en } a \quad z = x - \bar{x} = a - \frac{(a+b)}{2} = a - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2} = -\frac{h}{2}$$

$$\text{en } b \quad z = x - \bar{x} = b - \frac{(a+b)}{2} = b - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{b-a}{2} = \frac{h}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [f(\bar{x}) + zf'(\bar{x}) + \frac{z^2}{2}f''(\bar{x}) + \dots] dz = \\ &= hf(\bar{x}) + \frac{1}{24}h^3f''(\bar{x}) + \dots \end{aligned} \quad (7.6)$$

Por otra parte, el segundo término de la ecuación 7.5 será igual a:

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] &= \frac{h}{2} [f(\bar{x}) - \frac{h}{2}f'(\bar{x}) + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2f''(\bar{x}) - \dots \\ &\quad + f(\bar{x}) + \frac{h}{2}f'(\bar{x}) + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2f''(\bar{x}) + \dots] \\ &= hf(\bar{x}) + \frac{1}{8}h^3f''(\bar{x}) + \dots \end{aligned} \quad (7.7)$$

Entonces al sustituir los resultados de 7.6 y 7.7 en la ecuación 7.5, el error finalmente será:

$$\begin{aligned} E &\equiv hf(\bar{x}) + \frac{1}{24}h^3f''(\bar{x}) + \dots - hf(\bar{x}) - \frac{1}{8}h^3f''(\bar{x}) + \dots \\ E &\equiv -\frac{1}{12}h^3f''(\bar{x}) \end{aligned} \quad (7.8)$$

La expresión anterior indica que E es proporcional a  $f''$  y decrece proporcionalmente a  $h^3$ , cuando  $h=b-a$  se reduzca <sup>[11]</sup>. Lógicamente, el error en la regla del trapecio aplicada repetidamente será la suma de los errores en todos los intervalos. Si el intervalo de integración  $a, b$  se divide en  $n$  intervalos iguales mediante puntos  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  con  $x_0 = a$  y  $x_n = b$ , se tendrá <sup>[11]</sup>:

$$E \equiv -\frac{1}{12}h^3 \sum_{i=0}^{n-1} f''(\bar{x}_i)$$

donde ahora  $h = (b-a)/n$  y  $\bar{x}_i$  es el punto medio entre  $x_i$  y  $x_{i+1}$ ; se cumple además que:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f''(\bar{x}_i) = n f''(\bar{x}) = \frac{b-a}{h} f''(\bar{x})$$

por lo cual el error se convierte en:

$$E \cong -\frac{1}{12} h^2 (b-a) \sum_{i=1}^{n-1} f''(\bar{x}_i) \quad (7.9)$$

expresión que indica que el error en la regla del trapecio aplicada por intervalos es proporcional a  $h^2$ . Para la mayoría de las funciones consideradas razonablemente de buen comportamiento, es posible sustituir a  $f''(\bar{x}_i)$  por  $f''(\bar{x})$ :

$$f''(\bar{x}) = \frac{f'(b) - f'(a)}{(b-a)}$$

entonces, la regla del trapecio aplicada por tramos e incluyendo corrección será:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f_0 + f_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i) - \frac{1}{12} h^2 [f'(b) - f'(a)] \quad (7.10)$$

**Ejemplo 7.3.** Resolver mediante la regla del trapecio la siguiente integral  $\int_0^\pi \text{sen } x dx$ , utilizando tres intervalos e incluyendo su corrección <sup>(11)</sup>, (La solución exacta es 2). Según ecuación 7.4 se tiene:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx = I &= \frac{(\pi/3)}{2} [f(0) + 2f(\pi/3) + 2f(2\pi/3) + f(\pi)] = \\ &= \frac{\pi}{6} [\text{sen}(0) + 2 \text{sen}(\pi/3) + 2 \text{sen}(2\pi/3) + \text{sen}(\pi)] = \\ &= \frac{\pi}{6} [0 + 2(0.8660254) + 2(0.8660254) + 0] = 1.8137994 \\ &\quad \varepsilon_r = 9.31\% \end{aligned}$$

la corrección será:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{12} h^2 [f'(b) - f'(a)] &= -\frac{h^2}{12} [f'(\pi) - f'(0)] = -\frac{(\pi/3)^2}{12} [\cos(\pi) - \cos(0)] = \\ &= -(0.0913852)(-2) = 0.1827705 \end{aligned}$$

y la aproximación:

$$\begin{aligned} I &= 1.8137994 + 0.1827705 = 1.9965698 \quad (7.10) \\ \varepsilon_r &= 0.172\% \end{aligned}$$

□

### 7.3 Integración Romberg

Esta técnica es una aplicación importante <sup>(11)</sup> del análisis del error de la regla del trapecio. Si se supone que  $I_h$  es el resultado de la regla del trapecio aplicada en tramos de longitud  $h = (b-a)/n$  y que  $I_{2h}$  es otro resultado con  $h' = 2h$ , entonces se tendrá que:

$$E_h \cong C \cdot h^2 \quad (7.11)$$

$$E_{2h} \cong C(2h)^2 \cong 4C \cdot h^2 \quad (7.12)$$

siendo  $C$  una constante. Por otra parte, la integral exacta se puede escribir como:

$$I = I_h + E_h = I_{2h} + E_{2h}$$

de donde se obtiene:

$$E_h - E_{2h} = I_{2h} - I_h \quad (7.13)$$

al sustituir las ecuaciones 7.11 y 7.12 en la anterior se deduce el valor de la constante  $C$ :

$$C = -\frac{1}{3}h^{-2}(I_{2h} - I_h) = \frac{h^{-2}}{3}(I_h - I_{2h}) \quad (7.14)$$

por último, al aplicar el resultado anterior en la ecuación 7.11 se obtiene:

$$E_h \cong \frac{h^{-2}}{3}(I_h - I_{2h})h^2 \cong \frac{1}{3}(I_h - I_{2h}) \quad (7.15)$$

Entonces una solución más precisa estará dada por:

$$I = I_h + E_h = I_h + \frac{1}{3}(I_h - I_{2h}) \quad (7.16)$$

Este valor no es exacto pues tampoco lo es la ecuación del error (ecuación 7.8 o 7.9), pero ahora el error <sup>(N1)</sup> de la ecuación 7.16 es proporcional a  $h^4$ . La expresión 7.16 se conoce como *Integración Romberg*.

**Ejemplo 7.4.** Resolver el ejemplo 7.2 mediante la integración Romberg. En tal ejemplo se obtuvo:

$$I_{2h} = 0.6548512 \quad \vee \quad I_h = 0.6569664$$

por lo tanto:

$$E_h \cong \frac{1}{3}(I_h - I_{2h}) = \frac{1}{3}(0.6569664 - 0.6548512) = 0.0007051$$

Lo cual conduce a:

$$I = I_h + E_h = 0.6569664 + 0.0007051 = 0.6576715$$

$$\varepsilon_r = 0.00025\%$$

□

## 7.4 Reglas de Simpson 1/3 y 3/8

Para obtener la fórmula de Simpson 1/3 se hace  $x_0 = a$ ,  $x_2 = b$  y  $x_1 = a + h$ , siendo  $h = (b-a)/2$ , y se integra un polinomio de Lagrange de segundo grado que pasa por los puntos  $x_0$ ,  $x_1$  y  $x_2$ . Este desarrollo <sup>(A2,B1)</sup> conduce a:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \quad (7.17)$$

**Ejemplo 7.5.** Resolver el ejemplo 7.1 mediante la regla de Simpson 1/3.

$f(x)$	$x$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$e^x$
Solución exacta	2	2.667	4	6.400	6.389
Regla de Simpson	2	2.667	4	6.667	6.421
$\varepsilon_r(\%)$	0	0	0	4.2	0.5

□

El error de la fórmula de Simpson 1/3, ecuación anterior, está dado por la expresión siguiente <sup>[N1,H11]</sup>:

$$\frac{h^5}{90} \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ impar}}}^{n-1} f^{(iv)}(x_i)$$

Por otra parte, la aplicación repetida de la regla de Simpson 1/3 requiere un número par de intervalos, es decir, un número impar de datos, siendo tal fórmula y su error<sup>[H11]</sup>:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ impar}}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ i \text{ par}}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right] - \frac{h^4}{180} (b-a) f^{(iv)}(\bar{x}) \quad (7.18)$$

Para derivar la regla de Simpson 3/8 se integra un polinomio de Lagrange de tercer grado, en el dominio  $a,b$  subdividido en tres intervalos, obteniéndose <sup>[N1,B11]</sup>:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3h^5}{80} f^{(iv)}(\bar{x}) \quad (7.19)$$

con  $\bar{x} = (a+b)/2$ .

**Ejemplo 7.6.** Dada la siguiente función tabulada en intervalos espaciados igualmente, evaluar su integral con base en las reglas de Simpson <sup>[H11]</sup>.

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	0	0.5687	0.7909	0.5743	0.1350	-0.1852	-0.1802	0.0811	0.2917	0.3031

De acuerdo a la figura de esta función oscilante, conviene aplicar la fórmula de Simpson 1/3 a los primeros ocho intervalos y después la regla del trapecio para el último; entonces según las ecuaciones 7.18 y 7.3, se tiene:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^9 f(x) dx = \frac{1}{3} [0 + 4(0.5687 + 0.5743 - 0.1852 + 0.0811) + 2(0.7909 + \\ &\quad 0.1350 - 0.1802) + 0.2917] + \frac{1}{2} (0.2917 + 0.3031) = \\ &\quad \frac{1}{3} (5.9327) + \frac{1}{2} (0.5948) = 2.27697 \end{aligned}$$

Para hacer uso de la fórmula de Simpson 3/8, ésta se aplicará a los tres últimos intervalos y la de Simpson 1/3 a los seis primeros tramos, por lo tanto:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^9 f(x) dx = \frac{1}{3} [0 + 4(0.5687 + 0.5743 - 0.1852) + 2(0.7909 + 0.1350 - 0.1802)] + \\ &\quad \frac{3}{8} [-0.1802 + 3(0.0811) + 3(0.2917) + 0.3031] = 2.29975 \end{aligned}$$

□

### 7.5 Programa de cómputo INTEGRAL

Este programa permite evaluar integrales definidas <sup>[S1]</sup> con función analítica conocida, aplica las fórmulas del trapecio y de Simpson 1/3, asignando cualquier intervalo ( $h$ ).



pero teniendo como requisito que el número de intervalos o segmentos de discretización de la función sea *par*. Para realizar la integración Romberg, también cuantifica la regla del trapecio con un nuevo incremento del doble del primero ( $h' = 2h$ ). Para aplicar el programa sólo se deben acceder tres datos, los límites de integración ( $a, b$ ), el incremento seleccionado ( $h$ ) y la función o integrando  $[f(x)]$  escrita en *Basic* (ver Apéndice A); lo anterior en las líneas 1070 y 1080. El listado denominado: PCN15: INTEGRAL se presenta al final del capítulo y contiene los datos básicos de los ejemplos 7.2 y 7.4.

## 7.6 Integración con datos desigualmente espaciados

Los métodos o técnicas de integración expuestos anteriormente son aplicables a datos igualmente espaciados, ya que así fue el planteamiento de desarrollo de las reglas del trapecio y de Simpson. Sin embargo en muchas situaciones de la práctica, sobre todo cuando se trabaja con datos experimentales, éstos han sido muestreados a intervalos desiguales. Para tales casos existen dos enfoques, el primero, el más sencillo consiste en aplicar la regla del trapecio (ecuación 7.3) a cada tramo o segmento y sumar los resultados. El segundo un poco más elaborado y exacto, se basa en las fórmulas de Simpson  $1/3$  y  $3/8$ , por ello se buscan tramos con igual espaciamiento y se aplica la primera cuando tales segmentos son pares y la segunda cuando son impares. Lógicamente, los tramos aislados o individuales se integran con la regla del trapecio <sup>[C2]</sup>.

**Ejemplo 7.7.** Para los siguientes 11 datos tabulados de una función, desigualmente espaciados, estimar el área que definen con el eje de las abscisas <sup>[C2]</sup>.

$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$
0.00	0.200000	0.36	2.074903	0.64	3.181929
0.12	1.309729	0.40	2.456000	0.70	2.363000
0.22	1.305241	0.44	2.842985	0.80	0.232000
0.32	1.743393	0.54	3.507297		

Al analizar los datos se puede formular el planteamiento siguiente: el primer tramo se cuantifica con la regla del trapecio, después se aplican las fórmulas de Simpson  $1/3$ ,  $3/8$  y nuevamente la de  $1/3$ , para finalmente concluir con dos evaluaciones a través de la fórmula del trapecio. Entonces se tiene:

$$I_1 = \frac{0.12}{2} (0.20 + 1.309729) = 0.090584 \quad (7.3)$$

$$I_2 = \frac{0.10}{3} [1.309729 + 4(1.305241) + 1.743393] = 0.275803 \quad (7.17)$$

$$I_3 = \frac{3(0.04)}{8} [1.743393 + 3(2.074903) + 3(2.456) + 2.842985] = 0.272686 \quad (7.19)$$

$$I_4 = \frac{0.10}{3} [2.842985 + 4(3.507297) + 3.181929] = 0.668470 \quad (7.17)$$

$$I_5 = \frac{0.06}{2} (3.181929 + 2.363) = 0.1663479 \quad (7.3)$$

$$I_6 = \frac{0.10}{2} (2.363 + 0.232) = 0.129750 \quad (7.3)$$

Por lo tanto el área total será:

$$A_T = \sum_{i=1}^6 I_i = 1.603641$$

sabiendo que la solución exacta <sup>[C2]</sup> es 1.640533, entonces:

$$\epsilon_r = 2.25\%$$

□

## 7.7 Cuadraturas de Gauss

Las reglas del trapecio y de Simpson se denominan *cuadraturas interpoladas*, porque el integrando es aproximado mediante un polinomio de interpolación entre los puntos  $x_0$  y  $x_1$  con  $n \geq 1$  puntos equidistantes <sup>[A1]</sup>. Sus fórmulas de aplicación repetida o extendida se llaman *cuadraturas compuestas* y ambas cumplen con la ecuación 7.2, en la cual los multiplicadores  $a_i$  quedan definidos una vez que se han escogido los puntos  $x_i$  que están equidistantes. Las cuadraturas de Gauss son métodos en que se eligen *simultáneamente* los valores de  $a_i$  y  $x_i$  al utilizar un polinomio para aproximar la función analítica que se integra y por ello no permiten procesar funciones tabuladas a intervalos iguales, como las cuadraturas interpoladas y compuestas <sup>[A1]</sup>. La fórmula de la cuadratura de Gauss se extiende en el dominio  $[-1, 1]$  y está dada por <sup>[N1]</sup>:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^N w_k f(x_k)$$

en la cual,  $N$  es el número de puntos de Gauss,  $w_k$  son los pesos y  $x_k$  los puntos de Gauss tabulados para  $N$ . Los factores de ponderación  $w_k$  dependen del polinomio que se utilice, los más utilizados son los de Legendre, para resolver integrales como la anterior y los de Hermite, Laguerre y Chebyshev que son adecuados para las siguientes formas de integrales, respectivamente <sup>[N1]</sup>:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx \quad \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx$$

La fórmula de la cuadratura de Gauss-Legendre puede aplicarse a cualquier intervalo  $a, b$  por medio de la transformación <sup>[N1]</sup>:

$$z_k = \frac{(b-a)x_k + a + b}{2} \quad (7.20)$$

entonces, ahora:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f(z) dz = \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^N w_k f(z_k) \quad (7.21)$$

Algunos puntos ( $x_k$ ) y factores de ponderación ( $w_k$ ) de la cuadratura Gauss-Legendre se presentan en la tabulación de la página siguiente <sup>[N1]</sup>.

**Ejemplo 7.8.** Evaluar la integral  $53.3904 \int_0^{10} (1 - e^{-0.1835536t}) dt$  y su error relativo mediante la cuadratura de Gauss-Legendre de 3 puntos, sabiendo que su valor exacto es 289.4351 <sup>[C3]</sup>. Con base en la ecuación 7.20, los puntos transformados y sus funciones respectivas son:

$z_k = 5(x_k + 1)$	$f(z_k) = 1 - \exp(-0.1835536z_k)$
$z_1 = 5.000000$	$f(z_1) = 0.6005905$
$z_2 = 8.872983$	$f(z_2) = 0.8038093$
$z_3 = 1.127017$	$f(z_3) = 0.1868730$

sustituyendo en la ecuación 7.21 se obtiene:

$$I = 53.3904 [ 5(0.888888889(0.6005905) + 0.555555556(0.8038093) + 0.555555556(0.186873)) ] = 53.3904 [ 5(1.0842372) ]$$

$$I = 53.3904(5.4211858) = 289.43928 \quad \varepsilon_r = 0.00144\%$$

□

	$x_k$	$w_k$
$N = 3$	0.000000000	0.888888889
	$\pm 0.774596669$	0.555555556
$N = 4$	$\pm 0.339981043$	0.652145155
	$\pm 0.861136312$	0.347854845
$N = 5$	0.000000000	0.568888889
	$\pm 0.538469310$	0.478628670
	$\pm 0.906179846$	0.236926885
$N = 6$	$\pm 0.238619186$	0.467913935
	$\pm 0.661209387$	0.360761573
	$\pm 0.932469514$	0.171324492
$N = 8$	$\pm 0.183434642$	0.362683783
	$\pm 0.525532410$	0.313706646
	$\pm 0.796666478$	0.222381034
	$\pm 0.960289857$	0.101228536

## 7.8 Aplicaciones prácticas

### Cálculo del flujo uniforme en cauces

Cuando en un río se tiene un tramo de cauce más o menos recto y de características físicas constantes, con pendiente ( $S$ ) casi uniforme, de una sección transversal ( $A$ ) que no cambia radicalmente y en el que el flujo o gasto ( $Q$ ) circula dentro de ésta, es decir, sin ocurrir el desbordamiento en las planicies de inundación, entonces es factible considerar que dicho flujo es *uniforme*, de manera que está regido por la fórmula de Manning <sup>[61]</sup>:

$$Q = \frac{1}{n} A \cdot R^{2/3} \cdot S^{1/2} \quad (7.22)$$

en la cual  $n$  es el coeficiente de rugosidad, función de las condiciones físicas del cauce, siendo las principales las irregularidades del perímetro mojado ( $P$ ) y su vegetación.  $R$  es el llamado radio hidráulico, igual al cociente  $A/P$ .

En el diseño de canales bajo condiciones de flujo uniforme es común conocer el gasto por transportar y sus otras propiedades físicas y geométricas, y entonces mediante la ecuación 7.22 se estima el tirante normal ( $y_n$ ), bajo un proceso de tanteos, ya que el área y radio hidráulico son función de éste. Para ello se define el factor de sección  $A \cdot R^{2/3}$ , esto es:

$$\frac{n \cdot Q}{S^{1/2}} = A \cdot R^{2/3} \quad (7.23)$$

Lógicamente, en cauces naturales el proceso se complica debido a la dificultad geométrica que ofrece la cuantificación del área hidráulica y del perímetro mojado. En la Figura 7.2 se muestra una sección típica de un cauce [F1], ésta se discretiza según los ejes cartesianos y tal información se presenta por ternas de elevación ( $z$ ) y distancias horizontales ( $x, y$ ), de manera que la primera terna define el punto más bajo del cauce y por tanto  $x = y$ . Para la Figura 7.2 de la página siguiente se tiene la siguiente información procedente de la referencia [F1]:

Terna	$z$ (m)	$x$ (m)	$y$ (m)
1	4.6	100.6	100.6
2	6.1	73.2	140.2
3	7.6	61.0	161.5
4	9.1	51.8	182.9
5	10.7	45.7	216.4
6	12.2	39.6	259.1
7	13.7	33.5	365.8
8	15.2	24.4	371.9
9	16.7	6.1	374.9

De acuerdo al planteamiento geométrico de la Figura 7.2 el perímetro mojado ( $P$ ) estará integrado por las hipotenusas izquierda y derecha, cuyas expresiones generales serán:

$$HI = \sqrt{(z_{i+1} - z_i)^2 + (x_i - x_{i+1})^2} \quad (7.24)$$

$$HD = \sqrt{(z_{i+1} - z_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \quad (7.25)$$

entonces:

$$P = \sum_1^{n-1} HI + HD \quad (7.26)$$

En cambio, las áreas parciales ( $A_i$ ) se estimarán como trapezios, con excepción de la primera que será un caso especial, un triángulo. Lo anterior, es una aplicación de la *regla del trapecio* para evaluar áreas y entonces de acuerdo a la Figura 7.2 su expresión general será:

$$A_i = \frac{(y_i - x_i) + (y_{i+1} - x_{i+1})}{2} (z_{i+1} - z_i) \quad (7.27)$$

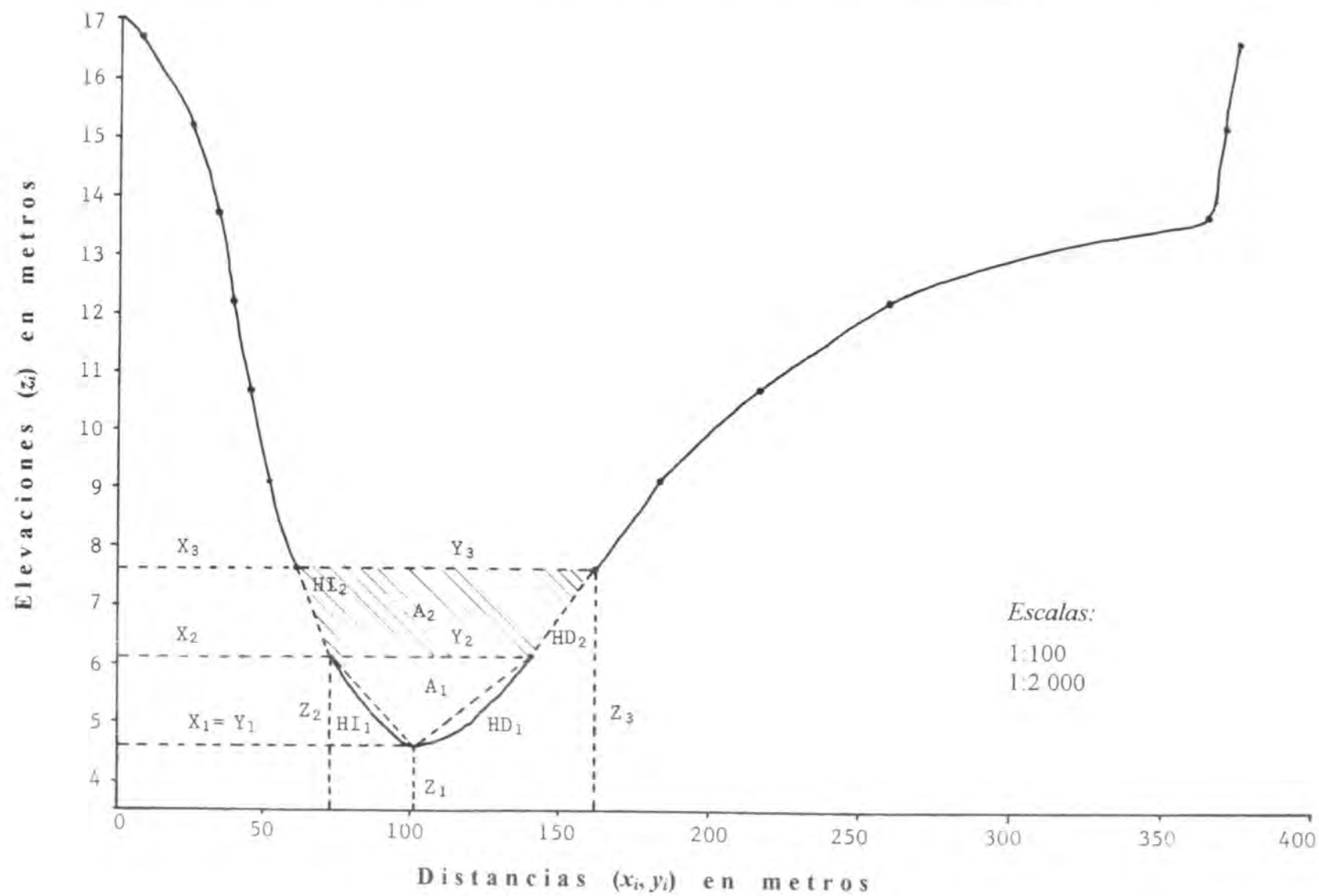
con:

$$A = \sum_1^{n-1} A_i \quad (7.28)$$

En seguida se evalúa el radio hidráulico ( $R$ ) igual al cociente entre  $A$  y  $P$ , para finalmente calcular el factor de sección  $A \cdot R^{2/3}$  (ecuación 7.23).

El programa PCN16: PROHID (PROpiedades HIDráulicas) cuyo listado se presenta al final del capítulo, aplica las ecuaciones 7.24 a 7.28, para lo cual primero lee el número

Figura 7.2

Sección transversal de un cauce <sup>[F1]</sup> y nomenclatura de ternas de información y de cálculos

de ternas que se accesarán ( $n = 9$ ) y sus valores respectivos. Presenta resultados de  $P_i$ ,  $A_i$ ,  $R_i$  y  $A \cdot R^{2/3}$  para cada nivel  $z_i$  y después pide el valor del factor de sección observado, es decir de  $n \cdot Q/S^{1/2}$ ; compara este valor con los calculados de  $A \cdot R^{2/3}$  para definir los límites entre los que se encuentra el tirante normal buscado ( $y_n$ ). Esta búsqueda la realiza mediante una interpolación cuadrática con el polinomio de Newton de segundo orden (ecuaciones 2.3 a 2.6), por lo cual utiliza tres puntos o niveles, los correspondientes a los límites definidos y el subsecuente al límite superior. El resultado de tal interpolación es el tirante normal ( $y_n$ ).

**Ejemplo 7.9.** Para los datos de la tabulación anterior (Figura 7.2), el programa PROHID calcula los valores siguientes:

Elev. (m)	Perímetro mojado ( $P$ , m)	Área hidráulica ( $A$ , m <sup>2</sup> )	Radio hidráulico ( $R$ , m)	Factor de sección ( $A \cdot R^{2/3}$ )
4.6	0.0	0.0	0.000	0.000
6.1	67.1	50.3	0.749	41.452
7.6	100.7	175.9	1.746	255.043
9.1	131.5	349.6	2.659	670.878
10.7	171.3	591.0	3.450	1349.287
12.2	220.3	883.7	4.010	2230.572
13.7	333.3	1297.5	3.893	3210.715
15.2	348.8	1807.4	5.181	5411.625
16.7	370.6	2344.6	6.327	8020.686

El resto de los datos son  $n^{(F)}$ ;  $n = 0.024$ ,  $Q = 283 \text{ m}^3/\text{s}$  y  $S = 0.0001$ ; por lo tanto  $n \cdot Q/S^{1/2} = 679.2$  y entonces el tirante normal buscado ( $y_n$ ) es igual a 9.122 metros.

Sin embargo, en cauces naturales es más común conocer el tirante del flujo a través de las marcas o huellas que deja el escurrimiento y el gasto es ahora la incógnita. Con el programa PROHID se puede resolver este problema a través de un proceso de tanteos, de la manera siguiente: se proponen valores de  $A \cdot R^{2/3}$  hasta lograr obtener el tirante observado, entonces se aplica la ecuación 7.22 y se obtiene el gasto ( $Q$ ) buscado.

#### Otras aplicaciones factibles

En realidad en el campo de la hidrología superficial son escasas las aplicaciones de la integración y derivación numéricas, no así en la hidráulica. Algunas aplicaciones en ambas disciplinas están expuestas en la referencia [A3], éstas incluyen la cuantificación del gasto que fluye por tuberías, el cálculo de la probabilidad mediante evaluación de la integral de la función de densidad, la estimación aproximada de áreas de terrenos, de cuencas y de factores de ponderación, por ejemplo de los polígonos de Thiessen <sup>[C11]</sup>, etc.

#### Problemas propuestos

**Problema 7.1:** Evaluar la integral definida  $\int_0^{\pi/2} \sin(2\cos x) \sin^2 x \, dx$  utilizando la regla del trapecio con corrección y  $n = 4$  intervalos. Cuantificar el error relativo sabiendo que la solución exacta es 0.507967. (Respuestas <sup>[M1]</sup>:  $I = 0.5071872$ ,  $\epsilon_r = 0.154\%$ ).

**Problema 7.2:** Resolver el problema anterior mediante la regla de Simpson 1/3, empleando 4 y 6 intervalos. (Respuestas <sup>[M1]</sup>:  $I = 0.5126819$  y  $0.508646$ ,  $\epsilon_r = 0.134\%$ ).

**Problema 7.3:** Obtener el área bajo la función definida por los siguientes datos experimentales <sup>(N1)</sup>, mediante los siguientes criterios: 1) regla del trapecio con  $h = 0,2$  y  $0,1$ ; 2) integración Romberg utilizando los resultados anteriores; 3) regla de Simpson 1/3, y 4) regla de Simpson 3/8 aplicada dos veces y de Simpson 1/3 una vez. (Respuestas <sup>(N1)</sup>: 1 = 1.91924, 1.99968, 2.0264933, 2.0264933 y 2.0257708).

$x$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80
$f(x)$	0,0000	2,1220	3,0244	3,2568	3,1399	2,8579	2,5140	2,1639	1,8358

**Problema 7.4:** Evaluar la siguiente integral definida  $\int_0^8 (0,625x^4 - 4x^3 + 2x + 1) dx$  mediante la integración Romberg, utilizando  $n = 4$  y  $8$  intervalos. Evaluar el error relativo sabiendo que la solución exacta es 72. (Respuestas <sup>(N1)</sup>: 1 = 72.67,  $\epsilon_r = 0.93\%$ ).

**Problema 7.5:** Calcular la siguiente integral definida  $\int_0^3 e^{x^2} dx$ , utilizando intervalos de 0,25, 0,50 y 0,10 en los tramos 0 a 1, 1 a 2 y 2 a 3, respectivamente. Evaluar el error relativo global. (Respuestas <sup>(N1)</sup>: 6.97693, 0.195%).

**Problema 7.6:** Por medio de la cuadratura Gauss-Legendre de 3 puntos evaluar la integral  $\int_0^8 (x^3 + x^2 + x + 1) dx$ . (Respuesta <sup>(N1)</sup>: 26.08333,  $\epsilon_r = 0\%$ ).

## Referencias

- A1. T. J. Akai. *Métodos Numéricos aplicados a la Ingeniería*. Capítulo 6: Diferenciación e integración, páginas 229-257. Noriega Editores. México, D. F. 1999.
- A2. L. V. Atkinson y P. J. Harley. *Introducción a los Métodos Numéricos con Pascal*. Capítulo 7: Diferenciación e integración, páginas 210-244. Addison-Wesley Iberoamericana, S. A. Wilmington, Delaware, U.S.A. 1987.
- A3. B. M. Ayyub & R. H. McCuen. *Numerical Methods for Engineers*. Capítulo 7: Differentiation and integration, pp. 180-211. Prentice-Hall. New Jersey, U.S.A. 1996.
- B1. R. L. Burden, J. D. Faires & A. C. Reynolds. *Numerical Analysis*. Chapter 4: Numerical differentiation and integration, pp. 124-179. Prindle, Weber & Schmidt. Boston, Massachusetts, USA. 1981. Second edition.
- C1. D. F. Campos Aranda. Variabilidad en la estimación de los coeficientes de escurrimiento mensuales. (Estudio de un caso). *XVI Congreso Nacional de Hidráulica*, páginas 767-772. 8 al 10 de noviembre del 2000. Morelia, Michoacán.
- C2. S. C. Chapra y R. P. Canale. *Métodos Numéricos para Ingenieros*. Capítulo 21: Fórmulas de integración de Newton-Cotes, páginas 617-645. McGraw-Hill Interamericana Editores, S. A. de C. V. México, D. F. 1999. Tercera edición.
- C3. S. C. Chapra y R. P. Canale. *Métodos Numéricos para Ingenieros*. Capítulo 22: Integración de ecuaciones, páginas 646-665. McGraw-Hill Interamericana Editores, S. A. de C. V. México, D. F. 1999. Tercera edición.
- F1. R. H. French. *Open-Channel Hydraulics*. Chapter 5: Computation of uniform flow, pp. 163-194. McGraw-Hill Book Co. New York, U.S.A. 1985.
- H1. R. W. Hornbeck. *Numerical Methods*. Chapter 8: Numerical integration, pp. 144-184. Quantum Publishers, Inc. New York, U.S.A. 1975.
- I1. J. M. Izar Landeta. *Elementos de Métodos Numéricos para Ingeniería*, Capítulo VIII: Integración Numérica, páginas 114-139. Editorial Universitaria Potosina. San Luis Potosí, S.L.P. 1998.

**N1.** S. Nakamura. *Métodos Numéricos Aplicados con Software*. Capítulo 4: Integración Numérica, páginas 109-154. Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A. México, D. F. 1992.

**S1.** W. A. Smith. *Análisis Numérico*. Capítulo 8: Integrales definidas, páginas 317-373. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. México, D. F. 1988.



## PCN15: INTEGRAL

```

1000 REM PROGRAMA "INTEGRAL" (solución de INTEGRALES definidas)
1010 REM APLICA LAS FORMULAS DEL TRAPECIO, DE SIMPSON 1/3 Y LA INTEGRACION
1020 REM ROMBERG PARA EVALUAR UNA INTEGRAL DEFINIDA CON FUNCION ANALITICA
1030 REM Y NUMERO DE INTERVALOS PAR. SEPT.2001. RESULTADOS I M P R E S O S
1040 CLS:PRINT"APROXIMACION DE INTEGRALES DEFINIDAS MEDIANTE FORMULAS DEL"
1050 PRINT"      TRAPECIO, SIMPSON 1/3 E INTEGRACION ROMBERG":PRINT
1060 REM SE ACCESAN DATOS BASICOS (a,b,h)
1070 A=0:B=.8:H=.1
1080 DEF FNF(X)=EXP(-X^2)
1090 REM SE REvisa SI EL NUMERO DE INTERVALOS (n) ES PAR
1100 N=(B-A)/H
1110 IF N/2<>INT(N/2) THEN 1550
1120 REM SE APLICA LA FORMULA DEL TRAPECIO
1130 FOR I=1 TO N-1
1140 X=I*H:S1=S1+2*FNF(X):NEXT I
1150 IH=(H/2)*(FNF(A)+S1+FNF(B))
1160 REM AHORA SE DUPLICA EL INTERVALO (h'=2h)
1170 NH=2*H:NN=(B-A)/NH
1180 FOR I=1 TO NN-1
1190 X=I*NH:S2=S2+2*FNF(X):NEXT I
1200 I2H=(NH/2)*(FNF(A)+S2+FNF(B))
1210 REM INICIA INTEGRACION ROMBERG
1220 IR=IH+(1/3)*(IH-I2H)
1230 REM INICIA REGLA DE SIMPSON 1/3 CON 2h
1240 FOR I=1 TO NN-1 STEP 2
1250 X=I*NH:S3=S3+4*FNF(X):NEXT I
1260 FOR I=2 TO NN-2 STEP 2
1270 X=I*NH:S4=S4+2*FNF(X):NEXT I
1280 IS2H=(NH/3)*(FNF(A)+S3+S4+FNF(B))
1290 REM INICIA REGLA DE SIMPSON 1/3 CON h
1300 FOR I=1 TO N-1 STEP 2
1310 X=I*H:S5=S5+4*FNF(X):NEXT I
1320 FOR I=2 TO N-2 STEP 2
1330 X=I*H:S6=S6+2*FNF(X):NEXT I
1340 ISH=(H/3)*(FNF(A)+S5+S6+FNF(B))
1350 REM INICIA IMPRESION DE DATOS Y RESULTADOS
1360 CLS:LPRINT"APROXIMACION DE INTEGRALES DEFINIDAS MEDIANTE FORMULAS DEL"
1370 LPRINT"      TRAPECIO, SIMPSON 1/3 E INTEGRACION ROMBERG"
1380 LPRINT"      (número de tramos PAR)":LPRINT
1390 LPRINT"FUNCION f(x) = _____":LPRINT
1400 LPRINT"LIMITE INFERIOR (a) =";A
1410 LPRINT"LIMITE SUPERIOR (b) =";B
1420 LPRINT"VALOR DEL INTERVALO (h) =";H
1430 LPRINT"NUMERO DE INTERVALOS (n) =";N:LPRINT
1440 LPRINT"R E S U L T A D O S:"
1450 LPRINT"REGLA DEL TRAPECIO APLICADA A ";:LPRINT USING"####";NN;
1460 LPRINT" TRAMOS";:LPRINT"      INTEGRAL (I2h) =";I2H
1470 LPRINT"REGLA DEL TRAPECIO APLICADA A ";:LPRINT USING"####";N;
1480 LPRINT" TRAMOS";:LPRINT"      INTEGRAL (Ih) =";IH
1490 LPRINT"INTEGRACION ROMBERG (Ir=Ih+1/3(Ih-I2h)  ";
1500 LPRINT"      INTEGRAL (Ir) =";IR
1510 LPRINT"REGLA DE SIMPSON 1/3 APLIC. A ";:LPRINT USING"####";NN;
1520 LPRINT" TRAMOS";:LPRINT"      INTEGRAL (S2h) =";IS2H
1530 LPRINT"REGLA DE SIMPSON 1/3 APLIC. A ";:LPRINT USING"####";N;
1540 LPRINT" TRAMOS";:LPRINT"      INTEGRAL (Sh) =";ISH:GOTO 1570
1550 REM INICIA MENSAJE DE ERROR
1560 PRINT"N =";N;:PRINT"      ERROR: EL NUMERO DE TRAMOS NO ES PAR!"
1570 END

```

## PCN16: PROHID

```

1000 REM PROGRAMA "PROHID" (PROPIEDADES HIDRÁULICAS)
1010 REM ESTE PROGRAMA CALCULA EL PERIMETRO MOJADO (P), EL AREA
1020 REM HIDRAULICA (A), EL RADIO HIDRAULICO (R) Y EL FACTOR DE
1030 REM SECCION (AR^2/3) DE LA SECCION TRANSVERSAL DE UN CAUCE
1040 REM NATURAL. RESULTADOS I M P R E S O S. OCT. 2001.
1050 CLS:PRINT"PROPIEDADES HIDRAULICAS DE LA SECCION DE UN CAUCE NATURAL"
1060 PRINT" Perímetro mojado, Area hidráulica y Radio Hidráulico":PRINT
1070 REM SE LEEN COORDENADAS DE LA SECCION (en ternas de Zi, Xi y Yi)
1080 REM SE LEE EL NUMERO DE TERNAS Y SUS VALORES
1090 READ N:DIM X(N),Y(N),Z(N+1),P(N),A(N),R(N),FS(N)
1100 FOR I=1 TO N
1110 READ Z(I),X(I),Y(I):NEXT I
1120 REM SE CALCULAN LAS HIPOTENUSAS IZQUIERDAS (HI) Y DERECHAS (HD)
1130 REM Y EL PERIMETRO MOJADO (P)
1140 FOR I=1 TO N-1
1150 HI=SQR((Z(I+1)-Z(I))^2+(X(I)-X(I+1))^2)
1160 HD=SQR((Z(I+1)-Z(I))^2+(Y(I+1)-Y(I))^2)
1170 SP=SP+HI+HD:P(I)=SP:NEXT I
1180 REM INICIA CALCULO DEL AREA HIDRAULICA (A)
1190 FOR I=1 TO N-1
1200 A=(1/2)*((Y(I)-X(I))+(Y(I+1)-X(I+1)))*(Z(I+1)-Z(I))
1210 SA=SA+A:A(I)=SA:NEXT I
1220 REM INICIA CALCULO DEL RADIO HIDRAULICO (R) Y FACTOR DE SECCION (FS)
1230 FOR I=1 TO N-1
1240 R(I)=A(I)/P(I)
1250 FS(I)=A(I)*R(I)^(2/3):NEXT I
1260 REM IMPRESION DE PROPIEDADES HIDRAULICAS
1270 LPRINT"PROPIEDADES HIDRAULICAS DE LA SECCION DE UN CAUCE NATURAL"
1280 LPRINT" Perímetro mojado, Area hidráulica y Radio Hidráulico":LPRINT
1290 LPRINT" ELEV. PERIMETRO AREA RADIO FACTOR"
1300 LPRINT" (m) MOJADO HIDRAULICA HIDRAULICO DE SECCION"
1310 LPRINT" (P,m) (A,m^2) (R,m) (AR^2/3)"
1320 FOR I=1 TO N
1330 LPRINT USING"#####.##";Z(I);:LPRINT USING"#####.##";P(I-1);
1340 LPRINT USING"#####.##";A(I-1);:LPRINT USING"#####.###";R(I-1);
1350 LPRINT USING"#####.###";FS(I-1):NEXT I:LPRINT
1360 REM INICIA CALCULO DEL TIRANTE NORMAL (yn)
1370 INPUT"INTRODUCIR EL VALOR DEL FACTOR DE SECCION OBSERVADO:";FSO
1380 FOR I=1 TO N
1390 IF FSO>FS(I-1) THEN LI=I:LS=I+1:LSS=I+2 ELSE 1400
1400 NEXT I
1410 B0=Z(LI):B1=(Z(LSS)-Z(LI))/(FS(LSS-1)-FS(LI-1))
1420 B2I=(Z(LS)-Z(LI))/(FS(LS-1)-FS(LI-1))
1430 B2D=(Z(LSS)-Z(LI))/(FS(LSS-1)-FS(LI-1))
1440 B2=(B2I-B2D)/(FS(LS-1)-FS(LSS-1))
1450 ZB=B0+B1*(FSO-FS(LI-1))+B2*((FSO-FS(LI-1))*(FSO-FS(LSS-1)))
1460 LPRINT:LPRINT"FACTOR DE SECCION OBSERVADO (nQ/S^1/2) =";FSO
1470 LPRINT:LPRINT"TIRANTE NORMAL BUSCADO (yn) =";
1480 LPRINT USING"###.###";ZB;:LPRINT" m"
1490 REM INICIAN DATOS DEL EJEMPLO 7.9
1500 DATA 9
1510 DATA 4.6,100.6,100.6,6.1,73.2,140.2,7.6,61,161.5,9.1,51.8,182.9
1520 DATA 10.7,45.7,216.4,12.2,39.6,259.1,13.7,33.5,365.8
1530 DATA 15.2,24.4,371.9,16.7,6.1,374.9

```

# C

## apítulo 8:

### Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

#### Resumen

Las ecuaciones diferenciales son parte, o constituyen los modelos que describen sistemas del mundo real que son dinámicos. Generalmente tales modelos son bastante complejos y por ello no es factible obtener soluciones analíticas, entonces los métodos numéricos que conducen a soluciones aproximadas y rápidas son una muy buena opción. Para el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), se describen y aplican las técnicas conocidas como métodos de Euler, Heun y Runge-Kutta. Por otra parte, un problema hidrológico clásico de comportamiento dinámico es el tránsito de crecientes en embalses, el cual lógicamente se resuelve mediante una EDO. Este problema es abordado en sus facetas más importantes: 1) el tránsito en un vaso lleno conociendo el hidrograma de entradas; 2) igual al anterior pero suponiendo la forma del hidrograma de la creciente y 3) el tránsito inverso, procedimiento que permite estimar la creciente cuando únicamente se conocen los niveles que originó en el embalse.

#### 8.1 Generalidades

Siempre que se tenga en la naturaleza o en la experimentación un proceso que cambia continuamente, será requerido que el modelo matemático que intenta reproducirlo esté basado o constituido por una *ecuación diferencial*. Por otra parte, sólo en ciertos casos poco frecuentes puede encontrarse una solución analítica a las ecuaciones diferenciales, que intervienen o definen la mayoría de los modelos del mundo físico, pues éstas son bastante complicadas y únicamente los métodos numéricos dan una opción para alcanzar una solución <sup>(A3)</sup>. La ecuación diferencial:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

se denomina ecuación diferencial de  $n$ -ésimo orden. La cantidad que se va a diferenciar ( $y$ ), se conoce como variable dependiente y la cantidad respecto a la cual se va a derivar ( $x$ ) se le llama variable independiente. Cuando la función incluye una sola variable independiente, se llama Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) y aquellas que tienen dos o más variables independientes se conocen como Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP).

En general, las EDO de orden superior al primero se pueden reducir a un sistema de ecuaciones de primer orden, por ejemplo <sup>(C5)</sup>, la ecuación que describe la posición  $x$  de un sistema masa-resorte con amortiguamiento ( $c$ ) y constante del resorte ( $k$ ) es:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

haciendo  $y = \frac{dx}{dt}$

se tiene

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

entonces  $m \frac{dy}{dt} + cy + kx = 0$

∴

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{cy + kx}{m} \quad (a)$$

$$y = \frac{dx}{dt} \quad (b)$$

Las ecuaciones a y b son un sistema de primer orden equivalente a la ecuación original de segundo orden.

Los problemas de las EDO se clasifican en problemas con condiciones iniciales y problemas con condiciones en la frontera. La mayoría de los problemas con condiciones iniciales dependen del tiempo, en ellos, las condiciones para su solución están dadas en el tiempo inicial. También en general los métodos numéricos para solución de uno u otro tipo de problema difieren notoriamente, en este capítulo únicamente se abordan los correspondientes a EDO de primer orden con valor o condición inicial, los cuales se pueden plantear como <sup>(N1)</sup>:

$$y'(t) = f(y, t) \quad ; \quad y(0) = y_0$$

En esta ecuación, la primera derivada de  $y$  está dada como una función conocida de  $y$  y  $t$  y se quiere calcular la función incógnita  $y$  integrando numéricamente  $f(y, t)$ . Si  $f$  fuera independiente de  $y$ , el cálculo se reduciría a una integración directa, pero el hecho de que  $f$  sea una función de la función desconocida  $y$  hace que la integración sea distinta. El par de ecuaciones anteriores componen un problema de valor inicial y establecen una condición suficiente para que haya solución única.

Por ejemplo<sup>(A3)</sup>, la ecuación diferencial:  $y' = \lambda \cdot y$  con  $\lambda = \text{cte}$ . Tiene una familia infinita de soluciones dadas por  $y = C \cdot e^{\lambda x}$ , ya que se tiene:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lambda \cdot y \quad \text{entonces} \quad \frac{dy}{y} = \lambda \cdot dx \quad \text{integrando} \quad \int \frac{dy}{y} = \lambda \int dx$$

$$\ln y + c = \lambda \cdot x \quad ; \quad \ln y = \lambda \cdot x - c \quad ; \quad y = e^{\lambda \cdot x - c}$$

ahora

$$y = e^{\lambda \cdot x} \left( \frac{1}{e^c} \right) = C \cdot e^{\lambda \cdot x} \quad ; \quad y = C \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

la última ecuación representa a una familia de curvas exponenciales. Para aislar la curva de la solución se necesita especificar el valor de  $C$ , lo cual se logra a través de una condición inicial:  $y(a) = \mu$  que se sustituye en la ecuación anterior dando:

$$\mu = C \cdot e^{\lambda(a)} \quad ; \quad C = \mu \cdot e^{-\lambda(a)}$$

entonces:

$$y = \mu \cdot e^{-\lambda(a)} \cdot e^{\lambda \cdot x} = \mu \cdot e^{\lambda(x-a)}$$

la solución final será

$$y = \mu \cdot e^{\lambda(x-a)}$$

### 8.2 Método de Euler

Los métodos numéricos conocidos como de Euler, Heun y Runge-Kutta estiman la solución de las EDO en los puntos  $t_n = t_{n-1} + h$ , donde  $h$  es el llamado tamaño del paso, comúnmente intervalo en el tiempo, y por ello se denominan métodos de un paso. Entonces su planteamiento general es:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t) \quad \text{de donde} \quad dy = f(y, t) dt$$

integrando se tiene:

$$\int_{y_n}^{y_{n+1}} dy = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y, t) dt \quad \therefore \quad y_{n+1} - y_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y, t) dt$$

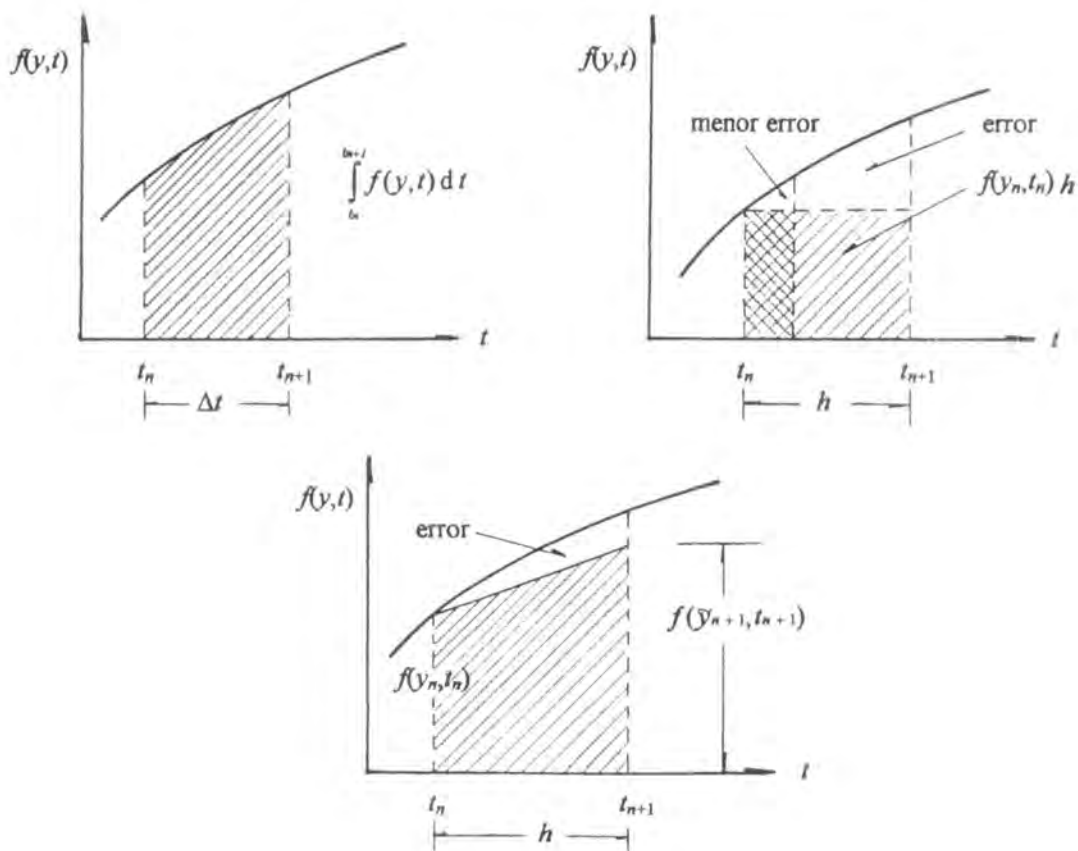
por lo cual:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y, t) dt \tag{8.1}$$

En la ecuación anterior, la integral representa el área bajo la función, según se muestra en la Figura 8.1 siguiente.

Figura 8.1

Interpretación gráfica de la integración numérica (ecuación 8.1) y de los métodos de Euler (ecuación 8.2) y Heun (ecuación 8.4)



Cuando tal área se estima por un rectángulo, como se ilustra en la figura anterior, entonces se obtiene la fórmula del método de Euler, ésta es:

$$y_{n+1} = y_n + f(y_n, t_n) \cdot \Delta t \quad (8.2)$$

o bien:

$$y_{n+1} = y_n + y_n' \cdot \Delta t \quad (8.3)$$

El método de Euler es una aproximación hacia delante de las diferencias de primer orden de la ecuación diferencial  $y' = f(y, t)$ , ya que <sup>(8.1)</sup>:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} \cong y_n'$$

entonces:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(y_n, t_n)$$

y por lo tanto:

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(y_0, t_0)$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(y_1, t_1)$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot f(y_2, t_2)$$

$$\vdots$$

$$y_n = y_{n-1} + h \cdot f(y_{n-1}, t_{n-1})$$

**Ejemplo 8.1.** Integrar con el método de Euler la siguiente ecuación diferencial en el intervalo de 0 a 1.0, con  $h = 0.10$  como amplitud de paso <sup>(8.2)</sup>.

$$\frac{dy}{dt} + y^2 = 0 \quad ; \quad y(0) = 1.0$$

La solución analítica de esta ecuación es:  $y' = -y^2$

integrando:  $\int -y^{-2} dy = \int dt$  se obtiene  $y^{-1} + c = t$

sustituyendo la condición inicial se evalúa  $c = -1$ , por lo cual finalmente la solución exacta es:

$$y = \frac{1}{1+t}$$

La solución por medio de la fórmula de Euler es:

$$f(y, t) = -y^2$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t (-y_n^2)$$

en la tabulación siguiente se concentran los resultados y posteriormente se detallan algunos de tales cálculos, indicándose con un superíndice previo su correspondencia.

t	y <sub>exacta</sub>	y <sub>Euler</sub>	Error relativo (%)		
			global	y <sub>Euler</sub> <sup>*</sup>	local
0.0	1.0000000	1.0000000	—		
0.1	0.9090909	<sup>1</sup> 0.9000000	<sup>1</sup> 1.000		
0.2	0.8333333	<sup>2</sup> 0.8190000	<sup>2</sup> 1.720	<sup>2</sup> 0.8264463	<sup>3</sup> 0.826
0.3	0.7692308	<sup>3</sup> 0.7519239	2.250	<sup>3</sup> 0.7638889	0.694
0.4	0.7142857	<sup>4</sup> 0.6953849	2.646	<sup>4</sup> 0.7100592	0.592
0.5	0.6666667	<sup>5</sup> 0.6470289	2.946	<sup>5</sup> 0.6632653	0.510
0.6	0.6250000	<sup>6</sup> 0.6051643	3.174	<sup>6</sup> 0.6222222	0.444
0.7	0.5882353	<sup>7</sup> 0.5685419	3.151	<sup>7</sup> 0.5859375	0.391
0.8	0.5555556	<sup>8</sup> 0.5362179	3.481	<sup>8</sup> 0.5536332	0.346
0.9	0.5263158	<sup>9</sup> 0.5074649	3.582	<sup>9</sup> 0.5246914	0.309
1.0	0.5000000	<sup>10</sup> 0.4817129	3.657	<sup>10</sup> 0.4986150	0.277

\* utilizando la solución exacta anterior

$$\begin{aligned}
 y_1 &= 1.0 + 0.10[-(1.0)^2] = 0.90 \\
 y_2 &= 0.90 + 0.10[-(0.90)^2] = 0.819 \\
 y_3 &= 0.819 + 0.10[-(0.819)^2] = 0.7519239 \\
 y_4 &= 0.7519239 + 0.10[-(0.7519239)^2] = 0.6953849 \\
 &\vdots \\
 y_{10} &= 0.5074649 + 0.10[-(0.5074649)^2] = 0.4817129 \\
 y_2^* &= 0.9090909 + 0.10[-(0.9090909)^2] = 0.8264463 \\
 y_3^* &= 0.8333333 + 0.10[-(0.8333333)^2] = 0.7668889 \\
 &\vdots \\
 y_{10}^* &= 0.5263158 + 0.10[-(0.5263158)^2] = 0.4986150
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon_1 &= \frac{|0.90 - 0.9090909|}{0.9090909} \cdot 100 = 1.0 \% \\
 \epsilon_2 &= \frac{|0.819 - 0.8333333|}{0.8333333} \cdot 100 = 1.712 \% \\
 \epsilon_3 &= \frac{|0.8264463 - 0.8333333|}{0.8333333} \cdot 100 = 0.826 \%
 \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 8.2.** Integrar por medio del método de Euler la siguiente ecuación diferencial en el intervalo de 0 a 4.0, con  $h = 0.50$  como lapso del paso <sup>(CS)</sup>.

$$y' = -2 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 8.5 \quad ; \quad y(0) = 1.0$$

La solución exacta está dada por:  $y = -0.5 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3 - 10 \cdot x^2 + 8.5 \cdot x + 1$

y la solución a través de Euler por:  $y_{n+1} = y_n + 0.50 (-2 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 8.5)$

en la tabulación siguiente se concentran los resultados:

$\bar{x}$	$y_{\text{exacta}}$	$y_{\text{Euler}}$	Error relativo (%)		
			global	$y_{\text{Euler}}^*$	local
0.0	1.00000	1.000			
0.5	3.21875	5.250	63.1	5.25000	63.1
1.0	3.00000	5.875	95.8	3.84375	28.1
1.5	2.21875	5.125	131.0	2.25000	1.4
2.0	2.00000	4.500	125.0	1.59375	20.3
2.5	2.71875	4.750	74.7	2.25000	17.2
3.0	4.00000	5.875	46.9	3.84375	3.9
3.5	4.71875	7.125	50.9	5.25000	11.3
4.0	3.00000	7.000	133.3	4.59375	53.1

\* utilizando la solución exacta anterior

□

Con base en el código expuesto en [C5] se elaboró el programa de cómputo EULER expuesto al final del capítulo. En este programa se define como función la expresión  $f(y, t)$  ó  $f(y, x)$  de la ecuación 8.1, en la línea 1070 y los límites de  $t$  ó  $x$ , las condiciones iniciales de  $y$ , el tamaño del paso  $h$  y el número de intervalos de cálculo entre impresiones en la línea 1110. El listado del programa EULER resuelve el ejemplo anterior con  $h = 0.05$ , por ello realiza 10 cálculos en cada incremento de  $x$ .

### 8.3 Método de Heun

Un planteamiento más exacto para evaluar la integral de la ecuación 8.1, o sea el área bajo la función  $f(y, t)$ , consiste en utilizar la ecuación 8.2 para estimar un valor de tal función  $f(\bar{y}_{n+1}, t_{n+1})$  y aplicar la regla del trapecio para calcular tal área. Entonces la aproximación mediante este método de Euler modificado o método de Heun será:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(y_n, t_n) + f(\bar{y}_{n+1}, t_{n+1})] \quad (8.4)$$

Si  $f(y, t)$  es lineal en  $y$  la ecuación anterior puede ser resuelta para  $y_{n+1}$ ; pero si no lo es, entonces la ecuación 8.4 es una función no lineal de  $y_{n+1}$  y para resolverla se requiere aplicar por ejemplo un algoritmo de aproximaciones sucesivas, de manera que:

$$y_{n+1}^k - y_n = \frac{h}{2} [f(y_n, t_n) + f(y_{n+1}^{k-1}, t_{n+1})] \quad (8.5)$$

donde  $y_{n+1}^k$  es la  $k$ -ésima aproximación iterativa de  $y_{n+1}$ , de manera que  $y_{n+1}^0$  es la estimación inicial de  $y_{n+1}$ . El proceso se detiene cuando  $|y_{n+1}^k - y_{n+1}^{k-1}|$  es menor que una cierta tolerancia adoptada. La estimación inicial es igual a  $y_n$ , por lo cual el primer paso del proceso de iteración es idéntico al método de Euler. Cuando sólo se utiliza un paso más en la iteración, el esquema corresponde al método de Runge-Kutta de segundo orden, o bien a un método predictor-corrector de Euler <sup>[N1]</sup>. Pero en el método de Heun, las iteraciones continúan hasta satisfacer la tolerancia, o hasta que el valor de  $y_{n+1}^k$  es igual al anterior.

**Ejemplo 8.3.** Resolver con el método de Heun la ecuación diferencial  $y' = -y^{1.5} + 1$ , con  $y(0) = 10$ , hasta  $t = 0.30$ , empleando  $h = 0.10$  como paso <sup>[N1]</sup>.



La solución según método de Heun es:  $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [-(y_n)^{1.5} - (y_{n+1})^{1.5} + 2]$

Para en primer intervalo y  $k=0$  se tiene:

$$y_1^0 = y_0 + \frac{h}{2} [-(y_0)^{1.5} - (y_1)^{1.5} + 2] = 10 + \frac{0.10}{2} [-(10)^{1.5} - (10)^{1.5} + 2] = 6.93772$$

$$y_1^1 = 10 + \frac{0.10}{2} [-(10)^{1.5} - (6.93772)^{1.5} + 2] = 7.60518$$

$$y_1^2 = 10 + \frac{0.10}{2} [-(10)^{1.5} - (7.60518)^{1.5} + 2] = 7.47020$$

$$y_1^3 = 10 + \frac{0.10}{2} [-(10)^{1.5} - (7.47020)^{1.5} + 2] = 7.49800$$

⋮

$$y_1^8 = 10 + \frac{0.10}{2} [-(10)^{1.5} - (7.49327)^{1.5} + 2] = 7.49326$$

Los resultados para los siguientes intervalos son:  $y_2^0 = 5.85863$        $y_1^1 = 4.73451$

□

## 8.4 Métodos de Runge-Kutta

La desventaja fundamental de los métodos de Euler y de Heun es su necesidad de utilizar intervalos de cálculo  $h$  muy pequeños para alcanzar una buena precisión; lo cual implica mayor número de operaciones y más posibilidades de errores de redondeo. En los métodos de Runge-Kutta la precisión aumenta al utilizar puntos intermedios al evaluar el área definida por la integral en la ecuación 8.1. Como ya se indicó, en el método de Runge-Kutta de segundo orden se aplica la regla del trapecio, de manera que  $f(\tilde{y}_{n+1}, t_{n+1})$  se aproxima mediante el método de Euler, entonces se tiene <sup>[N1]</sup>:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{n+1} &= y_n + hf(y_n, t_n) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} [f(y_n, t_n) + f(\tilde{y}_{n+1}, t_{n+1})]\end{aligned}$$

las ecuaciones anteriores corresponden a la 8.2 y 8.4, respectivamente y en forma canónica se escriben como:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} [k_1 + k_2] \quad (8.6)$$

$$k_1 = hf(y_n, t_n) \quad k_2 = hf(y_n + k_1, t_n + h)$$

Al emplear la regla de Simpson  $1/3$  como método de integración numérica del área bajo la función  $f(y, t)$  de la ecuación 8.1, se generan los métodos de Runge-kutta de tercero y cuarto orden, que son <sup>[N1]</sup>:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} [k_1 + 4k_2 + k_3] \quad (8.7)$$

$$k_1 = hf(y_n, t_n) \quad k_3 = hf(y_n - k_1 + 2k_2, t_n + h)$$

$$k_2 = hf\left(y_n + \frac{k_1}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + 2k_4] \quad (8.8)$$

$$k_1 = h \cdot f(y_n, t_n) \qquad k_3 = h \cdot f\left(y_n + \frac{k_2}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(y_n + \frac{k_1}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right) \qquad k_4 = h \cdot f(y_n + k_3, t_n + h)$$

existe otra versión del método de Runge-Kutta de cuarto orden, la cual está basada en la regla de Simpson de 3/8, cuya forma es la siguiente <sup>[N1]</sup>:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{8} [k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4] \quad (8.9)$$

$$k_1 = h \cdot f(y_n, t_n) \qquad k_2 = h \cdot f\left(y_n + \frac{k_1}{3}, t_n + \frac{h}{3}\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(y_n + \frac{k_1}{3} + \frac{k_2}{3}, t_n + \frac{2h}{3}\right) \qquad k_4 = h \cdot f(y_n + k_1 - k_2 + k_3, t_n + h)$$

**Ejemplo 8.4.** Con base en el método de Runge-Kutta de cuarto orden (ecuación 8.8) resolver para un paso de 0.10, la siguiente EDO <sup>[H2]</sup>:

$$y' = \frac{4t}{y} - ty \qquad \text{con} \qquad y(0) = 3$$

En este problema:  $f(y, t) = 4t/y - ty$  y para sustituir en la ecuación 8.8 se tiene que:

$$k_1 = 0.10[4(0)/3 - 0(3)] = 0$$

$$k_2 = 0.10[4(0.05)/3 - 0.05(3)] = -0.0083333$$

$$k_3 = 0.10 \left[ \frac{4(0.05)}{3 - \frac{0.0083333}{2}} - 0.05 \left( 3 - \frac{0.0083333}{2} \right) \right] = -0.0083032$$

$$k_4 = 0.10 \left[ \frac{4(0.10)}{3 - 0.0083032} - 0.10(3 - 0.0083032) \right] = -0.0165466$$

$$y_{n+1} = 3 + \frac{1}{6} [0 + 2(-0.0083333) + 2(-0.0083032) + (-0.0165466)] = 2.9916967$$

□

A partir del código expuesto en [N1] se desarrolló el programa de cómputo RK4 (Runge-Kutta de 4º. orden), cuyo listado se presenta al final del capítulo. También en este programa se define como función la expresión  $f(y, t)$  ó  $f(y, x)$  de la ecuación 8.1, en la línea 1070 y los límites de  $t$  ó  $x$ , las condiciones iniciales de  $y$ , el tamaño del paso  $h$  y el número de intervalos de cálculo entre impresiones en la línea 1110. El listado del programa RK4 resuelve el problema 8.4.

## 8.5 Aplicaciones prácticas

### Tránsito en vasos: Generalidades

Cuando una creciente o avenida llega a un embalse cuyo vertedor es de descarga directa, es decir, que no tiene compuertas, la condición más crítica ocurre cuando tal vaso o almacenamiento está lleno, o bien, como ocurre en grandes cuencas con gasto perenne importante, está establecida la continuidad y el gasto base que entra al vaso sale por su vertedor. Entonces cuando súbitamente comienza a entrar mayor gasto procedente de la creciente, se va incrementando el volumen almacenado en el embalse y al mismo tiempo se van descargando mayores gastos debido al aumento de la carga hidráulica sobre el vertedor. En la etapa inicial de este proceso entra más gasto del que sale, hasta que llega a un máximo y entonces comienza el vaciado del vaso; de esta manera se define un hidrograma de salidas, el cual es función del hidrograma de entradas, de la capacidad de almacenamiento del embalse y de la longitud de cresta del vertedor.

El proceso descrito se denomina *Regularización de la creciente en un vaso*. Por su naturaleza o efectos del almacenamiento, el hidrograma de salidas presentará su máximo en su cruce con el de entradas y el área entre ambos hidrogramas representa el máximo volumen almacenado, mismo que define el NAME o nivel de aguas máximas extraordinarias.

El hidrograma de la creciente define el volumen que transporta ésta, la morfología del vaso establece su capacidad de almacenamiento, de manera que embalses de llanura regularizan mejor que los de cañada y vertedores más cortos son mejores pues inducen el almacenamiento temporal en el vaso. El proceso de regularización descrito es la base del diseño hidrológico de las obras de reducción de crecientes, conocidas como presas rompe-picos y de control. Las primeras hacen uso exclusivo del efecto regularizador, es decir, del sobrealmacenamiento arriba de la cresta vertedora; las segundas destinan un volumen para almacenar temporalmente una parte del volumen de la creciente <sup>[63]</sup>.

El procedimiento de diseño hidrológico de ambas presas <sup>[64]</sup> inicia con la estimación del hidrograma de la creciente de diseño y se procede por tanteos, proponiendo un presa rompe-picos con un vertedor o escotadura a la elevación de la capacidad necesaria para sedimentos y usos recreativos, conocida como capacidad muerta; si tal estructura no es capaz de reducir el gasto máximo de descarga al permitido o de diseño, entonces se propone un embalse con un orificio de descarga libre a nivel de la capacidad muerta y un vertedor al final del volumen de control o almacenamiento temporal, al transitar la creciente se obtiene el gasto máximo que debe ser igual o menor al especificado.

### Tránsito en vasos: Método numérico o de Heun

La ecuación que gobierna el proceso de regularización en un vaso es la de continuidad y corresponde a la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$I - O = \frac{dV}{dt} \quad (8.10)$$

en la cual:

$I$  = gasto de entrada al vaso, en  $m^3/s$ .

$O$  = gasto de salida del vaso, en  $m^3/s$ .

$\frac{dV}{dt}$  = cambio variación del almacenamiento  $V$  en el vaso en el tiempo  $t$ , en  $m^3/s$ .

La ecuación anterior en diferencias finitas es <sup>[65]</sup>:

$$\frac{I_i + I_{i+1}}{2} - \frac{O_i + O_{i+1}}{2} = \frac{V_{i+1} - V_i}{\Delta t} \quad (8.11)$$

despejando a  $V_{i+1}$  se obtiene:

$$V_{i+1} = \left( \frac{I_i + I_{i+1}}{2} - \frac{O_{i+1} + O_i}{2} \right) \Delta t + V_i \quad (8.12)$$

Un método numérico <sup>[C7]</sup> resuelve la ecuación anterior por medio del siguiente procedimiento de cinco pasos:

Paso 1) Se selecciona un  $\Delta t$  el cual se recomienda que fluctúe entre 0.1 y 0.3 del tiempo de pico del hidrograma de entradas. Se conocen  $V_i, I_i, I_{i+1}, O_e, h_i, O_i$ , para  $i = 0$  son los datos iniciales y se toma  $O_{i+1} = O_e + O_i$  y  $k = 0$ , siendo  $O_e$  y  $O_i$  los gastos de salida por la obra de excedencias (vertedor) y por la obra de toma, respectivamente y  $k$  el número de iteraciones comúnmente  $\geq 3$ .

Paso 2) Se calcula  $V_{i+1}$  por medio de la ecuación 8.12 y con tal valor se obtiene en la curva de elevaciones-volúmenes del vaso la elevación correspondiente  $h_{i+1}$ , con  $i$  variando de 0 a  $n$ , siendo  $n$  el número de gastos de entrada que definen el hidrograma de entradas discretizado.

Paso 3) Con  $h_{i+1}$  se calcula mediante la fórmula de gastos de descarga del vertedor el valor de  $O_{e,i+1}$ , para obtener  $O_{i+1} = O_{e,i+1} + O_i$ . Tal fórmula es:

$$O_{e,i+1} = C * L (h_{i+1} - \text{NAMO})^{1.5} \quad (8.13)$$

en la cual,  $C$  es el coeficiente de descarga, comúnmente con un valor cercano a 2.00,  $L$  es la longitud de cresta vertedora en metros y  $\text{NAMO}$  es el llamado nivel de aguas máximas ordinarias o elevación del umbral del vertedor.

Paso 4) Se realiza otra iteración ( $k = k+1$ ), lo cual equivale a repetir el paso 2 utilizando el resultado del paso 3. Cuando  $k$  iguala al adoptado, se sigue con el paso 5.

Paso 5) El valor de  $O_{i+1}$  es el gasto de salida al final del intervalo. Se regresa al paso 1 con  $i = i + 1$ , hasta definir el hidrograma de salidas.

Para asegurar una buena aproximación numérica en el paso 4, se puede utilizar un número infinito para  $k$ , con base en un criterio de convergencia, por ejemplo <sup>[A2]</sup> para la diferencia absoluta entre los volúmenes  $V_i$  y  $V_{i+1}$ . Dado el proceso operativo de los pasos 2 a 4, este método corresponde al método de Heun <sup>[F7]</sup>.

**Ejemplo 8.5.** En un embalse su  $\text{NAMO}$  está a la cota 68.80 m; su vertedor tiene un  $C = 2.0$  con  $L = 82$  m y la curva que define las elevaciones contra almacenamientos tiene los siguientes 6 datos <sup>[C7]</sup>. Se debe transitar el hidrograma discretizado en intervalos de 4 horas, que está definido en la tabulación de la página siguiente.

Elevaciones (m)	60	65	70	75	80	85
Almacenamientos (Mm <sup>3</sup> )	100	180	315	485	700	960

Con base en el programa REGPOL del capítulo 5 se ajustaron polinomios de grado 3 a los datos anteriores para establecer las fórmulas de Vol.-Elev. y Elev.-Vol. Las ecuaciones resultantes fueron:

$$V = 3450.692 - 132.874 \cdot H + 1.440539 \cdot H^2 - 0.002613839 \cdot H^3 \quad (8.14)$$

$$r_{xy} = 0.999992 \quad \text{EEA} = 2.114 \text{ Mm}^3$$

$$H = 53.93097 + 0.07013736 \cdot V - 6.913417 \cdot 10^{-5} \cdot V^2 - 3.107512 \cdot 10^{-8} \cdot V^3 \quad (8.15)$$

$$r_{xy} = 0.999492 \quad \text{EEA} = 0.471 \text{ m}$$

Tiempo (h)	Gasto (m <sup>3</sup> /s)	Tiempo (h)	Gasto (m <sup>3</sup> /s)	Tiempo (h)	Gasto (m <sup>3</sup> /s)
0	500	24	3900	48	940
4	820	28	3300	52	820
8	2820	32	2400	56	500
12	4900	36	1920	60	500
16	5140	40	1440	⋮	⋮
20	4900	44	1100	100	500

Para la ejecución del método de aproximación numérica se elaboró un programa de cómputo denominado TRANVA (TRANsito en VAsos), cuyo listado se presenta al final del capítulo. Este programa tiene como variables principales, no especificadas previamente las siguientes:

DT = incremento de discretización en horas (4 h)

NGE = número de gastos de entrada (21)

QE0 = gasto de entrada en el instante cero o inicio del intervalo 1 (500 m<sup>3</sup>/s)

QOT = gasto constante de descarga por la obra de toma (0)

Además, considera  $k = 20$ . En la tabulación siguiente se presentan los resultados de los primeros 15 intervalos, según programa TRANVA.

Hora	Vol. Almac. Inic. (Mm <sup>3</sup> )	Elev. Inicial (m)	Gasto de Entrada (m <sup>3</sup> /s)	Gasto de Salida (m <sup>3</sup> /s)
0	276.441	68.80	500.0	0.0
4	285.794	69.05	820.0	21.0
8	310.359	69.97	2820.0	207.1
12	358.823	71.63	4900.0	781.7
16	414.110	73.33	5140.0	1579.5
20	458.718	74.56	4900.0	2265.0
24	486.361	75.26	3900.0	2695.6
28	498.069	75.55	3300.0	*2878.3
32	497.703	75.54	2400.0	2872.6
36	488.478	75.32	1920.0	2728.7
40	474.901	74.98	1440.0	2516.9
44	458.755	74.56	1100.0	2265.6
48	442.619	74.13	940.0	2015.5
52	427.897	73.72	820.0	1789.2
56	413.241	73.30	500.0	1566.4

\* gasto máximo

□

#### Tránsito en vasos: Método de Hager & Singger (1985)

La ventaja o característica fundamental de este método consiste en incorporar la forma del hidrograma de entradas en la solución. Nuevamente el volumen almacenado arriba

de la cresta vertedora es función de las características físicas del embalse y la ecuación diferencial que lo gobierna es la siguiente:

$$\frac{dV}{dt} = Q_e - Q_s \quad (8.16)$$

en la cual,  $V$  es el volumen acumulado en el embalse en  $m^3$ ,  $t$  es el tiempo en segundos y  $Q_e$  y  $Q_s$  son los gastos de entrada y salidas ( $m^3/s$ ); el primero definido en el hidrograma de la creciente. Dada la función de descargas (ecuación 8.13),  $V$  dependerá únicamente del nivel en el embalse igual a  $H_0 + H$ , siendo  $H_0$  la elevación de la cresta del vertedor ( $H_0 = \text{NAMO}$ ) en metros, entonces <sup>[H11]</sup>:

$$V = a (H_0 + H)^b \quad (8.17)$$

en donde el coeficiente  $a$  y el exponente  $b$  son los parámetros que describen el tamaño y la forma del embalse, respectivamente. En este método <sup>[H11]</sup> se propone una ecuación basada en la distribución de Maxwell para representar la forma del hidrograma de la creciente de diseño, ésta es:

$$Q(t) = D \cdot t^n \cdot e^{-Ft} \quad (8.18)$$

en la cual,  $D$  y  $F$  son constantes y  $n$  define la forma del hidrograma. Al considerar que el gasto base o inicial ( $Q_b$ ) es cero y que el gasto pico ( $Q_p$ ) se alcanza en el tiempo pico ( $T_p$ ), se obtiene que:  $D = Q_p$  y  $F = n/T_p$ . Al aceptar unas nuevas coordenadas adimensionales:  $T = t/T_p$  y  $q = Q/Q_p$  la ecuación 8.18 se transforma en:

$$q_e(T) = T^n \cdot e^{n(1-T)} \quad (8.19)$$

El método propone tres tipos de hidrogramas de entrada según el valor del parámetro de forma  $n$ , uno esbelto ( $n = 10$ ) con tiempo de recesión o descenso ( $T_d$ ) igual al  $T_p$ ; otro robusto, amplio o de gran volumen ( $n = 2$ ) con  $T_d = 5 \cdot T_p$  y uno intermedio ( $n = 5$ ) con  $T_d = 3 \cdot T_p$ .

Las ecuaciones 8.13 y 8.16 a 8.19 constituyen el sistema que gobierna el tránsito de la creciente según este procedimiento, con los valores de  $Q_p$ ,  $T_p$ ,  $n$ ,  $H_0$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $C$  y  $L$  conocidos en cada problema o caso específico. Un manejo algebraico <sup>[H11, C4]</sup> de estas ecuaciones permite establecer la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dq}{dT} = 1.5 \cdot R \cdot q^{1/3} [T^n \cdot e^{n(1-T)} - q] \quad (8.20)$$

en la cual:

$$R = (C^{2/3} \cdot L^{2/3} \cdot Q_p^{1/3} \cdot T_p) / A_0 \quad (8.21)$$

siendo  $A_0$  ( $m^2$ ) el área o superficie del embalse a la cota  $H_0$ , o con  $H = 0$ ,  $R$  es adimensional y se denomina *Parámetro de Almacenamiento*, ya que es función de la geometría de vertedor, de las características de hidrograma de entradas y de las condiciones físicas del embalse. Conviene notar que conforme  $R$  es mucho menor de la unidad el efecto de atenuación en la creciente es mayor y viceversa.

La solución  $q(T)$  de la ecuación diferencial 8.20 depende únicamente de  $R$  y  $n$ . En [H11] se presentan soluciones gráficas (hidrogramas de entrada y salida) para valores de  $n = 2, 5$  y  $10$ , con magnitudes de  $R = 0.30, 0.50, 1, 2$  y  $5$ ; además, se exponen dos gráficas para obtener los máximos del gasto de descarga y de la cota en el embalse, para los mismos valores de  $n$ , con  $R$  variando de  $0.10$  a  $10$ .

La ecuación diferencial 8.20 es de primer orden, no lineal y por ello, su integración requiere de una condición inicial dada por <sup>[H1]</sup>:

$$q(T) = [R \cdot e^{h \cdot T^{n+1}} / (n+1)]^{1/2} \quad ; \quad |T| \ll 1 \quad (8.22)$$

sugiriendo que  $T = 0,010$  para evaluarla. Una solución numérica de la ecuación 8.20 se planteó <sup>[C4]</sup> a través del método de Runge-Kutta de 4o. orden (ecuaciones 8.8), donde  $h$  es el tamaño del intervalo y  $f(t,y) = q(T)$  es la función por integrar, de  $t_1$  a  $t_2$ . En [C4] se describe con detalle el planteamiento anterior, se presenta el programa de cómputo respectivo y se expone un ejemplo numérico de aplicación.

Este método tiene como ventajas principales el requerir pocos datos específicos ( $Q_p$ ,  $T_p$ ,  $n$ ,  $H_0$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $C$  y  $L$ ) para su aplicación y no necesitar el hidrograma de entradas discretizado; además su programa permite efectuar fácilmente muchos tanteos con solo cambiar alguna de las cantidades características del problema estudiado.

### Tránsito en vasos: Método del NERC (1975)

Cuando se desea conocer la evolución de los niveles en el vaso a partir de un cierto valor inicial, para estudiar diferentes reglas de operación o políticas de descarga por vertedores y obras de toma, con el propósito de seleccionar la más conveniente u óptima, para la seguridad del propio embalse o para la protección de bienes y servicios aguas abajo, es necesario contar con un programa de tránsito de crecientes en vasos no llenos, cuya función de descargas permita considerar vertedor(es) libre(s) y con compuertas, así como obras de toma que operan únicamente durante ciertos niveles <sup>[C8]</sup>.

Este problema fue planteado y resuelto en [N2], su descripción detallada, programa de cómputo y aplicaciones numéricas se pueden consultar en [C2,C3]. Nuevamente, en este planteamiento general del tránsito en vasos, la solución de la ecuación diferencial 8.10 u 8.16 se obtiene a través del método de Runge-Kutta de cuarto orden (ecuaciones 8.8).

### Tránsito Inverso

La aplicación fundamental del tránsito de crecientes en vasos, es la definición del gasto de diseño del vertedor o gasto máximo de descargas, conocido o especificado el hidrograma de entradas de la avenida de diseño del embalse. Por otra parte, quizás la aplicación indirecta más importante del tránsito en vasos sea la obtención del hidrograma de la creciente o hidrograma de entradas, conocida la evolución de los niveles en el vaso durante su tránsito y las características físicas de éste y de las estructuras de descarga del embalse (vertedores y obras de toma). Este problema denominado *tránsito inverso* ha sido estudiado y resuelto en [A1].

## Problemas propuestos

**Problema 8.1:** Resolver el ejemplo 8.2 con  $h = 0.25, 0.1$  y  $0.01$ . Modificar el programa EULER y comentar sobre la evolución de los errores.

**Problema 8.2:** Resolver por el método de Euler con  $h = 0.01$ , para el lapso de 0 a 0.10 la siguiente ecuación diferencial <sup>[N1]</sup>:  $y' = -20y + 7 \cdot e^{-0.5t}$  con  $y(0) = 5$ , cuya solución exacta es:  $y = 5e^{-20t} + (7/19.5)(e^{-0.5t} - e^{-20t})$ . (Respuestas <sup>[N1]</sup>: en  $t = 0.01$ ,  $y = 4.07$ ,  $\epsilon_t = 8.693\%$ ; en  $t = 0.10$ ,  $y = 0.83977$ ,  $\epsilon_t = 12.979\%$ ).

**Problema 8.3:** Resolver mediante el método de Runge-Kutta de 4º. orden la siguiente EDO <sup>[C6]</sup>,  $y' = 4 \cdot e^{0.8x} - 0.5 \cdot y$ , con  $y(0) = 2$  y desde  $x = 0$  hasta  $0.5$ , empleando  $h = 0.5$ ; por lo tanto un solo paso. Verificar el resultado por medio del programa RK4 (Respuesta <sup>[C6]</sup>:  $y(0.5) = 3.75170$ ).

**Problema 8.4:** Resolver mediante el programa RK4 la siguiente EDO <sup>[N1]</sup>:  $y' = t \cdot y + 1$ , con  $y(0) = 0$ , desde  $t = 1, 2, \dots, 5$  y utilizando  $h = 0.2, 0.1$  y  $0.05$  (Respuestas: en  $t = 1$ , con  $h = 0.2$  se tiene  $y = 1.41068$ , en  $t = 3$  con  $h = 0.1$  se tiene  $y = 112.5058$  y en  $t = 5$  con  $h = 0.05$  se tiene  $y = 336271.0$ ).

**Problema 8.5:** Adaptar el programa TRANVA para resolver el ejemplo 5.5, página 99 de la referencia [A2], cuyos datos son: 1)  $NAMO = 50.40$  m; 2)  $V = 10 \cdot H^{1.8}$ , con  $V$  en miles de  $m^3$  y  $H$  en metros; 3)  $O_t = 20$   $m^3/s$ ,  $C = 2.0$  y  $L = 15.0$  m; y 4) el hidrograma de entradas es triangular con duración de 3 horas y gasto máximo de 200  $m^3/s$  transcurrida una hora. Discretizar en intervalos de 6 minutos (Respuestas: gasto máximo 192  $m^3/s$  transcurridos 66 minutos).

**Problema 8.6:** Modificar el programa TRANVA para permitir el tránsito de crecientes en vasos parcialmente llenos (Elevación inicial  $<$   $NAMO$ ). Realizar una aplicación numérica tomada de alguna referencia <sup>[C2, C8, N2]</sup>.

## Referencias

- A1.** A. A. Aldama Rodríguez, y E. Aguilar. Tránsito inverso para la estimación de avenidas de ingreso a vasos. *Ingeniería Hidráulica en México*, Vol. XII, Núm. 1, pp. 15-26. Enero-abril de 1997.
- A2.** F. J. Aparicio Mijares. *Fundamentos de Hidrología de Superficie*. Capítulo 5: Almacenamiento y tránsito en vasos y cauces pp. 69-111. Noriega Editores. México, D. F.
- A3.** L. V. Atkinson y P. J. Harley. *Introducción a los Métodos Numéricos con Pascal*. Capítulo 8: Ecuaciones diferenciales ordinarias, pp. 245-284. Addison-Wesley Iberoamericana, S. A. Wilmington, Delaware, U.S.A. 1987.
- C1.** D. F. Campos Aranda. Propuesta de criterios para la elaboración de estudios hidrológicos (Primera parte). *Ingeniería Hidráulica en México*, Vol. VI, Núm. 3, pp. 23-40. Septiembre-Diciembre de 1991.
- C2.** D. F. Campos Aranda. Programa en Basic para el diseño hidrológico de presas de control de crecientes. *II Congreso Nacional de Informática (AMII)*, Diskette No. 2. 15 al 17 de Mayo de 1991. Puebla, Puebla.
- C3.** D. F. Campos Aranda. Modelo matemático determinístico para pronóstico de crecientes en cuencas rurales. *Ingeniería Hidráulica en México*, Vol. IX, Núm. 1, pp. 43-61. Enero-Abril de 1994.
- C4.** D. F. Campos Aranda. Estimación de la atenuación de las crecientes en embalses con el método de Hager & Slinger (1985). *XVI Congreso Nacional de Hidráulica*, pp. 185-190. 8 al 10 de noviembre del 2000. Morelia, Michoacán.
- C5.** S. C. Chapra y R. P. Canale. *Métodos Numéricos para Ingenieros*. Parte VI: EDO, pp. 515-526; capítulo 16: Métodos de un paso, pp. 527-571. McGraw-Hill Interamericana Editores, S. A. de C. V. México, D. F. 1988. Segunda edición.
- C6.** S. C. Chapra y R. P. Canale. *Métodos Numéricos para Ingenieros*. Parte Siete: EDO, capítulo 25: Métodos de Runge-Kutta, pp. 714-762. McGraw-Hill Interamericana Editores, S. A. de C. V. México, D. F. 1999. Tercera edición.
- C7.** Comisión Federal de Electricidad. Tránsito de avenidas en vasos. Sección A.1.8 (Hidrotecnia) del *Manual de Diseño de Obras Civiles*. Instituto de Investigaciones Eléctricas, CFE. México, D. F. 1980.



- C8.** Comisión Federal de Electricidad. Métodos Numéricos. Capítulo 16.3, Sección A.2.16 (Hidráulica) del *Manual de Diseño de Obras Civiles*. Instituto de Investigaciones Eléctricas. México, CFE. D. F. 1983.
- F1.** O. A. Fuentes Mariles, y P. Martínez Austria. *Introducción a los métodos numéricos aplicados a la hidráulica*. Capítulo 4: Ecuaciones diferenciales ordinarias, pp. 57-107. Serie Divulgación 5. Coordinación de Investigación. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua (IMTA). Jiutepec, Morelos. 1988.
- H1.** Hager, W. H. & R. Sinniger. Flood storage in reservoirs. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, Vol. 111, No. 1, pp. 76-85. 1985.
- H2.** R. W. Hornbeck. *Numerical Methods*. Chapter 9: The numerical solution of ordinary differential equations, pp. 185-226. Quantum Publishers, Inc. New York, U.S.A. 1975.
- N1.** S. Nakamura. *Métodos Numéricos Aplicados con Software*. Capítulo 9: Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con valor o condición inicial, pp. 289-350. Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A. México, D. F. 1992.
- N2.** Natural Environment Research Council (NERC). *Flood Studies Report*. Volume I: Hydrological Studies, Chapter 7: Supplementary studies: snowmelt runoff, conceptual catchment model and flood routing, pp. 486-539. London, England. 1975.

## PCN17: EULER

```

1000 REM PROGRAMA "EULER"
1010 REM ESTE PROGRAMA PERMITE APLICAR EL METODO NUMERICO DE EULER
1020 REM PARA RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
1030 REM RESULTADOS I M P R E S O S. NOVIEMBRE DEL 2001.
1040 CLS:PRINT"SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS"
1050 PRINT"    MEDIANTE EL METODO NUMERICO DE EULER":PRINT
1060 REM SE DEFINE LA FUNCION f(y,t) O f(y,x) DE LA EDO
1070 DEF FN F(X)=-2*X^3+12*X^2-20*X+8.5
1080 REM SE DEFINEN LIMITES DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE, VALOR
1090 REM INICIAL DE LA VARIABLE DEPENDIENTE, TAMAÑO DEL PASO Y
1100 REM NUMERO DE INTERVALOS ENTRE IMPRESIONES
1110 XI=0:XF=4:YI=1:H=.05:NI=10
1120 REM INICIA IMPRESION DE CONDICIONES INICIALES
1130 LPRINT"SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS"
1140 LPRINT"    MEDIANTE EL METODO NUMERICO DE EULER":LPRINT
1150 LPRINT"FUNCION f(y,t) o f(y,x):_____ "
1160 LPRINT"TAMAÑO DEL PASO (h):";H:LPRINT
1170 LPRINT" No. VARIABLES: INDEPENDIENTE    DEPENDIENTE"
1180 LPRINT"ITER                X                Yeuler"
1190 LPRINT USING"####";II;:LPRINT USING"#####.###";XI;
1200 LPRINT USING"#####.#####";YI
1210 REM INICIAN CALCULOS DEL METODO
1220 X=XI:Y=YI:NC=(XF-XI)/H
1230 FOR I=1 TO NC
1240 IP=IP+1
1250 PEND=FN F(X)
1260 Y=Y+PEND*H:X=X+H
1270 IF IP=NI THEN 1280 ELSE 1300
1280 LPRINT USING"####";I;:LPRINT USING"#####.###";X;
1290 LPRINT USING"#####.#####";Y:IP=0
1300 NEXT I
1310 END

```

## PCN18: RK4

```

1000 REM PROGRAMA "RK4" (Runge-Kutta de 4o. orden)
1010 REM ESTE PROGRAMA PERMITE APLICAR EL METODO NUMERICO DE
1020 REM RUNGE-KUTTA DE 4o. ORDEN PARA RESOLVER UNA ECUACION
1030 REM DIFERENCIAL ORDINARIA. RESULTADOS I M P R E S O S.
1040 CLS:PRINT"SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS"
1050 PRINT"    CON EL METODO DE RUNGE-KUTTA DE 4o. ORDEN":PRINT
1060 REM SE DEFINE LA FUNCION f(y,t) DE LA EDO.
1070 DEF FN Y(Y,T)=T*Y+1
1080 REM SE DEFINEN LIMITES DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE, CONDICION
1090 REM INICIAL DE LA VARIABLE DEPENDIENTE, TAMAÑO DEL PASO Y
1100 REM NUMERO DE INTERVALOS ENTRE IMPRESIONES
1110 TI=0:TF=5:YI=0:H=.2:NI=5
1120 REM INICIA IMPRESION DE CONDICIONES INICIALES
1130 LPRINT"SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS"
1140 LPRINT"    CON EL METODO DE RUNGE-KUTTA DE 4o. ORDEN":LPRINT
1150 LPRINT"FUNCION f(y,t) O f(y,x):"
1160 LPRINT"TAMAÑO DEL PASO (h):";H:H2=H/2:LPRINT
1170 LPRINT" No. Variables: INDEPENDIENTE    DEPENDIENTE"
1180 LPRINT"ITER          T          Yr-k4"
1190 LPRINT USING"#####";II;:LPRINT USING"#####.##";TI;
1200 LPRINT USING"#####.#####";YI
1210 REM INICIAN CALCULOS DEL METODO DE RUNGE-KUTTA DE 4o. ORDEN
1220 FOR I=1 TO NI
1230 TN=TI:YN=YI:TS=TN+H2:TFI=TN+H:
1240 K1=H*FN Y(YN,TN)
1250 K2=H*FN Y(YN+K1/2,TS)
1260 K3=H*FN Y(YN+K2/2,TS)
1270 K4=H*FN Y(YN+K3,TFI)
1280 Y=YN+(K1+2*K2+2*K3+K4)/6
1290 TI=TFI:YI=Y:NEXT I
1300 SNI=SNI+NI:IF TFI>TF THEN 1340
1310 LPRINT USING"#####";SNI;:LPRINT USING"#####.##";TFI;
1320 LPRINT USING"#####.#####";Y
1330 IF TFI<TF THEN 1220
1340 END

```

## PCN19: TRANVA

```

1000 REM PROGRAMA "TRANVA" (TRANSito de crecientes en VAsos)
1010 REM ESTE PROGRAMA REALIZA EL TRANSITO DE UNA CRECIENTE DISCRETIZADA
1020 REM EN UN VASO O EMBALSE LLENO, MEDIANTE EL METODO DE APROXIMACION
1030 REM NUMERICA ADAPTADO DE CFE (1980), SECCION A.1.8 DE HIDROTECNIA.
1040 REM RESULTADOS I M P R E S O S. NOVIEMBRE DEL 2001
1050 REM SE LEEN DATOS BASICOS:DT,NGE,NAN,QE0,C,L,QOT
1060 REM CON UNIDADES DE HORAS,No.,METROS,m^3/s,ADIM.,METROS Y m^3/s.
1070 READ DT,NGE,NAN,QE0,C,L,QOT:DIM QE(NGE),QS(3*NGE),V(NGE)
1080 REM SE LEEN LOS GASTOS DE ENTRADA
1090 FOR I=1 TO NGE
1100 READ QE(I):NEXT I
1110 REM SE DEFINEN LAS FUNCIONES DE ELEV-VOL Y VOL-ELEV.
1120 DEF FNH(V)=53.93097+7.013736E-02*V-6.913417E-05*V^2+3.107512E-08*V^3
1130 DEF FNV(H)=3450.692-132.874*H+1.440539*H^2-2.61384E-03*H^3
1140 REM SE CALCULAN Y DEFINEN LAS CONDICIONES INICIALES
1150 CLS:PRINT" TRANSITO DE UNA CRECIENTE EN UN VASO LLENO MEDIANTE"
1160 PRINT" EL METODO DE APROXIMACION NUMERICA":PRINT
1170 INPUT"NOMBRE DEL EMBALSE: ";NE$
1180 H=NAN:V(0)=FNV(H)*1000000!:DTS=DT*3600!:QE(0)=QE0:QS(1)=QOT
1190 REM INICIA IMPRESION DE CONDICIONES INICIALES
1200 CLS:LPRINT" TRANSITO DE UNA CRECIENTE EN UN VASO LLENO MEDIANTE"
1210 LPRINT" EL METODO DE APROXIMACION NUMERICA":LPRINT
1220 LPRINT"NOMBRE DEL EMBALSE: ";NE$:LPRINT
1230 LPRINT"Tiempo Vol.Almac. Elev.Inicial Q:Entrada y Salida"
1240 LPRINT" (h) (Mm^3) (m) (m^3/s) (m^3/s)"
1250 LPRINT USING"####";0:LPRINT USING"#####.###";V(0)/1000000!;
1260 LPRINT USING"#####.###";NAN:LPRINT USING"#####.###";QE(0);
1270 LPRINT USING"#####.###";QS(1)
1280 REM INICIA CALCULO DEL VOLUMEN Vi+1
1290 FOR II=1 TO NGE
1300 FOR K=1 TO 20
1310 V(II)=((QE(II)+QE(II-1))/2-(QS(II)+QS(II-1))/2)*DTS+V(II-1)
1320 VN=V(II)/1000000!:HN=FNH(VN):QS(II)=C*L*(HN-NAN)^1.5+QOT
1330 NEXT K
1340 LPRINT USING"####";DT*II:LPRINT USING"#####.###";VN;
1350 LPRINT USING"#####.###";HN:LPRINT USING"#####.###";QE(II);
1360 LPRINT USING"#####.###";QS(II)
1370 NEXT II
1380 END
5000 REM INICIAN DATOS DEL EJEMPLO DE CFE (1980)
5010 DATA 4,21,68.8,500,2,82,0
5020 DATA 820,2820,4900,5140,4900,3900,3300,2400,1920,1440
5030 DATA 1100,940,820,500,500,500,500,500,500,500

```

# Capítulo 9:

## Optimización Numérica

### Resumen

Actualmente la optimización numérica cuenta con muy diversos algoritmos, por ello se comienza por definir brevemente su concepto y presentar una descripción general de los que son expuestos y aplicados posteriormente. En seguida se plantea matemáticamente la programación lineal y se describen las características operativas del programa de cómputo para el algoritmo Simplex. A continuación se bosqueja el procedimiento de los llamados métodos de búsqueda para optimizar funciones no lineales dependientes de múltiples variables; se cita someramente el funcionamiento del algoritmo de Rosenbrock y de su respectivo código en Basic, definiendo con detalle los parámetros que condicionan sus iteraciones. Posteriormente, se menciona brevemente como opera el algoritmo Complex para funciones con variables restringidas, destacando su sencillez para introducir los límites de las variables de decisión y de sus relaciones o variables dependientes. En la parte de aplicaciones numéricas, el algoritmo Simplex se utiliza para la maximización de beneficios en sistemas agrícolas y se citan otras aplicaciones. En seguida se tratan tópicos sobre el ajuste de distribuciones de probabilidad a registros de crecientes, por medio de los algoritmos de Rosenbrock y Complex. Mediante optimización restringida se identifican las ordenadas del hidrograma unitario y se obtienen los parámetros óptimos del método de Muskingum. Por último, se plantea la calibración de modelos determinísticos mediante optimización numérica.

### 9.1 Introducción

La optimización, aceptada como la maximización o minimización de una cierta función, es un proceso que puede ser realizado matemática o numéricamente. En su segunda opción, se emplean algoritmos cuyas características específicas permiten resolver un cierto tipo de problemas; ya que la función puede variar desde una expresión simple que incluye y relaciona las variables de decisión, hasta una ecuación que cuantifica el comportamiento de un modelo matemático, probabilístico o determinístico, de un cierto sistema real. Durante el proceso de optimización se toman en cuenta las restricciones o limitaciones asociadas a la función, las cuales son expresiones matemáticas que incorporan las particularidades del problema que se resuelve o del sistema que se simula.

Cuando la función por optimizar, en adelante llamada función objetivo (FO), es lineal al igual que sus restricciones el algoritmo Simplex, puede resolver tal problema. En cambio, cuando la función no es lineal y sus variables no tienen restricciones, el algoritmo de Rosenbrock ha demostrado su eficiencia y simplicidad de aplicación. Por último, cuando la FO depende de variables y de las relaciones de éstas, las cuales están restringidas o

acotadas, el algoritmo Complex es una buena herramienta, que además presenta ventajas en la incorporación de los límites de ambas variables, de decisión y dependientes.

## 9.2 Programación Lineal

La programación lineal (PL) es un procedimiento de optimización que intenta maximizar las utilidades o beneficios, o bien, minimizar los costos, satisfaciendo un conjunto de restricciones o limitaciones en las fuentes o disponibilidades. La designación de *lineal* se debe a que tanto la función objetivo (FO) como las restricciones son lineales, éstas pueden ser igualdades y/o desigualdades. El problema de PL fue abordado por primera vez por George B. Dantzing en 1947, cuando trabajaba como consejero matemático de los controladores de la Fuerza Aérea de los Estados Unidos. El matemático y economista soviético L. V. Kantorovich planteó y resolvió un problema de PL hacia 1939, pero su trabajo se conoció hasta 1959. En 1949, Dantzing publicó el método *Simplex* para resolver problemas de PL <sup>[B1]</sup>.

Un problema de PL consiste en<sup>[B1]</sup>:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n & (9.1) \\ \text{Sujeta a} \quad & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \cdots + a_{1n} x_n \geq b_1 \\ & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \cdots + a_{2n} x_n \geq b_2 \\ & a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \cdots + a_{3n} x_n \geq b_3 \\ & \vdots \\ & a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \cdots + a_{mn} x_n \geq b_m \\ & x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

La primera ecuación corresponde a la *función objetivo* que debe minimizarse y se designará por  $z$ . Los coeficientes  $c_1, c_2, \dots, c_n$  son los *costos* conocidos, o *beneficios* en un problema de maximización, y  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  son las *variables de decisión* que deben determinarse. Cada una de las  $m$  desigualdades es la  $i$ -ésima *restricción*. Los coeficientes  $a_{ij}$  para  $i=1, 2, \dots, m$  y  $j=1, 2, \dots, n$  se llaman *coeficientes tecnológicos* y forman la matriz de restricciones **A** siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

El vector columna **b** de  $m$  términos  $b_i$  se denomina *vector del lado derecho* y representa los requerimientos mínimos que deben satisfacerse. La última ecuación del sistema 9.1 son las *restricciones de no negatividad*. Un conjunto de variables  $x_1, \dots, x_n$  o vector **x** que satisfacen todas las restricciones se denomina punto o vector factible y el conjunto de todos estos puntos se llama región factible o espacio factible. Entonces un problema de PL se puede escribir como <sup>[B1]</sup>:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & z = \mathbf{c}\mathbf{x} & (9.2) \\ \text{Sujeta a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

En resumen, un problema de PL consiste en encontrar de entre todos los vectores factibles el que minimiza (o maximiza) la función objetivo. En el planteamiento anterior

están implícitas cuatro propiedades que son: proporcionalidad, aditividad, divisibilidad y determinación determinística de  $c_i$ ,  $a_{ij}$  y  $b_i$ .

El código del algoritmo Simplex que será utilizado es una adaptación del expuesto en [P3] y su listado se tiene al final del capítulo designado como SIMPLEX. Para la solución de problemas de PL con este programa se siguen las instrucciones siguientes:

- 1) primeramente se ordenan las restricciones del problema poniendo en primer lugar las desigualdades del tipo menor que ( $\leq$ ), después las igualdades (=) y por último, las desigualdades mayor que ( $\geq$ ).
- 2) los datos se accesan bajo instrucciones READ-DATA (ver Apéndice A), por ello al final del listado comienzan las sentencias DATA con los coeficientes de las restricciones, con el orden  $\leq, =, \geq$ . Si una variable no aparece o interviene en una restricción se accesa un cero como coeficiente.
- 3) en seguida en una instrucción DATA se escriben los términos del vector **b**; lógicamente con el orden de las restricciones.
- 4) por último, en otra sentencia DATA se introducen los coeficientes de la función objetivo ( $z$ ).
- 5) al correr el programa, se selecciona el tipo de problema: maximización o minimización, también se accesan por pantalla el número de restricciones, de variables y de cada tipo de restricción ( $\leq, =, \geq$ ).

**Ejemplo 9.1.**            Minimizar <sup>[B1]</sup>                     $-x_1 - 3x_2$

                            Sujeta a                     $x_1 + x_2 \leq 6$   
     $-x_1 + 2x_2 \leq 8$   
     $x_1, x_2 \geq 0$

Al aplicar el programa SIMPLEX se obtiene: FO = -15.333 con  $x_1 = 1.333$  y  $x_2 = 4.667$

□

**Ejemplo 9.2.**            Maximizar <sup>[P2]</sup>                     $3.5x_1 + 3.7x_2$

                            Sujeta a                     $x_1 + x_2 \leq 150$   
     $1.6x_1 + 2x_2 \leq 260$   
     $3x_1 + 3.5x_2 \leq 490$   
     $x_1, x_2 \geq 0$

Con base en el programa SIMPLEX se obtiene: FO = 535.0 con  $x_1 = 100.0$  y  $x_2 = 50.0$

□

### 9.3 Optimización con múltiples variables no restringidas

La mayoría de los métodos de búsqueda directa definen primeramente una línea recta o dirección, a partir de un punto inicial definido. En seguida se evalúa la función objetivo (FO) en varios puntos a lo largo de tal línea y se determina el óptimo; cuando esto ha sucedido, una nueva dirección de búsqueda es seleccionada y el procedimiento descrito es repetido hasta alcanzar el óptimo de la FO. Lo anterior se ilustra en la Fig. 9.1, donde los contornos de igual valor dan idea de la superficie de respuesta de la FO.

El algoritmo de Rosenbrock <sup>[R4, K3]</sup> es un procedimiento de búsqueda directa que encuentra el mínimo de una función no lineal de múltiples variables, no restringidas o acotadas, es decir:

Minimizar

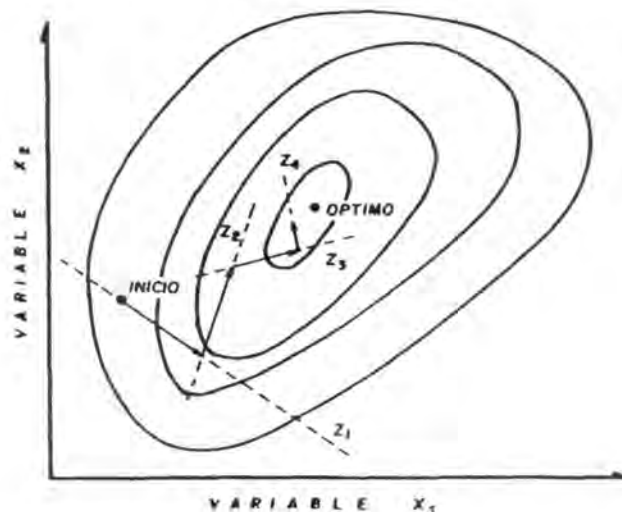
$$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

El algoritmo de Rosenbrock asume que la función es unimodal, es un método recursivo que realiza la búsqueda en una serie repetitiva de etapas. Cada etapa finaliza cuando una nueva serie de  $i$  direcciones es definida, a lo largo de las cuales la búsqueda durante la siguiente etapa es realizada. La definición de las nuevas direcciones está basada en los movimientos efectuados a lo largo de las  $i$  direcciones de la presente etapa.

Durante cada etapa, el movimiento es realizado a lo largo de cada dirección en una serie de incrementos. Un incremento de una longitud  $S_i$  es tanteado primeramente, éste es tratado como un éxito si el nuevo valor de la función objetivo (FO) es igual o menor que el valor anterior. Entonces, si se tuvo éxito, el incremento es permitido y  $S_i$  es multiplicado por  $\alpha > 1$ ; en cambio, si se obtuvo una falla, el incremento no es aceptado y  $S_i$  es multiplicado por  $-\beta$  y un nuevo intento es realizado. Los intentos son terminados cuando en cada una de las  $i$  direcciones el último intento exitoso fue seguido por una falla. A continuación, se definen las nuevas direcciones de la etapa siguiente.

El hecho de considerar la igualdad en el valor de la FO como éxito, asegura que un éxito sea siempre factible de obtener en una dirección, ya que después de repetidas fallas, la longitud  $S_i$  llegará a ser tan pequeña, que debido al error de redondeo en los cálculos, puede no causar cambio en la magnitud de la FO <sup>[C21]</sup>.

**Figura 9.1**  
Mecánica operativa de los métodos de búsqueda directa <sup>(11)</sup>



Las ecuaciones con las cuales los ejes de búsqueda son rotados se exponen en [K3], así como el programa de cómputo respectivo denominado ROSENB escrito en Fortran. Este código se transformó a lenguaje Basic y se presenta al final como programa ROSEN, incluyendo el ejemplo 9.3 de maximización. Para resolver problemas con tal programa se accesa en la línea 1160 el número de variables por ajustar u optimizar (NVA) y los valores iniciales de éstas; además en las líneas 2090 y 2100 se escribe la expresión de la función objetivo (FX).

En la línea 1120 se definen los parámetros básicos <sup>[K3]</sup> del algoritmo de Rosenbrock, los cuales corresponden a los números máximos de evaluaciones de la función objetivo (MF), de etapas (ME) y de fallas sucesivas encontradas en todas las direcciones (MC).



NP es una variable que controla el tamaño de incrementos en los ejes después de cada rotación; si NP=1 los incrementos iniciales son usados y si NP=2 los incrementos finales de la etapa previa son empleados. EY es el error aceptable en la función objetivo, diferencia entre el valor actual y el de la etapa previa (línea 1410). AA y BA son los valores adoptados de  $\alpha$  y  $\beta$ . KE es el contador de etapas.

**Ejemplo 9.3.** Minimizar con el algoritmo de Rosenbrock la función  $F$  dependiente de tres variables, con valores iniciales 9, -7 y 11. La función es <sup>[66]</sup>:

$$F = 3(x - 1)^2 + 2(y - 2)^2 + (z - 3)^2$$

La solución obvia de este problema es  $x = 1$ ,  $y = 2$  y  $z = 3$ , con  $F = 0$ . El algoritmo ROSEN define un valor inicial de la FO de 418 y con 18 etapas y 152 evaluaciones de la FO llega a la solución citada y a un valor para ésta de  $2.314E-07$ , utilizando una tolerancia al error de  $1E-09$ . En realidad con una tolerancia de  $1E-05$  ya se alcanza la solución citada, debido al error de redondeo. □

**Ejemplo 9.4.** Maximizar con el algoritmo ROSEN la función  $F$  dependiente de las variables  $x$  y  $y$ , con valores iniciales de 1.0 y 0.50, respectivamente. La función es <sup>[K3]</sup>:

$$F = 3803.84 + 138.08 \cdot x + 232.92 \cdot y - 123.08 \cdot x^2 - 203.64 \cdot y^2 - 182.25 \cdot x \cdot y$$

Para maximizar una función con el algoritmo ROSEN se le cambia el signo, por ello su valor inicial es -3793.265. Los resultados después de 9 etapas y 52 evaluaciones de la FO son:

$$x = 0.2084 \qquad y = 0.4770 \qquad F = -3873.922$$
□

## 9.4 Optimización con múltiples variables restringidas

Un problema de minimización de múltiples variables restringidas o acotadas se formula de la manera siguiente <sup>[C1, B7]</sup>:

$$\text{Minimizar} \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

además se pueden definir  $m$  variables dependientes función de las variables de decisión:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= y_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

ambas variables tienen límites inferiores y superiores de la forma:

$$\begin{aligned} (x_{\text{inf}})_i &\leq x_i \leq (x_{\text{sup}})_i & ; & & i = 1, 2, 3, \dots, n \\ (y_{\text{inf}})_j &\leq y_j \leq (y_{\text{sup}})_j & ; & & j = 1, 2, 3, \dots, m \end{aligned}$$

El algoritmo Complex es un procedimiento de optimización propuesto en [B3], cuyo código en Fortran fue creado en 1971 por Lawrence B. Evans en el Instituto Tecnológico de Massachusetts y presentado en México en [E2], con versiones en Basic expuestas en [C1] y [B7]. El algoritmo Complex es una técnica de exploración local que se guía exclusivamente por lo que encuentra a su paso.

Se inicia escogiendo el doble de puntos que variables por optimizar, los cuales satisfagan todas las restricciones, es decir, que se encuentren dentro de la región factible. Se aísla el punto más alto (mayor valor de la función objetivo, en un problema de minimización), se encuentra el centroide de los puntos restantes y se "refleja" el punto aislado a través de dicho centroide, es decir se proyecta el punto aislado en la dirección de éste y el centroide, una distancia un poco mayor que la existente entre dichos puntos. El punto reflejado sustituye ahora al punto aislado y se repite el proceso; de esta manera el conjunto de puntos o Complex se va desplazando hacia abajo. Si un punto reflejado viola una restricción explícita, se regresa a la frontera, si viola una restricción implícita, se regresa medio camino <sup>[E2]</sup>.

El programa en Basic del algoritmo Complex, se presenta al final del capítulo y se designa OPTIM <sup>[E2]</sup>, tiene como variables principales a NX y NY que definen el número de variables de decisión y dependientes. MI es el número máximo de evaluaciones de la función objetivo y NQ el número de tales evaluaciones entre impresión de resultados parciales. Estos parámetros se accesan en la línea 2030. Una ventaja fundamental de código OPTIM es permitir un acceso muy fácil de los límites (L = Lower, U = Upper), nombres y valores iniciales de las variables, por medio de las variables XL(I), XU(I), XN\$(I), X(I); YL(J), YU(J), YN\$(J) y Y(J), a partir de la línea 2040.

La función objetivo se designa por F y se define al final del programa en la subrutina FUNCION. En cambio, su nombre y sus criterios para convergencia (línea 1400) se accesan en la subrutina de lectura de datos (línea 2060), en las variables FO\$ y FA, FR para sus desviaciones absoluta y relativa.

**Ejemplo 9.5.** Resolver el ejemplo 9.4 por medio del algoritmo OPTIM. El planteamiento ahora consiste <sup>[K4]</sup> en acotar las variables  $x$  y  $y$ , de 0 a 2 y de 0 a 2.5, con valores iniciales de 1 y 0.5, respectivamente.

Utilizando  $MI = 500$ ,  $FA = 2 \cdot 10^{-8}$  y  $FR = 1 \cdot 10^{-8}$ , el valor inicial de la FO es  $-3793.265$  y después de 152 evaluaciones se obtienen;

$$x = 0.2053 \qquad y = 0.4801 \qquad F = -3873.924$$

□

**Ejemplo 9.6.** Minimizar con el algoritmo OPTIM la función  $F = -x \cdot y \cdot z$ , sujeta a las siguientes restricciones <sup>[B7]</sup>:

$$0 \leq x \leq 20 \qquad 0 \leq y \leq 11 \qquad 0 \leq z \leq 42 \qquad x + 2 \cdot y + 2 \cdot z \leq 72$$

Aplicando el algoritmo OPTIM con valores iniciales de 10 para  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , y de 0.00001 y 0.0001 para FR y FA, respectivamente; después de 144 iteraciones se obtiene un valor FO de  $-3299.804$  con magnitudes que tienden a 20, 11 y 15 para las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

□

## 9.5 Aplicaciones prácticas

### Optimización en sistemas de cultivo

Muchos sistemas de producción pueden ser representados como un problema o modelo de programación lineal (PL), el cual permite estimar los valores de las variables, o actividades en el proceso de producción que optimizan (maximizan o minimizan) el funcionamiento de tal sistema <sup>[P2]</sup>. Existen problemas que se resuelven con PL que son identificados de un cierto tipo, como son el problema de asignación, del transporte y el de las dietas o de mezclas y varios más.

Con respecto a la aplicación de la PL en los sistemas de cultivo, ésta abarca desde la optimización de las actividades agrícolas en parcelas o ranchos <sup>[M1]</sup>, hasta el desarrollo de estrategias para optimizar el flujo de recursos en grandes zonas agrícolas <sup>[L3]</sup>, o de los principales insumos en los distritos de riego <sup>[P1]</sup>. La siguiente aplicación numérica corresponde a un problema clásico de selección de superficies por sembrar.

**Ejemplo 9.7.** Una empresa agrícola que cultiva pastos (P) y caña de azúcar (C) tiene 110 ha de suelo bueno (B), 200 ha de suelo mediano (M) y 400 ha de suelo pobre (P). Para garantizar el abasto de pasto para el ganado se deben sembrar como mínimo 30, 40 y 50 ha de pasto en suelos bueno, mediano y pobre, respectivamente. Los cultivos son de temporal, pero requieren riegos durante su inicio (estiaje) en febrero, marzo y abril, y para estos meses las disponibilidades de agua son: 300, 450 y 400 m-ha. Los beneficios y requerimientos de riego de los cultivos, en cada tipo de suelo son <sup>[M1]</sup>:

Cultivo:	Concepto:	Tipo de suelo:		
		Bueno	Mediano	Pobre
Caña de azúcar	Beneficio (\$/ha)	2000	1600	1300
Pasto	Beneficio (\$/ha)	1700	1300	1100
Caña de azúcar	Requerimiento (m) feb.	0.60	0.70	0.80
Pasto	Requerimiento (m) feb.	0.50	0.50	0.60
Caña de azúcar	Requerimiento (m) mar.	0.90	0.90	1.10
Pasto	Requerimiento (m) mar.	0.80	0.90	1.00
Caña de azúcar	Requerimiento (m) abr.	0.80	0.80	0.70
Pasto	Requerimiento (m) abr.	0.80	0.70	0.60

Determinar el área de siembra de cada cultivo en cada tipo de suelo, de manera que obtenga el máximo beneficio total.

Designando por  $x_{CB}$  el área por sembrar de caña de azúcar en suelo bueno y así sucesivamente, la función objetivo será <sup>[M1]</sup>:

$$\text{Maximizar } z = 2000 x_{CB} + 1600 x_{CM} + 1300 x_{CP} + 1700 x_{PB} + 1300 x_{PM} + 1100 x_{PP}$$

las restricciones de agua serán:

$$\begin{aligned} 0.6 x_{CB} + 0.7 x_{CM} + 0.8 x_{CP} + 0.5 x_{PB} + 0.5 x_{PM} + 0.6 x_{PP} &\leq 300 \\ 0.9 x_{CB} + 0.9 x_{CM} + 1.1 x_{CP} + 0.8 x_{PB} + 0.9 x_{PM} + 1.0 x_{PP} &\leq 450 \\ 0.8 x_{CB} + 0.8 x_{CM} + 0.7 x_{CP} + 0.8 x_{PB} + 0.7 x_{PM} + 0.6 x_{PP} &\leq 400 \end{aligned}$$

las restricciones de suelo y pastos serán respectivamente:

$$\begin{aligned} x_{CB} + x_{PB} &\leq 110 & x_{PB} &\geq 30 \\ x_{CM} + x_{PM} &\leq 200 & x_{PM} &\geq 40 \\ x_{CP} + x_{PP} &\leq 400 & x_{PP} &\geq 50 \end{aligned}$$

y las condiciones de no negatividad serán:

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = C, P \quad j = B, M, P$$

A partir del programa SIMPLEX se obtienen los resultados siguientes: FO = \$ 711,727.3 con  $x_{CB} = 110.0$  ha,  $x_{CM} = 200.0$  ha,  $x_{CP} = 3.64$  ha y  $x_{PP} = 151.82$  ha. Se deduce de tales valores que lo más conveniente es sembrar los mejores suelos con el cultivo más redituable y que los pastos solo se deben cosechar en los suelos pobres.

□

### Otras aplicaciones del algoritmo Simplex

En hidrología superficial el algoritmo simplex se ha utilizado para el diseño de embalses con demanda constante<sup>[C3]</sup>, pero su aplicación conveniente se tiene en los estudios de políticas de operación<sup>[P1,K2]</sup>. La PL se ha empleado para identificar ordenadas del hidrograma unitario, obteniendo ventaja de la condición de no negatividad de las variables y evitando los valores oscilantes a través de restricciones<sup>[D1]</sup>. También se ha aplicado a la obtención de valores óptimos de los parámetros  $(K, x)$  del método de Muskingum<sup>[E1]</sup>.

### Ajuste de modelos probabilísticos de crecientes

#### *Modelos del análisis de frecuencia de crecientes*

Uno de los problemas fundamentales del diseño hidrológico consiste en la estimación de gastos máximos o crecientes, asociados a probabilidades de excedencia, lo cual es conocido como análisis de frecuencia de crecientes (AFC). Con estas estimaciones se dimensionan hidrológica e hidráulicamente alcantarillas y puentes, bordos y diques de protección o de encauzamiento, almacenamientos de detención y todo tipo de obras de drenaje agrícola y urbano, así como embalses de usos múltiples. Cuando se dispone de un registro de gastos máximos anuales en el sitio del proyecto, o cerca de éste, el AFC se lleva a cabo ajustándole una distribución de probabilidades para realizar con base en ésta la *predicción* de crecientes asociadas a los periodos de retorno de diseño.

Una aplicación importante del AFC es la estimación de la creciente de diseño en obras de excedencia de embalses grandes, o en aquellos que por su ubicación son considerados peligrosos; en esos casos la normatividad especifica un periodo de retorno de diseño de 10,000 años. Extrapolaciones tan exageradas conducen, según el modelo probabilístico utilizado y aún su método de ajuste aplicado, a estimaciones que generalmente no coinciden ni en orden de magnitud. Por otra parte, dado que no se conoce *a priori* la distribución de probabilidades que siguen las crecientes observadas, resulta conveniente ajustar varios modelos con sus métodos de cálculo disponibles y aplicar otras ayudas o guías<sup>[C13]</sup> para la selección de la creciente de diseño.

En los tres subincisos siguientes se describe brevemente el ajuste de tres modelos probabilísticos por medio de optimización numérica de múltiples variables no restringidas a través del algoritmo de Rosenbrock, los dos primeros son modelos mixtos y el tercero es la función General de Valores Extremos (GVE). En cambio, en el último subinciso se plantea el ajuste de la distribución Wakeby de cinco parámetros por medio del algoritmo Complex, de múltiples variables restringidas.

#### *Ajuste de parámetros de la distribución Gumbel mixta*

Una de las primeras aplicaciones de la programación no lineal al ajuste de modelos probabilísticos de crecientes<sup>[C2]</sup>, fue realizada para la distribución conocida como Gumbel mixta<sup>[G1,S6]</sup>, la cual es una mezcla de dos distribuciones Gumbel. Una de las funciones Gumbel, la de baja pendiente o inclinación en el papel Gumbel-Powell<sup>[C19]</sup>, representa a los gastos (crecientes) no ciclónicos y la otra, con una pendiente mayor, a los ciclónicos.

Debido a que el modelo definido por la mezcla de distribuciones Gumbel no tiene solución inversa, esto es, que no se dispone de una fórmula para calcular el valor o creciente asociada a una determinada probabilidad, la función objetivo (FO) a minimizar no puede ser el error estándar de ajuste. Entonces se emplea como FO la diferencia absoluta entre la probabilidad de no excedencia muestral y la estimada con el modelo probabilístico propuesto, lógicamente las variables de decisión son los cinco parámetros de ajuste de la distribución Gumbel mixta, empleando como valores iniciales los calculados con el método de momentos<sup>[S6,C11]</sup> para cada distribución Gumbel simple. El enfoque descrito resultó eficiente y en [C2] se presentan datos, contrastes y el listado del programa de cómputo en Basic.

### Ajuste de parámetros de una mezcla de distribuciones Normales

En el AFC la distribución de probabilidades integrada por una mezcla de dos funciones de probabilidad normales ha mostrado tener gran flexibilidad y capacidad para lograr mejores ajustes <sup>[52,53]</sup> que los alcanzados con las distribuciones actualmente utilizadas de 3 parámetros, como son la Log-Pearson Tipo III y la GVE. En el trabajo [C12] se propone ajustar una mezcla de dos distribuciones Normales a través del algoritmo de Rosenbrock de múltiples variables no restringidas, para obtener los valores óptimos de sus 5 parámetros de ajuste, usando como solución inicial la obtenida por medio del método de aproximaciones de A. C. Cohen <sup>[C22]</sup>. Nuevamente, la FO utilizada es la diferencia absoluta entre la probabilidad de no excedencia muestral y la estimada con el modelo probabilístico propuesto. El planteamiento propuesto resultó consistente y eficiente <sup>[C12]</sup>.

### Ajuste de parámetros de la distribución GVE

En una de las aplicaciones numéricas del capítulo 5 se expuso un resumen de la teoría de la distribución General de Valores Extremos (GVE) y el método de sextiles para realizar su ajuste a una muestra de gastos máximos anuales. Esta función incluye tres familias de distribuciones, la Gumbel, la Fréchet y la Weibull. En el inicio de los AFC, una de las distribuciones más utilizadas fue la Gumbel, ahora tal modelo compete con los otros dos, existiendo pruebas <sup>[C11]</sup> que recomiendan o rechazan su uso. Cuando se procesan gastos máximos anuales o crecientes <sup>[C13]</sup> es frecuente seleccionar el modelo Fréchet, en cambio cuando éstas se estudian mediante sus niveles máximos anuales, es el modelo Weibull el que mejor las representa <sup>[C9]</sup>. Actualmente se dispone de los métodos de momentos, sextiles, máxima verosimilitud, momentos L y de optimización para ajustar una distribución GVE a una muestra o registro de eventos máximos anuales <sup>[1, C16]</sup>. Tales procedimientos han sido contrastados <sup>[C16]</sup> y con tal estudio se han destacado las ventajas de su aplicación conjunta y el mejor desempeño del método de optimización.

Este método es en realidad un procedimiento de máxima verosimilitud, en el que la función logarítmica respectiva ( $\ln L$ ) se maximiza por medio del algoritmo de Rosenbrock de múltiples variables restringidas <sup>[K4]</sup>, siendo los parámetros  $u$ ,  $\alpha$  y  $k$  las variables de decisión. Este procedimiento ha sido propuesto y aplicado en [A1], utilizando como valores iniciales para el algoritmo los resultados del método de momentos de probabilidad pesada, que es equivalente al de momentos L.

En esta aplicación numérica y en la referencia [C16] se describe y utiliza una versión más simple del método de optimización, ya que se emplea el mismo algoritmo de Rosenbrock pero con variables *no* restringidas <sup>[K3]</sup>, los parámetros de ajuste de la GVE ( $u, \alpha, k$ ) son las variables de decisión y se emplea como solución inicial la del método de sextiles (ecuaciones 5.23 a 5.27). Se minimizan dos funciones objetivo, el error estándar medio (EEM) y el error absoluto medio (EAM), ambas medidas de bondad de ajuste fueron citadas y utilizadas en el capítulo 5 y están definidas como <sup>[K1, C13]</sup>:

$$\text{EEM} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i)^2}{(n - np)}} \quad (5.28)$$

$$\text{EAM} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \hat{x}_i|}{(n - np)} \quad (5.29)$$

en donde,  $n$  el número de datos del registro y  $np$  el número de parámetros de ajuste, para la distribución GVE, tres (ubicación, escala y forma);  $x_i$  son los datos observados

ordenados en forma creciente, para estimarles su probabilidad empírica de no excedencia por medio de la fórmula de Weibull <sup>[82]</sup>:

$$P(X \leq x) = m / (n + 1) \quad (9.3)$$

en la cual,  $m$  es el número de orden; finalmente,  $x_i$  son los valores estimados con la distribución GVE que se ajusta (ecuación 5.21), para la misma probabilidad asignada a los datos.

**Ejemplo 9.8.** Ajustar la distribución GVE por medio del método de optimización a los 67 datos de la estación hidrométrica El Cuchillo, expuestos en la Tabla 5.3. El programa de cómputo denominado GVEROSI, cuyo listado se presenta al final del capítulo, aplica el algoritmo de Rosenbrock de múltiples variables *no* restringidas, utilizando como FO el error estándar de ajuste (EEM, ecuación 5.28), las variables de decisión son los parámetros de ajuste ( $u, \alpha, k$ ) y sus valores iniciales son los obtenidos por medio del método de sextiles. Los resultados con el método de optimización y los otros cuatro contrastados en [C16] son:

Método de ajuste:	Parámetros de ajuste:			EEM (m <sup>3</sup> /s)	EAM (m <sup>3</sup> /s)
	$u$	$\alpha$	$k$		
Momentos	451.218	893.734	-0.17018	523.7	353.7
Sextiles	461.099	466.704	-0.47612	428.2	185.3
Momentos L	464.579	467.396	-0.48022	415.4	180.7
Máx. Verosimilitud	425.699	403.393	-0.67640	286.2	121.0
Optimización (1)	501.829	501.411	-0.55541	206.3	—
Optimización (2)	444.518	481.771	-0.59118	—	102.4

Por otra parte, las estimaciones o predicciones <sup>[C16]</sup> asociadas a diversos periodos de retorno se tienen en la tabulación siguiente.

En este caso y con respecto a las dos medidas de bondad de ajuste, el método de optimización es el mejor. La optimización 1 se refiere al error estándar medio (EEM) y la 2 al error absoluto medio (EAM). Se observa que únicamente para bajos periodos de retorno, los diversos métodos de ajuste conducen a predicciones del mismo orden de magnitud, pero a partir de 100 años éstas difieren bastante.

Método de Ajuste:	Periodos de retorno en años:				
	10	50	100	1,000	10,000
Momentos	2902	5401	6689	12213	20375
Sextiles	2343	5764	8241	25759	78129
Momentos L	2359	5830	8356	26333	80591
Máx. Verosimilitud	2562	8180	13221	63594	302482
Optimización (1)	2749	7484	11219	41450	149948
Optimización (2)	2712	7813	11995	47996	188297

□

#### Ajuste de parámetros de la distribución Wakeby

Actualmente se dispone de muchas distribuciones de probabilidad y variados métodos de ajuste para cada una. Sin embargo, se ha demostrado que algunas distribuciones

tradicionales de dos y hasta de tres parámetros, modelan inadecuadamente los gastos máximos de ciertos registros, por ello al final de la década de los años setenta se propuso la distribución Wakeby <sup>[H1]</sup> de cinco parámetros. La distribución Wakeby se define fácilmente en su forma inversa <sup>[H1]</sup>:

$$x = -a(1-F)^b + c(1-F)^{-d} + e \quad (9.4)$$

en donde  $x$  es el gasto máximo asociado a un periodo de retorno  $[Tr = 1/(1-F)]$ ,  $F$  es la probabilidad de no excedencia,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son parámetros de ajuste siempre positivos, y  $e$  algunas veces es negativo;  $d$  y  $e$  son los parámetros de forma y de ubicación de la cola derecha de la distribución Wakeby. Para valores de  $a$  y  $b$  que son típicos de los registros de crecientes, el término  $-a(1-F)^b$  generalmente no tiene efecto sobre  $x$  si  $F$  es mayor de 0.25; por ello se acepta que la distribución Wakeby modela separadamente las crecientes pequeñas y las grandes.

Los procedimientos convencionales de ajuste de la distribución Wakeby han sido expuestos en [M2,M5]. En [C8] se propuso su ajuste por medio de optimización numérica restringida, utilizando el algoritmo Complex; durante muy diversas aplicaciones se verificó la consistencia de tal procedimiento y recientemente en [C17] se comprobó su mejor desempeño.

#### Identificación de ordenadas del hidrograma unitario

En la aplicación práctica del capítulo 4 se expuso brevemente la teoría del hidrograma unitario (HU), describiendo su método de identificación de ordenadas a través de mínimos cuadrados, lo cual constituye la mejor solución matemática; además se expuso la técnica de mínimos cuadrados suavizados, primer procedimiento que intenta mejorar la forma del HU, cuando éste presenta ordenadas oscilantes y hasta negativas.

Tales anomalías en el HU identificado ocurren debido a que las mediciones de la lluvia y del gasto de la creciente correspondiente, así como la obtención de la lluvia en exceso y del gasto directo, introducen errores en los datos. Además la transformación de la lluvia en exceso en escurrimiento es un proceso de suavizado y entonces la inversión de este proceso, necesaria en la identificación del hidrograma unitario, es por lo tanto, una operación inestable <sup>[B4]</sup>. Lo anterior significa que pequeños errores en los datos pueden producir errores mucho mayores en las ordenadas identificadas del HU.

Además, aunque las características físicas de las cuencas son relativamente constantes, los cambios generados por las actividades humanas y otros de origen natural, como la influencia de la vegetación a través del año, y el hecho de que las tormentas generalmente tienen diferentes duraciones, trayectorias, distribución espacial y modelo intensidad-tiempo, causan cambios en la forma y magnitud de la respuesta de las cuencas. Debido a esto, es conveniente identificar varios HU y promediarlos para obtener el representativo de la cuenca <sup>[L2]</sup>.

Para evitar las ordenadas oscilantes y hasta negativas de los HU identificados, se han desarrollado diversos procedimientos <sup>[D1 M3 M4]</sup>, uno de los más recientes <sup>[R2 R3]</sup> consiste en utilizar un algoritmo de programación no lineal de múltiples variables restringidas, en el cual la función objetivo corresponde al error medio cuadrático (EMC), definido como:

$$EMC = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{Nq} (Q_i - q_i)^2}{Nq}} \quad (9.5)$$

en donde  $Nq$  es el número de ordenadas o gastos ( $Q$ ) al final del intervalo de discretización del hidrograma de escurrimiento directo observado y  $q$  es el gasto estimado por convolución mediante la ecuación 4.14:

$$q(s) = \sum_{k=1}^M r(s-k+1) \cdot u(k) \quad ; \quad s = 1, 2, 3, \dots, Nq \quad (4.14)$$

en la cual,  $M$  es la memoria del sistema definida por  $M = Nq - Nr + 1$ , es decir, el número de ordenadas del HU y  $Nr$  el número de lluvias en exceso. Las ordenadas  $u(k)$  son las variables de decisión o independientes que minimizan la función objetivo EMC, las cuales están sujetas a las restricciones siguientes:

$$\text{no negatividad:} \quad u(k) \geq 0 \quad ; \quad k = 1, 2, 3, \dots, M \quad (9.6)$$

$$\text{ordenamiento al ascenso:} \quad u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_p \quad (9.7)$$

$$\text{ordenamiento al descenso:} \quad u_p \geq u_{p+1} \geq \dots \geq u_M \quad (9.8)$$

siendo,  $u_p$  la ordenada máxima o pico del hidrograma unitario. De acuerdo al planteamiento propuesto se requiere optimizar  $M$  variables independientes y  $M-1$  variables dependientes o restricciones de ordenamiento. La condición de no negatividad se toma en cuenta asignando como límite inferior cero, a ambas variables.

Este método se designa como MINIMSE (MINIMIZE the Mean Square Error) y originalmente <sup>[R2,R3]</sup> empleó para su aplicación el algoritmo de Rosenbrock de múltiples variables restringidas <sup>[K4]</sup>. Recientemente <sup>[C7]</sup>, buscando un manejo más simple de los datos por acceder, se propuso utilizar el algoritmo Complex, ya que además tal procedimiento ha demostrado ser más eficiente que el de Rosenbrock en problemas de múltiples variables restringidas <sup>[B3]</sup>.

La subrutina del algoritmo Complex fue adaptada a las necesidades del método MINIMSE denominándose OPTHU (OPTIMIZACIÓN de las ordenadas del Hidrograma Unitario); tales modificaciones consistieron fundamentalmente en permitir el acceso de un número cambiante ( $M$ ) de variables independientes u ordenadas del hidrograma unitario y  $M-1$  variables dependientes o restricciones de ordenamiento. Para iniciar el funcionamiento del algoritmo Complex y por simplicidad, se genera un HU triangular, con solo introducir el número de intervalos a su pico (NP) y el valor de éste.

En el programa OPTHU se pueden emplear los gastos directos en cm/h ó en m<sup>3</sup>/s, en el primer caso la restricción de no negatividad de las ordenadas, se aborda asignando como fronteras a las variables independientes y dependientes, cero y uno; en cambio, para el segundo caso, se adoptan cero y el valor más grande de los gastos directos dividido entre la menor precipitación en exceso, ya que el hidrograma unitario tiene unidades de m<sup>3</sup>/s/cm.

Lógicamente, las variables dependientes  $Y$  función de las independientes  $X$  u ordenadas del HU que se identifica, corresponden a:

$$Y_i = X_{i+1} - X_i \quad \text{si} \quad i < NP-1 \quad (9.9)$$

$$Y_i = X_i - X_{i+1} \quad \text{si} \quad i \geq NP \quad (9.10)$$

El programa OPTHU muestra la estructura general siguiente: primeramente se accesan los datos de precipitación en exceso y gastos directos, se genera el HU inicial y se aplica el algoritmo de optimización, cuando se alcanza el límite asignado a las iteraciones o el método converge, se imprimen los datos y resultados. El listado del programa OPTHU se tiene al final del capítulo.

**Ejemplo 9.9.** Para una creciente registrada en la estación hidrométrica La Estrella en el Río Usila en Oaxaca, cuya área de cuenca es de 774 km<sup>2</sup>, sus datos discretizados a



intervalos de 6 horas y los resultados de este análisis se han concentrado en la Tabla 9.1 siguiente, la cual incluye el hidrograma unitario identificado por mínimos cuadrados (MC), el cual presenta oscilaciones y hasta un valor negativo <sup>(c7)</sup>.

El EMC del método de mínimos cuadrados (MC) resultó de 23.5 m<sup>3</sup>/s, en cambio a través del algoritmo OPTHU con MI = 1000, FR = 0.0001 y FA = 0.002, obtiene después de 673 iteraciones un EMC de 39 m<sup>3</sup>/s; este valor descendió desde 780 m<sup>3</sup>/s para la solución inicial triangular. Respecto al área bajo el HU (ver teoría en el capítulo 4), ésta debe ser del orden de 714/0.36 = 2150, lo cual se comprueba con la operación 360.358(6) = 2162.2

**Tabla 9.1**  
Identificación de hidrogramas unitarios en la  
estación hidrométrica La Estrella, Oax.

Incremento de tiempo = 6 horas.  
 $M = Nq - Nr + 1 = 9 - 3 + 1 = 7$

Incremento de tiempo	Q (m <sup>3</sup> /s)	P <sub>exc</sub> (cm)	Ordenada del HU (m <sup>3</sup> /s/cm)			q (m <sup>3</sup> /s)
			Inicial	MC	Óptimo	
1	20.0	2.34	150.0	13.980	30.453	71.3
2	600.0	3.19	300.0	234.733	203.376	573.0
3	805.0	1.68	250.0	11.385	35.842	783.8
4	460.0		200.0	21.110	35.666	539.5
5	315.0		150.0	84.994	35.486	257.0
6	200.0		100.0	-33.442	12.401	202.1
7	115.0		50.0	28.364	7.135	115.9
8	50.0					43.6
9	0.4					12.0
Σ				361.124	360.359	

□

La obtención de HU a través de optimización, en este caso empleando el algoritmo Complex, constituye una opción eficiente y muy fácil de aplicar para obtener HU bien formados, cuando la solución de mínimos cuadrados conduce a HU con ordenadas oscilantes y/o con valor(es) negativo(s).

#### Ajuste de parámetros del método de Muskingum

La obtención o estimación del hidrograma de la creciente en un río a partir de otro conocido aguas arriba, es un problema clásico del diseño hidrológico, o bien del pronóstico de crecientes en la parte baja de las cuencas, durante el análisis de esquemas de protección contra crecientes y en la revisión del dimensionamiento de puentes y otras obras que se construyen dentro del río. En general, en cualquier situación en que se planea modificar el cauce de un río, será necesario conocer el efecto que esto tendrá en la forma del hidrograma <sup>(R1)</sup>.

Por otra parte, conforme aumenta el tamaño de una cuenca, crece su complejidad y por ello es necesario dividirla en subcuencas, para obtener hidrogramas de crecientes en puntos de interés o procedentes de áreas con un comportamiento hidrológico similar, para mejor precisión de los resultados <sup>(c6)</sup>. Esta discretización de las cuencas lleva consigo la necesidad de hacer tránsitos de crecientes en cauces.

En general, los métodos de tránsito de crecientes en cauces pueden ser divididos en dos grandes grupos: los hidráulicos y los hidrológicos. Los primeros se basan en

las ecuaciones del flujo inestable en canales abiertos. En cambio, los métodos hidrológicos están basados en la ecuación de continuidad y en una relación conceptual entre el gasto de salida del tramo y el volumen almacenado temporalmente durante el paso de la creciente. La técnica hidrológica más difundida es la conocida como *Método de Muskingum*.

Este método fue ideado por G. T. McCarthy y colaboradores durante los estudios de control de crecientes en el Distrito de Conservación de Muskingum del U. S. Army Corps of Engineers entre 1934 y 1935. Se considera un tramo de cauce sin tributarios, donde además las pérdidas por filtración y evaporación, así como las aportaciones por lluvia, son despreciables. En las ecuaciones básicas del método los gastos de entrada al tramo de río que se estudia son  $I$  y los de salida son  $O$ , entonces se tiene [L1, C10]:

$$O_j = C1 \cdot I_2 + C2 \cdot I_1 + C3 \cdot O_1 \quad (9.11)$$

en la cual:

$$C1 = (\Delta t / 2 - K \cdot x) / \gamma \quad (9.12)$$

$$C2 = (\Delta t / 2 + K \cdot x) / \gamma \quad (9.13)$$

$$C3 = [K(1 - x) - \Delta t / 2] / \gamma \quad (9.14)$$

donde  $\gamma = K(1 - x) + \Delta t / 2$ . Además, como comprobación se tiene que:

$$C1 + C2 + C3 = 1.000$$

La generalización de la ecuación 9.11 conduce a:

$$O_{j+1} = C1 \cdot I_{j+1} + C2 \cdot I_j + C3 \cdot O_j \quad (9.15)$$

para  $j = \Delta t$ ,  $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Para iniciar la aplicación de la ecuación recursiva anterior, es común aceptar que  $O_0 = I_0$  y entonces:

$$O_1 = C1 \cdot I_1 + I_0 (C2 + C3) \quad (9.16)$$

Cuando el almacenamiento en el tramo es sólo función del gasto de salida, como en los embalses,  $x$  es igual a cero y podrá llegar a 0.50 cuando los gastos de entrada y salida tienen el mismo peso, lo cual equivale a que no se tiene atenuación en el tramo, solo se traslada la onda de la creciente. Para la mayoría de las corrientes naturales  $x$  varía de 0.30 a 0.50, pero la presencia de grandes planicies de inundación reduce el valor hasta 0.20 o menos [C20, L11]. El factor  $K$ , normalmente se conoce como la "Constante de Almacenamiento" y representa el cociente del almacenamiento a la descarga ponderada en el tramo; tiene por lo tanto unidades de tiempo, es en realidad una medida del tiempo de viaje de la onda de la creciente en el tramo de río.

La estimación tradicional de estos parámetros  $K$  y  $x$  es un procedimiento subjetivo efectuado gráficamente a partir de hidrogramas observados a la entrada y salida del tramo de río que se caracteriza, tal procedimiento puede ser consultado en cualquier texto básico de hidrología. Desde finales de la década de los años setenta se han venido proponiendo criterios de estimación numérica [A2, C10, E1] de los dos parámetros del método de Muskingum, con el objetivo fundamental de evitar la subjetividad que presenta su estimación gráfica o tradicional.

En [C10] se han recopilado 17 ejemplos del tránsito de crecientes con el método de Muskingum, tomados de textos de hidrología y de artículos especializados. En tales ejemplos se determinaron los valores de  $K$  y  $x$  con el método tradicional y otros tres

procedimientos numéricos objetivos, en todos ellos la medida de la bondad o exactitud de cada criterio se evaluó con el llamado Error Medio Cuadrático (EMC) definido como:

$$EMC = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (O_i - \hat{O}_i)^2}{n}} \quad (9.17)$$

en donde  $n$  es el número de gastos que definen los hidrogramas de entradas y salidas observados;  $O_i$  es el gasto de salidas observado o dato y  $\hat{O}_i$  es el gasto de salida del tramo estimado por medio de la ecuación 9.15.

El procedimiento propuesto en [C10] consistió en aplicar un algoritmo OPTIM, a la estimación de los parámetros  $K$  y  $x$ , lo cual permite acotar el segundo para evitar que tome valores negativos, como se ha encontrado en algunos de los procedimientos de soluciones óptimas. Entonces, con base en el algoritmo Complex se formuló el programa OPTMUS2 (OPTimización del MUSkingum de 2 parámetros), utilizando como FO a minimizar el EMC o ecuación 9.17 y teniendo como ecuaciones auxiliares de la 9.11 a la 9.16, con variables por optimizar  $K$  y  $x$ , la primera sin restricciones o límites, en cambio  $x$  se consideró variable restringida con cero a +0.50 como límites.

Al tomar en cuenta que el algoritmo Complex es bastante eficiente para acercarse a la solución en las primeras iteraciones, sobre todo en problemas de bajo número de variables por optimizar, en todos los casos los valores iniciales de las variables ( $K, x$ ) se adoptaron iguales a cero. Los 17 ejemplos realizados en [C10] demuestran la eficiencia del método de optimización propuesto, cuyo listado se presenta al final del capítulo.

**Ejemplo 9.10.** Resolver el tránsito expuesto en [L1] con el método matricial de mínimos cuadrados <sup>[C14]</sup> y el de optimización restringida. Los datos de tal ejemplo se tienen en la tabulación siguiente <sup>[L1 C10]</sup>:

Día	I (m <sup>3</sup> /s)	O (m <sup>3</sup> /s)	Día	I (m <sup>3</sup> /s)	O (m <sup>3</sup> /s)	Día	I (m <sup>3</sup> /s)	O (m <sup>3</sup> /s)	Día	I (m <sup>3</sup> /s)	O (m <sup>3</sup> /s)
1	2.6	2.4	8	19.2	15.3	15	16.3	18.0	22	5.2	8.5
2	3.9	2.9	9	19.6	16.7	16	15.1	17.3	23	3.9	6.6
3	5.9	4.0	10	19.6	17.8	17	13.7	16.4	24	2.9	5.0
4	9.1	5.8	11	19.4	18.3	18	12.1	15.3	25	2.3	3.7
5	12.5	8.2	12	18.6	18.8	19	10.4	13.8	26	2.1	2.8
6	15.5	10.8	13	18.1	18.7	20	8.4	12.2	27	1.8	2.4
7	17.8	13.3	14	17.2	18.4	21	6.7	10.3	28	1.6	2.1

Con base en el programa PAMUS2MC (PARámetros de MUSkingum 2 por Mínimos Cuadrados) cuyo listado se tiene al final del capítulo, se obtuvieron los resultados siguientes:  $K = 1.884$  días,  $x = -0.214$  y  $EMC = 0.367$  m<sup>3</sup>/s. Al aplicar el programa OPTMUS2 con 0.0001 y 0.002 para FR y FA, sus resultados fueron <sup>[C10]</sup>:  $K = 1.893$  días,  $x = 0.000$  y  $EMC = 0.221$  m<sup>3</sup>/s. □

#### Ajuste de parámetros del método de Muskingum con flujo lateral

Conocido como método de Muskingum de tres parámetros ( $K, x, \alpha$ ), fue propuesto en 1985 <sup>[O1]</sup> y permite tomar en cuenta los flujos laterales de entrada o salida al tramo en que transita la creciente, a través del parámetro alfa que corrige al hidrograma de entradas. Debido a que en algunos casos el cálculo matricial de mínimos cuadrados <sup>[C14]</sup> de los parámetros  $K, x$  y  $\alpha$ , conduce a valores negativos de  $x$ , se propuso una solución mediante

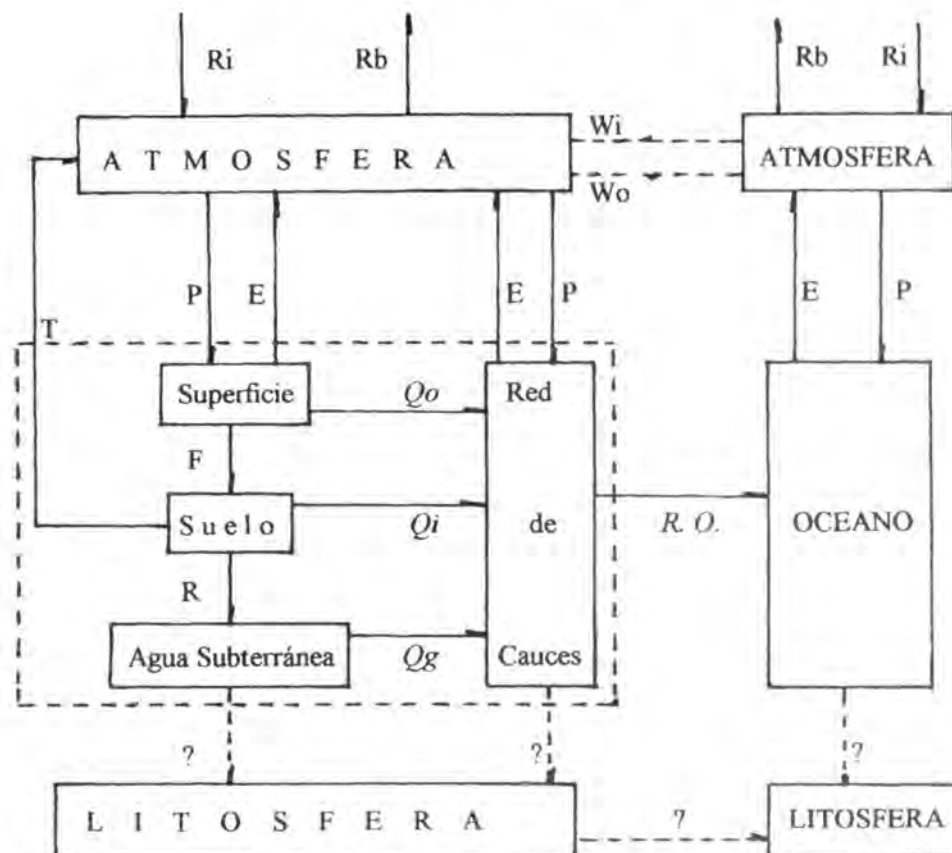
un algoritmo de optimización restringida en este parámetro, el cual resultó ser excelente, mejorando en la mayoría de los casos estudiados, la solución de mínimos cuadrados. El algoritmo utilizado fue el Complex. La teoría detallada del método de Muskingum con flujo lateral, los datos utilizados y los resultados de los contrastes realizados, se pueden consultar en la referencia [C14].

**Calibración de modelos determinísticos**

Los procesos que comprende el ciclo hidrológico se pueden representar mediante un diagrama de bloques conectados por flechas, los primeros representan las diferentes formas de almacenamiento y las segundas los procesos individuales que los interrelacionan <sup>[D2]</sup>. En la Figura 9.2 siguiente se ilustra lo anterior. En tal figura la línea punteada enmarca el funcionamiento hidrológico simplificado de una cuenca, ya que los almacenamientos y procesos son considerados globales, es decir, sin tomar en cuenta su variación espacial. Sin embargo, tal concepción es todavía muy compleja para fines de modelación hidrológica, por ejemplo debido a que en la información real o registro de escurrimientos no es posible distinguir al flujo sobre el terreno ( $Q_o$ ), del interflujo ( $Q_i$ ) y de la descarga del agua subterránea ( $Q_g$ ).

Lo más que se puede alcanzar, es distinguir entre una respuesta relativamente rápida de la cuenca a la precipitación y una respuesta lenta, la primera denominada escurrimiento o gasto directo asociada al  $Q_o$  más el  $Q_i$  y la segunda llamada gasto base conformada por el  $Q_g$ . Por lo anterior, casi todos los modelos hidrológicos determinísticos tienen tal planteamiento <sup>[S4,W1]</sup>. El modelo de Crawford <sup>[C23]</sup> desarrollado a principios de los años ochenta y aplicado en México desde principios de los noventa <sup>[C4,C5,C15]</sup> es un ejemplo típico.

**Figura 9.2**  
**Diagrama de bloques del Ciclo Hidrológico <sup>[D2]</sup>**



Por otra parte, la modelación determinística en hidrología superficial fue el área en que primeramente se tuvieron aplicaciones de la optimización numérica y presenta a futuro un vasto potencial para continuar con aplicaciones. Lo anterior debido por ejemplo, al aumento del número de años de registros hidrométricos existentes, lo cual permite escoger otros periodos para calibrado y para estudios de sensibilidad de los parámetros del modelo. La disponibilidad de nuevos registros debido a la instalación de más estaciones pluviométricas y de aforos, permitirá contar con un mayor número de valores de los parámetros de un modelo a nivel regional, y entonces será factible identificar la variación espacial de éstos, o bien establecer relaciones con las características físicas (geomorfológicas) de las cuencas para su estimación, con el propósito de aplicar el modelo en cuencas sin hidrometría, es decir, prescindiendo de su calibración.

Como ya se indicó, la mayoría de los modelos hidrológicos del proceso lluvia-escurrimiento que permiten estimar volúmenes escurridos mensuales presentan una estructura conceptual similar y también comúnmente son calibrados en la actualidad via optimización numérica, utilizando como función objetivo <sup>[11, C21, S5]</sup> el llamado error estándar de la estimación (EEE), definido como:

$$EEE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (V_{oi} - V_{ei})^2}{n}} \quad (9.18)$$

en donde  $n$  es el número de meses empleado en la calibración,  $V_{oi}$  el volumen escurrido mensual observado y  $V_{ei}$  el correspondiente volumen mensual escurrido estimado con el modelo, ambos en  $\text{Mm}^3$ .

Cuando el EEE se utiliza como función objetivo, su minimización se puede llevar a cabo mediante optimización tanto no restringida como acotada, siendo en ambos casos las variables de decisión los parámetros de ajuste del modelo, los cuales pueden o no tener límites. Por ejemplo, en el caso del modelo de Crawford, inicialmente <sup>[C4]</sup> fue calibrado por medio del algoritmo ROSEN y cuando uno de sus parámetros, en su valor óptimo, excedió la unidad, lo cual físicamente estaba mal, se procedió a su calibrado con optimización restringida <sup>[C6]</sup>.

## Problemas propuestos

**Problema 9.1:** Minimizar la función <sup>[B5]</sup>  $z = -2x_1 - 4x_2$  sujeta a las restricciones siguientes:  $3x_1 + 4x_2 \leq 1700$ ;  $2x_1 + 5x_2 \leq 1600$  y  $x_1, x_2 \geq 0$  (Respuestas: aplicando el algoritmo simplex se obtiene:  $x_1 = 300$  y  $x_2 = 200$  con  $z = -1400$ ).

**Problema 9.2:** En un rancho de 150 ha se van a sembrar trigo y sorgo, se dispone de un crédito de \$490,000.00 y un pozo profundo con un gasto de 97.1 l/s. En el mes de marzo se presenta la demanda máxima de riego, de 1600  $\text{m}^3/\text{ha}$  para el trigo y 2000  $\text{m}^3/\text{ha}$  para el sorgo. Para el trigo, su costo de producción es de 3000 \$/ha, su rendimiento promedio es de 5 ton, con un precio de garantía de 1300 \$/ton. Esta información para el sorgo es: 3500 \$/ha, 6 ton y 1200 \$/ha, respectivamente <sup>[P2]</sup>. ¿Qué superficie debe sembrarse con cada cultivo para maximizar los beneficios? (Respuestas <sup>[P3]</sup>: utilizando miles de pesos, su formulación y solución es la del ejemplo 9.1).

**Problema 9.3:** Un fabricante desea producir 100 kilogramos de una aleación que contenga 83% de plomo, 14% de hierro y 3% de antimonio. Se dispone de cinco aleaciones con las siguientes composiciones y precios <sup>[P3]</sup>.

Componente y costo:	Aleación:				
	1	2	3	4	5
Plomo (%)	90	80	95	70	30
Hierro (%)	5	5	2	30	70
Antimonio (%)	5	15	3	0	0
Costo (\$/kg)	6.13	7.12	5.85	4.57	3.96

¿Cómo se deben de combinar estas aleaciones para obtener el producto deseado a un costo mínimo? (Respuestas <sup>[P3]</sup>: Aleación 2 = 10.435 kg, aleación 3 = 47.826 kg y aleación 4 = 41.739 kg. Costo total = \$ 544.83).

**Problema 9.4:** Minimizar la función <sup>[B6]</sup>:  $\Phi(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$ , con el algoritmo ROSEN. (Respuestas: con EY =  $1 \cdot 10^{-7}$  y valores iniciales  $x_1 = x_2 = 1.0$ , después de 7 etapas y 35 evaluaciones de la función objetivo se obtiene:  $x_1 = 3.009$  y  $x_2 = 1.980$  con  $\Phi = 0.0019$ ).

**Problema 9.5:** Maximizar la función <sup>[C18]</sup>:  $F = 2xy + 2x - x^2 - 2y^2$ , con el algoritmo ROSEN empleando valores iniciales de  $x = -1$ ,  $y = 1$ . (Respuestas: con EY =  $1 \cdot 10^{-7}$  después de 9 etapas y 53 evaluaciones se obtiene  $x = 2$ ,  $y = 1$ , FO = 2).

**Problema 9.6:** Minimizar con el algoritmo OPTIM la función <sup>[B7]</sup>:  $F = x^2 + 6xy - 4x - 2y$ , sujeta  $x^2 + 2y \leq 1$ ,  $2x - 2y \leq 1$  y  $x, y \geq 0$ . (Respuestas: con FR =  $1 \cdot 10^{-8}$ , FA =  $2 \cdot 10^{-8}$  y valores iniciales  $x = y = 0.10$ , después de 57 evaluaciones de la función objetivo se obtiene:  $x = 0.643$ ,  $y = 0.143$  y  $F = -1.89286$ ).

**Problema 9.7:** Minimizar con el algoritmo OPTIM la función <sup>[B7]</sup>:  $F = x^2 + y^2 + z^2$ , sujeta a las siguientes restricciones:  $x + y + z \geq 3$  y  $x \cdot y \cdot z \geq 3$ . Utilizar como valores iniciales 1, 2 y 3; con 0.0001 y 0.001 para FR y FA. (Respuestas: después de 60 evaluaciones de la función objetivo se obtiene:  $x = 1.436$ ,  $y = 1.446$ ,  $z = 1.444$  y  $F = 6.2404$ ).

**Problema 9.8:** Modificar el programa GVEROS1 para utilizar como función objetivo el error absoluto medio (ecuación 5.29); este programa se denominará GVEROS2. Aplicar este programa para verificar los resultados citados en el ejemplo 9.8.

**Problema 9.9:** Resolver el ejemplo 4.10 (Tabla 4.2) con base en el programa OPTHU, partiendo de un HU triangular con NP = 3 y ordenada pico = 0.060 (Respuestas <sup>[C7]</sup>: las 12 ordenadas del HU identificado son: 0.0036, 0.0329, 0.0637, 0.0542, 0.0257, 0.0238, 0.0238, 0.0062, 0.0062, 0.0062, 0.0017 y 0.0005, con un EMC =  $0.0067 \text{ m}^3/\text{s}$ ).

**Problema 9.10:** Aplicar los programas PAMUSMC y OPTMUS2 a los siguientes datos del tránsito de una creciente en el Río Conchos, afluente del Río Bravo, en septiembre de 1968 <sup>[S1]</sup>, entre las estaciones hidrométricas Colina y Conchos. La longitud del tramo es del orden de 35 km. (Respuestas <sup>[C10]</sup>:  $K = 0.707$  días,  $x = -1.143$  y EMC =  $31.4 \text{ m}^3/\text{s}$ ;  $K = 0.710$  días,  $x = 0.000$  y EMC =  $32.8 \text{ m}^3/\text{s}$ ).

Día	I (m <sup>3</sup> /s)	O (m <sup>3</sup> /s)	Día	I (m <sup>3</sup> /s)	O (m <sup>3</sup> /s)	Día	I (m <sup>3</sup> /s)	O (m <sup>3</sup> /s)	Día	I (m <sup>3</sup> /s)	O (m <sup>3</sup> /s)
1	50	50	7	520	430	13	175	220	19	120	120
2	55	105	8	590	550	14	140	170	20	90	100
3	190	180	9	470	490	15	125	140	21	80	70
4	230	260	10	350	420	16	110	120	22	60	40
5	235	290	11	270	340	17	120	120	23	65	30
6	230	290	12	190	270	18	125	125	24	60	25

## Referencias

- A1.** J. L. Acosta R. Estimación de parámetros de la distribución General de Valores Extremos de probabilidad a través de máxima verosimilitud. *9° Congreso Nacional de Hidráulica*, Tomo III, Subtema IV, pp. 57-67. Querétaro, Qro. 1986.
- A2.** A. A. Aldama Rodríguez. Least-squares parameter estimation for Muskingum flood routing. *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 116, pp. 580-586. 1990.
- B1.** M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis y H. D. Sherali, *Programación Lineal y Flujo en Redes*, Capítulo 1: Introducción, pp. 1-42. Noriega Editores. México, D. F. 1999. Segunda edición.
- B2.** M. A. Benson. Plotting positions and economics of engineering planning. *Journal of Hydraulics Division*, Vol. 88, No. 6, pp. 57-71. 1962.
- B3.** M. J. Box. A new method of constrained optimization and a comparison with other methods. *Computer Journal*, Vol. 8, pp. 42-52. 1965.
- B4.** M. Bruen & J. C. I. Dooge. An efficient and robust method for estimating unit hydrograph ordinates. *Journal of Hydrology*, Vol. 70, pp.1-24. 1984.
- B5.** B. D. Bunday. *Basic Linear Programming*. Chapter 2: The Simplex method, pp. 19-52. Edward Arnold (Publishers) Ltd. London, England. 1984.
- B6.** B. D. Bunday. *Basic Optimisation Methods*. Part I: Unconstrained Optimisation. Chapter 3: Direct search methods-Functions of  $n$  variables, pp. 31-46. Edward Arnold (Publishers) Ltd. London, England. 1984.
- B7.** B. D. Bunday. *Basic Optimisation Methods*. Part II: Constrained Optimisation. Chapter 6: Search Methods. Theme 6.2: The Complex method, pp. 98-106. Edward Arnold (Publishers) Ltd. London, England. 1984.
- C1.** M. Callejas Castro. *Adaptación del programa OPTIM a una microcomputadora Radio Shack TRS-80 modelo II en lenguaje Basic*. Publicación D-41 de la DEPI de la UNAM. México, D. F. 1983. (21 páginas).
- C2.** D. F. Campos Aranda. Estimación de los parámetros óptimos de la distribución Gumbel mixta por medio del algoritmo de Rosenbrock. *Ingeniería Hidráulica en México*, Vol. IV, No. 1, pp. 9-18. Enero-Abril de 1989.
- C3.** D. F. Campos Aranda. Aplicación del algoritmo Simplex al diseño hidrológico de un embalse. *Ingeniería Hidráulica en México*, Vol. IV, No. 3, pp. 34-42. Septiembre-Diciembre de 1989.
- C4.** D. F. Campos Aranda. Adaptaciones al modelo de Crawford de estimación del volumen escurrido mensual (Primera solución). *Seminario Internacional sobre Uso Eficiente del Agua*, Tema C-3, pp. 86-91. 21 al 25 de Octubre de 1991. CNA-IWRA-IMTA. México, D. F.
- C5.** D. F. Campos Aranda. Adaptaciones al modelo de Crawford de estimación del volumen escurrido mensual (Segunda solución). *Seminario Internacional sobre Uso Eficiente del Agua*, Tema C-3, pp. 93-98. 21 al 25 de Octubre de 1991. CNA-IWRA-IMTA. México, D.F.
- C6.** D. F. Campos Aranda. Algoritmo para pronóstico de crecientes en cuencas rurales discretizadas. *XIX Congreso de la Academia Nacional de Ingeniería, A. C.*, pp. 113-117. México, D. F. 1993.

- C7.** D. F. Campos Aranda. Identificación de hidrogramas unitarios con el algoritmo OPTIM. *Acta Científica Potosina (UASLP)*, Vol. XIII, No. 2, pp. 69-78, Julio-Diciembre de 1995.
- C8.** D. F. Campos Aranda. Ajuste de la distribución de probabilidades Wakeby por medio de optimización. *Simposium Internacional de Computación*, Centro Nacional de Cálculo del I.P.N. Tema II: Algoritmos, ponencia 2. 8 al 10 de Noviembre, México, D. F. 1995.
- C9.** D. F. Campos Aranda. Caracterización hidrológica de crecientes en la cuenca baja del río Pánuco con base en niveles máximos anuales. *Ingeniería Hidráulica en México*, Vol. XI, No. 2, pp. 15-31, Mayo-Agosto de 1996.
- C10.** D. F. Campos Aranda. Estimación numérica de los parámetros del método de Muskingum por medio de optimización. *Agrociencia*, Vol. 32, No. 2, pp. 101-111, Abril-Junio de 1998.
- C11.** D. F. Campos Aranda. Técnicas recientes de prueba y ajuste de la distribución Gumbel. *XVIII Congreso Latinoamericano de Hidráulica (IAHR)*, Vol. 1, pp. 329-337, 13 al 16 de octubre de 1998. Oaxaca, Oax.
- C12.** D. F. Campos Aranda. Análisis de frecuencia de crecientes con una mezcla de dos distribuciones Normales ajustada por medio de optimización. *XV Congreso Nacional de Hidráulica (AMH)*, pp. 819-826, 13 al 16 de octubre de 1998. Oaxaca, Oax.
- C13.** D. F. Campos Aranda. Hacia el enfoque global en el análisis de frecuencia de crecientes. *Ingeniería Hidráulica en México*, Vol. XIV, No. 1, pp. 23-42. Enero-abril de 1999.
- C14.** D. F. Campos Aranda. Tránsito hidrológico de crecientes en ríos con flujo lateral. *Agrociencia*, Vol. 34, No. 3, pp. 271-281, Mayo-junio del 2000.
- C15.** D. F. Campos Aranda. Calibraciones y aplicación del modelo de Crawford modificado en la zona norte de la cuenca del río Lerma en Guanajuato. *Ingeniería Hidráulica en México*, Vol. XV, No.2, pp. 63-73. Mayo-agosto del 2000.
- C16.** D. F. Campos Aranda. Contraste de cinco métodos de ajuste de la distribución GVE en 31 registros históricos de eventos máximos anuales. *Ingeniería Hidráulica en México*, Vol. XVI, número 2, pp. 77-92, Abril-Junio del 2001.
- C17.** D. F. Campos Aranda. Contraste de dos procedimientos de ajuste de la distribución Wakeby en modelación probabilística de crecientes. *Agrociencia*, Vol. 35, Número 4, pp. 429-439, julio-agosto del 2001.
- C18.** S. C. Chapra y R. P. Canale. *Métodos Numéricos para Ingenieros*. Parte Cuatro: Optimización; capítulo 14: Optimización multidimensional sin restricciones, pp. 379-398. McGraw-Hill Interamericana Editores, S. A. de C. V. México, D. F. 1999. Tercera edición.
- C19.** V. T. Chow. Statistical and probability analysis of hydrologic data. Part I; Frequency analysis. Section 8-1, pp. 8-1 to 8-42 in *Handbook of Applied Hydrology*, editor-in-chief Ven Te Chow. McGraw-Hill Book Co. New York, USA. 1964.
- C20.** V. T. Chow, D. R. Maidment & L. W. Mays. *Applied Hydrology*. Chapter 8: Lumped flow routing. Theme 8.4: Hydrologic river routing, pp. 257-260. McGraw-Hill Int. Ed. New York, USA. 1988.
- C21.** R. T. Clarke. *Mathematical Models in Hydrology*. Theme 6.6: Methods of fitting parameters of a stochastic-conceptual models, pp. 152-159. Irrigation and Drainage Paper 19. FAO, Rome, Italy. 1973.



- C22. A. C. Cohen. Estimation in mixtures of two Normal distributions. *Technometrics*, Vol. 9, No. 1, pp. 15-28. 1967.
- C23. N. H. Crawford. Hydrologic computations at a small hydro site. Chapter 3, pp. 3.1-3.27 in *Small and Mini Hydropower Systems*, Jack J. Fritz, editor. McGraw-Hill Book Co. New York, USA. 1984.
- D1. R. A. Deininger. Linear programming for hydrologic analyses. *Water Resources Research*, Vol. 5, No. 5, pp. 1105-1109. 1969.
- D2. J. C. I. Dooge. Problems and methods of rainfall-runoff modelling. Part 2: Flood models, pp. 71-108 in *Proceedings of the Workshop in Mathematical Models for Surface Water Hydrology*, edited by T. A. Ciriani, U. Maione & J. R. Wallis. Pisa, Italy. John Wiley & Sons Publications. 1974.
- E1. C. A. Escalante Sandoval. y J.A. Raynal Villaseñor. Algoritmos de estimación de parámetros del método de Muskingum: Un análisis comparativo. *10º Congreso Nacional de Hidráulica*. Tomo II. Subtema 6, pp. 41-52. 18 al 21 de octubre de 1988. Morelia, Michoacán.
- E2. L. B. Evans. Apéndice 4: OPTIM. Programa de computadora para resolver problemas de optimización por el método Complex, pp. 331-342, en *Aplicaciones de Computación a la Ingeniería*. Coordinadores M. A. Murray L. y E. Chicurel U. Editorial Limusa. México, D. F. 1975.
- G1. F. J. González Villarreal. *Contribución al análisis de frecuencias de valores extremos de los gastos máximos de un río*. Publicación No. 277 del Instituto de Ingeniería de la UNAM. México, D. F. 1970. (24 páginas).
- H1. J. C. Houghton. Birth of a parent: the Wakeby distribution for modeling flood flows. *Water Resources Research*, Vol. 14, No. 6, pp. 1105-1109. 1978.
- I1. R. P. Ibbitt & T. O'Donnell. Designing conceptual catchment models for automatic fitting methods. *Proceedings of the Warsaw Symposium on Mathematical Models in Hydrology*. Vol. 2, pp. 461-475. International Association of Scientific Hydrology. Publication No. 101. (IAHS-UNESCO-WMO). 1971.
- J1. A. F. Jenkinson. Statistics of Extremes, in *Estimation of Maximum Floods*, chapter 5, pp. 183-210. Technical Note No. 98. World Meteorological Organization. Geneva, Switzerland. 1969.
- K1. G. W. Kite. *Frequency and Risk Analyses in Hydrology*. Chapter 12: Comparison of frequency distributions, pp. 156-168. Water Resources Publication. Fort Collins, CO., U.S.A. 1977.
- K2. N. T. Kottegoda. *Stochastic Water Resources Technology*. Chapter 8: Stochastic programming methods in systems engineering, pp. 294-345. The MacMillan Press, Ltd. London, England. 1980.
- K3. J. L. Kuester & J. H. Mize. *Optimization Techniques with Fortran*. Chapter 9: Multivariable unconstrained methods. ROSENB algorithm, pp. 320-330. McGraw-Hill Book Co. New York, USA. 1973.
- K4. J. L. Kuester & J. H. Mize. *Optimization Techniques with Fortran*. Chapter 10: Multivariable constrained methods. HILL ALGORITHM, pp. 386-398. McGraw-Hill Book Co. New York, USA. 1973.
- L1. E. A. Lawler. Flood Routing. Section 25. Part II, pp.25-34 to 25-59, in *Handbook of Applied Hydrology*. Editor-in-chief Ven Te Chow. McGraw-Hill Book Co. New York, USA. 1964.

- L2.** R. K. Linsley, M. A. Kohler y J. L. H. Paulhus. *Hidrología para Ingenieros*. Capítulo 7: Hidrogramas de crecientes, pp. 183-210. Editorial McGraw-Hill Latinoamericana, S.A. Bogotá, Colombia. 2a. edición, 1977.
- L3.** D. P. Loucks, J. R. Stedinger & D. A. Haith. *Water Resource Systems Planning and Analysis*. Chapter 8: Irrigation planning and operation, pp. 392-424. Prentice-Hall, Inc. New Jersey, USA. 1981.
- M1.** N. Marrero de León. *Técnicas de Optimización Aplicadas a la Ingeniería Hidráulica*, Tema II: Programación lineal, pp. 46-158. Facultad de Hidráulica y Viales. Ministerio de Educación Superior. La Habana, Cuba. 1985.
- M2.** H. R. Martínez Avila y J. A. Raynal Villaseñor. Métodos de estimación de parámetros de la distribución Wakeby. *10º Congreso Nacional de Hidráulica*. Tomo II, pp. 464-472. 18 al 21 de octubre de 1988. Morelia, Michoacán.
- M3.** L. W. Mays & L. Coles. Optimization of unit hydrograph determination. *Journal of Hydraulics Division*, Vol. 106, No. HY1, pp. 85-97. 1980.
- M4.** L. W. Mays & C-K Taur. Unit hydrographs via nonlinear programming. *Water Resources Research*, Vol. 18, No. 4, pp. 744-752. 1982.
- M5.** A. V. Metcalfe. *Statistics in Civil Engineering*. Chapter 4: Extreme value and related distributions, pp. 81-115. Arnold Publishers. London, England. 1997.
- O1.** T. O'Donnell. A direct three-parameter Muskingum procedure incorporating lateral inflow. *Journal of Hydrological Sciences*, Vol. 30, pp. 479-496. 1985.
- P1.** E. Palacios V. y A. E. García. *Introducción a la Teoría de la Operación de Distritos y Sistemas de Riego*. Capítulo II: Planeación del riego, pp. 62-165. Colegio de Postgraduados. Montecillo, Edo. de México.
- P2.** E. Palacios V. y A. E. García. *Introducción a la Teoría de la Operación de Distritos y Sistemas de Riego*. Apéndice II: Nociones de programación lineal, pp. 367-412. Colegio de Postgraduados. Montecillo, Edo. de México.
- P3.** L. Poole, M. Borchers y D. M. Castlewitz. *Algunos Programas de Uso Común en BASIC*. Programa: Programación lineal, pp. 105-109. Osborne/McGraw-Hill, México, D. F. 1983.
- R1.** A. J. Raudkivi. 1979. *Hydrology. An Advanced Introduction of Hydrological Processes and Modelling*. Chapter 8: Flood Routing, pp. 242-290. Pergamon Press, Oxford, England. 1979.
- R2.** J. A. Raynal-Villaseñor, & D. F. Campos-Aranda. Identification of IUH ordinates through non-linear optimization. *VII International Conference in Computational Methods in Water Resources*, Vol. II, pp. 385-390. The MIT, June 1986. Boston, MA, U.S.A.
- R3.** J. A. Raynal-Villaseñor, & D. F. Campos-Aranda. Identification of unit hydrograph discrete kernels through non-linear optimization. *Hydrological Science and Technology*, Vol. 12, Number 1-4, pp. 52-60. 1996
- R4.** H. H. Rosenbrock. An automatic method of finding the greatest or least value of a function. *Computer Journal*, Vo.3, pp. 175-184. 1960.
- S1.** Secretaría de Agricultura y Recursos Hidráulicos. *Boletín Hidrológico No. 29. Región Hidrológica No. 24 Poniente (Rio Conchos)*. Tomo III. Cuarta parte: Crecientes. Subsecretaría de Planeación, SARH. México, D. F. 1977.

- S2. K. P. Singh & R. A. Sinclair. Two-distribution method for flood-frequency analysis. *Journal of the Hydraulics Division*, Vol. 98, No. HY1, pp. 29-44. 1972.
- S3. K. P. Singh. A versatile flood frequency methodology. *Water International*, Vol. 12, No. 3, pp. 139-145. 1987.
- S4. V. P. Singh. Watershed modeling. Chapter 1, pp. 1-22 in *Computer Models of Watershed Hydrology*, edited by Vijay P. Singh. Water Resources Publications, Colorado, U.S.A. 1995.
- S5. S. Sorooshian & V. K. Gupta. Model calibration. Chapter 2, pp. 23-68 in *Computer Models of Watershed Hydrology*, edited by Vijay P. Singh. Water Resources Publications, Colorado, U.S.A. 1995.
- S6. R. Springall Galindo. *Análisis estadístico y probabilístico de datos hidrológicos*. (Capítulo 8. Hidrología). Facultad de Ingeniería de la UNAM. México, D. F. 1975. (140 páginas).
- W1. D. A. Woolhiser & D. L. Brakensiek. Hydrologic modeling of small watersheds. Chapter 1, pp. 1-16 in *Hydrologic Modeling of Small Watersheds*, edited by C. T. Haan, H. P. Johnson & D. L. Brakensiek, ASAE Monograph Number 5. St. Joseph, Michigan, U.S.A. 1982.

## PCN20: SIMPLEX

```

1000 REM PROGRAMA "SIMPLEX"
1010 REM ALGORITMO DE SOLUCION DEL METODO SIMPLEX
1020 REM ADAPTADO DEL LIBRO:ALGUNOS PROGRAMAS DE
1030 REM USO COMUN EN BASIC DE POOLE,BORCHERS AND
1040 REM CASTLEWITZ,EDIT.OSBORNE/McGRAW-HILL(1981)
1050 REM SE INTRODUCEN DATOS BASICOS Y RESTRICCIONES
1060 CLS:PRINT"PROGRAMACION LINEAL:METODO SIMPLEX":PRINT
1070 INPUT"DESEA MAXIMIZAR LA FUNCION OBJETIVO (S/N):";A$
1080 Z=1:IF A$="S" THEN Z=-1
1090 INPUT"NUMERO TOTAL DE RESTRICCIONES:";M
1100 INPUT"NUMERO TOTAL DE VARIABLES      ":";N
1110 PRINT"NUMERO DE RESTRICCIONES MENORES QUE,IGUALES QUE Y MAYORES QUE"
1120 INPUT"NUMERO DE RESTRICCIONES <, = ó >:";L,E,G
1130 IF M=L+E+G THEN 1160
1140 PRINT"LOS DATOS DE LAS RESTRICCIONES SON INCONSISTENTES":PRINT
1150 PRINT"VOLVER A INTRODUCIR LOS DATOS":GOTO 1060
1160 DIM A(M+2,N+M+G+1),B(M+2)
1170 REM COMIENZA FASE DE INICIACION
1180 C=N+M+G:C1=C+1:C2=N+L+G:M1=M+1:M2=M+2
1190 FOR I=1 TO M2:FOR J=1 TO C1
1200 A(I,J)=0:NEXT J:NEXT I
1210 FOR I=1 TO M:B(I)=0:NEXT I
1220 FOR I=1 TO M:FOR J=1 TO N
1230 READ A(I,J)
1240 IF I<=L THEN 1260
1250 A(M1,J)=A(M1,J)-A(I,J)
1260 NEXT J:IF I>L THEN 1290
1270 B(I)=N+I:A(I,N+I)=1
1280 GOTO 1330
1290 B(I)=N+G+I:A(I,N+G+I)=1
1300 IF I>L+E THEN 1320
1310 GOTO 1330
1320 A(I,N+I-E)=-1:A(M1,N+I-E)=1
1330 NEXT I
1340 LPRINT"PROGRAMACION LINEAL:METODO SIMPLEX":LPRINT
1350 IF Z=-1 THEN LPRINT"SE MAXIMIZA LA FUNCION OBJETIVO":LPRINT
1360 IF Z=1 THEN LPRINT"SE MINIMIZA LA FUNCION OBJETIVO":LPRINT
1370 LPRINT"COEFICIENTES DE LAS RESTRICCIONES"
1380 FOR I=1 TO M:FOR J=1 TO N
1390 LPRINT A(I,J);:NEXT J:LPRINT:NEXT I
1400 FOR I=1 TO M
1410 READ A(I,C1):NEXT I
1420 LPRINT"TERMINOS INDEPENDIENTES"
1430 FOR I=1 TO M
1440 LPRINT A(I,C1);:NEXT I:LPRINT
1450 FOR J=1 TO N
1460 READ A(M2,J)
1470 A(M2,J)=Z*A(M2,J):NEXT J
1480 LPRINT"COEFICIENTES DE LA FUNCION OBJETIVO"
1490 FOR I=1 TO N
1500 LPRINT Z*A(M2,I);:NEXT I:LPRINT
1510 CLS:LOCATE 10,12:PRINT"CALCULOS EN PROCESO"
1520 M3=M1:GOSUB 1790
1530 FOR I1=1 TO M

```

## PCN20: SIMPLEX

```
1540 IF B(I1)<=C2 THEN 1620
1550 IF A(I1,C1)<=.00001 THEN 1580
1560 LPRINT"EL PROBLEMA NO TIENE SOLUCION FACTIBLE"
1570 GOTO 2110
1580 FOR J1=1 TO C2
1590 IF ABS(A(I1,J1))<=.00001 THEN 1610
1600 R=I1:S=J1:GOSUB 1960:J1=C2
1610 NEXT J1
1620 NEXT I1:M3=M2:GOSUB 1790
1630 LOCATE 12,12:PRINT"IMPRESION DE RESULTADOS"
1640 LPRINT:LPRINT"R E S P U E S T A S:"
1650 LPRINT"VARIABLES PRIMARIAS:":LPRINT"VARIABLE","VALOR"
1660 FOR J=1 TO C2
1670 FOR I=1 TO M
1680 IF B(I)<>J THEN 1700
1690 LPRINT J,A(I,C1):I=M
1700 NEXT I
1710 NEXT J
1720 LPRINT"VARIABLES DUALES:":LPRINT"VARIABLE","VALOR"
1730 IF L=0 THEN 1760
1740 FOR I=1 TO L
1750 LPRINT I,-Z*A(M2,N+I):NEXT I
1760 LPRINT:LPRINT"VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO ";-Z*A(M2,C1)
1770 LPRINT:GOTO 2110
1780 REM INICIA SUBROUTINA DE OPTIMIZACION
1790 P=-.00001:FOR J=1 TO C2
1800 IF A(M3,J)>=P THEN 1820
1810 S=J:P=A(M3,J)
1820 NEXT J
1830 IF P=-.00001 THEN 2100
1840 GOSUB 1860:GOSUB 1910:GOTO 1790
1850 REM SUBROUTINA QUE BUSCA CUAL VARIABLE ABANDONA LA BASE
1860 Q=9.9999999E+37:FOR I=1 TO M
1870 IF A(I,S)<=.00001 THEN 1900
1880 IF A(I,C1)/A(I,S)>=Q THEN 1900
1890 R=I:Q=A(I,C1)/A(I,S)
1900 NEXT I:RETURN
1910 IF Q=9.9999999E+37 THEN 1930
1920 GOSUB 1960:RETURN
1930 LPRINT"LA SOLUCION NO TIENE FRONTERAS"
1940 GOTO 2110
1950 REM SE EJECUTA EL PIVOTEADO
1960 P=A(R,S):FOR I=1 TO M2
1970 IF I=R THEN 2040
1980 FOR J=1 TO C1
1990 IF J=S THEN 2030
2000 A(I,J)=A(I,J)-A(I,S)*A(R,J)/P
2010 IF ABS(A(I,J))>=.00001 THEN 2030
2020 A(I,J)=0
2030 NEXT J
2040 NEXT I
2050 FOR J=1 TO C1
2060 A(R,J)=A(R,J)/P:NEXT J
```

## PCN20: SIMPLEX

```
2070 FOR I=1 TO M2
2080 A(I,S)=0:NEXT I
2090 A(R,S)=1:B(R)=S
2100 RETURN
2110 END
3000 REM INICIAN DATOS DEL EJEMPLO 9.1
3010 DATA 1,1
3020 DATA -1,2
3030 DATA 6,8
3040 DATA -1,-3
4000 REM INICIAN COEFICIENTES DEL EJEMPLO 9.2
4010 DATA 1,1
4020 DATA 1.6,2
4030 DATA 3,3.5
4040 DATA 150,260,490
4050 DATA 3.5,3.7
5000 REM INICIAN COEFICIENTES DEL EJEMPLO 9.7
5010 DATA .6,.7,.8,.5,.5,.6
5020 DATA .9,.9,1.1,.8,.9,1.1
5030 DATA .8,.8,.7,.8,.7,.6
5040 DATA 1,0,0,1,0,0
5050 DATA 0,1,0,0,1,0
5060 DATA 0,0,1,0,0,1
5070 DATA 0,0,0,0,0,1
5080 DATA 0,0,0,0,0,1
5090 DATA 0,0,0,0,0,1
5100 DATA 300,450,400,110,200,400,30,40,50
5110 DATA 2000,1600,1300,1700,1300,1100
```

## PCN21: ROSEN

```
1000 REM PROGRAMA DEMONINADO "ROSEN"
1010 REM ALGORITMO DE ROSENBROCK PARA MINIMIZAR UNA FUNCION NO LINEAL,
1020 REM UNIMODAL, DEPENDIENTE DE MULTIPLES VARIABLES NO RESTRINGIDAS
1030 REM Y NO DERIVABLE. ESTE PROGRAMA ES UNA ADAPTACION DEL ALGORITMO
1040 REM "ROSENB" EXPUESTO EN FORTRAN POR KUESTER & MIZE(1973) EN EL
1050 REM LIBRO: OPTIMIZATION TECHNIQUES WITH FORTRAN, EDIT. MCGRAW-HILL.
1060 REM ESTE LISTADO INCLUYE EL PROBLEMA DE PRUEBA DADO EN LA PAG. 324
1070 REM SE DEFINEN VALORES INICIALES DE LAS VARIABLES DE AJUSTE
1080 NVA=2:X(1)=1!:X(2)=.5
1090 FOR I=1 TO NVA:EP(I)=.1*X(I):NEXT I:CLS:PRINT:PRINT
1100 INPUT"DESEA IMPRESION DE RESULTADOS POR ETAPAS (S/N)";B$
1110 REM SE DEFINEN PARAMETROS BASICOS DEL ALGORITMO DE ROSENBROCK
1120 MF=1000:ME=30:MC=50:NP=2:AA=2:BA=.5:KE=1:EY=.00001
1130 CLS:LPRINT"OPTIMIZACION DE VARIABLES CON EL ALGORITMO DE ROSENBROCK"
1140 LPRINT:LPRINT"TOLERANCIA DE ERROR EN LA FUNCION OBJETIVO =";EY
1150 LPRINT:LPRINT"VALORES INICIALES DE LAS VARIABLES DE AJUSTE:"
1160 FOR I=1 TO NVA
1170 LPRINT" VARIABLE DE AJUSTE No. ";I;;LPRINT"=";
1180 LPRINT USING"#####.#####";X(I):NEXT I
1190 CLS:LOCATE 12,10:PRINT"CALCULO DE LA FUNCION OBJETIVO"
1200 GOSUB 2070:LPRINT"PRIMER VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO =";FX
1210 REM INICIAN CALCULOS DEL ALGORITMO DE ROSENBROCK
1220 CLS:LOCATE 12,10:PRINT"CALCULOS EN PROCESO:";:PRINT" ETAPA ";KE
1230 KF=1:NFO=1:FOR II=1 TO NVA:FOR JJ=1 TO NVA:V(II,JJ)=0!
1240 IF(II-JJ)=0 THEN V(II,JJ)=1!
1250 NEXT JJ:NEXT II:GOSUB 2070:FO=FX
1260 FOR K=1 TO NVA:XF(K)=X(K):NEXT K
1270 IF(NP-1)=0 THEN 1290
1280 FOR I=1 TO NVA:E(I)=EP(I):NEXT I
1290 FOR I=1 TO NVA:FB=FX:AJ(I)=2!
1300 IF(NP-1)=0 THEN 1320
1310 GOTO 1330
1320 E(I)=EP(I)
1330 D(I)=0!:NEXT I
1340 III=0
1350 III=III+1
1360 I=1
1370 FOR J=1 TO NVA
1380 X(J)=X(J)+E(I)*V(I,J)
1390 NEXT J:GOSUB 2070
1400 KF=KF+1:DF=FB-FX
1410 IF(ABS(DF)-EY)<=0 THEN 1980
1420 IF(KF-MF)>=0 THEN 1980
1430 IF(FX-FO)<=0 THEN 1490
1440 FOR J=1 TO NVA:X(J)=X(J)-E(I)*V(I,J)
1450 NEXT J:E(I)=-BA*E(I)
1460 IF(AJ(I)-1.5)>=0 THEN 1480
1470 AJ(I)=0!
1480 GOTO 1540
1490 D(I)=D(I)+E(I)
1500 E(I)=AA*E(I):FO=FX
1510 FOR K=1 TO NVA:XF(K)=X(K):NEXT K
1520 IF(AJ(I)-1.5)<=0 THEN 1540
1530 AJ(I)=0!
```

## PCN21: ROSEN

```

1540 FOR J=1 TO NVA
1550 IF(AJ(J)-.5)>0 THEN 1570
1560 NEXT J:GOTO 1630
1570 IF(I-NVA)=0 THEN 1590
1580 I=I+1:GOTO 1370
1590 FOR J=1 TO NVA
1600 IF(AJ(J)-2!)<0 THEN 1360
1610 NEXT J:IF(III-MC)<0 THEN 1350
1620 GOTO 1980
1630 FOR I=1 TO NVA
1640 FOR J=1 TO NVA:AL(I,J)=0!
1650 NEXT J:NEXT I
1660 REM IMPRESION DE RESULTADOS PARCIALES
1670 IF B$="N" THEN 1740
1680 LPRINT:LPRINT"ETAPA NUMERO:";KE
1690 LPRINT"VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO =";FO
1700 LPRINT:LPRINT"VALORES FINALES DE LAS VARIABLES DE AJUSTE:"
1710 FOR I=1 TO NVA
1720 LPRINT" VARIABLE DE AJUSTE No. ";I;:LPRINT"=";
1730 LPRINT USING"#####.#####";X(I):NEXT I
1740 REM SE EFECTUA LA ROTACION DE EJES
1750 CLS:LOCATE 12,10:PRINT"CALCULOS EN PROCESO:";
1760 PRINT" ETAPA ";KE+1
1770 FOR I=1 TO NVA:KL=I
1780 FOR J=1 TO NVA:FOR K=KL TO NVA
1790 AL(I,J)=AL(I,J)+D(K)*V(K,J)
1800 NEXT K:BL(I,J)=AL(I,J)
1810 NEXT J:NEXT I:BN(1)=0!
1820 FOR K=1 TO NVA:BN(1)=BN(1)+BL(1,K)^2:NEXT K
1830 BN(1)=SQR(BN(1))
1840 FOR J=1 TO NVA:V(1,J)=BL(1,J)/BN(1):NEXT J
1850 FOR I=2 TO NVA:II=I-1
1860 FOR J=1 TO NVA:SV=0!
1870 FOR KK=1 TO II:S=0!
1880 FOR K=1 TO NVA:S=S+AL(I,K)*V(KK,K):NEXT K
1890 SV=SV+S*V(KK,J):NEXT KK
1900 BL(I,J)=AL(I,J)-SV
1910 NEXT J:NEXT I
1920 FOR I=2 TO NVA:BN(I)=0!
1930 FOR K=1 TO NVA:BN(I)=BN(I)+BL(I,K)^2:NEXT K
1940 BN(I)=SQR(BN(I))
1950 FOR J=1 TO NVA:V(I,J)=BL(I,J)/BN(I)
1960 NEXT J:NEXT I
1970 KE=KE+1:IF(KE-ME)<0 THEN 1290
1980 REM INICIA IMPRESION DE RESULTADOS
1990 LPRINT:LPRINT"No. TOTAL DE ETAPAS:";KE
2000 LPRINT"No. DE EVALUACIONES DE LA FUNCION OBJETIVO =";KF:LPRINT
2010 LPRINT"VALOR FINAL DE LA FUNCION OBJETIVO =";FO
2020 LPRINT:LPRINT"VALORES FINALES DE LAS VARIABLES DE AJUSTE:"
2030 FOR I=1 TO NVA
2040 LPRINT" VARIABLE DE AJUSTE No. ";I;:LPRINT"=";
2050 LPRINT USING"#####.#####";X(I):NEXT I
2060 END
2070 REM INICIA SUBROUTINA DE LA FUNCION OBJETIVO
2080 LOCATE 14,10:PRINT"No. DE EVALUACION DE LA FUNCION OBJETIVO =";
2090 PRINT NFO:NFO=NFO+1
2100 X1=X(1):X2=X(2):FP2=203.64*X2^2+182.25*X1*X2
2110 FX=-3803.84-138.08*X1-232.92*X2+123.08*X1^2+FP2
2120 RETURN

```



## PCN22: OPTIM

```

1000 REM PROGRAMA "OPTIM"
1010 REM EJEMPLO DEL KUESTER & MIZE, PAG. 391.
1020 DIM XDEV(5),SX(5,10),X(5),Y(10),XL(5),XU(5),XN$(5)
1030 DIM YL(10),YU(10),YN$(10),XC(5),XX(5,10),YY(10,10),FF(10)
1040 REM SE LEEN PARAMETROS DEL OPTIM
1050 FOR I=1 TO 5:FOR J=2 TO 10
1060 READ SX(I,J):NEXT J,I
1070 FOR I=1 TO 5:XDEV(I)=0:NEXT I
1080 ALFA=1.3:BETA=.5
1090 GOSUB 2020:MCC=1:GOSUB 2090
1100 FOR I=1 TO NX:XC(I)=X(I):NEXT I
1110 NMAX=1:NTIPO=4:GOSUB 1770
1120 NIT=0:KMAX=2*NX:K=1
1130 FF(K)=F
1140 FOR I=1 TO NX:XX(I,K)=X(I):NEXT I
1150 IF NY<=0 THEN 1170
1160 FOR I=1 TO NY:YY(I,K)=Y(I):NEXT I
1170 FOR I=1 TO NX:XC(I)=(XC(I)*(K-1)+X(I))/K:NEXT I
1180 IF (K-KMAX)>=0 THEN 1250
1190 K=K+1
1200 FOR I=1 TO NX:IX=IY
1210 X(I)=XL(I)+SX(I,K)*(XU(I)-XL(I)):NEXT I
1220 NMAX=10:NTIPO=1
1230 GOSUB 1770
1240 GOTO 1130
1250 IF NQ>0 THEN 1280
1260 IPRT=MI+1
1270 GOTO 1300
1280 IPRT=NQ
1290 MCC=3:GOSUB 2090
1300 NIT=NIT+1
1310 FMAX=-1E+10:FMIN=-FMAX
1320 JG=0:JL=0
1330 FOR J=1 TO KMAX
1340 IF (FF(J)-FMAX)<=0 THEN 1360
1350 JG=J:FMAX=FF(J)
1360 IF (FF(J)-FMIN)>=0 THEN 1380
1370 FMIN=FF(J):JL=J
1380 NEXT J
1390 FDEV=FMAX-FMIN
1400 IF (FDEV-FR*ABS(FMIN-FA))>0 THEN 1450
1410 LPRINT"EL PROCESO CONVERGE EN ";NIT;:LPRINT"ITERACIONES. ";
1420 LPRINT"LA SOLUCION ES:"
1430 MCC=2:GOSUB 2090
1440 END
1450 IF (NIT-MI)<=0 THEN 1500
1460 LPRINT:LPRINT"EL PROCESO NO CONVERGE EN";NIT-1;
1470 LPRINT"ITERACIONES. ";:LPRINT"EL COMPLEX ACTUAL ES:"
1480 MCC=2:GOSUB 2090
1490 END
1500 FOR I=1 TO NX
1510 XC(I)=0
1520 FOR J=1 TO KMAX:XC(I)=XC(I)+XX(I,J):NEXT J
1530 XC(I)=(XC(I)-XX(I,JG))/(KMAX-1):NEXT I

```

## PCN22: OPTIM

```
1540 FOR I=1 TO NX
1550 X(I)=XC(I)-ALFA*(XX(I,JG)-XC(I))
1560 IF (XU(I)-X(I))>0 THEN 1580
1570 X(I)=XU(I)-XDEV(I)
1580 IF (X(I)-XL(I))>0 THEN 1600
1590 X(I)=XL(I)+XDEV(I)
1600 NEXT I
1610 NTIPO=2:NMAX=10:GOSUB 1770
1620 FOR J=1 TO KMAX
1630 IF J<<JG AND FF(J)>F THEN 1660
1640 NEXT J
1650 FOR I=1 TO NX:X(I)=XC(I)+BETA*(X(I)-XC(I)):NEXT I
1660 NTIPO=3:NMAX=10
1670 GOSUB 1770
1680 FOR I=1 TO NX:XX(I,JG)=X(I):NEXT I
1690 IF NY<=0 THEN 1710
1700 FOR I=1 TO NY:YY(I,JG)=Y(I):NEXT I
1710 FF(JG)=F
1720 IF (NIT-IPRT)<0 THEN 1300
1730 MCC=4:GOSUB 2090
1740 MCC=3:GOSUB 2090
1750 IPRT=IPRT+NQ
1760 GOTO 1300
1770 REM SUBROUTINA BOX
1780 N=1
1790 GOSUB 2320
1800 IF NY<=0 THEN 1940
1810 FOR I=1 TO NY
1820 IF Y(I)<YL(I) OR YU(I)<Y(I) THEN 1850
1830 NEXT I
1840 GOTO 1940
1850 FOR I=1 TO NX:X(I)=XC(I)+BETA*(X(I)-XC(I)):NEXT I
1860 IF (N-NMAX)>=0 THEN 1890
1870 N=N+1
1880 GOTO 1790
1890 IF NTIPO><4 THEN 1940
1900 MCC=2:GOSUB 2090
1910 LPRINT"EL PUNTO INICIAL VIOLA ALGUNA RESTRICCION"
1920 END
1930 GOSUB 1970
1940 IF NTIPO><4 THEN 1960
1950 MCC=2:GOSUB 2090
1960 RETURN
1970 LPRINT"ERROR EN OPTIMIZACION TIPO";NTIPO
1980 LPRINT"VIOLACION DE RESTRICCION"
1990 MCC=2:GOSUB 2090:MCC=3:GOSUB 2090
2000 END
2010 REM INICIA SUBROUTINA DE LECTURA DE DATOS
2020 CLS:TIT$="EJEMPLO DE KUESTER & MIZE, PAG.391"
2030 NX=2:NY=0:MI=500:NQ=50
2040 XN$(1)="x":XN$(2)="y"
2050 XL(1)=0:XL(2)=0:XU(1)=2:XU(2)=2.5:X(1)=1:X(2)=.5
2060 FO$="F":FA=2E-08:FR=1E-08
2070 RETURN
```

## PCN22: OPTIM

```
2080 REM INICIAL SUBROUTINA DE IMPRESION DE DATOS Y RESULTADOS
2090 ON MCC GOTO 2100,2110,2270,2290,2300
2100 LPRINT" ";TIT$:RETURN
2110 CLS:LPRINT"VARIABLES INDEPENDIENTES:"
2120 LPRINT"NOMBRE LIM.INF. LIM.SUP. VALOR INICIAL o FINAL"
2130 FOR I=1 TO NX
2140 LPRINT XN$(I),XL(I),XU(I),X(I)
2150 NEXT I
2160 IF NY=0 THEN 2220
2170 LPRINT"VARIABLES DEPENDIENTES:"
2180 LPRINT"NOMBRE LIM.INF. LIM.SUP. VALOR INICIAL o FINAL"
2190 FOR I=1 TO NY
2200 LPRINT YN$(I),YL(I),YU(I),Y(I)
2210 NEXT I
2220 LPRINT"FUNCION OBJETIVO:"
2230 LPRINT"NOMBRE VALOR DESV.REL. DESV.ABS."
2240 LPRINT FO$,F,FR,FA
2250 LPRINT"NO.DE ITERACIONES REALIZADAS =";NIT
2260 RETURN
2270 REM IMPRESION DE ITERACIONES Y VALOR DE FUNCION OBJETIVO
2280 K1MAX=KMAX+1:RETURN
2290 LPRINT"ITERACION";:LPRINT USING"####";NIT;:LPRINT" FMIN =";FMIN
2300 RETURN
2310 REM INICIA SUBROUTINA FUNCION
2320 X=X(1):Y=X(2)
2330 F=-3803.84-138.08*X-232.92*Y+123.08*X^2+203.64*Y^2+182.25*X*Y
2340 RETURN
2350 DATA 0.10480,0.22368,0.24130,0.42167,0.57370,0.77921
2360 DATA 0.99562,0.96301,0.89579,0.85475,0.28918,0.63553
2370 DATA 0.09429,0.10365,0.07119,0.51085,0.02368,0.01011
2380 DATA 0.52162,0.07056,0.48663,0.54164,0.32639,0.29334
2390 DATA 0.02488,0.15011,0.46573,0.48360,0.93093,0.39975
2400 DATA 0.06907,0.72935,0.91977,0.14342,0.36857,0.698758
2410 DATA 0.40961,0.93969,0.61129,0.97336,0.12765,0.21382
2420 DATA 0.54092,0.53916,0.97628
```

## PCN23: OPTHU

```

1000 REM PROGRAMA "OPTHU"(OPTimizacion del Hidrograma Unitario)
1010 REM PROGRAMA PARA IDENTIFICACION DE HIDROGRAMA UNITARIO OPTIMO
1020 REM PRECIP.EN EXCESO EN cm Y GASTOS DIRECTOS EN cm/h O m^3/s
1030 REM POR MEDIO DEL ALGORITMO COMPLEX DE PROGRAMACION NO LINEAL
1040 REM DE MULTIPLES VARIABLES RESTRINGIDAS (rest.de ordenamiento)
1050 REM RESULTADOS I M P R E S O S. MARZO 1992.
1060 REM SE INTRODUCEN DATOS BASICOS
1070 CLS:PRINT"OPTIMIZACION DEL HIDROGRAMA UNITARIO POR MEDIO"
1080 PRINT"          DEL ALGORITMO COMPLEX":PRINT
1090 INPUT"NOMBRE DEL PROYECTO O EST.HIDROMETRICA:";NE$:PRINT
1100 INPUT"NUMERO DE GASTOS DIRECTOS:";NGD
1110 INPUT"NUMERO DE LLUVIAS EN EXCESO:";NR:M=NGD-NR+1
1120 DIM XDEV(M),SX(M,2*M),PE(NGD),Q(NGD),X(NGD),XL(M),XU(M)
1130 DIM Y(M+1),YL(M),YU(M),XC(M),XX(M,2*M),YY(2*M,2*M),FF(2*M)
1140 DIM XN$(M),YN$(M),P(20),PN$(20),U(M),QD(NGD)
1150 PRINT:PRINT"SE INTRODUCEN PRECIPITACIONES EN EXCESO EN cm:"
1160 PRINT:PMIN=100:FOR I=1 TO NR
1170 PRINT"PRECIPITACION No. ";I::INPUT PE(I)
1180 IF PE(I)<PMIN THEN PMIN=PE(I)
1190 NEXT I:PRINT
1200 PRINT"SE INTRODUCEN GASTOS DIRECTOS:"
1210 PRINT:QM=0:FOR I=1 TO NGD
1220 PRINT"GASTO DIRECTO No. ";I::INPUT Q(I)
1230 IF Q(I)>QM THEN QM=Q(I)
1240 NEXT I:PRINT
1250 INPUT"Que unidades son:  A:m^3/s      B:cm/h  ";U$
1260 IF U$="A" THEN G$="m^3/s" ELSE G$="cm/h"
1270 REM SE LEEN PARAMETROS DEL OPTIM
1280 FOR I=1 TO M:FOR J=2 TO 2*M
1290 SX(I,J)=RND:NEXT J,I
1300 FOR I=1 TO M:XDEV(I)=0:NEXT I
1310 ALFA=1.3:BETA=.5:GOSUB 2090
1320 FOR I=1 TO NX:XC(I)=X(I):NEXT I
1330 NMAX=1:NTIPO=4:GOSUB 1880
1340 NIT=0:KMAX=2*NX:K=1
1350 FF(K)=F:FOR I=1 TO NX:XX(I,K)=X(I):NEXT I
1360 IF NY<=0 THEN 1380
1370 FOR I=1 TO NY:YY(I,K)=Y(I):NEXT I
1380 FOR I=1 TO NX:XC(I)=(XC(I)*(K-1)+X(I))/K:NEXT I
1390 IF (K-KMAX)>=0 THEN 1440
1400 K=K+1:FOR I=1 TO NX:IX=IY
1410 X(I)=XL(I)+SX(I,K)*(XU(I)-XL(I)):NEXT I
1420 NMAX=10:NTIPO=1
1430 GOSUB 1880:GOTO 1350
1440 IF NQ>0 THEN 1460
1450 IPRT=MI+1:GOTO 1470
1460 IPRT=NQ:MCC=3:GOSUB 2320
1470 NIT=NIT+1
1480 FMAX=-1E+10:FMIN=-FMAX
1490 JG=0:JL=0:FOR J=1 TO KMAX
1500 IF (FF(J)-FMAX)<=0 THEN 1520
1510 JG=J:FMAX=FF(J)
1520 IF (FF(J)-FMIN)>=0 THEN 1540

```

## PCN23: OPTHU

```
1530 FMIN=FF(J):JL=J
1540 NEXT J
1550 FDEV=FMAX-FMIN
1560 IF (FDEV-FR*ABS(FMIN-FA))>0 THEN 1610
1570 MCC=1:GOSUB 2320
1580 LPRINT"EL PROCESO CONVERGE EN ";NIT;:LPRINT"ITERACIONES"
1590 PRINT:PRINT"EL PROCESO HA T E R M I N A D O"
1600 GOSUB 2670:END
1610 IF (NIT-MI)<=0 THEN 1650
1620 MCC=1:GOSUB 2320
1630 LPRINT"EL PROCESO NO CONVERGE EN";NIT-1;:LPRINT"ITERACIONES"
1640 MCC=3:GOSUB 2320:GOSUB 2670:END
1650 FOR I=1 TO NX:XC(I)=0
1660 FOR J=1 TO KMAX:XC(I)=XC(I)+XX(I,J):NEXT J
1670 XC(I)=(XC(I)-XX(I,JG))/(KMAX-1):NEXT I
1680 FOR I=1 TO NX
1690 X(I)=XC(I)-ALFA*(XX(I,JG)-XC(I))
1700 IF (XU(I)-X(I))>0 THEN 1720
1710 X(I)=XU(I)-XDEV(I)
1720 IF (X(I)-XL(I))>0 THEN 1740
1730 X(I)=XL(I)+XDEV(I)
1740 NEXT I
1750 NTIPO=2:NMAX=10:GOSUB 1880
1760 FOR J=1 TO KMAX
1770 IF J><JG AND FF(J)>F THEN 1800
1780 NEXT J
1790 FOR I=1 TO NX:X(I)=XC(I)+BETA*(X(I)-XC(I)):NEXT I
1800 NTIPO=3:NMAX=10:GOSUB 1880
1810 FOR I=1 TO NX:XX(I,JG)=X(I):NEXT I
1820 IF NY<=0 THEN 1840
1830 FOR I=1 TO NY:YY(I,JG)=Y(I):NEXT I
1840 FF(JG)=F
1850 IF (NIT-IPRT)<0 THEN 1470
1860 MCC=4:GOSUB 2320:MCC=3:GOSUB 2320
1870 IPRT=IPRT+NQ:GOTO 1470
1880 REM SUBRUTINA BOX
1890 N=1
1900 GOSUB 2490
1910 IF NY<=0 THEN 2020
1920 FOR I=1 TO NY
1930 IF Y(I)<YL(I) OR YU(I)<Y(I) THEN 1950
1940 NEXT I:GOTO 2020
1950 FOR I=1 TO NX:X(I)=XC(I)+BETA*(X(I)-XC(I)):NEXT I
1960 IF (N-NMAX)>=0 THEN 1980
1970 N=N+1:GOTO 1900
1980 IF NTIPO><4 THEN 2010
1990 MCC=2:GOSUB 2320
2000 LPRINT"EL HIDROGRAMA INICIAL VIOLA ALGUNA RESTRICCION":END
2010 GOSUB 2050
2020 IF NTIPO><4 THEN 2040
2030 MCC=2:GOSUB 2320
2040 RETURN
2050 LPRINT"ERROR EN OPTIMIZACION TIPO";NTIPO
```

## PCN23: OPTHU

```

2060 LPRINT"VIOLACION DE RESTRICCION"
2070 MCC=2:GOSUB 2320:MCC=3:GOSUB 2320:END
2080 REM INICIA SUBROUTINA PARA ASIGNACION Y LECTURA DE DATOS
2090 LPRINT:LPRINT"OPTIMIZACION DEL HIDROGRAMA UNITARIO A TRAVES"
2100 LPRINT"          DEL ALGORITMO COMPLEX":LPRINT
2110 LPRINT"PROYECTO O ESTACION HIDROMETRICA:";NE$
2120 NX=M:NY=M-1:NP=0:MI=1500:NQ=50
2130 IF U$="A" THEN LS=QM/PMIN ELSE LS=1!
2140 FOR I=1 TO M:A$="HU(":B$=STR$(I)
2150 C$=")":XN$(I)=A$+B$+C$:XL(I)=0!
2160 XU(I)=LS:NEXT I:PRINT
2170 REM SE GENERA EL HIDROGRAMA UNITARIO TRIANGULAR INICIAL
2180 PRINT"SE INTRODUCEN DATOS PARA EL HIDROGRAMA UNITARIO INICIAL":PRINT
2190 INPUT"NUMERO DE INTERVALOS AL PICO:";NP:PRINT
2200 INPUT"ORDENADA MAXIMA:";OM:PRINT
2210 FOR I=1 TO NP-1
2220 X(I)=OM*I/NP:NEXT I
2230 FOR I=NP+1 TO M
2240 X(I)=OM*(M+1-I)/(M+1-NP)
2250 NEXT I:X(NP)=OM
2260 REM SE DEFINEN RESTRICCIONES DE VARIABLES DEPENDIENTES
2270 FOR I=1 TO M-1:YL(I)=0
2280 YU(I)=LS:NEXT I
2290 FO$=" EMC":FA=.002:FR=.0001
2300 RETURN
2310 REM SUBROUTINA DE IMPRESION
2320 ON MCC GOTO 2330,2340,2450,2470,2480
2330 LPRINT:RETURN
2340 LPRINT:LPRINT"VARIABLES INDEPENDIENTES:"
2350 LPRINT"NOMBRE, LIMITE INFERIOR, LIMITE SUPERIOR, VALOR INICIAL"
2360 FOR I=1 TO NX
2370 LPRINT XN$(I),XL(I),XU(I),X(I)
2380 NEXT I:LPRINT
2390 LPRINT"LAS VARIABLES DEPENDIENTES SON RESTRICCIONES DE ORDENAMIENTO"
2400 LPRINT:LPRINT"FUNCION OBJETIVO:"
2410 LPRINT"NOMBRE, VALOR INICIAL, DESVIACION RELATIVA, DESVIACION ABSOLUTA"
2420 LPRINT FO$,F,FR,FA:LPRINT
2430 PRINT"C A L C U L O S   E N   P R O C E S O":PRINT
2440 RETURN
2450 REM IMPRESION DE ITERACIONES Y VALOR DE FUNCION OBJETIVO
2460 K1MAX=KMAX+1:RETURN
2470 LPRINT"ITERACION No. ";NIT,"FMIN =";FMIN
2480 RETURN
2490 REM INICIA SUBROUTINA MODEL (Funcion Objetivo y Restricciones)
2500 REM INICIA CALCULO DEL ERROR MEDIO CUADRATICO
2510 FOR I=1 TO M:U(I)=X(I):NEXT I
2520 FOR I=1 TO NGD:QD(I)=0:NEXT I
2530 FOR I=1 TO M:FOR J=1 TO NR
2540 QD(I+J-1)=QD(I+J-1)+U(I)*PE(J)
2550 NEXT J,I:EMC=0
2560 FOR I=1 TO NGD
2570 EMC=EMC+(Q(I)-QD(I))^2:NEXT I
2580 F=SQR(EMC/NGD)

```

## PCN23: OPTHU

```

2590 REM INICIAN VARIABLES DEPENDIENTES (Rest.de Ordenamiento)
2600 FOR I=1 TO M-1
2610 IF I>NP-1 THEN 2630
2620 Y(I)=X(I+1)-X(I):GOTO 2640
2630 Y(I)=X(I)-X(I+1)
2640 NEXT I
2650 RETURN
2660 REM SUBROUTINA DE IMPRESION DE DATOS Y RESULTADOS
2670 LPRINT:LPRINT"R E S U L T A D O S:":LPRINT
2680 LPRINT"№.      GASTO      PRECIPITACION      ORDENADA      GASTO"
2690 LPRINT"      DIRECTO      EN EXCESO      DEL HU      ESTIMADO"
2700 IF U$="A" THEN 2730
2710 LPRINT"      cm/h      cm      l/h      cm/h"
2720 GOTO 2740
2730 LPRINT"      m^3/s      cm      m^3/s/cm      m^3/s"
2740 SU=0:FOR I=1 TO NGD:LPRINT USING"####";I;
2750 LPRINT USING"#####.#####";Q(I);
2760 LPRINT USING"#####.#####";PE(I);
2770 LPRINT USING"#####.#####";X(I);
2780 LPRINT USING"#####.#####";QD(I)
2790 SU=SU+X(I):NEXT I
2800 LPRINT:LPRINT"ERROR MEDIO CUADRATICO =";
2810 LPRINT USING"#####.#####";F;:LPRINT" ";G$
2820 LPRINT"SUMA DE ORDENADAS DEL HIDROGRAMA UNITARIO =";
2830 LPRINT USING"#####.#####";SU
2840 RETURN

```

## PCN24: PAMUS2MC

```

1000 REM PROGRAMA "PAMUS2MC" (Parámetros de MUSkingum por Mínimos Cuadrados)
1010 REM ESTE PROGRAMA CALCULA LOS DOS PARAMETROS DEL METODO DE MUSKINGUM
1020 REM POR EL METODO DE MINIMOS CUADRADOS PROPUESTO POR T.O'DONNELL
1030 REM JOURNAL OF HYDROLOGICAL SCIENCES, VOL.30, No.4, PP.479-496.1985.
1040 REM PROGRAMA D.F.CAMPOS ARANDA EN AGOSTO DE 1994
1050 REM TODOS LOS DATOS SE LEEN DE UN ARCHIVO "DATA"
1060 CLS:PRINT"CALCULO DE PARAMETROS DEL METODO DE MUSKINGUM"
1070 PRINT"ALGORITMO DE T.O'DONNELL DE MINIMOS CUADRADOS":PRINT
1080 INPUT"NOMBRE DE LA CRECIENTE ANALIZADA: ";NC$
1090 PRINT:PRINT"CALCULOS EN PROCESO"
1100 REM SE LEEN EL No.DE DATOS,SUS UNIDADES,EL INTERVALO Y SUS UNIDADES
1110 READ N,A$,DT,UDT$
1120 DIM I(N+1),O(N+1),P(N,3),PT(3,N),VO(N),Q(N),R(3,3),A(3,3),B(3,3),OC(N+1)
1130 REM SE LEEN GASTOS DE ENTRADA
1140 FOR J=1 TO N:READ I(J):NEXT J:I(N+1)=I(N)
1150 REM SE LEEN GASTOS DE SALIDA
1160 FOR J=1 TO N:READ O(J):NEXT J:O(N+1)=O(N)
1170 REM INICIA CONSTRUCCION DE LAS MATRICES P Y PT
1180 FOR J=1 TO N:P(J,1)=I(J+1):P(J,2)=I(J):P(J,3)=O(J):NEXT J
1190 FOR K=1 TO 3:FOR J=1 TO N:PT(K,J)=P(J,K):NEXT J,K
1200 REM INICIA MULTIPLICACION DE MATRICES PT Y VO (Q=PT*VO)
1210 FOR J=1 TO N:VO(J)=O(J+1):NEXT J
1220 FOR J=1 TO 3:S=0:FOR K=1 TO N
1230 S=S+PT(J,K)*VO(K):Q(J)=S:NEXT K,J
1240 REM INICIA MULTIPLICACION DE MATRICES PT Y P (R=PT*P)
1250 FOR J=1 TO 3:FOR K=1 TO 3:S=0
1260 FOR L=1 TO N:S=S+PT(J,L)*P(L,K):NEXT L
1270 R(J,K)=S:NEXT K,J
1280 REM INICIA INVERSION DE LA MATRIZ R (RI=B)
1290 FOR J=1 TO 3:FOR K=1 TO 3:A(J,K)=R(J,K):NEXT K
1300 B(J,J)=1:NEXT J
1310 FOR J=1 TO 3:FOR I=J TO 3
1320 IF A(I,J)<>0 THEN 1340
1330 NEXT I:PRINT"MATRIZ SINGULAR":END
1340 FOR K=1 TO 3:S=A(J,K):A(J,K)=A(I,K):A(I,K)=S
1350 S=B(J,K):B(J,K)=B(I,K):B(I,K)=S:NEXT K
1360 T=1/A(J,J):FOR K=1 TO 3:A(J,K)=T*A(J,K)
1370 B(J,K)=T*B(J,K):NEXT K
1380 FOR L=1 TO 3:IF L=J THEN 1410
1390 T=-A(L,J):FOR K=1 TO 3:A(L,K)=A(L,K)+T*A(J,K)
1400 B(L,K)=B(L,K)+T*B(J,K):NEXT K
1410 NEXT L,J
1420 REM INICIA MULTIPLICACION MATRIZ RI POR VECTOR Q
1430 FOR J=1 TO 3:S=0:FOR K=1 TO 3
1440 S=S+B(J,K)*Q(K):NEXT K:C(J)=S:NEXT J
1450 C1=C(1):C2=C(2):C3=C(3):OC(1)=O(1)
1460 REM CALCULO DEL ERROR MEDIO CUADRATICO (EMC)
1470 FOR J=1 TO N:OC(J+1)=C1*I(J+1)+C2*I(J)+C3*OC(J)
1480 DI=DI+(OC(J)-O(J))^2:NEXT J:EMC=SQR(DI/N)
1490 REM CALCULO DE LOS PARAMETROS DE MUSKINGUM
1500 X=(C2-C1)/(2*(1-C1)):K=DT*(1-C1)/(C1+C2)
1510 REM INICIA IMPRESION DE DATOS Y RESULTADOS
1520 PRINT:PRINT"INICIA IMPRESION DE DATOS Y RESULTADOS"
1530 LPRINT"CALCULO DE PARAMETROS DEL METODO DE MUSKINGUM"

```



## PCN24: PAMUS2MC

```
1540 LPRINT"ALGORITMO DE MINIMOS CUADRADOS DE T.O'DONNELL":LPRINT
1550 LPRINT"CRECIENTE ANALIZADA: ";NC$
1560 LPRINT"NUMERO DE PAREJAS DE GASTOS: ";N
1570 LPRINT"INCREMENTO DE TIEMPO: ";DT,UDT$
1580 LPRINT"VALOR DEL PARAMETRO C1 =";C1
1590 LPRINT"VALOR DEL PARAMETRO C2 =";C2
1600 LPRINT"VALOR DEL PARAMETRO C3 =";C3
1610 LPRINT"SUMA DE VALORES DE Ci =";C1+C2+C3:LPRINT
1620 LPRINT"VALOR DEL PARAMETRO x DE MUSKINGUM =";
1630 LPRINT USING"###.###";X
1640 LPRINT"VALOR DEL PARAMETRO K DE MUSKINGUM =";
1650 LPRINT USING"#####.###";K;:LPRINT" ";UDT$:LPRINT
1660 LPRINT"ERROR MEDIO CUADRATICO ENTRE Qobs Y Qcal= ";EMC;A$
1670 LPRINT:LPRINT"      GASTOS DE ENTRADA Y SALIDA DEL TRAMO EN ";A$
1680 LPRINT"DATO No.  ENTRADA  SALIDA OBSERV.  SALIDA CALCULADA"
1690 FOR J=1 TO N:LPRINT USING"#####";J;
1700 LPRINT USING"#####.##";I(J);:LPRINT USING"#####.##";O(J);
1710 LPRINT USING"#####.##";OC(J):NEXT J
1720 END
5000 REM ARCHIVO "DAMUSKIN" (Datos para aplicaciones de MUSKINGUM)
5010 REM INICIAN DATOS DEL EJEMPLO 9.10
5020 DATA 28,m^3/s,1,dias
5030 DATA 2.6,3.9,5.9,9.1,12.5,15.5,17.8,19.2,19.6,19.6,19.4,18.6,18.1
5040 DATA 17.2,16.3,15.1,13.7,12.1,10.4,8.4,6.7,5.2,3.9,2.9,2.3,2.1,1.8,1.6
5050 DATA 2.4,2.9,4,5.8,8.2,10.8,13.3,15.3,16.7,17.8,18.3,18.8,18.7
5060 DATA 18.4,18,17.3,16.4,15.3,13.8,12.2,10.3,8.5,6.6,5,3.7,2.8,2.4,2.1
5070 REM INICIAN DATOS DEL PROBLEMA 9.10
5080 DATA 24,m^3/s,1,dias
5090 DATA 50,55,190,230,235,230,520,590,470,350,270,190
5100 DATA 175,140,125,110,120,125,120,90,80,60,65,60
5110 DATA 50,105,180,260,290,290,430,550,490,420,340,270
5120 DATA 220,170,140,120,120,125,120,100,70,40,30,25
```

## PCN25: OPTMUS2

```
1000 REM PROGRAMA "OPTMUS2"(OPTimizacion del MUSkingum de 2 parámetros)
1010 REM PROGRAMA PARA CALCULO DE LOS DOS PARAMETROS OPTIMOS DEL
1020 REM METODO DE MUSKINGUM CON RESTRICION EN x DE 0 A 0.50 POR
1030 REM MEDIO DEL ALGORITMO COMPLEX DE PROGRAMACION NO LINEAL DE
1040 REM MULTIPLES VARIABLES RESTRINGIDAS.PROGRAMO D.F.CAMPOS (FEB.95)
1050 REM RESULTADOS IMPRESOS
1060 REM SE INTRODUCEN DATOS BASICOS
1070 CLS:PRINT"OPTIMIZACION DEL METODO DE MUSKINGUM DE 2"
1080 PRINT" PARAMETROS POR MEDIO DEL ALGORITMO COMPLEX":PRINT
1090 INPUT"NOMBRE DE LA CRECIENTE ANALIZADA:";NC$:PRINT
1100 REM SE LEEN LOS DATOS BASICOS DE LA CRECIENTE
1110 READ NPG,UG$,DT,UDT$:M=2
1120 DIM XDEV(M),SX(M,2*M),I(NPG+1),O(NPG),X(M),XN$(M),XL(M),XU(M)
1130 DIM OC(NPG+1),XC(M),XX(M,2*M),YY(2*M,2*M),FF(2*M)
1140 REM SE LEEN LOS GASTOS DE ENTRADA Y SALIDA
1150 FOR I=1 TO NPG:READ I(I):NEXT I:I(NPG+1)=I(N)
1160 FOR I=1 TO NPG:READ O(I):NEXT I
1170 REM SE LEEN PARAMETROS DEL OPTIM
1180 FOR I=1 TO M:FOR J=2 TO 2*M
1190 SX(I,J)=RND:NEXT J,I
1200 FOR I=1 TO M:XDEV(I)=0:NEXT I
1210 ALFA=1.3:BETA=.5:GOSUB 1840
1220 FOR I=1 TO NX:XC(I)=X(I):NEXT I
1230 NMAX=1:NTIPO=4:GOSUB 1740
1240 NIT=0:KMAX=2*NX:K=1
1250 FF(K)=F:FOR I=1 TO NX:XX(I,K)=X(I):NEXT I
1260 FOR I=1 TO NX:XC(I)=(XC(I)*(K-1)+X(I))/K:NEXT I
1270 IF (K-KMAX)>=0 THEN 1320
1280 K=K+1:FOR I=1 TO NX:IX=IY
1290 X(I)=XL(I)+SX(I,K)*(XU(I)-XL(I)):NEXT I
1300 NMAX=10:NTIPO=1
1310 GOSUB 1740:GOTO 1250
1320 IF NQ>0 THEN 1340
1330 IPRT=MI+1:GOTO 1350
1340 IPRT=NQ:MCC=3:GOSUB 1960
1350 NIT=NIT+1
1360 FMAX=-1E+10:FMIN=-FMAX
1370 JG=0:JL=0:FOR J=1 TO KMAX
1380 IF (FF(J)-FMAX)<=0 THEN 1400
1390 JG=J:FMAX=FF(J)
1400 IF (FF(J)-FMIN)>=0 THEN 1420
1410 FMIN=FF(J):JL=J
1420 NEXT J
1430 FDEV=FMAX-FMIN
1440 IF (FDEV-FR*ABS(FMIN-FA))>0 THEN 1490
1450 MCC=1:GOSUB 1960
1460 LPRINT"EL PROCESO CONVERGE EN ";NIT;:LPRINT"ITERACIONES"
1470 PRINT:PRINT"EL PROCESO HA T E R M I N A D O"
1480 GOSUB 2250:END
1490 IF (NIT-MI)<=0 THEN 1530
1500 MCC=1:GOSUB 1960
1510 LPRINT"EL PROCESO NO CONVERGE EN";NIT-1;:LPRINT"ITERACIONES"
1520 MCC=3:GOSUB 1960:GOSUB 2250:END
1530 FOR I=1 TO NX:XC(I)=0
```

## PCN25: OPTMUS2

```
1540 FOR J=1 TO KMAX:XC(I)=XC(I)+XX(I,J):NEXT J
1550 XC(I)=(XC(I)-XX(I,JG))/(KMAX-1):NEXT I
1560 FOR I=1 TO NX
1570 X(I)=XC(I)-ALFA*(XX(I,JG)-XC(I))
1580 IF (XU(I)-X(I))>0 THEN 1600
1590 X(I)=XU(I)-XDEV(I)
1600 IF (X(I)-XL(I))>0 THEN 1620
1610 X(I)=XL(I)+XDEV(I)
1620 NEXT I
1630 NTIPO=2:NMAX=10:GOSUB 1740
1640 FOR J=1 TO KMAX
1650 IF J><JG AND FF(J)>F THEN 1680
1660 NEXT J
1670 FOR I=1 TO NX:X(I)=XC(I)+BETA*(X(I)-XC(I)):NEXT I
1680 NTIPO=3:NMAX=10:GOSUB 1740
1690 FOR I=1 TO NX:XX(I,JG)=X(I):NEXT I
1700 FF(JG)=F
1710 IF (NIT-IPRT)<0 THEN 1350
1720 MCC=4:GOSUB 1960:MCC=3:GOSUB 1960
1730 IPRT=IPRT+NQ:GOTO 1350
1740 REM SUBROUTINA BOX
1750 N=1
1760 GOSUB 2150
1770 IF NTIPO><4 THEN 1790
1780 MCC=2:GOSUB 1960
1790 RETURN
1800 LPRINT"ERROR EN OPTIMIZACION TIPO";NTIPO
1810 LPRINT"VIOLACION DE RESTRICCIÓN"
1820 MCC=2:GOSUB 1960:MCC=3:GOSUB 1960:END
1830 REM INICIA SUBROUTINA PARA ASIGNACION Y LECTURA DE DATOS
1840 LPRINT:LPRINT"OPTIMIZACION DEL METODO DE MUSKINGUM DE 2 PARAMETROS"
1850 LPRINT"          POR MEDIO DEL ALGORITMO COMPLEX":LPRINT
1860 LPRINT"NOMBRE DE LA CRECIENTE ANALIZADA:";NC$
1870 LPRINT"INCREMENTO DE TIEMPO:";DT;:LPRINT" ";UDT$
1880 NX=M:NY=0:NP=0:MI=1000:NQ=50
1890 REM NOMBRES, VALORES INICIALES Y LIMITES DE LAS VAR. INDEPENDIENTES
1900 FOR I=1 TO 2: XN$(I)=" K":XN$(2)=" x":NEXT I
1910 X(1)=0:X(2)=0
1920 XL(1)=0:XU(1)=50:XL(2)=0:XU(2)=.5
1930 FO$=" EMC":FA=.002:FR=.0001
1940 RETURN
1950 REM SUBROUTINA DE IMPRESION
1960 ON MCC GOTO 1970,1980,2110,2130,2140
1970 LPRINT:RETURN
1980 LPRINT:LPRINT"VARIABLES INDEPENDIENTES:"
1990 LPRINT"NOMBRE, LIMITE INFERIOR, LIMITE SUPERIOR, VALOR INICIAL"
2000 FOR I=1 TO NX
2010 LPRINT XN$(I),XL(I),XU(I),X(I)
2020 IF X(I)<XL(I) OR X(I)>XU(I) THEN 2030 ELSE 2040
2030 PRINT"LAS VARIABLES INICIALES VIOLAN ALGUNA RESTRICCIÓN":END
2040 NEXT I:LPRINT
2050 LPRINT"NO SE TIENEN VARIABLES DEPENDIENTES"
2060 LPRINT:LPRINT"FUNCION OBJETIVO:"
2070 LPRINT"NOMBRE, VALOR INICIAL, DESV. RELATIVA, DESV. ABSOLUTA"
```

## PCN25: OPTMUS2

```

2080 LPRINT FO$,F,FR,FA:LPRINT
2090 PRINT"C A L C U L O S   E N   P R O C E S O":PRINT
2100 RETURN
2110 REM IMPRESION DE ITERACIONES Y VALOR DE FUNCION OBJETIVO
2120 K1MAX=KMAX+1:RETURN
2130 LPRINT"ITERACION No. ";NIT,"FMIN =";FMIN
2140 RETURN
2150 REM INICIA SUBROUTINA MUSKINGUM (Funcion Objetivo)
2160 REM INICIA CALCULO DEL ERROR MEDIO CUADRATICO
2170 KK=X(1):XX=X(2):DEN=2*KK*(1-XX)+DT:C3=(2*KK*(1-XX)-DT)/DEN
2180 C1=(DT-2*KK*XX)/DEN:C2=(DT+2*KK*XX)/DEN:OC(1)=O(1)
2190 FOR I=1 TO NPG:OC(I+1)=C1*I(I+1)+C2*I(I)+C3*O(I):NEXT I
2200 EMC=0:FOR I=1 TO NPG
2210 EMC=EMC+(O(I)-OC(I))^2:NEXT I
2220 F=SQR(EMC/NPG)
2230 RETURN
2240 REM SUBROUTINA DE IMPRESION DE DATOS Y RESULTADOS
2250 LPRINT:LPRINT"R E S U L T A D O S":LPRINT
2260 LPRINT"PARAMETRO x DE MUSKINGUM =":LPRINT USING"###.###";X(2)
2270 LPRINT"PARAMETRO K DE MUSKINGUM =":LPRINT USING"#####.###";X(1);
2280 LPRINT" ";UDT$
2290 LPRINT:LPRINT"COEFICIENTE C1 =":LPRINT USING"###.###";C1
2300 LPRINT"COEFICIENTE C2 =":LPRINT USING"###.###";C2
2310 LPRINT"COEFICIENTE C3 =":LPRINT USING"###.###";C3
2320 LPRINT"SUMA DE LOS COEFICIENTES Ci =";
2330 LPRINT USING"###.###";C1+C2+C3:LPRINT
2340 LPRINT"No. GASTOS DE: ENTRADA          SALIDA          Y          CALCULADO EN";
2350 LPRINT" ";UG$
2360 FOR I=1 TO NPG:LPRINT USING"###";I;
2370 LPRINT USING"#####.###";I(I);
2380 LPRINT USING"#####.###";O(I);
2390 LPRINT USING"#####.###";OC(I):NEXT I
2400 LPRINT:LPRINT"ERROR MEDIO CUADRATICO =";
2410 LPRINT USING"#####.###";F:LPRINT" ";UG$
2420 RETURN
3000 REM INICIAN DATOS DEL EJEMPLO 9.10
3010 DATA 28,m^3/s,1,dias
3020 DATA 2.6,3.9,5.9,9.1,12.5,15.5,17.8,19.2,19.6,19.6,19.4,18.6,18.1
3030 DATA 17.2,16.3,15.1,13.7,12.1,10.4,8.4,6.7,5.2,3.9,2.9,2.3,2.1,1.8,1.6
3040 DATA 2.4,2.9,4,5.8,8.2,10.8,13.3,15.3,16.7,17.8,18.3,18.8,18.7
3050 DATA 18.4,18,17.3,16.4,15.3,13.8,12.2,10.3,8.5,6.6,5,3.7,2.8,2.4,2.1
4000 REM INICIAN DATOS DEL PROBLEMA 9.10
4010 DATA 24,m^3/s,1,dias
4020 DATA 50,55,190,230,235,230,520,590,470,350,270,190
4030 DATA 175,140,125,110,120,125,120,90,80,60,65,60
4040 DATA 50,105,180,260,290,290,430,550,490,420,340,270
4050 DATA 220,170,140,120,120,125,120,100,70,40,30,25

```

# A p ndice A:

## Instrucciones empleadas del *Basic*

**E**l objetivo de este anexo consiste en presentar una descripción breve de las instrucciones y comandos del *Basic*, que fueron utilizados en el desarrollo de los 25 programas de cómputo del texto. Incluye además recomendaciones sucintas para la elaboración de programas, su prueba, documentación y almacenamiento. No se incluyen ejemplos de las instrucciones y comandos descritos, pues éstos se pueden encontrar en los diferentes listados de programas que se tienen al final de los capítulos.

### A.1 INSTRUCCIONES DE PROGRAMACIÓN

#### Programas, algoritmos y lenguajes de programación <sup>(1)</sup>

Un *programa* es un conjunto de instrucciones para la computadora, con el propósito que ésta realice una serie o secuencia de cálculos específicos y presente o imprima datos y resultados seleccionados. En cambio, un *algoritmo* es una secuencia lógica de pasos necesarios para desarrollar una tarea específica o encontrar la solución de un problema, tiene como características fundamentales tener un final y ser determinístico, es decir, que su resultado no depende de quien lo use.

Los principales lenguajes de programación en ingeniería son: FORTRAN (FORMula TRANslation) se desarrolló en la década de los años cincuenta y es el más usado en ciencias e ingeniería; BASIC (Beginner's All-purpose Symbolic Instruction Code) o código de instrucciones simbólicas de propósito general para principiantes, fue implementado en la década de los años sesenta, y por último el PASCAL que debe su nombre al científico francés Blas Pascal. Es un lenguaje estructurado que se originó en la década de los años setenta.

#### Instrucciones que se presentan <sup>(6,3,4)</sup>

El grupo de instrucciones o sentencias del lenguaje *Basic* que fueron utilizadas en los 25 programas expuestos en el texto, o que son necesarias para su operación son del orden de 30 y han sido clasificadas de la manera siguiente:

Órdenes al sistema:	Declaraciones:	Ciclos y bifurcaciones:
AUTO-RENUM	REM	FOR/NEXT/STEP
STOP-CONT	READ-DATA	IF/THEN/ELSE
LIST	RESTORE	GOSUB-RETURN
PRINT-PRINT USING	INPUT	GOTO
DELETE	DIM	ON . . . GOTO
LOAD-NEW	DEF FN	ON . . . GOSUB
SAVE	RND	
RUN	RANDOMIZE	
MERGE	END	

#### Instrucciones AUTO y RENUM

La instrucción AUTO ayuda a realizar un programa, asignando automáticamente números a las líneas de éste. Se usó en la forma: AUTO 1000 por lo cual inicia con la línea 1000 y genera incrementos de 10. Por su parte, la sentencia RENUM reasigna una numeración a un listado. Se empleó para reenumerar archivos de datos, generalmente como: RENUM 5000.

#### Instrucción REM

Permite incorporar comentarios no ejecutables en el programa. Se empleó al inicio de todo programa (línea 1000) para indicar el nombre de éste y continuar con una descripción general del algoritmo que resuelve o de los datos que incluye. Después la instrucción REM encabeza inicio de cálculos, subrutinas e impresiones.

#### Instrucciones READ-DATA y RESTORE

READ asigna a una lista de variables los valores numéricos (constantes) que se tienen en las líneas DATA. Esta lectura se corresponde en número y orden, así como en el tipo de variable. Después de la ejecución de un READ el lector del programa memoriza la posición del último dato leído. Con la instrucción RESTORE permite reiniciar, es decir colocar el lector al inicio del DATA para otra lectura.

#### Instrucción INPUT

Esta sentencia permite solicitar y acceder información (datos) por pantalla, por ello incluye un comentario descriptivo entre comillas, seguido de punto y coma y después la variable o lista de ellas separadas por comas.

#### Instrucción DIM

Para definir las dimensiones de los vectores o tablas, cuando tienen más de 11 elementos por dimensión.

#### Instrucción FOR/NEXT/STEP

Las sentencias FOR y TO permiten el control del número de repeticiones o de veces en que un cierto cálculo será realizado; la instrucción NEXT vuelve a iniciar la ejecución en la primera de las líneas incluidas en el ciclo. Cuando el incremento no se quiere que sea unitario se especifica con la instrucción STEP.

**Instrucción IF/THEN/ELSE**

Las instrucciones IF y THEN sirven para comprobar una condición y utilizar el resultado de esta verificación. La sintaxis es: IF <condición> THEN <instrucción>. La condición más sencilla es la igualdad con un número, pero frecuentemente se emplean los operadores relacionales (>, <, >=, <=, <>) y los lógicos (NOT, AND, OR). Cuando la condición es falsa se usa ELSE para dar la instrucción respectiva.

**Instrucción GOTO**

GOTO es la orden más sencilla que permite la realización de una bifurcación, o cambio en la secuencia de ejecución del programa. También permite realizar ciclos elementales al regresar a una cierta línea.

**Instrucción GOSUB**

Idéntica al GOTO, envía la ejecución del programa a la subrutina que inicia con la línea indicada en el GOSUB, pero regresa inmediatamente después de encontrar la instrucción RETURN, o fin de la subrutina.

**Instrucciones ON GOTO y ON GOSUB**

La sintaxis es ON  $x$  GOTO <números de línea>, entonces cuando la variable  $x$  toma el valor de 1 el GOTO se efectuará hacia la primera línea de la lista y si  $x = 2$  hacia la segunda y así sucesivamente. Si  $x = 0$ , o es mayor al número de líneas especificadas, el programa continúa en la siguiente instrucción. Cuando se usa GOSUB la bifurcación opera hacia una subrutina.

**Instrucción DEF FN**

La sintaxis completa es: DEF FN <nombre función> (<lista de variables>) = <función>. En realidad la lista de variables es opcional, pero permite tener presentes los valores que deben asignarse antes de evaluar la función a través de su llamado con FN. Si se omite la lista, las variables de la expresión de la función estarán relacionadas directamente con las que tienen el mismo nombre en el programa.

**Instrucciones RND y RANDOMIZE**

Genera números pseudoaleatorios con distribución uniforme en el intervalo 0 a 1. Debido a que la instrucción RND siempre genera los mismos números aleatorios, el comando RANDOMIZE permite seleccionar un nuevo número base para tener secuencias diferentes de números aleatorios. Este número base o semilla varía de -32768 a 32767.

**Instrucciones STOP, CONT y END**

Permite la interrupción de la ejecución de un programa. Después de esta sentencia se visualiza en la pantalla el último número de línea ejecutada. Para reemprender la ejecución del programa se da la instrucción CONT o tecla F5. En cambio, el comando END únicamente indica el final del programa.

**Instrucciones LIST y DELETE**

Muestra en pantalla el listado del programa que está en memoria, empezando en un número de línea específico y terminando en otro; si no se indican tales números el listado va de principio a fin. La instrucción LLIST hace lo mismo pero por impresora. DELETE funciona de manera similar a LIST pero borra fragmentos del listado de un programa que esté en memoria.

**Instrucción PRINT**

Muestra en pantalla los datos o variables que se incluyen en la lista que acompaña a esta instrucción. Cuando los elementos de tal lista se separan por punto y coma, los muestra uno a continuación del otro, pero cuando van separados por comas, asigna un espacio de 14 columnas a cada uno. La instrucción LPRINT hace lo mismo pero a través de la impresora.

**Instrucción PRINT USING**

Con sintaxis: PRINT USING"###.#";<variable> muestra en pantalla valores numéricos con redondeo de cifras decimales; para este caso, a la variable indicada le asigna tres lugares a los enteros y un solo decimal redondeado. LPRINT USING realiza lo mismo pero con la impresora.

**A.2 FUNCIONES MATEMÁTICAS**

El lenguaje *Basic* tiene un número limitado de funciones matemáticas que son el seno (SIN), el coseno (COS), la tangente (TAN), el logaritmo natural (LOG), el exponencial (EXP), la raíz cuadrada (SQR), el valor absoluto (ABS), la parte entera de un número (FIX), el redondeo al entero superior (INT) y SGN(X) que asigna un 1, 0 ó -1 según el signo de la expresión X (+,0,-). Para el resto de funciones trigonométricas se pueden emplear las expresiones <sup>[6]</sup> que se tienen en la tabulación siguiente.

<b>Función:</b>	<b>Expresión en Basic:</b>
Secante	SEC(X) = 1/COS(X)
Cosecante	CSC(X) = 1/SIN(X)
Cotangente	COT(X) = 1/TAN(X)
Arcoseno	ARCSEN(X) = ATN(X/SQR(-X*X+1))
Arcocoseno	ARCCOS(X) = ATN(X/SQR(-X*X+1))+π/2
Arcosecante	ARCSEC(X) = ATN(X/SQR(X*X-1))+SGN(SGN(X)-1)*π/2
Arcosecante	ARCCSC(X) = ATN(X/SQR(X*X-1))+(SGN(X)-1)*π/2
Arcocotangente	ARCCOT(X) = ATN(X)+π/2
Seno hiperbólico	SENH(X) = (EXP(X)-EXP(-X))/2
Coseno hiperbólico	COSH(X) = (EXP(X)+EXP(-X))/2
Tangente hiperbólica	TANH(X) = (EXP(X)-EXP(-X))/(EXP(X)+EXP(-X))
Secante hiperbólica	SECH(X) = 2/(EXP(X)+EXP(-X))
Cosecante hiperbólica	CSCH(X) = 2/(EXP(X)-EXP(-X))
Cotangente hiperbólica	COTH(X) = EXP(-X)/(EXP(X)-EXP(-X))*2+1
Arcoseno hiperbólico	ARCSEN(X) = LOG(X/SQR(X*X+1))
Arcocoseno hiperbólico	ARCCOSH(X) = LOG(X+SQR(X*X-1))
Arcotangente hiperb.	ARCTANH(X) = LOG((1+X)/(1-X))/2
Arcosecante hiperb.	ARCCSCH(X) = LOG(SGN(X)*SQR(X*X+1)+1)/X
Arcosecante hiperbólica	ARCSECH(X) = LOG(SQR(-X*X+1)+1)/X
Arcocotangente hiperb.	ARCCOTH(X) = LOG((X+1)/(X-1))/2

**A.3 INSTRUCCIONES DE OPERACIÓN DE PROGRAMAS [6.3.4]****Instrucciones SAVE y MERGE**

Con sintaxis: SAVE"<U: nombre>". Guarda un programa con el nombre del archivo especificado en la unidad U. Si se omite U: el programa que está en la memoria se guardará en la unidad que está operando, comúnmente unidad A o del disco de 3 1/2". Si no se indica la extensión del archivo se guarda como. BAS. Los archivos de datos se deben guardar en código ASCII con SAVE"<nombre>".A para después poderlos transportar y 'pegar' con la instrucción MERGE"<nombre>", por ello generalmente se numeran a partir de la línea 5000, de manera que se encadenen al final del programa que está en memoria.



### Instrucciones LOAD, NEW y RUN

LOAD tiene sintaxis idéntica a SAVE y permite cargar o traer a memoria un programa de nombre definido desde la unidad U. La instrucción NEW limpia la memoria, es decir elimina programa y variables que estaban en uso. RUN inicia la ejecución del programa que está en la memoria; esta instrucción borra o inicializa todas las variables del programa.

## A.4 DOCUMENTACIÓN DE PROGRAMAS <sup>(1,2)</sup>

Entre el planteamiento del problema por resolver, la selección del algoritmo que lo resuelve y el desarrollo del programa respectivo, es conveniente pasar a través de los *diagramas de bloques y de flujo*. Un diagrama de bloques establece y define los procesos o etapas fundamentales del problema. En cambio, el diagrama de flujo especifica los diferentes cálculos que se deben realizar y puede llegar al detalle de indicar los pasos del programa.

La etapa siguiente, después de escribir el código del programa es probarlo para buscar los errores, los cuales pueden ser de sintaxis y de semántica, los primeros violan reglas del lenguaje y los segundos están asociados a la lógica del programa y su formulación en el lenguaje usado. En este proceso de prueba del código que se desarrolla es necesario contar con ejemplos numéricos sencillos efectuados manualmente, o bien ejemplos didácticos de texto. En general para evitar los errores se recomienda la programación y verificación por módulos (diagrama de bloques) y el «abuso» de los comentarios o notas recordatorias en el programa. Esta etapa denominada *implementación* es el puente entre el algoritmo de un método y el programa o listado.

La *documentación* del programa implica como mínimo un resumen o sinopsis que incluya su objetivo(s), una relación o lista de las variables principales (nombre, símbolo original, designación en Basic, límites y unidades), la descripción de subrutinas y de funciones, así como de los datos utilizados y de los resultados, y finalmente notas o comentarios sobre su operación. Por último, el *almacenamiento* del programa debe de incluir el conservar una copia impresa que indique fecha o lapso en que fue realizado y probado, además de su copia en un disco de uso y en otro de respaldo.

Finalmente conviene tener en cuenta que los resultados de un programa algunas veces difieren si se ejecutan o 'corren' en computadoras distintas. Aunque generalmente tales discrepancias son muy pequeñas, algunas veces suelen ser significativas si el cálculo o algoritmo en cuestión es sensible a los errores de redondeo. Estos errores están asociados al número limitado de dígitos con que se representan los números en una computadora <sup>(7)</sup>.

## Referencias

1. S. C. Chapra y R. P. Canale. *Métodos Numéricos para Ingenieros*. Parte I, capítulo 2: La programación en las computadoras personales, pp. 21-62. McGraw-Hill Interamericana Editores, S. A. de C. V. México, D. F. 1988. Segunda edición.
2. B. Carnahan, H. A. Luther & J. O. Wilkes. *Applied Numerical Methods*. Appendix: Presentation of computer examples, p. 593. John Wiley & Sons. New York, U.S.A. 1969.
3. L. J. Goldstein y M. Goldstein. *IBM PC y Compatibles. Introducción al sistema operativo, programación y aplicaciones en Basic*. Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A. México, D. F. 1986. (2ª. Reimpresión).
4. B. S. Gottfried. *Teoría y problemas de Programación Basic*. Serie de compendios

- Schaum. Libros McGraw-Hill de México. México, D. F. 1976.
5. Microsoft Corporation. *Microsoft GW-BASIC. Guía del usuario*. Interpretador Versión 4. Apéndice B: Funciones matemáticas. U.S.A. 1989.
  6. B. Vanryb y R. Politis. *El Basic del IBM-PC y Compatibles*. Editorial Gustavo Gili, S. A. Barcelona, España. 1987.
  7. S. Nakamura. *Métodos Numéricos Aplicados con Software*. Capítulo 1: Causas principales de errores en los métodos numéricos, pp. 1-21. Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A. México, D. F. 1992.

# A

## pendice B:

### Introducción a la serie de Taylor y sus aplicaciones

**E**l objetivo de este anexo comprende la descripción general de la serie de Taylor, su desarrollo mediante un procedimiento gráfico-lógico y la ilustración breve de sus principales aplicaciones como herramienta matemática fundamental de los métodos numéricos. Esta designación se debe a que varios de los métodos numéricos se derivan de ella y permite además la estimación del error involucrado al emplear tal técnica.

#### B.1 INTRODUCCIÓN <sup>[6]</sup>

En el inicio del curso se citaron los tres tipos de errores que ocurren en el desarrollo y aplicación de los métodos numéricos, éstos son: de muestreo, de redondeo y de truncamiento. Los primeros son inherentes a los datos, los segundos se asocian con el número limitado de dígitos con que se representan los números en la computadora, y los terceros son originados por las aproximaciones empleadas en las fórmulas matemáticas de los modelos. Se puede indicar que la serie de Taylor es uno de los medios más importantes para obtener modelos numéricos, y analizar y cuantificar los errores de truncamiento, como se describirá brevemente en este anexo. La serie de Taylor también se puede emplear para obtener métodos numéricos.

Como también ya se indicó, en su mayoría las soluciones numéricas son sólo aproximaciones de las soluciones exactas, las cuales están basadas en representar la función por medio de polinomios y por ello habrá que investigar la precisión con la que el polinomio adoptado se aproxima a la función verdadera. Tomando en cuenta que la serie de Taylor, como suma infinita de potencias, puede representar de manera exacta a una función dentro de un cierto radio alrededor de un punto dado, entonces con base en la comparación del desarrollo polinomial de la solución numérica, con la solución exacta a partir de la serie de Taylor, es posible evaluar el error, el cual se conoce como error de truncamiento y en especial es importante descubrir el orden en donde aparece la discrepancia.

#### B.2 FUNCIONES ANALÍTICAS Y PUNTOS SINGULARES <sup>[6]</sup>

Una función  $f(x)$  es analítica en  $x = a$  si  $f(x)$ , se puede representar por medio de una serie de potencias en términos de  $h = x - a$  dentro de un radio de convergencia:  $D > |x - a| > 0$ . Una condición necesaria para que la función sea *analítica* es que todas sus derivadas sean continuas tanto en  $x = a$ , como en alguna cercanía alrededor de ese punto. Un punto en donde una función  $f(x)$  no es analítica recibe el nombre de *punto singular*. Si

$f(x)$  es diferenciable en todas partes en la cercanía de  $x_0$  excepto en  $x_0$ , entonces  $x_0$  es un punto singular.

La función  $f(x) = \tan(x)$  es analítica excepto en  $x = \pm(n+1/2)\pi$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$  los cuales son puntos singulares. En cambio, los polinomios son analíticos en todas partes. Si  $f(x)$  es analítica alrededor de  $x = a$  entonces se puede representar de manera exacta en las cercanías de  $x = a$  por medio de una serie de Taylor.

### B.3 DESARROLLO TÉRMINO A TÉRMINO DE LA SERIE DE TAYLOR [2.4.5]

La serie de Taylor aporta una formulación para predecir el valor de una función en  $x_{i+1}$  en términos de la función y de sus derivadas en una cercanía al punto  $x_i$ . Entonces si se considera que:

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) \quad (\text{B.1})$$

se está indicando que el valor de  $f$  en el nuevo punto es el mismo que el valor en el punto anterior, esto se conoce como aproximación de orden cero. Lo anterior es aceptable si  $x_i$  y  $x_{i+1}$  están muy próximos y conduce a una estimación perfecta si la función es una constante.

Pero si la función cambia en su recorrido, entonces se requieren términos adicionales para obtener una mejor estimación, por ejemplo, la aproximación de primer orden se obtiene sumando otro término al anterior para obtener:

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \quad (\text{B.2})$$

El término adicional consiste en la pendiente  $f'(x_i)$  multiplicada por la distancia entre  $x_i$  y  $x_{i+1}$ , por lo tanto ahora, la ecuación B.2 representa una línea recta que es capaz de predecir un incremento o un decremento de la función entre  $x_i$  y  $x_{i+1}$ .

Sin embargo, la ecuación B.2 sólo es exacta para una línea recta, por ello se agrega a la serie un término de segundo orden para obtener una mejoría con respecto a la curvatura de la función, si es que la tiene, entonces se tendrá:

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + f''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^2 / 2! \quad (\text{B.3})$$

De manera similar se pueden ir agregando términos con la misma estructura que ya se deduce y así obtener la expansión completa de la Serie de Taylor, ésta es:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + f''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^2 / 2! + f'''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^3 / 3! + \dots + f^n(x_i)(x_{i+1} - x_i)^n / n! + R_n \quad (\text{B.4})$$

El término residual  $R_n$  se incluye para considerar todos los términos desde  $n+1$  hasta el infinito:

$$R_n = f^{n+1}(\xi) (x_{i+1} - x_i)^{n+1} / (n+1)! \quad (\text{B.5})$$

en donde el subíndice  $n$  indica que el residuo es de la aproximación al  $n$ -ésimo orden y es un valor cualquiera de  $x$  que se encuentra entre  $x_i$  y  $x_{i+1}$ . Frecuentemente es conveniente simplificar la serie de Taylor definiendo un paso  $h = x_{i+1} - x_i$ , entonces:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + f''(x_i)h^2/2! + f'''(x_i)h^3/3! + \dots + f^n(x_i)h^n/n! + R_n \quad (\text{B.6})$$

con:

$$R_n = f^{n+1}(\xi)h^{n+1}/(n+1)! \quad (\text{B.7})$$

**Ejemplo B.1.** Empleando términos de cero a cuarto orden, aproximar la función <sup>(2.4)</sup>:

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

desde  $x_i = 0$  con  $h = 1$ , es decir, predecir el valor de la función en  $x_{i+1} = 1$ .

Como la función es conocida se puede evaluar en los puntos siguientes:

$x$	$f(x)$
0.00	1.2000
0.25	1.1035
0.50	0.9250
0.75	0.6363
1.00	0.2000

La aproximación de orden cero se obtiene con la ecuación B.1:  $f(x_{i+1}) \cong 1.20$

Por lo tanto el error relativo es:

$$\varepsilon_r = \frac{|0.20 - 1.20|}{0.20} 100 = 500\%$$

Para la aproximación de primer orden se utiliza la ecuación B.2, con:

$$f'(0) = -0.4(0)^3 - 0.45(0)^2 - 1.0(0) - 0.25 = -0.25$$

$$f(x_{i+1}) \cong 1.20 - 0.25h = 1.2 - 0.25(1) = 0.95$$

$$\varepsilon_r = \frac{|0.20 - 0.95|}{0.20} 100 = 375\%$$

La aproximación de segundo orden con base en la ecuación B.3 implica:

$$f''(0) = -1.2(0)^2 - 0.90(0) - 1.0 = -1.0$$

$$f(x_{i+1}) \cong 1.20 - 0.25h - 0.50h^2 = 0.45$$

$$\varepsilon_r = \frac{|0.20 - 0.45|}{0.20} 100 = 125\%$$

Ahora la aproximación de tercer orden según la ecuación general B.4 será:

$$f'''(0) = -2.4(0) - 0.90 = -0.90$$

$$f(x_{i+1}) \cong 1.20 - 0.25h - 0.50h^2 - 0.15h^3 = 0.30$$

$$\varepsilon_r = \frac{|0.20 - 0.30|}{0.20} 100 = 50\%$$

Finalmente, la aproximación de cuarto orden (ecuación B.4) es:

$$f^{IV}(0) = -2.40$$

$$f(x_{i+1}) \cong 1.20 - 0.25h - 0.50h^2 - 0.15h^3 - 0.10h^4 = 0.20$$

$$\varepsilon_r = 0\%$$

Como comprobación se puede aplicar la ecuación B.7, esto es:  $R_4 = \frac{f^{(5)}(\zeta)}{5!} h^5$  la cual conduce a  $R_4 = 0$ , ya que  $f^{(5)}(\zeta)$  es nula.

□

En general, la expansión en serie de Taylor de  $n$ -ésimo orden es exacta para un polinomio de  $n$ -ésimo orden, pero para otras funciones continuas diferenciables, como las exponenciales y senoidales, no se obtiene una estimación exacta mediante un número

finito de términos; en realidad cada término adicional contribuye al mejoramiento de la aproximación <sup>[2,4]</sup>.

#### B.4 OBTENCIÓN DEL MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON <sup>[3]</sup>

Truncando la serie de Taylor, ecuación B.4, después de la primera derivada, se tiene la ecuación B.2:

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \quad (\text{B.2})$$

En la intersección con el eje de las abscisas,  $f(x_{i+1})$  debe ser igual a cero, pues se está encontrando la raíz, entonces:

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \quad (\text{B.8})$$

al resolver la ecuación anterior para  $x_{i+1}$  se obtiene la fórmula del método numérico de Newton-Raphson, ésta es:

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) / f'(x_i) \quad (\text{B.9})$$

#### B.5 ERROR DEL MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON <sup>[3]</sup>

Si en el método de Newton-Raphson se considera que la solución exacta ( $x_{i+1} = x_r$ ) se obtiene al utilizar la ecuación B.3, con  $x_i$  como valor de la raíz, entonces  $f(x_i)$  será igual a cero, por lo tanto:

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_r - x_i) + f''(\zeta)(x_r - x_i)^2 / 2! \quad (\text{B.10})$$

Si a la ecuación anterior se le resta la B.8 se obtiene:

$$0 = f'(x_i)(x_r - x_{i+1}) + f''(\zeta)(x_r - x_i)^2 / 2! \quad (\text{B.11})$$

En la ecuación anterior, el término  $x_r - x_{i+1}$  es en realidad el error E, por lo tanto se puede expresar como:

$$0 = f'(x_i) E_{i+1} + f''(\zeta) E_i^2 / 2! \quad (\text{B.12})$$

Si por último se supone que hay convergencia, entonces  $x_i$  y  $\zeta$  se deben aproximar a la raíz  $x_r$ , obteniéndose:

$$E_{i+1} = [-f''(x_r) / 2f'(x_r)] E_i^2 \quad (\text{B.13})$$

La ecuación anterior indica que el error es casi proporcional al cuadrado del error anterior, lo cual significa que el número de cifras decimales correctas se duplica aproximadamente en cada iteración. A este comportamiento se le llama convergencia cuadrática.

#### B.6 SERIE DE MACLAURIN

El desarrollo de la serie de Taylor de una función alrededor de  $x = 0$  recibe el nombre de serie de Maclaurin <sup>[6]</sup>.

**Ejemplo B.2.** Obtener la expansión en serie de Maclaurin de  $\sin x$ . Para la ecuación B.4 se tiene que  $x_{i+1} = 0$  y  $x_i = 0$ , entonces se tiene <sup>[5,11]</sup>:

$$\sin x = \sin(0) + x \cos(0) - \frac{x^2}{2!} \sin(0) - \frac{x^3}{3!} \cos(0) + \frac{x^4}{4!} \sin(0) + \frac{x^5}{5!} \cos(0) + \dots$$

ya que  $\sin(0) = 0$  y  $\cos(0) = 1$ , entonces:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

□

Demostrar que las series de Maclaurin de las funciones exponencial ( $e^x$ ), coseno de  $x$  y logaritmo natural de  $x + 1$  son, respectivamente <sup>[6,11]</sup>:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

## Referencias

1. B. M. Ayyub & R. H. McCuen. *Numerical Methods for Engineers*. Chapter 1, sections 1.3, 1.4: Taylor series expansion and Applications, pp. 4-9. Prentice-Hall, New Jersey, U.S.A. 1996.
2. S. C. Chapra y R. P. Canale. *Métodos Numéricos para Ingenieros*. Parte I, capítulo 3, inciso 3.5.1: Serie de Taylor, pp. 78-84. McGraw-Hill Interamericana Editores, S. A. de C. V. México, D. F. 1988. Segunda edición.
3. S. C. Chapra y R. P. Canale. *Métodos Numéricos para Ingenieros*. Parte II, capítulo 5, recuadro 5.2: Derivación y análisis del error del método de Newton-Raphson a partir de la serie de Taylor, p.154. McGraw-Hill Interamericana Editores, S. A. de C. V. México, D. F. 1988. Segunda edición.
4. S. C. Chapra y R. P. Canale. *Métodos Numéricos para Ingenieros*. Parte Uno, capítulo 4: Serie de Taylor y errores de truncamiento, pp. 84-110. McGraw-Hill Interamericana Editores, S. A. de C. V. México, D. F. 1999. Tercera edición.
5. R. W. Hornbeck. *Numerical Methods*. Chapter 2: The Taylor Series, pp. 7-15. Quantum Publishers, Inc. New York, U.S.A. 1975.
6. S. Nakamura. *Métodos Numéricos Aplicados con Software*. Capítulo 1, Sección 1.2: Series de Taylor, pp. 1-4. Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A. México, D. F. 1992.

*Por acuerdo del señor Rector  
de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí,  
Ing. Jaime Valle Méndez,  
el libro Introducción a los Métodos Numéricos.  
de Daniel Francisco Campos Aranda,  
se terminó de imprimir el 30 de diciembre de 2003  
en los Talleres Gráficos de la  
Editorial Universitaria Potosina.  
Se imprimieron 500 ejemplares.*





Daniel Fco. Campos Aranda obtuvo el título de Ingeniero Civil en diciembre de 1972, en la entonces Escuela de Ingeniería de la UASLP. Durante el primer semestre de 1977, realizó en Madrid, España un diplomado en Hidrología General y Aplicada. Posteriormente, durante 1980-1981 llevó a cabo estudios de maestría en ingeniería en la especialidad de Hidráulica, en la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM. En esta misma institución, inició (1984) y concluyó (1987) el doctorado en ingeniería con especialidad en Aprovechamientos Hidráulicos. El Dr. Campos Aranda ha publicado artículos principalmente en revistas mexicanas de excelencia: 23 en *Ingeniería Hidráulica en México*, 6 en *Agrociencia* y 7 en *Ciencia y Desarrollo*. En congresos internacionales y nacionales ha presentado 23 y 60 ponencias, respectivamente. Es investigador nacional (nivel I: expediente 7273) desde el 1º de julio de 1991 hasta el 31 de diciembre del 2007. Actualmente es Profesor Jubilado de la UASLP.

