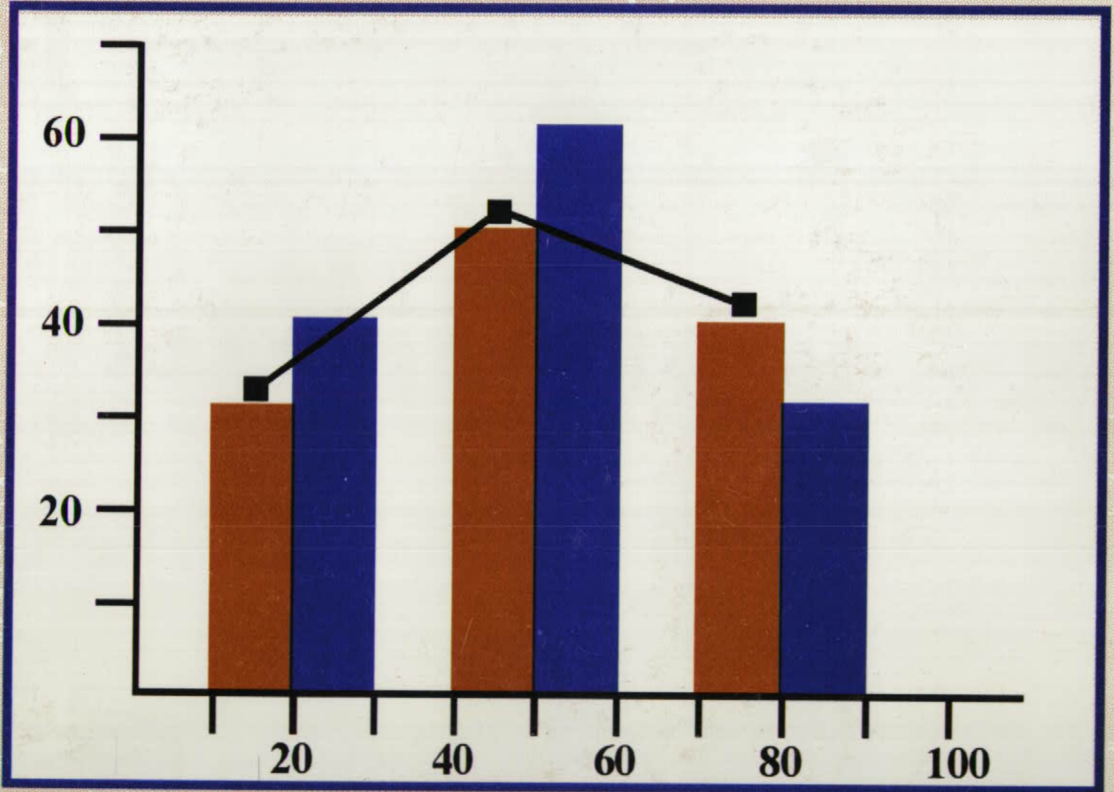
Fundamentos de

INVESTIGACION DE OPERACIONES

para Administración



Volumen II

Juan Manuel Izar Landeta

Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Unidad Zona Media

San Luis Potosí, S.L.P., México, 1998

Fundamentos de

INVESTIGACION DE OPERACIONES

para Administración

Volumen II

Fundamentos de

INVESTIGACION DE OPERACIONES

para Administración

Volumen II

Juan Manuel Izar Landeta

Universidad Autónoma de San Lusi Potosí
Unidad Zona Media

San Luis Potosí, S.L.P., México, 1998

ISBN-968-7674-31-8
0552-98002-a0138

Editorial Universitaria Potosina

Dedico este trabajo a Ina, Ana, Jorge y Juan pues ellos inspiran mi esfuerzo para no desmayar en estas arduas tareas.

Al Ingeniero Jaime Valle Méndez le doy mis más sentidas gracias por su apoyo decidido para la edición de este trabajo.

Agradezco también a mis padres y hermanas por su ayuda desinteresada y su comprensión. Así mismo les doy gracias a los compañeros catedráticos Salvador Gallegos Huerta y Fernando Cervantes Rivera, por sus valiosos comentarios y sugerencias.

Este segundo volumen trata sobre modelos probabilísticos de la Investigación de Operaciones, los cuales constituyen una útil herramienta para la toma de decisiones en el ambiente empresarial.

Con la idea de que esto sea una ayuda para la enseñanza de las materias relacionadas con el tema, me siento altamente honrado en ponerlo a la disposición del alumnado y personal docente de nuestra institución.

Juan Manuel Izar Landeta.

CONTENIDO

VOLUMEN II

CAPITULO XIII

TEORIA DE DECISIONES

Introducción.

El hombre debe diariamente tomar numerosas decisiones sobre diversos aspectos que tienen que ver con su vida. Muchas de estas decisiones son tomadas en forma rutinaria, quizás basado en sus hábitos y no de una manera racional, debido principalmente a que son asuntos triviales. Sin embargo, hay ocasiones en las cuales se tiene que tomar una decisión importante para la cual deberá evaluarse cuidadosamente tanto la información disponible, así como también las alternativas de solución con las que se cuenta.

Es por esta razón que en este capítulo veremos varios de los modelos más usuales que se emplean en la Investigación de Operaciones para la toma de decisiones.

Trataremos primeramente la terminología propia de la teoría de decisiones, luego se presentarán algunos modelos de decisión de criterios ingenuos, posteriormente se verán varios modelos empleados para distribuciones de probabilidad discretas, como son los análisis bayesiano y marginal, comparando los resultados de éstos con el valor esperado en el caso hipotético de contar con la información perfecta, también se definirá el concepto de utilidad, tal y como se maneja en este tema y finalmente se estudiará la forma de tomar una decisión cuando se tiene una distribución de probabilidad continua.

Para tratar lo antes señalado, lo primero que haremos será presentar un caso base, al cual nos remitiremos para ilustrar los diferentes conceptos que se irán manejando a lo largo del presente capítulo.

Caso Base

Expendio de tortas «El Tigre».

El señor José Sánchez tiene un expendio de tortas al menudeo y está buscando la manera de programar su trabajo para el año siguiente, por lo cual está analizando con información anterior sobre su demanda de tortas cuántas deberá preparar de modo que sus utilidades sean máximas. Para el señor Sánchez el costo de cada torta es de $ 0.80, su precio de venta es de $1.00, sólo que aquellas tortas que hayan sido preparadas y no se hayan vendido al final del día tienen que ser rematadas a $ 0.70 cada una. De una estadística que abarca 100 días de ventas pasadas, el señor Sánchez ha hallado lo siguiente:

Demanda de tortas	Número de días
900	35
1000	45
1100	20
Total	100

Además ha preparado la siguiente tabla de utilidades que puede obtener

Tabla XIII.1.- Tabla de utilidades para el expendio de tortas, en $

Número de tortas preparadas	Demanda 900	de 1000	tortas 1100
900	180	180	180
1000	170	200	200
1100	160	190	220

La cual muestra las ganancias que puede obtener para una demanda dada dependiendo del número de tortas que preparó, así, si el señor Sánchez prepara 1100 tortas y tiene una demanda de 1000, obtendrá una utilidad de 1000 (1.00-0.80) = $ 200.00 y las 100 tortas que no vende le causan una pérdida de 100 (0.80-0.70) = $10.00, por lo que su ganancia neta será de $ 190.00.

Con esta información disponible, ¿ Qué es lo que el señor Sánchez debe hacer?

Terminología de Decisiones.

Presentaremos aquí algunos de los términos más utilizados en la teoría de decisiones y sus definiciones, como es el caso de decisiones alternativas, estados de la naturaleza, resultados de una decisión, matriz de pagos y árboles de decisión.

Decisión alternativa.

Es cada una de las posibles opciones que puede elegir la persona que toma una decisión. También se les conoce como estrategias y se denotan en este capítulo como $\mathbf{D_i}$, siendo i el subíndice correspondiente a cada posibilidad, así para el caso del expendio de tortas, hay 3 decisiones alternativas posibles, que son las cantidades de tortas que el Sr. Sánchez puede preparar, siendo éstas D_1= 900, D_2= 1000 y D_3= 1100 tortas.

Estados de la naturaleza.

Estos son las acciones externas que están fuera del control de la persona que toma las decisiones, así para nuestro caso base hay 3 estados de la naturaleza, que son las posibles demandas de tortas que puede haber. Se representan como $\mathbf{E_i}$, siendo i cada posible estado. es decir E_1= 900, E_2= 1000 y E_3= 1100 tortas.

Resultado de una decisión.

Este es el valor numérico con el cual se cuantifica cada decisión para un estado de la naturaleza dado, normalmente se expresa en unidades monetarias. Así para el caso base del expendio de tortas, el resultado de elegir D_2, es decir preparar 1000 tortas ante la situación de que la demanda sea de 1100 tortas (estado de la naturaleza E_3), será de $ 200.00.

Matriz de pagos.

Esta es la tabla que contiene los resultados de tomar cada una de las posibles decisiones alternativas ante cada estado de la naturaleza que pueda suceder. También suele denominársele como *tabla de resultados o de ganancias condicionales*, puesto que representa las ganancias que pueden lograrse por elegir una decisión cualquiera $\mathbf{D_i}$, dada la condición de que suceda el estado $\mathbf{E_i}$. Para el caso base, la matriz de pagos es la tabla XIII.1 de utilidades.

Arboles de decisión.

Un árbol de decisión es una representación esquemática del proceso que se lleva a cabo para tomar una decisión. Cada autor representa un árbol bajo determinados convencionalismos, nosotros explicaremos ahora la forma como se presentarán aquí.

Todo árbol de decisión consta de dos partes fundamentales: *nodos* y *ramas*.

Los *nodos* pueden ser de dos tipos básicos, (a) nodos de decisión, que representan los eventos en los cuales se tiene que tomar una decisión y se denotan en este texto por cuadros; y (b) nodos de probabilidad, los cuales indican estados de la naturaleza y su probabilidad de que ocurran, ilustrándose por medio de círculos. Cada nodo independientemente del tipo que sea, deberá tener un resultado asociado a él.

Las ramas por su parte, muestran las diferentes posibilidades de decisión o de los estados de la naturaleza, dependiendo del tipo de nodo del cual parten, por lo tanto partirán tantas ramas desde un nodo de probabilidad como estados de la naturaleza haya y desde un nodo de decisión como alternativas de decisión existan. Todas las ramas inician desde un nodo que puede ser de cualquiera de los dos tipos y llegan a otro, con la excepción de las ramas terminales, las cuales siempre parten de un nodo de probabilidad y no finalizan en un nodo, sólo llevan señalado su resultado respectivo. Las ramas que inician en un nodo de decisión y que no son elegidas en el proceso de toma de decisiones, se marcan con una cruz en el esquema del árbol.

Para aclarar la construcción de un árbol de decisión, veremos el siguiente caso:

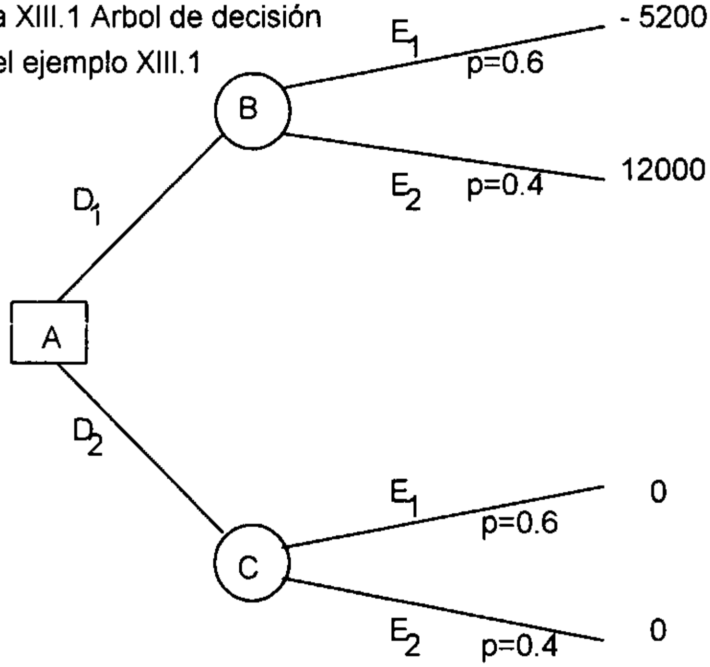
Ejemplo XIII.1.- Un agricultor de la Zona Media del estado de San Luis Potosí está considerando plantar en esta temporada de invierno un predio agrícola con chile serrano. El agricultor sabe que existe la posibilidad de que se presente una helada, lo cual le haría perder la cantidad de $ 5200, pero en caso de que aquélla no suceda, considera que ganaría $ 12,000. Conforme a datos de años anteriores se estima que la probabilidad de que este año hiele es de un 60%. Ante esta situación, constrúyase la matriz de pagos y el árbol de decisión del proceso.

Solución:

La matriz de pagos deberá incluir las dos decisiones alternativas que tiene el agricultor: D_1, sí sembrar y D_2, no sembrar, las cuales se ubicarán como los renglones de la matriz, mientras que las columnas corresponderán a los dos posibles estados de la naturaleza: E_1, que se presente helada y E_2, que no se presente. Con esto la matriz de pagos con sus resultados en $ será la siguiente:

Estados Decisión	E_1	E_2
D_1	-5200	12000
D_2	0	0

Figura XIII.1 Arbol de decisión para el ejemplo XIII.1



Por su parte el árbol de decisión será:

Donde vemos que el nodo **A** es de decisión y los nodos **B** y **C** son de probabilidad, mostrándose las ramas que parten de éstos nodos con su respectivo resultado al final de las mismas, así mismo se incluyen en ellas las probabilidades correspondientes al estado de la naturaleza que representan.

Es pertinente comentar que en este diagrama hay dos omisiones, las cuales son: (a) los nodos no están señalados con sus resultados respectivos y (b) no se ha indicado en las ramas que inician en el nodo **A** alguna cruz, la cual debería ir en la rama de decisión que no vaya a ser tomada, conforme a la metodología establecida para la construcción del árbol. Esto dos hechos se deben a que el problema de decisión no ha sido resuelto.

Como podemos observar en este ejemplo, el esquema del árbol nos muestra el proceso de toma de decisiones que debe llevarse a cabo para solucionar el caso, el cual inicia en el extremo terminal de las ramas de los estados de la naturaleza, evaluando luego los resultados que corresponderán a los nodos de probabilidad B y C, para finalmente pasar al nodo de decisión **A**, cuyo resultado será el de la mejor decisión alternativa de las existentes.

Modelos de Decisión de Criterios Ingenuos.

Estos modelos son llamados de criterios ingenuos porque no toman en cuenta las probabilidades que tiene cada estado de la naturaleza de suceder, por lo cual también suele llamárseles modelos de decisión sin datos previos.

En este texto presentaremos 5 modelos de este tipo, los cuales son: (a) *Modelo Minimax*, (b) *Modelo Optimista*, (c) *Modelo de Minimización del Arrepentimiento*, (d) *Modelo de Maximización del Pago Promedio* y (e) *Modelo de Maximización del Punto Medio.*

Modelo Minimax.

Este modelo también es conocido como pesimista y como criterio de decisión de *Wald*. Se basa en suponer que la naturaleza es un contrincante muy inteligente que hará acontecer aquel estado que es menos conveniente para quien toma las decisiones. Consta de las siguientes etapas:

1.- Para cada posible decisión $\mathbf{D_i}$, deberá tomarse el peor resultado, es decir, el valor mínimo.

2.- Con los resultados del paso anterior, se debe seleccionar aquella decisión correspondiente al valor máximo.

Modelo Optimista.

Este modelo también es conocido como *Criterio de decisión de Hurwicz* y es totalmente opuesto al anterior, ya que considera que la naturaleza siempre jugará a favor del tomador de decisiones. Consiste en los pasos siguientes:

1.- Para cada posible decisión $\mathbf{D_i}$, tomar su mejor resultado, es decir el valor máximo.

2.- De los resultados del paso anterior, elegir aquella opción que tenga el valor máximo.

Modelo de Minimización del Arrepentimiento.

A este modelo también se le denomina *Criterio de decisión de Savage* y está basado en el hecho de que el encargado de tomar las decisiones puede arrepentirse de no haber elegido una opción adecuada, entonces lo que se hace es convertir la matriz de pagos en una matriz de arrepentimientos, para la cual los valores de sus elementos se calculan con la ecuación siguiente:

Arrepentimiento del elemento del renglón i y de la columna j	=	Pago máximo de la columna j	-	Pago del elemento del renglón **i**, columna **j**	Ec.(XIII.1)

El procedimiento para este modelo es el siguiente:

1.- Obtener los arrepentimientos para todos los elementos de la matriz de pagos por medio de la Ec.(XIII.1), con los cuales formaremos la matriz de arrepentimientos.

2.- Para cada decisión D_i, hallar el máximo valor de su arrepentimiento respectivo y listarlo.

3.- De la lista del paso anterior, se elige la decisión que tenga el valor mínimo.

Modelo de Maximización del Pago Promedio.

Este modelo también es conocido como *Criterio de decisión de Laplace* y consiste básicamente en las siguientes etapas:

1.- Para cada decisión D_i, hallar el pago promedio, el cual se obtiene al dividir la suma de todos los elementos del renglón **i** en la matriz de pagos, entre el número de ellos.
2.- Se elige aquella decisión que tenga el valor máximo del pago promedio.

Modelo de Maximización del Punto Medio.

Este modelo es muy parecido al anterior, con la diferencia de que en éste se obtiene el punto medio para cada decisión, el cual se calcula por medio de la siguiente fórmula:

$$\text{Punto medio para } D_i = (\text{Valor máximo del renglón } i + \text{Valor mínimo del renglón } i)/2 \qquad \text{Ec.(XIII.2)}$$

Consta de los siguientes pasos:

1.- Hallar para cada decisión D_i el punto medio, mediante la Ec.(XIII.2).
2.- Seleccionar la decisión que tenga el valor máximo del punto medio.

A continuación presentaremos un ejemplo resuelto, para ilustrar la aplicación de los modelos de criterios ingenuos.

Ejemplo XIII.2.- Aplicar cada uno de los modelos de criterios ingenuos al caso base.

Solución: La matriz de pagos viene dada por la tabla XIII.1, a la cual procederemos a aplicarle la metodología de cada modelo.

(a) Modelo *Minimax.*

Conforme a los pasos señalados, lo primero será listar para cada posible decisión el pago mínimo, esto da lo siguiente:

Decisión D_i	Pago Mínimo, $
D_1	180
D_2	170
D_3	160

De estos valores el máximo es 180, por lo cual conforme al paso 2, la decisión elegida bajo este criterio será D_1, es decir, preparar 900 tortas.

(b) Modelo *Optimista.*

Ahora anotaremos para cada decisión su pago máximo, lo cual da lugar a la siguiente relación:

Decisión, D_i	Pago Máximo, $
D_1	180
D_2	200
D_3	220

De los cuales vemos que el valor máximo de ellos corresponde a la decisión D_3, es decir, preparar 1100 tortas.

(c) Modelo de Minimización del Arrepentimiento.

Lo primero será hallar los arrepentimientos para cada uno de los 9 elementos de la matriz de pagos por medio de la Ec.(XIII.1), los cuales serán:

Para el primer renglón y primera columna,

Arrepentimiento = 180 - 180 = 0

Para el primer renglón y segunda columna,

Arrepentimiento = 200 - 180 = 20

Para el primer renglón y tercera columna,

Arrepentimiento = 220 - 180 = 40

Para el segundo renglón y primera columna,

Arrepentimiento = 180 - 170 = 10

Para el segundo renglón y segunda columna,
Arrepentimiento = 200 - 200 = 0
Para el segundo renglón y tercera columna,
Arrepentimiento = 220 - 200 = 20
Para el tercer renglón y primera columna,
Arrepentimiento = 180 - 160 = 20
Para el tercer renglón y segunda columna,
Arrepentimiento = 200 - 190 = 10
Para el tercer renglón y tercera columna,
Arrepentimiento = 220 - 220 = 0

Con esto nuestra matriz de arrepentimientos es:

Estado Decisión	E_1	E_2	E_3
D_1	0	20	40
D_2	10	0	20
D_3	20	10	0

Ahora de acuerdo al paso 2 de la metodología descrita, listaremos para cada decisión su valor máximo de arrepentimiento,

Decisión, $\mathbf{D_i}$	Arrepentimiento máximo
D_1 (900)	40
D_2 (1000)	20
D_3 (1100)	20

Finalmente conforme al paso 3, el valor mínimo de esta lista corresponde a un empate entre $\mathbf{D_2}$ y $\mathbf{D_3}$, por lo que bajo este criterio podemos seleccionar cualquiera de estas dos decisiones.

(d) Modelo de *Maximización del Pago Promedio.*
Para cada decisión hallaremos el pago promedio:
Para $\mathbf{D_1}$,
Pago promedio = (180+180+180)/3 = 180
Para $\mathbf{D_2}$,
Pago promedio = (170+200+200)/3 = 190
Para $\mathbf{D_3}$,
Pago promedio = (160+190+220)/3 = 190

De aquí debemos elegir la decisión que tenga el valor máximo, por lo que nuevamente hay un empate entre $\mathbf{D_2}$ y $\mathbf{D_3}$.

(e) Modelo de *Maximización del Punto Medio.*
Lo primero será obtener para cada decisión el punto medio mediante la Ec.(XIII.2), lo cual llevaremos a cabo:
Para $\mathbf{D_1}$,
Punto medio = (180+180)/2 = 180
Para $\mathbf{D_2}$,
Punto medio = (170+200)/2 = 185
Para $\mathbf{D_3}$,
Punto medio = (160+220)/2 = 190

Por lo que de acuerdo a lo indicado por el paso 2 del procedimiento, escogeremos a D_3, por ser la decisión con el máximo valor del punto medio.

Modelos para Distribución de Probabilidad Discreta.

Estos modelos se utilizan cuando se tienen datos previos acerca de las probabilidades que tienen los diferentes estados de la naturaleza de suceder y que resultan especialmente adecuados cuando la cantidad de alternativas posibles de decisión no es elevada. Son más recomendables que los modelos de criterios ingenuos vistos anteriormente.

En este inciso presentaremos el *Análisis de Bayes* y el *Análisis Marginal*, luego se tratará la manera de obtener las ganancias esperadas para una decisión cuando se cuenta con la información perfecta y finalmente se verá el concepto de utilidad, tal y como se maneja en la teoría de decisiones.

Análisis de Bayes.

Este es un método muy popular para tomar decisiones cuando el número de opciones alternativas no es alto. Se divide en 2 partes, las cuales son: Criterio *A priori* y Criterio *A posteriori*, los que se presentan en seguida.

Criterio *A priori*.

Este es un modelo muy simple pero no menos útil para quien enfrenta el problema de tomar una decisión. También suele conocérsele como *Método de las Ganancias Esperadas*, en condiciones de incertidumbre. Consiste en calcular la ganancia esperada para cada una de las posibles decisiones alternativas y elegir la que sea máxima. La ganancia esperada se obtiene por medio de la siguiente ecuación:

$$GE_i = \sum_{j=1}^{n} p(E_j) \cdot O_{ij} \qquad \text{Ec.(XIII.3)}$$

donde GE_i = Ganancia esperada para la decisión i

$p(E_j)$ = Probabilidad del estado de la naturaleza j

O_{ij} = Pago o resultado obtenido cuando se toma la decisión i y sucede el estado de la naturaleza j

n = Número de estados de la naturaleza posibles

Como podemos observar de esta ecuación, los valores O_{ij} son los elementos de la matriz de pagos. Ilustraremos esta metodología al aplicarla al caso base.

Ejemplo XIII.3.- ¿ Qué decisión debe tomar el Sr. José Sánchez bajo el criterio *a priori* ?

Solución: En el caso base hay 3 posibles decisiones y 3 estados de la naturaleza, por lo que **n=3.**

La matriz de pagos es la información contenida en la tabla XIII.1, mientras que las probabilidades de cada estado de la naturaleza se obtienen mediante la división del número de días en que sucedió una demanda dada entre el total de días tomados, por lo que conforme a la estadística que obtuvo el Sr. Sánchez de sus ventas anteriores, tenemos:

$p(E_1)$ = 35/100 = 0.35, probabilidad de que la demanda sea de 900 tortas
$p(E_2)$ = 45/100 = 0.45, " " " " " " 1000 "
$p(E_3)$ = 20/100 = 0.20, " " " " " " 1100 "

Entonces al aplicar la Ec.(XIII.3) a nuestro caso tendremos :

Para la decisión 1,

$$GE_1 = p(E_1)\,O_{11} + p(E_2)\,O_{12} + p(E_3)\,O_{13}$$
$$= (0.35)(180) + (0.45)(180) + (0.20)(180)$$
$$= 180.0$$

Para la decisión 2,

$$GE_2 = p(E_1)\,O_{21} + p(E_2)\,O_{22} + p(E_3)\,O_{23}$$
$$= (0.35)(170) + (0.45)(200) + (0.20)(200)$$
$$= 189.5$$

Para la decisión 3,

$$GE_3 = p(E_1)\,O_{31} + p(E_2)\,O_{32} + p(E_3)\,O_{33}$$
$$= (0.35)(160) + (0.45)(190) + (0.20)(220)$$
$$= 185.5$$

Por lo que la mejor decisión es la segunda, es decir preparar 1000 tortas, para obtener una ganancia de $ 189.50. El árbol de decisión respectivo se presenta en la figura XIII.2

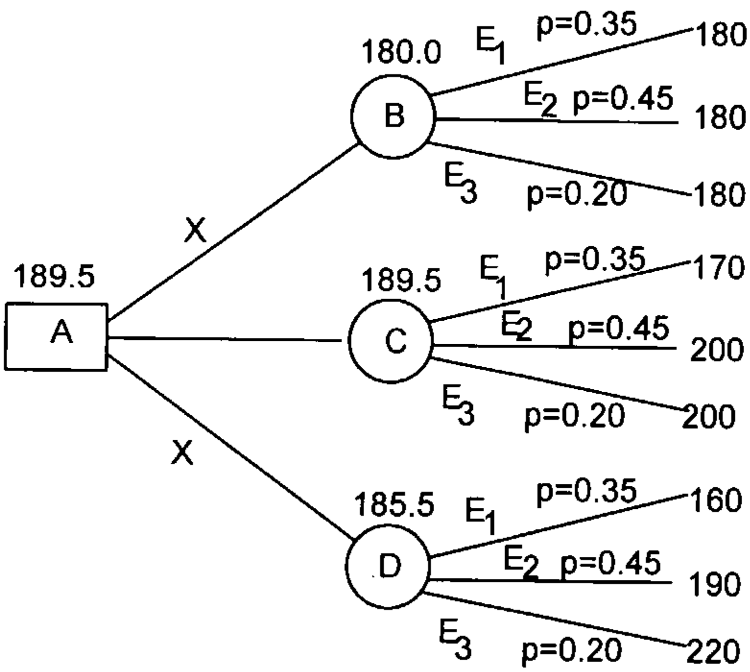


Figura XIII.2 Arbol de decisión para el casocaso base bajo el criterio *a priori*

Este árbol a diferencia del de la figura XIII.1, ya está completo, puesto que se han calculado los valores para cada nodo y se ha tomado una decisión.

Criterio ***A posteriori.***

Este método consiste en calcular las ganancias esperadas después de haber modificado las probabilidades de los estados de la naturaleza, lo cual se efectúa basado en información que se obtiene mediante pruebas experimentales. Estas pruebas nos dan datos sobre las probabilidades condicionales de que un pronóstico se cumpla dado que sucede en realidad un determinado estado de la naturaleza.

Si llamamos Q_i al pronóstico de la decisión **i**, siendo E_j el estado de la naturaleza correspondiente, entonces la información que es posible obtener mediante la experimentación es la probabilidad condicional de Q_i dada E_j, denominada $p(Q_i \mid E_j)$. Sin embargo, los datos que se requieren para calcular las ganancias esperadas son las probabilidades condicionales $p(E_j \mid Q_i)$, es decir la probabilidad de que haya sucedido **j**, dado que fue pronosticado **i**. No obstante la anterior inconveniencia, el *teorema de Bayes* relaciona a ambas probabilidades condicionales, de modo que podemos obtener estas últimas a partir de las primeras. La fórmula para este teorema conforme a la notación que se está manejando es la siguiente:

$$p(E_j \mid Q_i) = \frac{p(Q_i \mid E_j) \, . \, p(E_j)}{p(Q_i)} \qquad \text{Ec.(XIII.4)}$$

donde

i = Alternativa de decisión
j = Estado de la naturaleza
$p(Q_i \mid E_j)$ = Probabilidad condicional de haber pronosticado i, dado que sucedió j
$p(E_j \mid Q_i)$ = Probabilidad condicional de que suceda el estado j, dado que fue pronosticada **i**
$p(E_j)$ = Probabilidad del estado de la naturaleza **j**
$p(Q_i)$ = Probabilidad de haber pronosticado **i**

Por su parte $p(Q_i)$ se obtiene con la siguiente ecuación:

$$p(Q_i) = \sum_{j=1}^{n} p(Q_i \mid E_j) \, . \, p(E_j) \qquad \text{Ec.(XIII.5)}$$

Siendo **n** el número total de estados de la naturaleza.

Por su parte la ganancia esperada **GE** para el criterio *a posteriori* se obtiene con la siguiente ecuación:

$$GE = \sum_{i=1}^{m} GE(Q_i)^{*} \, . \, p(Q_i) \qquad \text{Ec.(XIII.6)}$$

Donde **m** es el número de alternativas de decisión y $GE(Q_i)^*$ es la ganancia esperada óptima cuando el pronóstico dado fue i, la cual se obtiene para cada pronóstico seleccionando la mayor de las **n** ganancias $GE_k(Q_i)$ posibles, cada una de las cuales se estima por medio de la siguiente fórmula:

$$GE_k(Q_i) = \sum_{j=1}^{n} p(E_j \mid Q_i) \, . \, O_{kj} \qquad \text{Ec.(XIII.7)}$$

Donde los elementos O_{kj} son los resultados de la matriz de pagos.

A continuación presentaremos un problema de este tipo para ilustrar la aplicación de las fórmulas antes vistas.

Ejemplo XIII.4.- Un estudiante universitario le ofrece al Sr. Sánchez darle un pronóstico sobre sus posibles demandas de tortas, a fin de que la decisión que se tome sea la más conveniente.

El estudiante le indica al Sr. Sánchez que de 100 días de ventas analizados, se obtuvieron los siguientes resultados:

Demanda de tortas	Número de días
900	35
1000	45
1100	20
Total	100

Mientras que para esos días su pronóstico había sido:
Para los 35 días en que se vendieron 900 tortas,

Demanda pronosticada	Número de días
900	13
1000	14
1100	8
Total	35

Para los 45 días en que se vendieron 1000 tortas,

Demanda pronosticada	Número de días
900	17
1000	18
1100	10
Total	45

Para los 20 días de venta de 1100 tortas,

Demanda pronosticada	Número de días
900	8
1000	5
1100	7
Total	20

¿ Cuál será la ganancia esperada para el Sr. Sánchez bajo el criterio *a posteriori* ?

Solución: La información que ya tenemos es la matriz de pagos dada por la tabla XIII.1 y las probabilidades de los estados de la naturaleza $p(E_j)$.

Entonces lo primero será convertir la información de los pronósticos dados por el estudiante al Sr. Sánchez en probabilidades condicionales, $p(Q_i \mid E_j)$, así para el estado de la naturaleza E_1, vender 900 tortas tendremos:

$$p(Q_1 \mid E_1) = 13/35 = 0.3714$$
$$p(Q_2 \mid E_1) = 14/35 = 0.4000$$
$$p(Q_3 \mid E_1) = 8/35 = 0.2286$$

Por su parte para el estado de la naturaleza E_2, o sea vender 1000 tortas,

$$p(Q_1 \mid E_2) = 17/45 = 0.3778$$
$$p(Q_2 \mid E_2) = 18/45 = 0.4000$$
$$p(Q_3 \mid E_2) = 10/45 = 0.2222$$

Finalmente para $\mathbf{E_3}$, vender 1100 tortas,

$$p(Q_1 \mid E_3) = 8/20 = 0.4000$$
$$p(Q_2 \mid E_3) = 5/20 = 0.2500$$
$$p(Q_3 \mid E_3) = 7/20 = 0.3500$$

El siguiente paso es obtener para cada pronóstico $\mathbf{Q_i}$, la ganancia esperada óptima $\mathbf{GE(Q_i)^*}$, para lo cual utilizaremos el *teorema de Bayes* para calcular las probabilidades condicionales $\mathbf{p(E_j \mid Q_i)}$, para posteriormente hallar las ganancias esperadas $\mathbf{GE_k(Q_i)}$ para cada decisión y de aquí elegir la óptima, $\mathbf{GE(Q_i)^*}$.

Entonces procediendo para el primer pronóstico $\mathbf{Q_1}$, hallaremos $\mathbf{p(E_j \mid Q_1)}$, por la Ec.(XIII.4):

Para **j=1**,

$$p(E_1 \mid Q_1) = p(Q_1 \mid E_1)\, p(E_1)/p(Q_1)$$

Por su parte $\mathbf{p(Q_1)}$ conforme a la Ec.(XIII.5) es:

$$\begin{aligned} p(Q_1) &= p(Q_1 \mid E_1)p(E_1) + p(Q_1 \mid E_2)p(E_2) + p(Q_1 \mid E_3)p(E_3) \\ &= (0.3714)\ (0.35) + (0.3778)\ (0.45) + (0.40)\ (0.20) \\ &= 0.38 \end{aligned}$$

Entonces $\quad p(E_1 \mid Q_1) = (0.3714)\ (0.35)\ /\ (0.38) = 0.3421$

Para **j=2**,

$$\begin{aligned} p(E_2 \mid Q_1) &= p(Q_1 \mid E_2)\, p(E_2)/p(Q_1) \\ &= (0.3778)\ (0.45)\ /\ (0.38) \\ &= 0.4474 \end{aligned}$$

Para **j=3**,

$$\begin{aligned} p(E_3 \mid Q_1) &= p(Q_1 \mid E_3)\, p(E_3)/p(Q_1) \\ &= (0.40)\ (0.20)\ /\ (0.38) \\ &= 0.2105 \end{aligned}$$

Ahora hallaremos para cada decisión la ganancia esperada $\mathbf{GE_k(Q_1)}$ mediante la Ec.(XIII.7):

Para **k=1**,

$$\begin{aligned} GE_1(Q_1) &= p(E_1 \mid Q_1)\ O_{11} + p(E_2 \mid Q_1)\ O_{12} + p(E_3 \mid Q_1)\ O_{13} \\ &= (0.3421)\ (180) + (0.4474)\ (180) + (0.2105)\ (180) \\ &= 180.0 \end{aligned}$$

Para **k=2**,

$$\begin{aligned} GE_2(Q_1) &= p(E_1 \mid Q_1)\ O_{21} + p(E_2 \mid Q_1)\ O_{22} + p(E_3 \mid Q_1)\ O_{23} \\ &= (0.3421)\ (170) + (0.4474)\ (200) + (0.2105)\ (200) \\ &= 189.74 \end{aligned}$$

Para **k=3**,

$$\begin{aligned} GE_3(Q_1) &= p(E_1 \mid Q_1)\ O_{31} + p(E_2 \mid Q_1)\ O_{32} + p(E_3 \mid Q_1)\ O_{33} \\ &= (0.3421)\ (160) + (0.4474)\ (190) + (0.2105)\ (220) \\ &= 186.05 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbf{GE(Q_1)^*}$ es 189.74 por ser la mayor.

Ahora haremos algo similar para el segundo pronóstico $\mathbf{Q_2}$, hallando primeramente la probabilidad $\mathbf{p(E_j \mid Q_2)}$, por medio de la Ec.(XIII.4):

Para **j=1**,

$$p(E_1 \mid Q_2) = p(Q_2 \mid E_1)\, p(E_1)/p(Q_2)$$

Por su parte $\mathbf{p(Q_2)}$ se obtiene con la Ec.(XIII.5):

$$\begin{aligned} p(Q_2) &= p(Q_2 \mid E_1)p(E_1) + p(Q_2 \mid E_2)p(E_2) + p(Q_2 \mid E_3)p(E_3) \\ &= (0.40)\ (0.35) + (0.40)\ (0.45) + (0.25)\ (0.20) \\ &= 0.37 \end{aligned}$$

Entonces $p(E_1| Q_2) = (0.40)\ (0.35)\ /\ (0.37) = 0.3784$

Para **j=2,**

$$\begin{aligned} p(E_2| Q_2) &= p(Q_2 \mid E_2)\ p(E_2)/p(Q_2) \\ &= (0.40)\ (0.45)\ /\ (0.37) \\ &= 0.4865 \end{aligned}$$

Para **j=3,**

$$\begin{aligned} p(E_3| Q_2) &= p(Q_2 \mid E_3)\ p(E_3)/p(Q_2) \\ &= (0.25)\ (0.20)\ /\ (0.37) \\ &= 0.1351 \end{aligned}$$

Luego obtendremos las ganancias esperadas $GE_k(Q_2)$ por la Ec.(XIII.7):
Para **k=1,**

$$\begin{aligned} GE_1(Q_2) &= p(E_1 \mid Q_2)\ O_{11} + p(E_2| Q_2)\ O_{12} + p(E_3| Q_2)\ O_{13} \\ &= (0.3784)\ (180) + (0.4865)\ (180) + (0.1351)\ (180) \\ &= 180.0 \end{aligned}$$

Para **k=2,**

$$\begin{aligned} GE_2(Q_2) &= p(E_1 \mid Q_2)\ O_{21} + p(E_2| Q_2)\ O_{22} + p(E_3| Q_2)\ O_{23} \\ &= (0.3784)\ (170) + (0.4865)\ (200) + (0.1351)\ (200) \\ &= 188.65 \end{aligned}$$

Para **k=3,**

$$\begin{aligned} GE_3(Q_2) &= p(E_1 \mid Q_2)\ O_{31} + p(E_2| Q_2)\ O_{32} + p(E_3| Q_2)\ O_{33} \\ &= (0.3784)\ (160) + (0.4865)\ (190) + (0.1351)\ (220) \\ &= 182.70 \end{aligned}$$

Por lo que la mayor es $GE_2(Q_2) = 188.65$, convirtiéndose por ello en $GE(Q_2)^*$.

Finalmente de manera análoga para el tercer pronóstico Q_3, hallaremos las probabilidades $p(E_j \mid Q_3)$, por la Ec.(XIII.4):

Para **j=1,**

$$p(E_1| Q_3) = p(Q_3 \mid E_1)\ p(E_1)/p(Q_3)$$

Por su parte $p(Q_3)$ la calcularemos con la Ec.(XIII.5):

$$\begin{aligned} p(Q_3) &= p(Q_3 \mid E_1)p(E_1) + p(Q_3 \mid E_2)p(E_2) + p(Q_3 \mid E_3)p(E_3) \\ &= (0.2286)\ (0.35) + (0.2222)\ (0.45) + (0.35)\ (0.20) \\ &= 0.25 \end{aligned}$$

Entonces $p(E_1| Q_3) = (0.2286)\ (0.35)\ /\ (0.25) = 0.320$

Para **j=2,**

$$\begin{aligned} p(E_2| Q_3) &= p(Q_3 \mid E_2)\ p(E_2)/p(Q_3) \\ &= (0.2222)\ (0.45)\ /\ (0.25) \\ &= 0.400 \end{aligned}$$

Para **j=3,**

$$\begin{aligned} p(E_3| Q_3) &= p(Q_3 \mid E_3)\ p(E_3)/p(Q_3) \\ &= (0.35)\ (0.20)\ /\ (0.25) \\ &= 0.280 \end{aligned}$$

Ahora obtendremos cada ganancia esperada $GE_k(Q_3)$ con la Ec.(XIII.7):
Para **k=1,**

$$\begin{aligned} GE_1(Q_3) &= p(E_1 \mid Q_3)\ O_{11} + p(E_2| Q_3)\ O_{12} + p(E_3| Q_3)\ O_{13} \\ &= (0.32)\ (180) + (0.40)\ (180) + (0.28)\ (180) \\ &= 180.0 \end{aligned}$$

Para **k=2,**

$$\mathbf{GE_2(Q_3)} = p(E_1 \mid Q_3)\, O_{21} + p(E_2 \mid Q_3)\, O_{22} + p(E_3 \mid Q_3)\, O_{23}$$
$$= (0.32)\,(170) + (0.40)\,(200) + (0.28)\,(200)$$
$$= 190.40$$

Para **k=3**,

$$\mathbf{GE_3(Q_3)} = p(E_1 \mid Q_3)\, O_{31} + p(E_2 \mid Q_3)\, O_{32} + p(E_3 \mid Q_3)\, O_{33}$$
$$= (0.32)\,(160) + (0.40)\,(190) + (0.28)\,(220)$$
$$= 188.80$$

Por lo cual $\mathbf{GE_2(Q_3)} = 190.40$ es la mayor, siendo por esto $\mathbf{GE(Q_3)^*}$.

En este momento ya tenemos para cada pronóstico las ganancias esperadas óptimas $\mathbf{GE(Q_i)^*}$, por lo que finalmente calcularemos la ganancia esperada para el criterio a posteriori utilizando la Ec.(XIII.6), con lo cual tendremos:

$$\mathbf{GE} = GE(Q_1)^* .\, p(Q_1) + GE(Q_2)^* .\, p(Q_2) + GE(Q_3)^* .\, p(Q_3)$$
$$= (189.74)\,(0.38) + (188.65)\,(0.37) + (190.40)\,(0.25)$$
$$= \$\ 189.50$$

Este resultado es exactamente igual al obtenido con el criterio *a priori*, lo cual en ocasiones sucede. Es conveniente señalar en estos momentos que normalmente las pruebas experimentales tienen un costo, el cual en este caso no se ha considerado, pues de haberlo hecho hubiésemos tenido que restar de nuestra última ganancia dicho costo, con lo cual el criterio *a priori* hubiera sido mejor al actual.

A continuación se muestra el diagrama del árbol de decisión para el criterio *a posteriori:*

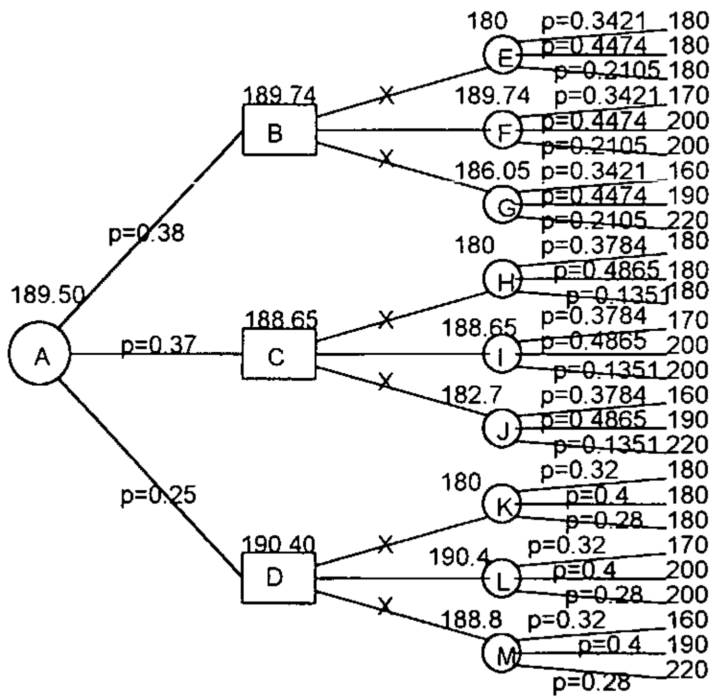


Figura XIII.3. Arbol de decisión para el caso base bajo el criterio a posteriori

En este diagrama habrá tantas ramas de pronósticos como estados de la naturaleza haya, para este ejemplo existen 3, las cuales están señaladas con su respectiva probabilidad.

Otro método alternativo similar al de las ganancias esperadas es el de las pérdidas esperadas, el cual se plantea tratando de hallar cuál es la decisión alternativa que debe de tomarse a fin de minimizar la pérdida esperada. En este caso se considera como pérdida lo que se deja de ganar por manejar un nivel dado de mercancías que es insuficiente para satisfacer la demanda real que se presenta. En este texto no se presentará este método, puesto que es exactamente igual al de las ganancias esperadas o criterio *a priori*.

Análisis Marginal.

Este es un método más simple que el análisis bayesiano para la toma de decisiones que conduce exactamente a los mismos resultados que el criterio *a priori*. Es especialmente adecuado cuando el número de alternativas de decisión que se maneja es elevado.

Consiste básicamente en el siguiente planteamiento: se recomendará tener en existencia una unidad adicional de mercancía, siempre y cuando la ganancia marginal que se obtendría por ella sea mayor a la pérdida marginal ocasionada por tenerla.

Se parte de igualar la ganancia marginal con la pérdida marginal, tal y como lo indica la siguiente ecuación:

$$GM.\ m = PM\ .\ (1\text{-}m) \qquad \text{Ec.(XIII.8)}$$

Donde

GM = Ganancia Marginal
m = Probabilidad de que la unidad adicional tenga demanda
PM = Pérdida Marginal

Si se despeja a **m** de esta ecuación, obtendremos:

$$\mathbf{m} = PM\ /\ (\ GM + PM\ ) \qquad \text{Ec.(XIII.9)}$$

Este valor de m es determinante para la resolución por este método, la cual debe hacerse conforme al siguiente procedimiento:

1.- Obtener **m** para el problema planteado por medio de la Ec.(XIII.9).
2.- Preparar una tabla que contenga para cada demanda la probabilidad acumulada de vender ese nivel de mercancías o uno mayor.
3.- La decisión que deberá tomarse será la correspondiente al renglón de la demanda para la cual su probabilidad acumulada listada en el paso anterior, rebase por primera ocasión al valor de m. Ilustraremos este método con el siguiente ejemplo:

Ejemplo XIII.5.- Aplicar el método del **Análisis Marginal** al caso base del expendio de tortas «El Tigre», para hallar la decisión óptima.

Solución:

Lo primero será obtener el valor de **m** , para lo cual tenemos como datos los valores de **GM** y **PM**, los cuales son:

$$\mathbf{GM} = 1.00 - 0.80 = \$\ 0.20$$
$$\mathbf{PM} = 0.80 - 0.70 = \$\ 0.10$$

Entonces **m** conforme a la Ec.(XIII.9) será:

$$\mathbf{m} = 0.10\ /\ (0.20 + 0.10) = 0.3333$$

Lo siguiente es preparar la tabla de probabilidades acumuladas de acuerdo al paso 2, para esto se cuentan con los datos de las probabilidades individuales para cada demanda, los cuales son:

Demanda	Probabilidad
900	0.35
1000	0.45
1100	0.20

La probabilidad acumulada para una demanda dada será simplemente la suma de la probabilidad individual de esa demanda, más las probabilidades individuales de todas las demandas superiores a la que se está considerando. Por consiguiente para el nivel superior de la demanda, su probabilidad acumulada será igual a la individual y para el nivel inferior será la unidad.

La tabla de probabilidades acumuladas será entonces:

Demanda	Probabilidad acumulada de esta demanda o más
900	1.00
1000	0.65
1100	0.20

Finalmente conforme al tercer paso, escogeremos de la tabla anterior la primera probabilidad acumulada que supere al valor de **m** , la cual resulta ser 0.65 que corresponde a la demanda de 1000 tortas, por lo que ésta será nuestra decisión óptima, para la cual la ganancia esperada se obtiene por medio de la Ec.(XIII.3),

$$\begin{aligned}\mathbf{GE_2} &= p(E_1)\, O_{21} + p(E_2)\, O_{22} + p(E_3)\, O_{23} \\ &= (0.35)\,(170) + (0.45)\,(200) + (0.20)\,(200) \\ &= \$\ 189.50\end{aligned}$$

La cual es exactamente igual a la obtenida con el criterio *a priori* del análisis bayesiano, tal y como se había comentado.

Ganancias esperadas con la información perfecta.

La información perfecta podría hipotéticamente lograrse si el nivel de demanda manejado por quien toma las decisiones fuese exactamente igual al estado de la naturaleza que sucediese en todas las ocasiones. Aunque esta situación no es posible en la realidad, es útil obtener la ganancia esperada en estas condiciones, pues esto nos dará una clara idea de lo que se deja de ganar por la imperfección de la información con la cual se toma una determinada decisión.

La ganancia esperada con la información perfecta puede estimarse con la Ec.(XIII.3), haciendo **i = j** , con lo cual tendremos:

$$GE_p = \sum_{j=1}^{n} p(E_j) \,.\, O_{jj} \qquad \text{Ec.(XIII.10)}$$

Esta fórmula implica que por ser **i** igual a **j** , la demanda será igual al estado de la naturaleza.

A continuación aplicaremos lo señalado en este inciso al caso base:

Ejemplo XIII.6.- Obtener para el caso base la ganancia esperada con la información perfecta.

Solución:

Para el caso base tenemos 3 niveles de demanda, por lo que al aplicar la fórmula dada por la Ec.(XIII.10), tendremos:

$$
\begin{aligned}
GE_p &= p(E_1)\,O_{11} + p(E_2)\,O_{22} + p(E_3)\,O_{33} \\
&= (0.35)\,(180) + (0.45)\,(200) + (0.20)\,(220) \\
&= \$\ 197.00
\end{aligned}
$$

Lo cual nos muestra que la mejor decisión real, es decir preparar 1000 tortas, es inferior en \$ 7.50 a la obtenida con la información perfecta.

Utilidad.

En el ámbito de la teoría de decisiones la utilidad podría definirse como un valor numérico, no monetario, que el tomador de decisiones asigna a cada posible resultado, basado en su criterio, su experiencia, o algunas veces simplemente en su intuición.

Aun cuando esto pudiera parecer no muy conveniente, es muy usual en la vida real que los administradores de empresas e instituciones utilicen criterios subjetivos para tomar decisiones en múltiples aspectos de su gestión.

En ocasiones el considerar estos factores puede dar lugar a que la decisión con el mayor valor de ganancia esperada no sea la más adecuada. Para esto manejaremos un nuevo término: *La Utilidad Esperada*, la cual debe obtenerse para cada alternativa de decisión tomando como base los valores que el tomador de decisiones haya asignado para cada resultado, conforme a la siguiente fórmula:

$$UE_i = \sum_{j=1}^{n} p(E_j)\cdot U_{ij} \qquad \text{Ec.(XIII.11)}$$

Donde UE_i = Utilidad esperada para la decisión **i**.
$p(E_j)$ = Probabilidad del estado de la naturaleza j.
U_{ij} = Utilidad de un resultado cuando se toma la decisión **i** y sucede el estado de la naturaleza **j**.
n = Número de estados de la naturaleza.

Esta ecuación es muy similar a la Ec.(XIII.3), con la modificación de que se han reemplazado los pagos O_{ij} por las utilidades U_{ij}.

Bajo este criterio la decisión que deberá tomarse será aquella que resulte con la máxima utilidad esperada. Para aclarar lo señalado anteriormente, presentaremos un ejemplo:

Ejemplo XIII.7.- El agricultor del ejemplo XIII.1 está considerando la decisión que deberá tomar respecto a sembrar o no hacerlo. Dada su matriz de pagos, él sabe que si llegara a perder los \$ 5200 sería catastrófico, puesto que esta cantidad significa sus ahorros de varios años de trabajo, por esto ha decidido asignar valores numéricos a cada posible resultado, basado en lo que cada uno de ellos representa para él.

Estas asignaciones son:

Situación	Valor
Sembrar y hiela	-10
" " no hiela	+10
No sembrar y hiela	+4
" " " no hiela	0

Ante esto, ¿Qué decisión deberá tomar?

Solución:

Lo primero será obtener la ganancia esperada bajo el criterio *a priori*, para lo cual aplicaremos la Ec.(XIII.3), con lo cual tendremos:

Para la primera decisión, **i=1:**

$$\begin{aligned} \mathbf{GE_1} &= p(E_1)\, O_{11} + p(E_2)\, O_{12} \\ &= (0.6)\,(-5200) + (0.4)\,(12000) \\ &= 1680 \end{aligned}$$

Para la segunda decisión, **i=2:**

$$\begin{aligned} \mathbf{GE_2} &= p(E_1)\, O_{21} + p(E_2)\, O_{22} \\ &= (0.6)\,(0) + (0.4)\,(0) = 0 \end{aligned}$$

Por lo que la decisión que debe tomarse bajo este criterio es la primera, sembrar.

Ahora para el criterio de la utilidad esperada, lo primero será incluir los valores asignados por el agricultor para los diferentes resultados posibles en una matriz, la cual será:

Estados Decisión	E_1	E_2
D_1	- 10	+ 10
D_2	+ 4	0

Con esto ya podemos aplicar la Ec.(XIII.11) al caso, para obtener las utilidades esperadas respectivas, entonces:

Para la primera decisión, **i=1:**

$$\begin{aligned} \mathbf{UE_1} &= p(E_1)\, U_{11} + p(E_2)\, U_{12} \\ &= (0.6)\,(-10) + (0.4)\,(10) \\ &= -2.0 \end{aligned}$$

Para la segunda decisión, **i=2:**

$$\begin{aligned} \mathbf{UE_2} &= p(E_1)\, U_{21} + p(E_2)\, U_{22} \\ &= (0.6)\,(4) + (0.4)\,(0) \\ &= 2.4 \end{aligned}$$

Por lo que ahora la mejor decisión es la segunda, no sembrar.

Con esto vemos cómo el hecho de que el agricultor considere lo que significa para él el riesgo de perder, lo lleva a cambiar su decisión.

Modelos para Distribución de Probabilidad Continua.

Los modelos vistos hasta ahora son aplicables para tomar decisiones cuando el número de opciones alternativas es limitado. En la vida real no sucede así, puesto que por lo general el número de elecciones posibles es muy alto. Así por ejemplo para el caso base, sería poco factible creer que el Sr. Sánchez sólo tuviera tres distintas demandas de tortas; por el contrario, lo más probable sería que éstas fueran diferentes día a día, lo cual hace poco prácticos los métodos vistos anteriormente para la solución de un problema dado en estas circunstancias.

Es por ello que en este inciso trataremos un método que resulta adecuado cuando el número de alternativas es elevado. A estos modelos se les conoce como *Modelos de Distribución de Probabilidad Continua*, puesto que suponen que los datos de las posibles demandas de mercancías se ajustan a una curva conocida de distribución probabilística continua.

En este texto presentaremos solamente la curva normal, la cual reproduce muchas de las situaciones que aparecen en el mundo de los negocios. Esto significa que al utilizarla estaremos suponiendo que la información manejada se ajusta a ella. La metodología dividida en pasos es la siguiente:

1.- Hallar el valor de **m** presentado en el análisis marginal, por medio de la Ec.(XIII.9). Esta **m** representará la fracción del área bajo la curva normal medida desde su extremo derecho, punto donde se igualan la ganancia y la pérdida marginales.

2.- Para los datos de demandas con los que se cuenta, hallar la media X_m y la desviación estándar σ, por medio de las siguientes fórmulas:

$$X_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \qquad \text{Ec.(XIII.12)}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_m - X_i)^2}{n}} \qquad \text{Ec.(XIII.13)}$$

Donde: X_i = Valor del dato i.
n = Número de datos

3.- Hallar de tablas del área bajo la curva normal a cuántas desviaciones estándar de la media está situada **m** . Es importante aclarar en este punto que algunas de estas tablas presentan como valores mínimos del área citada 0.500, tal es el caso de la tabla que se incluye en este libro en el apéndice respectivo. Por esta razón cuando el valor de **m** sea menor a 0.500, deberá buscarse en dichas tablas con el valor de **(1-m)**. Al valor leído en ellas correspondiente al número de desviaciones estándar se le denomina **Z**.

4.- Obtener el número de unidades de mercancía X_0 , para el cual se cumpla la igualdad entre la ganancia y la pérdida marginal, el cual se calcula con la siguiente ecuación:

$$X_0 = X_m \pm Z \cdot \sigma \qquad \text{Ec.(XIII.14)}$$

En esta ecuación se utilizará el signo positivo (+), para aquellos casos en los cuales **m** haya sido menor o igual a 0.500; en caso contrario, deberá utilizarse el signo negativo (-).

5.- El valor de X_0 es el punto donde la ganancia y la pérdida marginal son iguales, por lo tanto la decisión que deberá tomarse será el valor inmediato inferior a X_0 para que la probabilidad acumulada supere a **m**.

Presentaremos ahora un par de ejemplos para ilustrar esta metodología:

Ejemplo XIII.8.- De un nuevo estudio estadístico sugerido al Sr. Sánchez, se han colectado datos de

50 días de venta de tortas, cuyos resultados han sido los siguientes:

860	900	960	1000	1000
1000	1080	1050	1050	1020
1020	1050	960	1000	930
1020	1020	1000	930	1080
1050	960	1050	1080	1020
1080	1050	900	1020	1000
1100	1020	1020	960	1000
1020	1000	1100	1020	1050
930	1130	1080	1130	1020
900	930	1020	1100	960

Ante esta situación ¿Cuántas tortas deberá preparar, a fin de maximizar sus ganancias?

Solución:

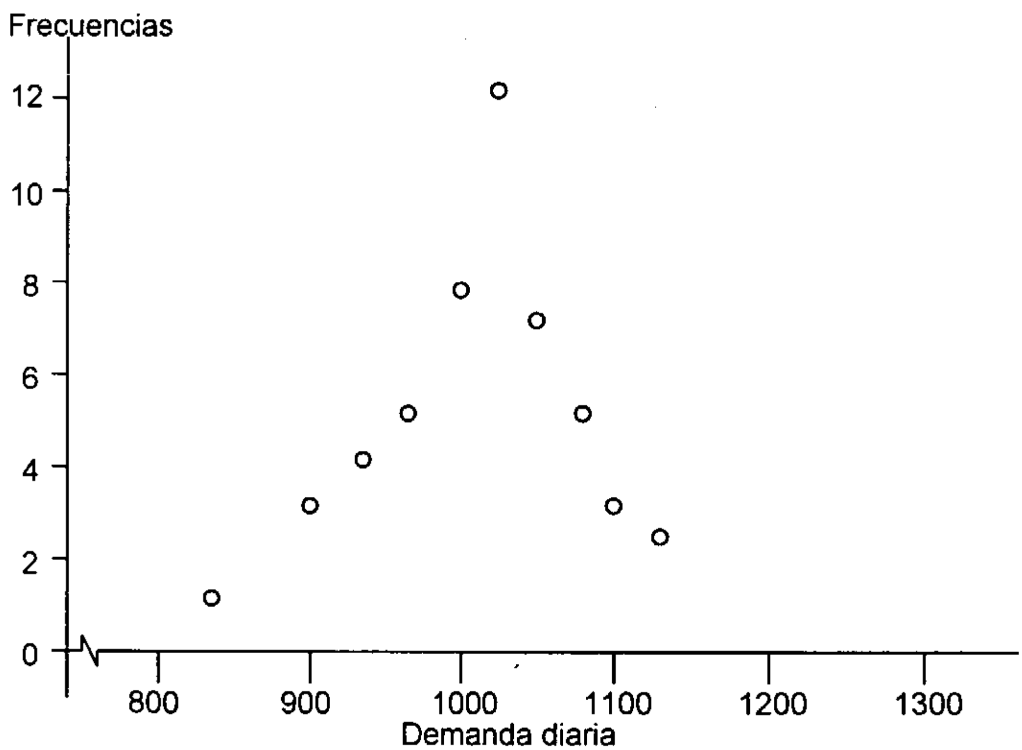
De acuerdo a la metodología, el primer paso ya ha sido cumplido, siendo m=0.33333.

Luego conforme al segundo paso, hallaremos la media y la desviación estándar por medio de las ecuaciones (XIII.12) y (XIII.13) respectivamente,

$$Xm = 50630 / 50 = 1012.60$$

$$\sigma = \sqrt{187362 / 50} = 61.215$$

En la gráfica siguiente se muestra la distribución de estos datos, en la cual vemos claramente que la figura representada se asemeja mucho a la curva normal:



Vemos que en este problema **m** es menor de 0.500, por lo que buscaremos el valor de **Z** de las tablas del área bajo la curva con (1-m) = 0.66667 . Los valores más próximos son los siguientes:

Area bajo la curva, (1-m)	Número de desviaciones estándar, Z
0.66640	0.43
0.67003	0.44

Aquí utilizaremos una técnica numérica llamada interpolación para hallar el valor correspondiente de **Z** para (1-m) = 0.66667,

$$\mathbf{Z} = 0.43 + (0.66667-0.66640)\,(0.44-0.43) \,/\, (0.67003-0.66640)$$
$$= 0.43074$$

Entonces conforme al cuarto paso, estimaremos $\mathbf{X_0}$ por medio de la Ec.(XIII.14) utilizándola con signo positivo,

$$X_0 = X_m + Z \cdot \sigma$$
$$= 1012.60 + (0.43074)\,(61.215)$$
$$= 1038.97$$

Finalmente nuestra decisión será aquel valor inmediato inferior a $\mathbf{X_0}$, por lo que el Sr. Sánchez deberá preparar 1020 tortas.

En seguida presentaremos otro ejemplo:

Ejemplo XIII.9.- El Contador Público Mario Avalos le ha hecho un estudio de costos al Sr. Sánchez y le ha indicado que su costo unitario es de $ 0.91 por torta y no de $ 0.80 como se venía suponiendo. Ante esta nueva situación, ¿Cuál será ahora la decisión que deberá tomarse en cuanto al número de tortas por preparar y la ganancia esperada?

Solución:

Con este cambio en el costo unitario de cada torta, variará el valor de **m** , el cual obtendremos,

$$\mathbf{GM} = 1.00 - 0.91 = 0.09$$
$$\mathbf{PM} = 0.91 - 0.70 = 0.21$$

Por lo tanto conforme a la Ec.(XIII.9), **m** será:

$$\mathbf{m} = 0.21 \,/\, (0.09 + 0.21) = 0.70$$

Para este caso $\mathbf{X_m}$ **y** · siguen siendo las mismas del ejemplo anterior.

Ahora de acuerdo al paso 3, dado que **m** es mayor de 0.500, listamos los valores de las tablas que circundan a 0.70 para el área bajo la curva,

Area bajo la curva, m	Número de desviaciones estándar, Z
0.69847	0.52
0.70194	0.53

Interpolando para **m** = 0.70, tendremos:

$$\mathbf{Z} = 0.52 + (0.70 - 0.69847)\,(0.53 - 0.52) \,/\, (0.70194 - 0.69847)$$
$$= 0.52441$$

Entonces calcularemos $\mathbf{X_0}$ con la Ec.(XIII.14), utilizándola ahora con signo negativo (-),

$$X_0 = X_m - Z \cdot \sigma$$
$$= 1012.60 - (0.52441)(61.215)$$
$$\approx 980.50$$

Por lo que conforme al último paso, el valor inmediato inferior es 960, que será la cantidad de tortas que deberán prepararse bajo estas condiciones.

Por su parte para obtener la ganancia esperada, prepararemos una tabla donde se listará para cada demanda la frecuencia de veces que ésta se presentó, la probabilidad para cada demanda, la cual es el cociente de la frecuencia entre el total de datos que es 50 y la ganancia condicional de preparar 960 tortas, la cual se calcula con la ganancia marginal multiplicada por la demanda, menos el valor del exceso de tortas respecto a la demanda multiplicada por la pérdida marginal, lo cual ejemplificaremos para el caso de una demanda de 900 tortas, es decir:

Por preparar 960 y tener una demanda de 900 tortas:

Se venden 900 tortas con las cuales ganaremos:
900 tortas x 0.09 \$/torta = \$ 81.00
Por su parte las restantes 60 tortas se preparan y no se venden, por esto perderemos:
60 tortas x 0.21 \$/torta = \$ 12.60
Por lo que nuestra ganancia condicional para esta demanda será la diferencia de ambos valores, es decir:
81.00 - 12.60 = \$ 68.40

Tabla XIII.2.- Tabla de demandas para el ejemplo XIII.9

Demanda	Frecuencia de cada demanda	Probabilidad de cada demanda	Ganancia Condicional, N\$
860	1	0.02	56.40
900	3	0.06	68.40
930	4	0.08	77.40
960	5	0.10	86.40
1000	8	0.16	86.40
1020	12	0.24	86.40
1050	7	0.14	86.40
1080	5	0.10	86.40
1100	3	0.06	86.40
1130	2	0.04	86.40

Finalmente la ganancia esperada se obtiene por la sumatoria de los productos de la ganancia condicional por la probabilidad para cada demanda, es decir:

$$\text{Ganancia esperada} = (56.40)(0.02) + (68.40)(0.06) + (77.40)(0.08)$$
$$+ (86.40)(0.10+0.16+0.24+0.14+0.10+0.06+0.04)$$
$$= 84.00 \ \$/\text{día}$$

Con lo cual vemos que al reducirse la ganancia marginal, la ganancia esperada también disminuye.

PROBLEMAS PROPUESTOS

XIII.1.- La panadería "Dulce Pan" produce pan de diversos tipos los que vende al público a un precio de \$0.80 cada pieza. Su costo es de 0.60 \$/unidad y las piezas que no vende el mismo día que son producidas las rebaja al día siguiente a \$0.40 cada una. De estadísticas con las que cuenta sus ventas han sido de 300, 310, 320, 330 y 340 piezas diarias. ¿Cuál de estas cantidades deberá preparar? Resuelva según los siguientes criterios: (a) Modelo Minimax; (b) Modelo Optimista; (c) Modelo de Minimización del Arrepentimiento; (d) Modelo de Maximización del Pago Promedio; (e) Modelo de Maximización del Punto Medio.

XIII.2.- La taquería "La Guadalupana" ofrece a sus clientes deliciosos tacos al pastor, que vende a \$1.30 cada uno. Si su costo de cada taco es de \$0.95 y los que no vende debe darlos a \$0.80. ¿Cuál deberá ser la cantidad de tacos a preparar?. Se sabe que las ventas varían desde 100 hasta 130 tacos diarios en rangos de 10. Solucionar conforme a los mismos criterios del problema anterior.

XIII.3.- La compañía Agrol le ofrece al Sr. Juan Ledezma rentarle sus tierras, las cuales no disponen de agua, por lo que será necesario perforar un pozo para poder utilizarlas con fines agrícolas. Agrol le ha propuesto al Sr. Ledezma hacer la perforación y en caso de que se obtenga agua le pagará \$ 100,000.00, en caso contrario solamente \$ 20,000.00. Si el Sr. Ledezma hace la perforación por su cuenta, ésta le costará \$60,000.00, pero si saca agua espera que puede obtener hasta \$ 200,000.00 trabajando él mismo sus tierras. Una tercera opción del Sr. Ledezma es no hacer ninguna de las dos opciones anteriores. Se sabe que la compañía perforadora ha obtenido agua en la región en un 65% de las ocasiones.

¿Cuál deberá ser la decisión del Sr. Ledezma y cuánta su ganancia esperada bajo el criterio *a priori*?

XIII.4.- Si para el caso del problema anterior los pronósticos de la compañía perforadora han sido afirmativos cuando si se ha obtenido agua en el 80% de las ocasiones, mientras que han dado pronósticos negativos cuando no se ha logrado obtener el vital líquido en el 85% de las veces. ¿ Cuánta sería ahora la ganancia esperada para el Sr. Ledezma bajo el criterio *a posteriori*?

XIII.5.- La empresa "Minas Potosinas" le propone al municipio de Rioverde alquilarle un terreno, ya que es factible que éste contenga minerales de estaño. La compañía debe hacer un estudio geológico exploratorio, el cual si es afirmativo implicará pagarle al Municipio \$ 350,000.00, en caso contrario le pagará únicamente \$ 50,000.00. Si el Municipio hace los trabajos de extracción de minerales por cuenta propia puede lograr hasta \$ 500,000.00, pero el estudio exploratorio le costaría \$ 60,000.00. La tercera opción del Municipio es ni rentar ni trabajar el terreno, sino dejarlo para otros fines posteriormente.

¿ Cuál debe ser su decisión y cuánta su ganancia esperada bajo el criterio *a priori* ? El instituto Universitario Rioverdense le ha dado al Municipio el dato de la probabilidad de que en el municipio haya estaño, la cual es de un 54%.

XIII.6.- Para el caso del problema anterior el Instituto Universitario le ha dado al Municipio una confiabilidad en sus pronósticos geológicos de un 78% cuando hay el mineral y de un 84% cuando no lo hay, ¿ Cuánta sería ahora la ganancia esperada para el Municipio bajo el criterio *a posteriori*?

XIII.7.- La compañía "Frutas, S.A." dispone de la siguiente información relativa a la venta mensual de cebollas.

Venta, toneladas	Probabilidad
50	0.10
100	0.16
150	0.30
200	0.22
250	0.14
300	0.08

Si su costo promedio ha sido de $1,500.00, su precio de venta de $2,000.00 y el precio de la mercancía rezagada de $750.00 por tonelada. ¿Qué nivel de toneladas mensuales deberá manejar la empresa y cuánta será su ganancia esperada? Utilícese el Análisis Marginal para resolver el caso.

XIII.8.- En el problema anterior, ¿Cuánta sería la ganancia si se tuviera la información perfecta?

XIII.9.- "Hilos del Centro" maneja fibra corta para la industria confeccionadora de ropa casual. Tiene la siguiente estadística de ventas mensuales durante los últimos 15 años.

Venta, toneladas fibra	Probabilidad
1.5	0.02
2.0	0.06
2.5	0.10
3.0	0.18
3.5	0.32
4.0	0.16
4.5	0.10
5.0	0.06

Si su costo actualmente es de $120.00 por kilogramo, su precio de venta de $160.00 y su precio de remate de $100.00, ¿Cuál debe ser su decisión en cuanto a la cantidad de fibra a manejar y cuánta su ganancia esperada conforme al Análisis Marginal.

XIII.10.- Solucionar el problema anterior para el caso de contar con la información perfecta.

XIII.11.- Al Lic. Raúl Rodríguez le propone un amigo que compre dólares, ya que se escuchan varios rumores de que habrá una devaluación del peso. El Lic. Rodríguez ha hecho una estimación burda de lo que podría invertir y de las posibilidades de que los rumores se hagan realidad y en base a ello ha elaborado una tabla de valores que a su juicio aplican a su situación personal.

Opción	Valor Subjetivo
Comprar dólares y Devaluación	+40
Comprar dólares y No Devaluación	-20
No comprar dólares y Devaluación	-30
No comprar dólares y No devaluación	+10

Según los analistas financieros y economistas la probabilidad de que haya una devaluación es del 48%. ¿Cuál deberá ser la decisión del Lic. Rodríguez?

XIII.12.- "Jugos, S.A." tiene la estadística de venta de naranjas para jugo de los últimos 50 días de operación, las cuales ofrece en costales de 30 kgs,

42	40	44	40	41	50	40	39	50	34
38	43	40	39	38	37	41	42	46	33
46	37	42	36	32	36	41	38	42	38
47	46	38	42	31	47	40	42	40	42
40	41	39	40	49	40	39	40	35	43

Si al negocio le cuesta cada costal $15.00, los vende a $22.50 y lo que no vende lo rebaja a $12.00 a partir del día siguiente, ¿Cuál debe ser el nivel óptimo de costales a manejar y cuánto su ganancia esperada? Resuélvase por medio del Modelo para Distribución de Probabilidad Continua.

XIII.13.- "Yoghurts Frescos" tiene el siguiente registro de ventas de yoghurt, el cual abarca los pasados 120 días trabajados.

Venta, lts.	Frecuencia
120	9
130	22
140	30
150	28
160	20
170	11
Total	120

Si para cada litro de yoghurt su costo es de $1.10, su precio de venta es de $1.60 y su precio de remate es $0.90, ¿Cuánto deberá preparar cada día y cuál será su ganancia esperada? Use el Modelo de Distribución de Probabilidad Continua.

XIII.14.- Si para el problema anterior el costo del yoghurt aumentara a $1.30 por litro sin incrementar los precios, ¿Cuáles serían ahora los resultados?

XIII.15.- La fábrica "Envases del Potosí" produce botellas de plástico de 2 litros, las cuales vende a $2.50 cada una a 3 distribuidores exclusivos. El costo de materiales directos (costo variable) de la fábrica es de $1.10 por botella y tiene costos fijos por $50,000.00 mensuales. Sus ventas el año pasado fueron las siguientes:

Venta mensual, botellas	Frecuencia
45000	2
50000	4
55000	3
60000	2
65000	1

Si las piezas que no vende de inmediato las rebaja a $1.80 cada una, ¿Qué nivel de producción le optimizará su ganancia y cuál será el monto de ésta?

XIII.16.- El Restaurante Rivera elabora comidas corridas las cuales vende a $15.00, su costo unitario es de $ 11.50 y lo que no vende ese día lo pasa al asilo de ancianos de la localidad quienes se lo pagan a sólo $ 10.00 por cada comida. Su estadística de ventas de los pasados 90 días es:

Venta, # de comidas	Frecuencia, días
60	22
65	20
70	18
75	16
80	14

¿Cuántas comidas corridas deberá preparar para optimizar su ganancia esperada y cuánto será ésta? Resolver mediante:

(a) Análisis Marginal
(b) Modelo de Distribución de Probabilidad Continua
(c) Explique la diferencia entre los 2 incisos anteriores.

CAPITULO XIV

MODELOS DE INVENTARIOS

Introducción.

Los modelos de inventarios han tenido un desarrollo muy amplio en la segunda mitad del siglo XX debido a la gran importancia que representan para la mayoría de las empresas de manufactura y comerciales, las cuales requieren inventarios de materias primas, artículos terminados, materiales indirectos y otros que les permitan operar de una manera eficiente.

Los inventarios constituyen usualmente una de las mayores partidas de los activos en los estados financieros de los negocios, motivo por el cual deben ser administrados inteligentemente para que cumplan la función a la que están destinados a un costo razonable, puesto que un inventario muy bajo puede dar lugar a agotamiento de las existencias que ocasionen paros en la producción o bien ventas no efectuadas, mientras que un inventario muy elevado origina un alto costo financiero por el hecho de invertir capital en un lugar en donde no produce dividendos.

El objetivo básico del inventario es el de absorber las diferencias que puedan presentarse entre la oferta y la demanda de un artículo dado, es decir que si un establecimiento no puede conocer de antemano la demanda que va a tener de ese artículo, las variaciones que haya serán absorbidas por el inventario, de tal modo que no haya faltantes de la mercancía.

Existen otras razones por las cuales una empresa debe manejar inventarios, algunas de las más importantes son: (a) si la mercancía que adquiere la compañía debe ser transportada desde el lugar donde la tiene el proveedor, el inventario nos permitirá satisfacer la demanda durante el lapso de tiempo que transcurre desde que se coloca el pedido hasta que éste se recibe; (b) la mayoría de las empresas ofrece descuentos por la compra de lotes de mercancía mayores, los cuales serán recomendables en algunos casos; (c) si la demanda de un artículo es estacional, es preferible para la compañía que lo fabrica que oscilen sus inventarios y no su capacidad de producción, ya que el hecho de programar turnos extras involucra mayores costos por contrataciones de personal adicional, su capacitación y adiestramiento, indemnizaciones, etc.; (d) si la demanda varía respecto a lo planeado, ésta será absorbida por el inventario.

Hay dos decisiones fundamentales del inventario que todo administrador debe formularse, que son: cuándo y cuánto deberá pedirse de un artículo dado, las cuales se responden basándose en aquella opción que nos lleve al costo mínimo total incurrido por la compra de los artículos, así como también por la administración del inventario.

En este capítulo presentaremos un caso base, el cual nos servirá para ilustrar los conceptos desarrollados, así como también los modelos que se incluyen en el texto. Luego veremos la terminología más usual del tema. Posteriormente se tratarán algunos modelos de inventarios como son el de la Cantidad Económica de Pedido (CEP), el de manejo de descuentos por compra de lotes mayores, el modelo de CEP con faltantes, la determinación del Punto de Renovación de Pedidos y de las Existencias de Seguridad para casos probabilísticos, el modelo de cantidad de pedido fija y ciclo de tiempo variable, el de cantidad de pedido variable y ciclo de tiempo fijo y finalmente el modelo de determinación del tamaño del lote de producción. Por último se presentará el sistema ABC de clasificación de los inventarios.

Caso Base.

La empresa Sonormex se dedica a la venta de equipos de sonido, los cuales adquiere de una fábrica de la cual es distribuidor exclusivo. El costo de compra para Sonormex es de \$ 5000.00 por cada equipo y su departamento contable les ha indicado que cada pedido les cuesta \$ 1400.00 por tramitación y flete, mientras que su conservación del inventario es del 20 % del valor del inventario promedio.

De estadísticas de ventas de años anteriores, se estima una demanda para el presente año de 750 unidades. Ante esto, ¿ Cómo debe manejar Sonormex sus inventarios en lo referente a cantidad de pedido y ciclo de tiempo ?

Terminología.
En este inciso se darán algunas definiciones útiles para la mejor comprensión de los modelos de inventarios que se tratarán. Las más usuales son las siguientes:

Inventario Promedio.
Es la cantidad promedio de mercancías en existencia en el inventario para un periodo de tiempo dado.

Cantidad Económica de Pedido. (CEP)
Es el número de unidades de mercancía que son solicitadas al proveedor, de modo que la suma del costo de pedidos más el de conservación del inventario sea el mínimo.

Demanda.
Es el número de artículos que los clientes solicitan a la empresa.

Agotamientos.
Son los faltantes de existencia de mercancías en el inventario, de tal manera que cuando el consumidor solicita una unidad a la compañía, ésta no se la podrá surtir en ese momento.

Tiempo de Adelanto.
Es la cantidad de tiempo que transcurre desde que se coloca un pedido hasta que éste se recibe. También se le conoce como tiempo de demora en la entrega.

Punto de Renovación de Pedidos. (PRP)
Es el momento en el cual el número de unidades de mercancía en existencia en el inventario llega a una cantidad para la cual se hace necesario colocar un nuevo pedido de reabastecimiento, se expresa en número de artículos y también suele llamársele punto de reorden.

Existencias de Seguridad.
Es una cantidad extra de artículos que se agrega al inventario con el objeto de que no sucedan agotamientos.

Pedidos Retroactivos.
Son aquellos pedidos que se solicitan al proveedor después que han aparecido los agotamientos.

Política de Pedidos.
Es el sistema de pedidos que utiliza un negocio, el cual se establece buscando optimizar los aspectos operativo y económico del manejo de inventario. Hay dos sistemas de pedidos, los cuales son: El del Punto de Renovación de Pedidos y el de Revisión Periódica. En el primero de ellos se hacen los pedidos al instante en que la existencia de artículos en inventario baja al nivel del punto de reordenamiento y en el segundo los pedidos se colocan cada determinado plazo de tiempo, el cual se fija de antemano.

Concepto de Costos.
El costo de inventarios se divide en cuatro tipos, los cuales son: Costo de la mercancía, costo de pedidos, costo de conservación del inventario y costo de agotamientos.

Costo de las mercancías.
Es el costo al que se adquieren las mercancías, el cual puede ser fijo o bien estar estructurado de modo que se incluyan descuentos por compras de cantidades mayores.

Costo de pedidos
Es el costo en el que se incurre por colocar un pedido al proveedor. Se compone normalmente de requisiciones, órdenes de compra, flete, recepción, inspección, almacenamiento y contabilidad.

Costo de conservación.

Este es el costo causado por mantener un artículo en el inventario, por lo general se expresa como un porcentaje del valor del inventario promedio y se forma por renglones como seguros, mermas, obsolescencia, calefacción, alumbrado, refrigeración y contabilidad.

Costo de agotamientos.

Son los costos ocasionados por la aparición de los agotamientos, los cuales dependerán de la administración del inventario por parte de la empresa, ya que si ésta maneja pedidos retroactivos, el costo de agotamientos se compondrá por las tramitaciones extras que tengan que hacerse para colocar los pedidos. Cuando no se incluyen los pedidos retroactivos, los costos se integran por las pérdidas de ventas presentes y futuras por parte de los clientes, concepto que es muy difícil de evaluar.

Modelo de la Cantidad Económica de Pedido. (CEP)

Este modelo fue desarrollado por F. W. Harris en 1915 y más tarde por F. E. Raymond en 1930 y aun cuando es muy simple, ilustra la manera cómo puede manejarse la administración de los inventarios por parte de las empresas.

El planteamiento del modelo se basa en las siguientes suposiciones:

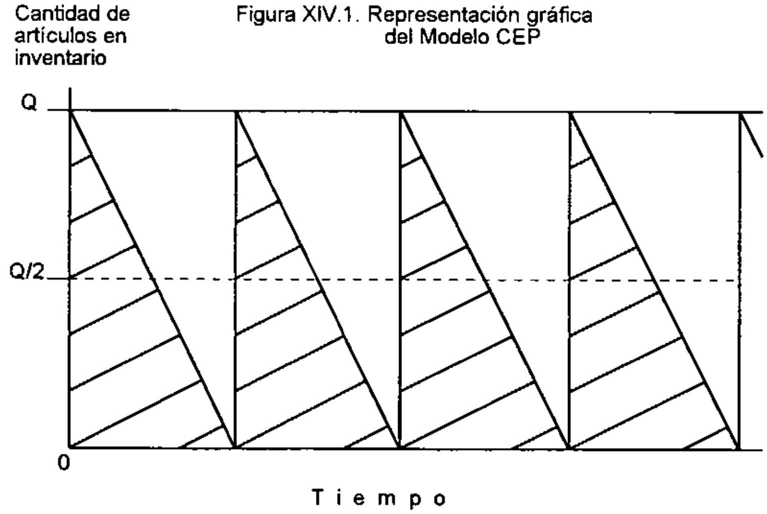
1.- La demanda es constante y conocida.
2.- El tiempo de adelanto es cero, esto significa que un pedido se recibe en el momento en que es solicitado.
3.- Cada pedido se hace al momento en que las existencias llegan a cero, es decir que el Punto de Renovación de Pedidos es cero.
4.- La cantidad de mercancías pedidas al proveedor es constante.
5.- No hay agotamientos de mercancías.
6.- El costo de las mercancías es constante con el tiempo.

Una representación gráfica de este modelo se muestra en la figura XIV.1 donde se incluyen el tiempo en el eje de las abcisas y la cantidad de artículos en inventario en el de las ordenadas.

En la figura vemos que **Q** será la cantidad de artículos que se piden cada vez, de modo que aquella **Q** que haga que el costo total del inventario sea el mínimo será la **CEP**, denotada como **Q***.

El inventario promedio para este modelo es **Q/2**, ya que la demanda diaria es constante, por lo que la cantidad de artículos en inventario varía linealmente con el tiempo, tal y como se observa en la figura, por esta razón el promedio lo podemos tomar con los valores máximo, **Q** y mínimo del inventario, cero, por lo que el promedio será **Q/2**.

Figura XIV.1. Representación gráfica del Modelo CEP



Por su parte el costo total del inventario para este modelo se compone del costo de pedidos y el de conservación del inventario, ya que conforme a la suposición número 5 no habrá agotamientos y por la número 6 el costo de compra de la mercancía es constante, por lo que no se considera.

El costo de los pedidos se formará por el costo unitario de colocar cada pedido, multiplicado por el número que de éstos se haga en el lapso de tiempo que se haya fijado para el análisis, usualmente un año, es decir,

$$C_{ped} = C_p \; (D/Q) \qquad \text{Ec.(XIV.1)}$$

Donde
C_{ped} = Costo anual de pedidos, \$/año
C_p = Costo unitario de cada pedido, \$/pedido
D = Demanda anual de artículos, unidades/año
Q = Cantidad de artículos de cada pedido, unidades/pedido

Por su parte el costo de conservación del inventario se integra por el de conservación del inventario promedio, multiplicado por el valor de éste, el cual es **Q/2**, es decir,

$$C_{con} = C_c \; (Q/2) \qquad \text{Ec.(XIV.2)}$$

Donde
C_{con} = Costo anual de conservación del inventario, \$/año
C_c = Costo de conservar el inventario dado por la Ec.(XIV.3), \$/unidad

$$C_c = C_a \, M \qquad \text{Ec.(XIV.3)}$$

Donde
C_a = Costo de compra del artículo, \$/unidad
M = Porcentaje anual de conservación del inventario

El costo anual total del inventario para este modelo será la suma de los antes citados, es decir:

$$C_T = C_{ped} + C_{con} \qquad \text{Ec.(XIV.4)}$$

Para la cual si sustituimos las Ec. (XIV.1) y (XIV.2) en ella obtendremos:

$$C_T = C_p \, (D/Q) + C_c \, (Q/2) \qquad \text{Ec.(XIV.5)}$$

La gráfica de estos 3 costos se presenta en la figura XIV.2, en la cual se observa que al aumentar **Q**, el costo de pedidos C_{ped} disminuye, mientras que el de conservación C_{con} aumenta y que justamente donde estos dos costos se intersectan, ocurre el punto mínimo para la curva del costo total C_T, dando para el valor de la existencia en el inventario Q^*.

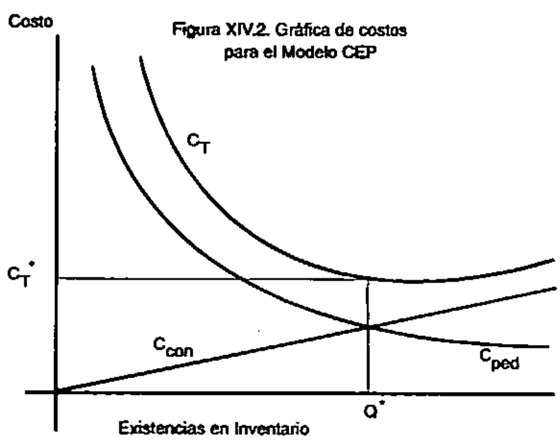


Figura XIV.2. Gráfica de costos para el Modelo CEP

Conforme al enfoque de diferenciación, para hallar el valor de **Q** que haga mínimo a C_T, será un punto para el cual la derivada de C_T respecto a **Q** es cero, es decir,

$$\frac{d\,C_T}{d\,Q} = 0 = \frac{C_p\,D}{Q^2} + \frac{C_c}{2} \qquad \text{Ec.(XIV.6)}$$

De la cual si despejamos a **Q** obtendremos:

$$Q^* = \sqrt{2C_pD\,/\,C_c} \qquad \text{Ec.(XIV.7)}$$

La cual es la Cantidad Económica de Pedido **CEP** buscada.

Por su parte el número óptimo de pedidos anuales N^*, es el cociente de la demanda entre Q^*, la cual será entonces:

$$N^* = \frac{D}{Q^*} = \sqrt{C_cD\,/\,2C_p} \qquad \text{Ec.(XIV.8)}$$

Mientras que el ciclo de tiempo para cada pedido será:

$$t^* = \frac{365}{N^*} = \frac{365Q^*}{D} \qquad \text{Ec.(XIV.9)}$$

En seguida ilustraremos la aplicación de estas ecuaciones para el caso base:

Ejemplo XIV.1.- Conforme al modelo CEP, ¿Cuáles serán los valores de Q^*, N^* y **t**, para el caso base?

Solución:

Lo primero será identificar para el caso base los datos que se requieren para poder aplicar las ecuaciones correspondientes del modelo, para esto tenemos,

$$\begin{aligned} C_a &= 5000.00 \text{ \$/eq.} \\ C_p &= 1400.00 \text{ \$/pedido} \\ M &= 0.20 \\ D &= 750 \text{ eq./año} \end{aligned}$$

Por lo que conforme a la Ec.(XIV.3), tendremos:

$$C_c = C_a\ M = (5000.00)\,(0.20) = 1000.00 \text{ \$/año}$$

Entonces ya podemos aplicar la Ec.(XIV.7) para calcular Q^*, para obtener

$$\begin{aligned} Q^* &= \sqrt{(2)(1400)(750)\,/\,(1000)} \\ &= 45.83 \text{ eq./pedido} \end{aligned}$$

Este número deberá redondearse al entero más próximo, es decir 46 equipos/pedido, ya que no tendría ningún sentido hablar de un número fraccionario de equipos de sonido.

Ahora de acuerdo a la Ec.(XIV.8) para el número óptimo de pedidos tendremos:

$$N^* = D\,/\,Q^* = 750/46 = 16.3 \text{ pedidos/año}$$

Por su parte el tiempo de hacer cada pedido será:

$$t^* = 365 / N^* = 22.39 \text{ días/pedido}$$

Es decir que cada pedido se colocará en un lapso de 22 días.

El costo total anual del manejo del inventario lo obtendremos por medio de la Ec.(XIV.5),

$$C_T = (1400)(750/46) + (1000)(46/2)$$
$$= 45{,}826.09 \text{ \$/año}$$

Modelo de Descuentos por compras de lotes mayores.

Es muy frecuente en el mundo empresarial y comercial que un proveedor le ofrezca a sus clientes una estructura de precios de su mercancía que contenga rebajas por la compra de lotes mayores, esta oferta puede incluir varias opciones alternativas de precios para diferentes volúmenes de mercancía. Entonces el cliente debe plantearse la pregunta sobre cuál de estas opciones es la que más le conviene aceptar.

Desde el punto de vista de los inventarios, la opción que debe elegir es aquella que le minimice sus costos totales de manejo del inventario más la adquisición de los artículos.

Un caso de este tipo puede manejarse de acuerdo al siguiente procedimiento:

1.- Para cada una de las opciones alternativas de precios de la mercancía, se calcula la **CEP** por medio de la Ec.(XIV.7).

2.- De las **CEP** obtenidas en el paso anterior, habrá solamente una que quede dentro de los límites de volúmenes de mercancías para el cual aplica el precio correspondiente.

3.- Para la **CEP** válida identificada en el paso anterior, estimar su costo total de inventario, conforme a la Ec.(XIV.5), al cual se le sumará el costo de compra de la mercancía.

4.- Para cada una de las restantes opciones alternativas que correspondan a mayores volúmenes de artículos y menores precios que la identificada en el paso dos, calcular el costo total por inventario y adquisición de los artículos para un volumen de éstos igual al límite inferior a partir del cual se aplica el menor precio.

5.- La opción seleccionada debe ser aquella que haya obtenido el mínimo costo de los calculados.

Para ilustrar este procedimiento, resolveremos un ejemplo.

Ejemplo XIV.2.- Si la Sonormex recibe por parte de su proveedor de equipos de sonido una serie de descuentos por la compra de lotes mayores, tal y como lo muestra la tabla XIV.1, ¿Cuál de las opciones debe escoger?

Tabla XIV.1.- Estructura de precios de equipos de sonido

Volumen de equipos de sonido	Precio unitario \$/equipo
1 — 40	5000.00
41 — 60	4900.00
61 — 80	4800.00
$\geq$ 81	4700.00

Solución:

Lo primero será listar los datos que se utilizaron en el ejemplo anterior que siguen siendo válidos para este problema. Estos son los siguientes:

$$\begin{aligned} C_p &= 1400.00 \text{ \$/pedido} \\ M &= 0.20 \\ D &= 750 \text{ eq./año} \end{aligned}$$

Ahora podemos aplicar el procedimiento iniciando por el primer paso, según el cual debemos obtener **Q** para cada nivel de volúmenes de equipos de sonido conforme a la Ec.(XIV.7),

$$Q^* = \sqrt{2C_pD / C_c}$$

Si recordamos que $C_c = C_a M$, podemos modificar la ecuación anterior para obtener ahora:

$$Q^* = \sqrt{2C_pD / (C_aM)}$$

Puesto que cada diferente nivel de volúmenes de artículos tiene un precio distinto, siendo constantes las demás variables, podemos escribir esta ecuación en la forma siguiente:

$$Q^* = \sqrt{2(1400)(750) / C_a(0.20)}$$

$$= \sqrt{10{,}500{,}000 / C_a}$$

Entonces al aplicar esta fórmula a cada nivel de la tabla XIV.1, generaremos los resultados de la tabla XIV.2, los cuales son los siguientes:

Tabla XIV.2.- Valores de CEP para cada opción

Volumen	Precio	CEP
1 — 40	5000.00	45.83
41 — 60	4900.00	46.29
61 — 80	4800.00	46.77
≥ 81	4700.00	47.27

Por lo cual vemos que la **CEP** que ha quedado dentro de los límites de volúmenes de equipos para el precio al cual fue calculada ha sido la segunda, es decir $Q^* = 46.29$, la cual debe redondearse a 46 equipos por pedido.

Ahora conforme al tercer paso, hallaremos el costo de inventario para esta opción mediante la Ec.(XIV.5).

$$\begin{aligned} C_T &= C_p\,(D/Q) + C_c\,(Q/2) = C_p\,(D/Q) + C_a M\,(Q/2) \\ &= (1400)\,(750/46) + (4900)\,(0.20)\,(46/2) \\ &= 45{,}366.09 \text{ \$/año} \end{aligned}$$

A este costo habrá que agregarle el de compra de los equipos.

$$\begin{aligned} C_{adq} &= (750 \text{ eq./año}) \times (4900 \text{ \$/eq.}) \\ &= 3{,}675{,}000.00 \text{ \$/año} \end{aligned}$$

Por lo cual la suma de ambos será,

$$\begin{aligned} C_{opc1} &= 45{,}366.09 + 3{,}675{,}000.00 \\ &= 3{,}720{,}366.09 \text{ \$/año} \end{aligned}$$

Ahora de acuerdo al paso cuatro, habrá otras opciones, una por cada nivel superior de volúmenes de artículos. Para este caso hay otras dos opciones, las cuales son para el nivel de 61 a 80 y el de 81 en adelante, para los que deberemos calcular la suma de costo del inventario más el de adquisición, para el volumen de equipos mínimo respecto a cada nivel, esto quiere decir que se tomará 61 equipos para el nivel 61 a 80 y 81 equipos para el de 81 en adelante.

Entonces para la siguiente opción, que es comprar 61 equipos, tendremos:

$$\begin{aligned} C_T &= C_p\,(D/Q) + C_a\ M\ (Q/2) \\ &= (1400)\,(750/61) + (4800)\,(0.20)\,(61/2) \\ &= 46{,}493.11\ \$/\text{año} \end{aligned}$$

Por su parte el costo de la adquisición de los equipos es:

$$\begin{aligned} C_{adq} &= (750\ \text{eq./año})\ \times\ (4800\ \$/\text{eq.}) \\ &= 3{,}600{,}000.00\ \$/\text{año} \end{aligned}$$

Por lo que el costo total para la opción es:

$$\begin{aligned} C_{opc2} &= 46{,}493.11 + 3{,}600{,}000.00 \\ &= 3{,}646{,}493.11\ \$/\text{año} \end{aligned}$$

Finalmente para la tercera opción de 81 equipos, el costo del inventario será:

$$\begin{aligned} C_T &= C_p\,(D/Q) + C_a\ M\ (Q/2) \\ &= (1400)\,(750/81) + (4700)\,(0.20)\,(81/2) \\ &= 51{,}032.96\ \$/\text{año} \end{aligned}$$

El costo de adquisición de los equipos será:

$$\begin{aligned} C_{adq} &= (750\ \text{eq./año})\ \times\ (4700\ \text{N}\$/\text{eq.}) \\ &= 3{,}525{,}000.00\ \$/\text{año} \end{aligned}$$

Por lo que el costo total para esta opción es:

$$\begin{aligned} C_{opc3} &= 51{,}032.96 + 3{,}525{,}000.00 \\ &= 3{,}576{,}032.96\ \$/\text{año} \end{aligned}$$

Por último el quinto paso de la metodología nos indica que seleccionemos aquella opción del menor costo total, la cual corresponde a la tercera, es decir que a Sonormex le conviene adquirir lotes de 81 equipos, para aprovechar el menor precio.

Es conveniente señalar que se han tomado los límites inferiores de los volúmenes de artículos para los cuales aplica un menor precio ya que si eligiésemos cualquier otro valor mayor, el incremento en el costo de conservación no se compensa por la disminución del costo de pedidos. Esto lo ejemplificaremos para el caso que Sonormex adquiriese lotes de 100 equipos por pedido, entonces su costo del inventario sería:

$$\begin{aligned} C_T &= C_p\,(D/Q) + C_a\ M\ (Q/2) \\ &= (1400)\,(750/100) + (4700)\,(0.20)\,(100/2) \\ &= 57{,}500.00\ \$/\text{año} \end{aligned}$$

Mientras que el costo de compra de los equipos seguiría siendo el mismo, por lo que vemos que el hecho de adquirir lotes mayores de 81 equipos nos traería como consecuencia un incremento en el costo del inventario.

Modelo de CEP con Agotamientos por Pedidos Retroactivos.

Hay algunas compañías comerciales que manejan el sistema de pedidos retroactivos, el cual consiste básicamente en permitir que existan faltantes en sus inventarios y colocar pedidos de reabastecimiento hasta el momento en que algunos de sus clientes ya han solicitado más artículos.

Este sistema tiene la ventaja de manejar menores niveles de inventarios, lo cual viene a disminuir el costo de conservación; por su parte esto también trae consigo que baje el número de pedidos, por lo que el costo por este concepto también disminuye.

La desventaja es que se incurre en un costo nuevo por la solicitud de los pedidos retroactivos, el cual en el modelo original de **CEP** no se presentaba, ya que ahora no se cumplen las suposiciones tercera y quinta del planteamiento bajo el cual fue desarrollado.

Para ilustrar este modelo, se presenta la figura XIV.3 en la que puede apreciarse la disminución del inventario por debajo de cero y hasta después de que se reciben pedidos adicionales de **R** unidades por parte de los clientes, se coloca un nuevo pedido de reabastecimiento por **Q** unidades, el cual incluye las **R** atrasadas, más otras S que se tendrán en inventario, las que constituyen el nivel máximo de éste.

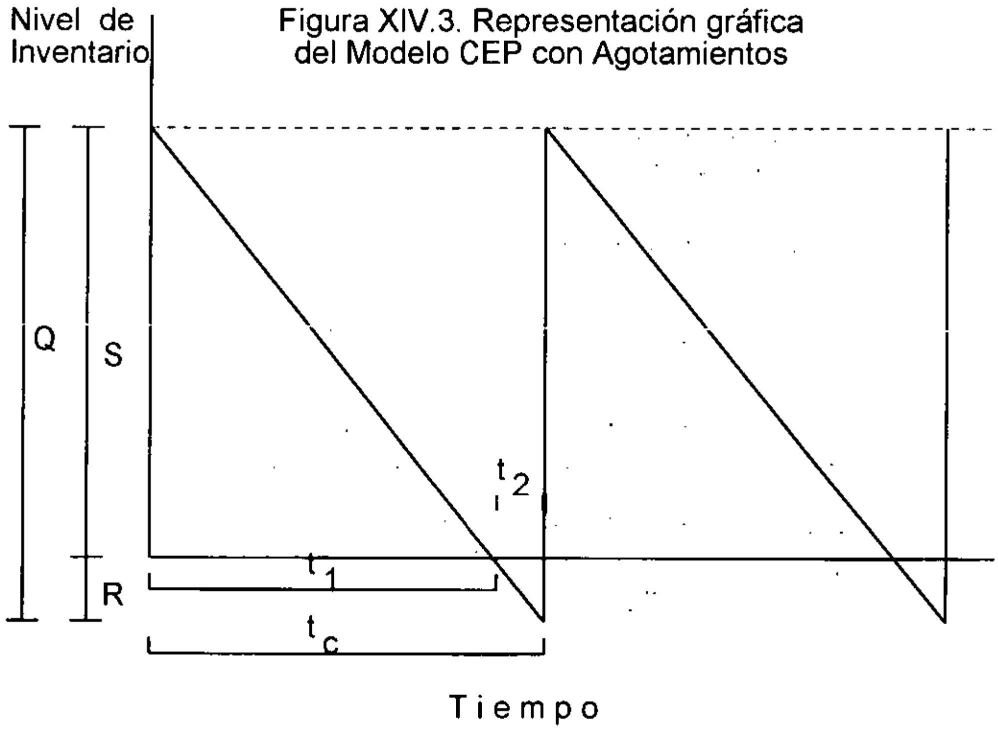


Figura XIV.3. Representación gráfica del Modelo CEP con Agotamientos

El planteamiento matemático del modelo se hace buscando minimizar el costo total del inventario, tal y como se hacía en el modelo de **CEP**, sólo que ahora este costo estará formado por 3 conceptos que son: El costo de pedidos C_{ped}, el de conservación del inventario C_{con} y el de agotamientos C_{agt}. cada uno de los cuales se obtiene de la manera siguiente:

El costo de pedidos C_{ped} se sigue calculando por medio de la Ec.(XIV.1), ya que cada pedido se solicita por Q artículos.

El costo de conservación se obtiene multiplicando el costo del inventario promedio C_c dado por la Ec.(XIV.3), por el inventario promedio, el cual ya no es el mismo puesto que ha habido agotamientos. Para hallar este nuevo inventario promedio, se utiliza la fórmula siguiente:

$$\text{Inventario promedio} = \frac{\text{Area bajo la línea de Demanda}}{\text{Tiempo de ciclo}} \qquad \text{Ec.(XIV.10)}$$

$$= \frac{(1/2) S\, t_1}{t_c}$$

Si recurrimos ahora a la relación geométrica de triángulos semejantes que se observan de la figura XIV.3, tenemos que,

$$\frac{t_1}{S} = \frac{t_c}{Q} \qquad \text{Ec.(XIV.11)}$$

Para la cual si reacomodamos tendremos,

$$\frac{t_1}{t_c} = \frac{S}{Q} \qquad \text{Ec.(XIV.12)}$$

Si sustituimos ahora esta expresión en la Ec.(XIV.10), nos dará:

$$\text{Inventario promedio} = \frac{1}{2}\,\frac{S^2}{Q} \qquad \text{Ec.(XIV.13)}$$

Entonces el costo de conservación del inventario será:

$$C_{con} = C_c\,\frac{1}{2}\,\frac{S^2}{Q} \qquad \text{Ec.(XIV.14)}$$

Por su parte el costo de agotamientos vendrá dado por el costo unitario de cada faltante C_f, multiplicado por el número promedio de éstos, el cual obtendremos mediante la siguiente fórmula:

$$\text{Número promedio de Faltantes por ciclo} = \frac{\text{Area por debajo del eje de las abcisas}}{\text{Tiempo del ciclo}} \qquad \text{Ec.(XIV.15)}$$

$$= \frac{(1/2) R\, t_2}{t_c}$$

Si observamos la figura XIV.3, por la relación de triángulos semejantes tendremos que,

$$\frac{t_2}{R} = \frac{t_c}{Q} \qquad \text{Ec.(XIV.16)}$$

La que al reordenarse nos dará,

$$\frac{t_2}{t_c} = \frac{R}{Q} \qquad \text{Ec.(XIV.17)}$$

La cual al sustituirse en la Ec.(XIV.15), nos dará:

$$\begin{array}{c}\text{Número promedio}\\ \text{de Faltantes}\\ \text{por ciclo}\end{array} = \frac{1}{2}\,\frac{R^2}{Q} \qquad \text{Ec.(XIV.18)}$$

Con lo cual el costo de los agotamientos será

$$C_{agt} = C_f \cdot \frac{1}{2}\,\frac{R^2}{Q} \qquad \text{Ec.(XIV.19)}$$

La suma de estos 3 costos nos dará el costo total del inventario,

$$\begin{aligned} C_T &= C_{ped} + C_{con} + C_{agt} \\ &= C_p\,\frac{D}{Q} + C_c\,\frac{S^2}{2Q} + C_f\,\frac{R^2}{2Q} \end{aligned} \qquad \text{Ec.(XIV.20)}$$

Puesto que **R = Q - S** , al sustituir esta igualdad en la ecuación anterior nos dará,

$$C_T = C_p\,\frac{D}{Q} + C_c\,\frac{S^2}{2Q} + C_f\,\frac{(Q-S)^2}{2Q} \qquad \text{Ec.(XIV.21)}$$

La cual debe resolverse de tal modo que el costo total se minimice, por lo que conforme al criterio de diferenciación, se deriva parcialmente la ecuación con respecto a **Q** y a **S** y ambas expresiones se igualan a cero y se resuelven como ecuaciones algebraicas simultáneas, con lo cual se tendrán las fórmulas del modelo para $\mathbf{Q^*}$ y para $\mathbf{S^*}$ las cuales son:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\,C_p\,D(C_c + C_f)}{C_c\,C_f}} \qquad \text{Ec.(XIV.22)}$$

$$S^* = \sqrt{\frac{2\,C_p\,D\,C_f}{C_c(C_c + C_f)}} \qquad \text{Ec.(XIV.23)}$$

Por su parte el número óptimo de pedidos $\mathbf{N^*}$, se obtiene dividiendo la demanda **D** entre el valor de $\mathbf{Q^*}$ y por su parte el tiempo óptimo del ciclo para cada pedido se calcula dividiendo 365 entre $\mathbf{N^*}$.

A continuación presentaremos un ejercicio ilustrativo de la aplicación de estas fórmulas.

Ejemplo XIV.3.- La Sonormex está considerando la posibilidad de implementar el sistema de pedidos retroactivos. Considera que el costo unitario de cada agotamiento es de \$ 200.00 anuales. ¿Qué será lo más conveniente para la empresa?

Solución:

El dato del costo unitario del agotamiento es C_f = 200.00 \$/año, por lo que con los restantes datos ya conocidos del ejemplo XIV.1 podemos aplicar la Ec.(XIV.22), para obtener:

$$Q^* = \sqrt{(2)(1400)(750)(1000+200)\,/\,(1000)(200)}$$
$$= 112.25 \text{ equipos/pedido}$$

Por medio de la Ec.(XIV.23) obtendremos S^*:

$$S^* = \sqrt{(2)(1400)(750)(200)\,/\,(1000)(1000+200)}$$
$$= 18.71 \text{ equipos/pedido}$$

Estos números se redondean a sus enteros más próximos, es decir 112 y 19 equipos respectivamente. Por su parte **R** es la diferencia entre Q y S:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} - \mathbf{S} = 112 - 19 = 93 \text{ eq./pedido}$$

El número óptimo de pedidos es:

$$\mathbf{N^*} = \mathbf{D} / \mathbf{Q^*} = 750/112 = 6.7 \text{ pedidos/año}$$

Mientras que el tiempo de ciclo es:

$$\mathbf{t^*} = \mathbf{365} / \mathbf{N^*} = 365/6.7 = 54.48 \text{ días/pedido}$$

El costo total del inventario para este sistema lo obtenemos por medio de la Ec.(XIV.21):

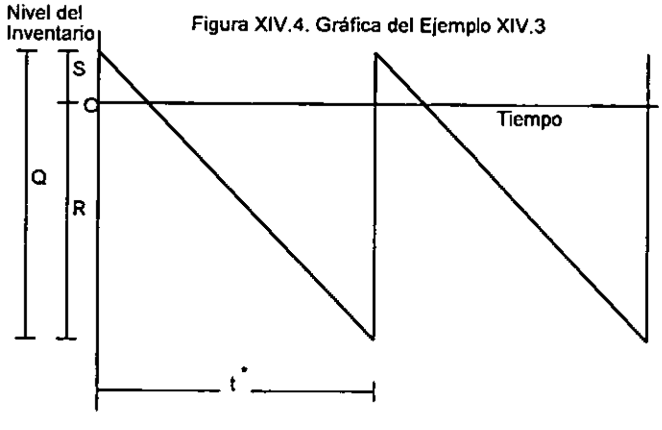
$$C_T = (1400)(750)/(112) + (1000)(19)^2/(2)(112) + (200)(93)^2/(2)(112)$$
$$= 9375.00 + 1611.61 + 7722.32 = 18{,}708.93 \text{ \$/año}$$

El cual comparado con el costo total del inventario para el modelo **CEP** normal obtenido en el ejemplo XIV.1 que era de $ 45,826.09 anuales, representa un ahorro de $ 27,117.16 , por lo que sí se recomienda a Sonormex instalar este sistema.

Una relación gráfica del caso se presenta en la figura XIV.4, donde vemos que la mayor parte del tiempo el nivel del inventario se encuentra por debajo de cero, debido a que **R** es 93 unidades, es decir el 83% del valor del pedido, esto significa que la empresa colocará un nuevo pedido por 112 equipos hasta que tenga solicitudes de sus clientes por 93 equipos, los cuales les surtirá al recibir su pedido quedando en ese momento 19 equipos en inventario, justamente el valor de S.

Es interesante en este problema observar que el costo de pedidos C_{ped} ha resultado igual a la suma del costo de conservación C_{con} más el de agotamientos C_{agt} para la solución óptima, situación similar a la del modelo **CEP** normal, donde en el punto óptimo para el costo total, se igualaban el costo de pedidos con el de conservación del inventario.

Figura XIV.4. Gráfica del Ejemplo XIV.3



Modelo del Punto de Renovación de Pedidos (PRP).

Los modelos antes vistos han sido planteados bajo las suposiciones de que el tiempo de adelanto es cero y que la demanda de artículos por parte de los clientes es constante, lo cual nunca sucede de esta manera en la vida real. Ante esta situación, el modelo que ahora vamos a presentar toma en cuenta estos dos aspectos, para tratar de apegarse más a la realidad.

El tiempo de adelanto por lo general nunca es cero, además de que puede variar por retrasos en los trámites del pedido, fallas en los equipos de transporte y otros imprevistos que hacen que aumente.

Por su parte la demanda también es variable por múltiples razones, tales como cambios climáticos, nuevas tecnologías, fallas de energía y otros factores que repercuten en ella, ante lo cual el presente modelo incluye existencias de seguridad con el fin de que éstas absorban las posibles fluctuaciones de la demanda, de modo que no haya agotamiento de las existencias en el inventario.

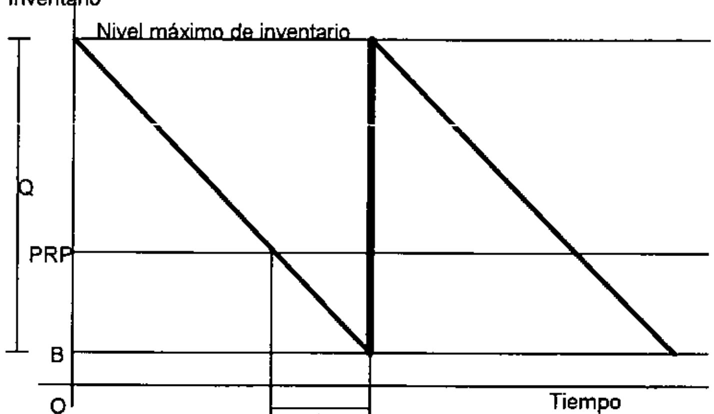
La ecuación que describe a este modelo es la siguiente:

$$PRP = D\ L + B \qquad \text{Ec.(XIV.24)}$$

Donde **PRP** = Punto de Renovación de Pedidos, unidades de mercancía
D = Demanda, u. de mercancía/u. de tiempo
L = Tiempo de Adelanto, unidades de tiempo
B = Existencias de Seguridad, unidades de mercancía

En la figura XIV.5 se muestra gráficamente la situación del modelo para el caso de una demanda constante, en ella vemos que la cantidad de existencias en inventario disminuye durante el tiempo de adelanto **L**, desde el punto de renovación de pedidos **PRP**, hasta el nivel de las existencias de seguridad **B**.

Figura XIV.5. Gráfica del Modelo del Punto de Renovación de Pedidos



Las existencias de seguridad se definen considerando las variaciones de la demanda, la cual manejan en forma probabilística, teniendo como objetivo minimizar el costo total del inventario, en el cual se incluye la posibilidad de que existan agotamientos, de modo que se elija la alternativa de costo mínimo.

Aquí es conveniente señalar que el inventario promedio para este modelo será **B + Q/2**, dado que se agregan **B** unidades al inventario de manera permanente.

Por su parte el costo anual de los agotamientos para una demanda probabilística se calcula por medio de la siguiente fórmula:

$$C_{agt} = C_f\ (D/Q)\ N_f \qquad \text{Ec.(XIV.25)}$$

Donde todos los términos son los mismos que se venían manejando excepto $\mathbf{N_f}$, que es el número promedio de faltantes dado por la Ec.(XIV.26):

$$Nf = \sum_{i=1}^{n} fi \ \ pi \qquad \text{Ec.(XIV.26)}$$

Donde f_i = Número de faltantes de la opción i
p_i = Probabilidad de la opción i
n = Número total de opciones que tienen faltantes

Como el costo de los pedidos no cambia si hay faltantes o no, para saber cuál de las opciones alternativas es la de menor costo, simplemente se calcula para cada una de ellas el costo de los agotamientos más el de conservación de las existencias de seguridad que tiene la opción.

A continuación se presenta un ejercicio para aclarar estos conceptos.

Ejemplo XIV.4.- La empresa Mueblera Rioverdense está haciendo un estudio de sus inventarios de recámaras tipo americano basada en una estadística de 100 meses anteriores de ventas durante el periodo de renovación de pedidos, la cual se presenta en la tabla XIV.3, donde aparecen las demandas de recámaras en unidades y la frecuencia con que se presentó cada una de ellas.

Tabla XIV.3.- Estadística de ventas de Mueblera Rioverdense

Demanda de Recámaras durante el periodo de renovación de pedidos , juegos/mes	Frecuencia de la demanda
48	3
52	6
56	7
60	20
64	34
68	14
72	10
75	6
Total	100

El tiempo de adelanto se considera de 32 días, el costo de cada faltante de existencias se ha estimado en \$ 400.00 y el de conservación en inventario en \$ 550.00 anuales, la cantidad económica de pedido es de 86 juegos y su demanda promedio es de 64 juegos mensuales.

¿Qué cantidad deberá definir la empresa como su punto de renovación de pedidos?
Solución:

Por medio de la Ec.(XIV.24) obtendremos el punto de renovación de pedidos:

$$\begin{aligned} PRP &= (64 \text{ juegos/mes}) \ (32/30 \text{ meses}) + B \\ &= 68 + B \quad \text{juegos} \end{aligned}$$

Donde se ha redondeado al entero más próximo.

Por lo tanto, conforme a los consumos de mercancías durante el periodo de renovación de pedidos que se han presentado en el pasado, tenemos 3 alternativas para el valor de **PRP**, las cuales son: (a) 68 juegos (B=0); (b) 72 juegos (B=4); y (c) 75 juegos (B=7), para las que debemos calcular la suma de los costos de agotamientos más el de conservación de las B unidades en inventario, para luego elegir a la de costo mínimo.

Entonces para la primera alternativa tendremos:

(a) PRP= 68, B=0

Para obtener el costo de los agotamientos, debemos definir las opciones de faltantes de la alternativa, los cuales se presentarán en aquellos casos en que los consumos de mercancías durante el periodo de renovación de pedidos sea de 72 o bien 75 juegos, en cuyos casos los faltantes serían 4 y 7 juegos respectivamente, entonces de acuerdo a la Ec.(XIV.26), tendremos:

$$N_f = (4)\,(0.10) + (7)\,(0.06) = 0.82 \text{ falt/ped}$$

Ahora por medio de la Ec.(XIV.25) obtendremos el costo de los agotamientos:

$$C_{agt} = (400\$/\text{falt.})\ [(64)(12)/(86)\text{ped/año}]\ (0.82 \text{ falt/ped})$$
$$= 2929.12 \ \$/\text{año}$$

Por su parte el costo de conservación para la alternativa es cero, ya que la cantidad de existencias de seguridad **B** es cero, por lo tanto la suma de costos es 2929.12 $/año.

Para la segunda alternativa tendremos:
(b) PRP=72, B=4
Aquí sólo habrá agotamientos cuando el consumo sea de 75 unidades, siendo 3 los juegos de recámaras faltantes, entonces para N_f al aplicar la Ec.(XIV.26) obtendremos:

$$N_f = (3)\,(0.06) = 0.18$$

El costo de los agotamientos será entonces:

$$C_{agt} = (400)\ [(64)(12)/(86)]\ (0.18)$$
$$= 642.98 \ \$/\text{año}$$

Por su parte el costo de conservación de las 4 unidades que se mantienen como existencias de seguridad será:

$$C_{con} = (550\$/\text{jgo. año})\ (4 \text{ jgos})$$
$$= 2200.00 \ \$/\text{año}$$

Por lo que la suma de ambos costos es de $ 2842.98 anuales.

Finalmente para la última alternativa tendremos:
(c) PRP=75, B=7
Aquí el costo de agotamientos será de cero, ya que éstos nunca aparecerán ya que las estadísticas de los consumos dadas en la tabla XIV.3 así nos lo muestran.
Por su parte el costo de conservación será:

$$C_{con} = (550)\ (7) = 3850.00 \ \$/\text{año}$$

El cual será también el total para la tercera alternativa.
Los cálculos completos para el problema se sumarizan en la tabla XIV.4, la cual es:

Tabla XIV.4.- Resultados del ejemplo XIV.3

Alternativa	PRP	B	C_{agt}	C_{con}	C_T
a	68	0	2929.12	0	2929.12
b	72	4	642.98	2200.00	2842.98
c	75	7	0	3850.00	3850.00

Por lo que la alternativa elegida deberá ser la segunda que considera 4 unidades como existencia de seguridad y el punto de renovación de pedidos en 72 juegos, permitiendo faltantes de sus existencias en un 6% de las ocasiones.

Modelo de Cantidad de pedido fija y Ciclo de tiempo variable.
Este modelo es apropiado para aquellos casos en los cuales no se dispone de información confiable sobre la demanda de mercancías y del tiempo de adelanto de los pedidos.

Tal y como su nombre lo indica, el modelo se basa en hacer pedidos de cantidades constantes de mercancías y variar el ciclo de tiempo de los mismos, de tal manera que las existencias cambian con el tiempo como nos lo muestra la figura XIV.6:

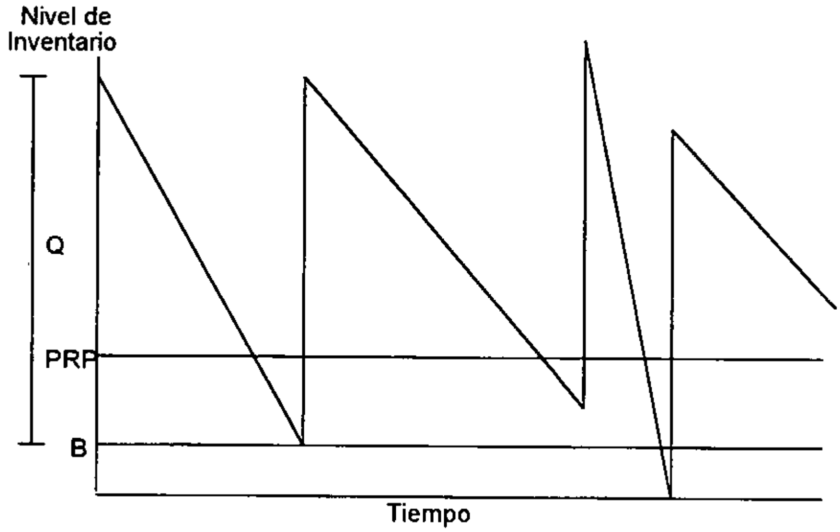


Figura XIV.6 Gráfica del Modelo de Cantidad fija y Ciclo variable.

En la figura vemos que la cantidad de pedido es constante y el ciclo de tiempo para cada pedido cambia dependiendo de la demanda de mercancías del inventario.

El modelo se plantea bajo el concepto del Punto de Renovación de Pedidos, el cual se estima por medio de la Ec.(XIV.24) como se hacía en el inciso anterior, tomando para ello la información disponible sobre la demanda y el tiempo de adelanto, mientras que por su parte las existencias de seguridad pueden definirse bajo el criterio de comparación de costos, eligiendo aquella opción que minimice al costo, tal y como se resolvió el ejemplo XIV. 4, o si no se dispone de datos sobre los costos de los agotamientos, los cuales no siempre son fáciles de cuantificar, lo que se hace es calcular las existencias de seguridad **B**, con la siguiente fórmula:

$$B = q\ \sigma \qquad \text{Ec.(XIV.27)}$$

Donde σ = Desviación estándar de la demanda
q = Número de desviaciones estándar para el área bajo la curva que corresponde al nivel de servicio deseado.

El uso de esta ecuación presupone que la demanda de mercancías cumple con la curva normal de distribución de probabilidad.

Por su parte el nivel de servicio **ns**, se define como la probabilidad de que no haya faltantes de existencias en el inventario, el cual se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$ns = 1 - \frac{\text{Número permitido de agotamientos anuales}}{\text{Número de pedidos anuales}} \qquad \text{Ec.(XIV.28)}$$

Presentaremos ahora el caso del ejemplo anterior para ilustrar la metodología de este modelo.

Ejemplo XIV.5.- Para el caso de la Mueblera Rioverdense, con los datos de CEP, demanda y tiempo de adelanto manejados en el ejemplo anterior, pero sin la información de los costos de agotamientos, ¿Cuál deberá ser el punto de renovación de pedidos y las existencias de seguridad para el negocio conforme al modelo de cantidad fija y ciclo variable, si sólo se permite un agotamiento de las existencias al año y su desviación estándar para la demanda es de 6.29 unidades?

Solución:

Los datos que se tienen son

$D = 64$ jgos/mes
$L = 32$ días
$\sigma = 6.29$ jgos/mes
$Q = 86$ jgos/ped

Ahora lo primero será hallar el nivel de servicio para el inventario, para el cual el número de pedidos anuales es:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{D/Q} = (64)\,(12)\,/\,(86) \\ &= 8.93 \text{ ped/año} \end{aligned}$$

Entonces conforme a la Ec.(XIV.28), tendremos:

$$\mathbf{ns} = 1 - 1/8.93 = 0.88802$$

Con este valor del nivel de servicio, que es el área bajo la curva normal de probabilidad, de las tablas respectivas por interpolación se obtiene un valor para q de 1.216 desviaciones estándar, con lo cual utilizando la Ec.(XIV.27) calcularemos las existencias de seguridad **B**:

$$\mathbf{B} = (1.216)\,(6.29) = 7.65 \text{ jgos}$$

Entonces nuestro **PRP** será:

$$\begin{aligned} \mathbf{PRP} &= D\,L + B \\ &= (64)\,(32/30) + 7.65 \\ &= 76 \text{ juegos} \end{aligned}$$

Si comparamos este resultado con el del ejemplo anterior, vemos que para este modelo un **PRP** de 76 juegos nos proporciona un nivel de servicio del 88.8%, mientras que para el modelo anterior hubiese representado el 100% de certeza de que no se presentarían agotamientos. Esto es porque el modelo actual exige más protección contra eventuales faltantes debido a la mayor incertidumbre de la información manejada.

Modelo de Ciclo de tiempo fijo y Cantidad de pedidos variable.

Este modelo al igual que el anterior es recomendable para aquellos casos en los que no hay la certeza sobre la información disponible referente a la demanda de artículos y del tiempo de adelanto para los pedidos. Utiliza las mismas fórmulas que el de cantidad fija y ciclo variable para calcular el nivel de servicio y las existencias de seguridad dadas por las ecuaciones (XIV.27) y (XIV.28), sólo que el punto de renovación de pedidos se calcula ahora con la siguiente expresión matemática:

$$PRP = D\,(L + t_C) + B \qquad \text{Ec.(XIV.29)}$$

Donde todos los términos son conocidos, excepto t_C, que es el ciclo de tiempo de renovación para los pedidos, el cual puede estimarse fácilmente mediante la siguiente ecuación:

$$t_C = 365 \text{ (días/año)} / N \text{ (pedidos/año)} \qquad \text{Ec.(XIV.30)}$$

Siendo **N** el número de pedidos anuales, el cual es el cociente de la demanda y la cantidad económica de pedido.

Si observamos la Ec.(XIV.29), nos daremos cuenta que este modelo tendrá valores más elevados para el

PRP que el anterior, ya que se incluye el tiempo adicional t_c, por lo que habrá mayor protección contra agotamientos del inventario debido a que como ahora el tiempo del ciclo es fijo, si llegara a haber demandas excesivas de los artículos, éstas podrían traer como consecuencia esos faltantes.

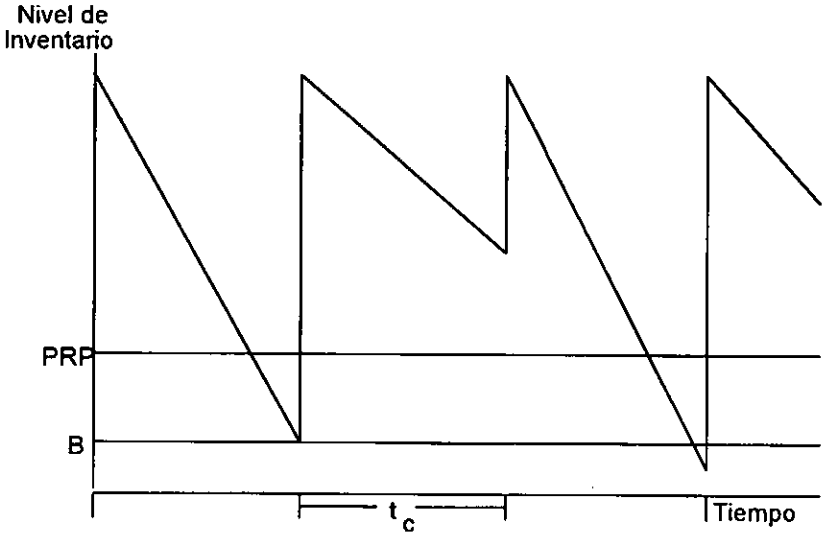


Figura XIV.7 Gráfica del Modelo de Ciclo fijo y Cantidad variable

La figura XIV.7 nos muestra cómo cambia el nivel de inventario con el tiempo para este modelo, en la cual vemos que cada ciclo de tiempo t_c, se coloca un nuevo pedido por una cantidad variable de artículos.

En seguida presentaremos el mismo caso del ejemplo anterior para resolverlo por medio de este modelo.

Ejemplo XIV.6.- Para el caso de la Mueblera Rioverdense, ¿Cuál sería el valor de PRP bajo el criterio del modelo de ciclo fijo y cantidad variable? Utilícense los mismos datos del ejemplo anterior.

Solución:

Lo primero será hallar el tiempo del ciclo, el cual se estima mediante la Ec.(XIV.30),

$$t_c = 365/N = 365/8.93$$
$$= 41 \text{ días/pedido}$$

Entonces obtendremos el **PRP** por medio de la Ec.(XIV.29),

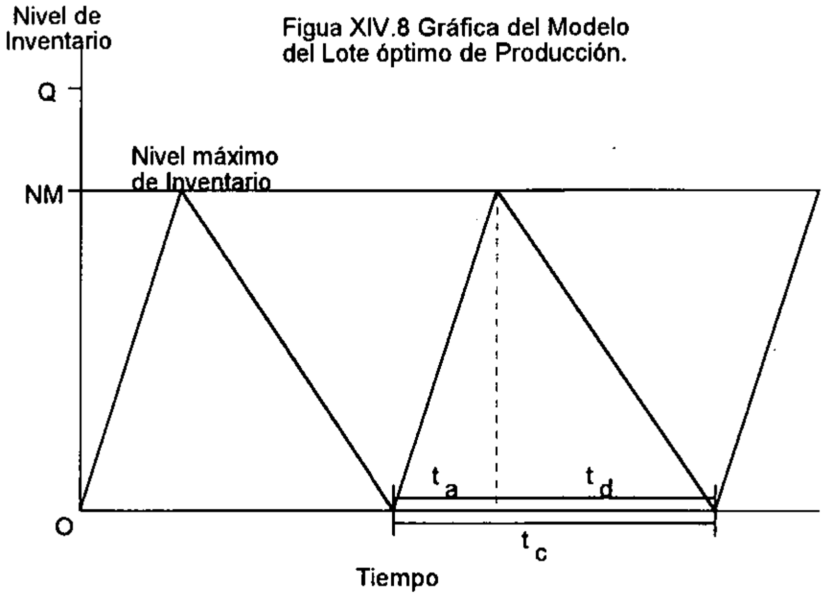
$$\mathbf{PRP} = 64\ [(32+41)/30] + 7.\ 65$$
$$= 163 \text{ juegos}$$

Esto representa un valor superior al doble del ejemplo anterior, debido básicamente a que el ciclo de tiempo para cada pedido es alto, mayor aún que el tiempo de adelanto.

Modelo de la Cantidad Económica del Lote de Producción.

Hasta ahora todos los modelos vistos anteriormente han considerado la compra del lote de artículos que manejan en sus inventarios, lo cual es válido para empresas del ramo comercial. Sin embargo, cuando se presenta el caso de que la empresa fabrica estos artículos, la situación de la administración del inventario cambia y este es el tema que se desarrollará en el presente apartado.

La figura XIV.8 nos muestra cómo cambia el nivel de existencias en el inventario para un caso de éstos.



Figua XIV.8 Gráfica del Modelo del Lote óptimo de Producción.

En ella observamos cómo el nivel del inventario aumenta en cuanto se inicia la corrida de producción hasta llegar al nivel máximo, señalado como **NM**, que es el momento en el que la corrida termina, con un tiempo de duración de t_a; luego la cantidad de artículos en inventario comienza a bajar por la demanda de los mismos hasta alcanzar el nivel mínimo, punto en el cual se inicia una nueva corrida, esta disminución del inventario se lleva a cabo en una cantidad de tiempo denominada t_d, siendo el tiempo total del ciclo para la corrida t_c, que es la suma de t_a y t_d. También en la figura podemos apreciar que el nivel máximo del inventario es menor a la cantidad económica del lote, indicada como **Q**, debido a que durante el tiempo de la corrida t_a, hay un consumo de artículos ocasionado por la demanda.

Este modelo se plantea con las mismas bases que el de la cantidad económica de pedido, sólo que ahora no habrá costo de pedidos, ya que éstos no existen, en su lugar aparecen los costos de preparación de las corridas de producción, los cuales se originan por diversas causas tales como la preparación y ajuste de las máquinas necesarios para efectuar la corrida, pedidos de materias primas, controles de producción y otros. Matemáticamente el costo de preparación C_{pre} viene dado por la siguiente fórmula:

$$C_{pre} = C_{cp}\ D / Q \qquad \text{Ec.(XIV.31)}$$

Donde C_{pre} = Costo anual de preparación de las corridas de producción, \$/año
C_{cp} = Costo unitario de preparación para cada corrida, \$/corrida
D = Demanda anual de artículos, u./año
Q = Lote de producción, u./corrida

Por su parte el costo de conservación del inventario es muy similar al que se presentó para el modelo de la **CEP**, con la diferencia de que ahora el inventario promedio es inferior a **Q/2**, como puede observarse en la figura XIV.8, ya que el nivel máximo del inventario **NM** no llega nunca a ser igual a **Q**.

Para determinar el inventario promedio, nos referiremos a la figura XIV.8 e introduciremos dos nuevas variables:

P = Tasa de Producción del artículo, unidades/día
V = Consumo o ventas del artículo, unidades/día

Como el tamaño del lote de producción es **Q**, la tasa de producción **P** vendrá dada por la siguiente expresión:

$$P = Q / t_a \qquad \text{Ec.(XIV.32)}$$

Siendo t_a el tiempo que dura la corrida, durante este tiempo vemos de la figura XIV.8 que el inventario aumenta desde cero hasta su nivel máximo **NM**, el cual viene dado por la siguiente ecuación:

$$NM = (P - V)\, t_a \qquad \text{Ec.(XIV.33)}$$

Puesto que la tasa neta de aumento del inventario es la diferencia de lo que entra en él que es la tasa de producción **P**, menos lo que sale que son los consumos o ventas **V**.

Como el inventario aumenta linealmente tal y como se aprecia en la figura, el promedio durante el tiempo t_a puede obtenerse mediante la semisuma del inventario máximo y mínimo del periodo, es decir:
Durante t_a :

$$\text{Inventario promedio} = \frac{(P-V)t_a + 0}{2} = \frac{(P-V)t_a}{2} \qquad \text{Ec.(XIV.34)}$$

Por su parte durante el tiempo t_d , que es periodo únicamente de consumo de artículos, ya que la corrida se ha parado, el nivel del inventario disminuye linealmente desde el nivel máximo **NM**, hasta cero, por lo que el promedio será el mismo que el del periodo de producción t_a, y por esta misma razón será el promedio para el periodo completo t_c. Si en la Ec.(XIV.34) sustituimos el valor de t_a obtenido de la Ec.(XIV.32) $t_a = Q/P$, tendremos:

$$\text{Inventario promedio} = \frac{(P-V)}{2}\,\frac{Q}{P} = \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{V}{P}\right) \qquad \text{Ec.(XIV.35)}$$

Con esto el costo de conservación del inventario será:

$$C_{con} = C_{cf}\,\frac{Q}{2}\left(1 - \frac{V}{P}\right) \qquad \text{Ec.(XIV.36)}$$

Donde C_{con} = Costo anual de conservación del artículo fabricado, \$/año
C_{cf} = Costo unitario de conservación del inventario, \$/unidad año, dado por la Ec.(XIV.37)

Por su parte,

$$C_{cf} = C_{af}\, M \qquad \text{Ec.(XIV.37)}$$

siendo C_{af} = Costo del artículo fabricado, \$/unidad
M = Porcentaje anual de mantenimiento del inventario

Por lo tanto el costo total C_T será la suma del costo de preparación más el de conservación, esto es:

$$C_T = C_{pre} + C_{con} \qquad \text{Ec.(XIV.38)}$$

Si en esta expresión sustituimos C_{pre} y C_{con} dados por las ecuaciones (XIV.31) y (XIV.36), tendremos:

$$C_T = C_{cp}\,\frac{D}{Q} + C_{cf}\,\frac{Q}{2}\left(1 - \frac{V}{P}\right) \qquad \text{Ec.(XIV.39)}$$

A semejanza del modelo CEP, en el punto óptimo de costo total mínimo, el costo de preparación será igual al de conservación.

Esta ecuación nos da el costo total del inventario al año, el cual deberá minimizarse, por lo cual si derivamos la expresión de C_T respecto a **Q** y la igualamos a cero, despejando luego a **Q**, obtendremos el valor de ésta que hace mínimo al costo, es decir Q^*, la cual vendrá dada por:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_{cp}D}{C_{cf}(1 - V / P)}} \qquad \text{Ec.(XIV.40)}$$

Por su parte el número óptimo de corridas anuales de producción será el cociente de la demanda **D** y el lote óptimo de producción Q^*:

$$N_{cp}^* = \frac{D}{Q^*} = \sqrt{\frac{C_{cf}D(1 - V / P)}{2C_{cp}}} \qquad \text{Ec.(XIV.41)}$$

Mientras que el tiempo óptimo del ciclo completo para la corrida t_c^*, será:

$$t_c^* = \frac{365 días / año}{N_{cp} * corr / año} = \frac{365Q^*}{D} \qquad \text{Ec.(XIV.42)}$$

Cuando la empresa manufactura varios artículos, lo que se hace es aplicar estas ecuaciones para cada uno de ellos, de modo de optimizar el costo del inventario total.

A continuación presentaremos un caso ilustrativo de la producción y venta simultánea de varios productos.

Ejemplo XIV.7.- La empresa Tornillos Finos produce 3 diferentes tipos de tornillos: de 1/2, 3/8 y 1/4 de pulgada, para los cuales se tienen los datos de costos, demandas y tasas de producción que se listan en la tabla XIV.5

Tabla XIV.5.- Información de Tornillos Finos para los diferentes tipos de tornillos

Tipo de tornillo Dato	1/2"	3/8"	1/4"
Costo de preparación, M$/corrida	300	280	270
Costo unitario del artículo, $/unidad	0.60	0.48	0.40
Mantenimiento anual del inventario, %	26	24	23
Tasa de Producción, unidades/día	3000	2000	3000
Ventas, unidades/día	200	150	250

Si la empresa trabaja 345 días al año, ¿Cuál será el tamaño óptimo del lote de producción, el número de corridas anuales y el tiempo del ciclo para cada tipo de tornillo?

Solución:

En este problema el costo unitario de conservación anual C_{cf}, se obtendrá multiplicando el costo unitario del artículo C_{af}, dado en el segundo renglón de la tabla por el porcentaje anual de mantenimiento del inventario **M**, contenido en el tercer renglón; por su parte la demanda anual será el producto de las ventas de artículos incluidas en el último renglón de la tabla por los días trabajados al año, es decir 345.

Con estas aclaraciones podemos entonces aplicar las fórmulas desarrolladas en la metodología para cada tipo de tornillo:

Para los tornillos de 1/2",
La cantidad económica del lote de producción, $\mathbf{Q^*}$ será:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_{cp}D}{C_{cf}(1-V/P)}} = \sqrt{\frac{2(300)(200x345)}{(0.60x0.26)(1-200/3000)}}$$
$$= 16862 \text{ tornillos/corrida}$$

El número óptimo de corridas de producción, $\mathbf{N_{cp}^*}$ será:

$$N_{cp}^* = \frac{D}{Q^*} = \frac{(200)(345)}{16862} = 4.09 \text{ corr / año}$$

El tiempo óptimo del ciclo para cada corrida, $\mathbf{t_c^*}$ será:

$$t_c^* = \frac{365}{N_{cp}^*} = \frac{365}{4.09} = 89.2 \text{ días / corr}$$

Por su parte el costo del inventario para este artículo, conforme a la Ec.(XIV.39) será:

$$C_T = C_{cp}\frac{D}{Q} + C_{cf}\frac{Q}{2}(1-\frac{V}{P})$$

$$= 300x\frac{200x345}{16862} + (0.60x0.26)x\frac{16862}{2}x(1-200/3000)$$
$$= 2455.17 \text{ \$/año}$$

Para los tornillos de 3/8",
La cantidad económica del lote de producción, $\mathbf{Q^*}$ será:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_{cp}D}{C_{cf}(1-V/P)}} = \sqrt{\frac{2(280)(150x345)}{(0.48x0.24)(1-150/2000)}}$$
$$= 16491 \text{ tornillos/corrida}$$

El número óptimo de corridas de producción, $\mathbf{N_{cp}^*}$ será:

$$N_{cp}^* = \frac{D}{Q^*} = \frac{(150)(345)}{16491} = 3.14 \text{ corr / año}$$

El tiempo óptimo del ciclo
para cada corrida, t_c* será:

$$t_c* = \frac{365}{N_{cp}*} = \frac{365}{3.14} = 116.3 \text{ días/corr}$$

Por su parte el costo del inventario para este tipo de tornillo será:

$$C_T = C_{cp}\frac{D}{Q} + C_{cf}\frac{Q}{2}(1-\frac{V}{P})$$

$$= 280x\frac{150x345}{16491} + (0.48x0.24)x\frac{16491}{2}x(1-150/2000)$$

$$= 1757.30 \text{ \$/año}$$

Finalmente para el tornillo de 1/4" tendremos:
La cantidad económica del lote
de producción, **Q*** será:

$$Q* = \sqrt{\frac{2C_{cp}D}{C_{cf}(1-V/P)}} = \sqrt{\frac{2(270)(250x345)}{(0.40x0.23)(1-250/3000)}}$$

$$= 23500 \text{ tornillos/corrida}$$

El número óptimo de corridas
de producción, N_{cp}* será:

$$N_{cp}* = \frac{D}{Q*} = \frac{(250)(345)}{23500} = 3.67 \text{ corr/año}$$

El tiempo óptimo del ciclo
para cada corrida, t_c* será:

$$t_c* = \frac{365}{N_{cp}*} = \frac{365}{3.67} = 99.4 \text{ días/corr}$$

El costo del inventario para este artículo, conforme a la Ec.(XIV.39) será:

$$C_T = C_{cp}\frac{D}{Q} + C_{cf}\frac{Q}{2}(1-\frac{V}{P})$$

$$= 270x\frac{250x345}{23500} + (0.40x0.23)x\frac{23500}{2}x(1-250/3000)$$

$$= 1981.87 \text{ \$/año}$$

Estos resultados se presentan en la siguiente tabla:

Tabla XIV. 6.- Resultados del ejemplo XIV.7

Tipo tornillo Concepto	1/2"	3/8"	1/4"
Q^*,u./corr.	16862	16491	23500
N_{cp}^*,corr./año	4.09	3.14	3.67
t_c^*,días/corr.	89.2	116.3	99.4
C_T, \$/año	2455.17	1757.30	1981.87

Siendo el costo total la suma de los individuales para cada tipo de tornillo,

$$\begin{aligned} C_T &= 2455.17 + 1757.30 + 1981.97 \\ &= 6194.34 \ \$/\text{año} \end{aligned}$$

Sistema de clasificación de Inventarios ABC.

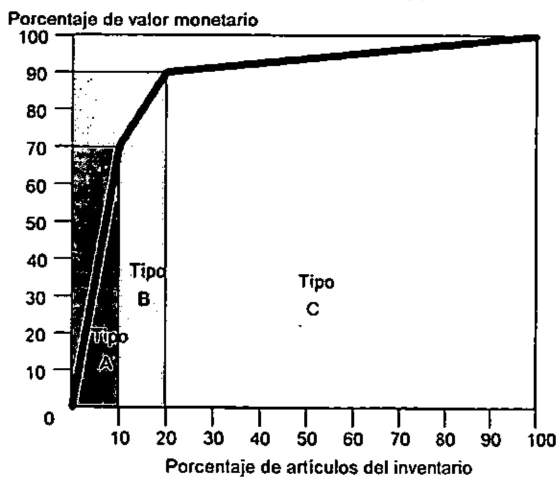
La mayor parte de las empresas comerciales y de manufactura manejan por lo general varios artículos, para los cuales no sería práctico llevar un modelo detallado de inventarios para cada uno de ellos, pues esto sería muy complejo e implicaría un costo elevado. Ante esta situación, existen sistemas de clasificación para los artículos del inventario, como el que se presenta en este inciso.

El sistema **ABC** consiste en clasificar los artículos del inventario en 3 tipos conforme a algún criterio de selección, el cual la mayoría de las veces es el valor monetario de los mismos. Estos tipos son:

Artículos tipo A: Los de mayor valor monetario, control de inventarios máximo.
Artículos tipo B: De valor monetario intermedio, control de inventarios normal.
Artículos tipo C: Los de valor monetario mínimo, control de inventarios mínimo.

La figura XIV.9 nos muestra gráficamente esta clasificación, en la cual vemos que los artículos tipo A cuando constituyen sólo el 10 % del total, representan el 70 % del valor del inventario; por su parte los artículos tipo B son otro 10 % del número total de los mismos, significando el 20 % del valor monetario total; por último los del tipo C son el 80 % del volumen de artículos constituyendo solamente el 10 % del valor del inventario.

Figura XIV.9 Gráfica del sistema de clasificación del inventario ABC.



Aunque lo que nos muestra la figura no parezca muy real, en la mayoría de los casos de inventarios de las empresas se dan situaciones parecidas a las antes descritas.

Se recomienda que los artículos que queden dentro de la categoría **A** se vigilen minuciosamente con un modelo de inventarios adecuado; por su parte los del tipo **B**, podrían administrarse con un modelo sencillo como el de la cantidad económica de pedido; mientras que los del tipo **C**, no justifican el uso de ningún modelo de inventarios para su manejo, el cual puede hacerse simplemente basado en la experiencia y el sentido común.

PROBLEMAS PROPUESTOS

XIV.1.- La farmacia "La Salud" adquiere anualmente antibióticos que compra al Laboratorio Bueno por la cantidad de $ 300,000.00. Si cada caja del producto le cuesta $ 12.50, el costo de colocar cada pedido es de $ 120.00 y el porcentaje de conservar artículos en el inventario es del 17.4 %. (a) ¿Cuál es la cantidad económica de pedido?, (b) ¿Cuál será el número óptimo de pedidos anuales?, (c) ¿Cuántos días habrá entre la colocación de un pedido y el siguiente?, (d) ¿Cuál será el costo total anual por manejo del inventario?

XIV.2.- "Tapicería Cabrera" compra tapices que utiliza para muebles de sala a un proveedor, por la cantidad de $ 155,000.00 anuales. Si cada tapiz le cuesta a la tapicería $38.50, el costo de cada pedido es de $85.00 y el mantenimiento en el inventario le cuesta $ 11.20 al año, calcular: (a) La cantidad económica de pedido; (b) El número óptimo de pedidos anuales; (c) El ciclo de tiempo entre pedidos ; (d) El costo total anual de la administración del inventario.

XIV.3.- La negociación "Cables del Centro" consume normalmente 100 metros mensuales de cable acerado de 1/2 pulgada. Su costo de colocación de pedidos es de $ 85.00 y el mantenimiento en el almacén es del 17 % del valor del inventario promedio. Su proveedor le ha ofrecido la siguiente escala de precios.

Cantidad de Compra, Metros	Precio, $/Metro
1 - 500	17.00
50 - 800	16.50
801 - 1200	16.00
1201 o más	15.80

Calcular: (a) La cantidad económica de pedido; (b) El número óptimo de pedidos anuales; (c) El ciclo de tiempo para cada pedido; (d) El costo anual de compra de la mercancía más el manejo del inventario.

XIV.4.- La Compañía Jabonera Mexicana ofrece al supermercado "The Boy" la siguiente tabla de precios de jabones para lavado de ropa:

Cantidad de Compra	Precio, $/Jabón
1 - 500	4.50
501 -1000	4.30
1001 - 1500	4.12
1501 - 2000	4.00
2001 - 3000	3.90
3001 o más	3.85

El costo de cada pedido es de $ 40.00 y la conservación del inventario es del 17.4% del inventario promedio, mientras que la demanda se estima en 600 jabones mensuales. Calcular: (a) La Cantidad Económica de Pedido; (b) El número óptimo de pedidos anuales; (c) El ciclo de tiempo para cada pedido; (d) El costo anual de adquisición de los jabones más el manejo del inventario.

XIV.5.- "Abarrotes del Refugio" ha implementado el sistema de pedidos retroactivos con algunos de los artículos que manejan entre los cuales se cuenta la cajeta, la que se ha vendido en fechas recientes según la siguiente estadística:

Venta, lts/mes	Frecuencia
100	10
110	20
120	30
130	40
140	30
150	10
Total	140

Si cada pedido le cuesta al negocio \$89.50, mantener en almacén es el 22% del inventario promedio, cada litro de cajeta \$8.50 y cada faltante \$2.15, calcular:

(a) La cantidad económica de pedido; (b) Cantidad de pedidos retroactivos; (c) Nivel máximo de inventario; (d) Costo total anual de manejo del inventario.

XIV.6.- "Hielo de Rioverde" compra bolsas de hielo de 10 kilos a un proveedor foráneo el cual le vende cada bolsa en \$12.30. Si cada pedido le cuesta \$117.00, mantener en almacén significa el 18% y cada faltante le ocasiona un costo de \$3.50. Obtener: (a) La cantidad económica de pedido; (b) El número óptimo de pedidos anuales; (c) El tiempo para cada pedido; (d) El costo total anual del manejo del inventario. Sus ventas en el pasado han sido las siguientes:

Venta mensual, bolsas	Frecuencia
50	20
60	20
70	45
80	50
90	30
100	15
Total	180

XIV.7.- El negocio "Hules Hernández" compra loderas a un proveedor de la capital y dispone de la siguiente información referente a sus consumos durante el periodo de reordenamiento:

Ventas en el periodo de reordenamiento, loderas	Frecuencia
530	4
580	5
600	7
630	25
680	5
730	4
Total	50

La empresa labora 300 días al año, su cantidad económica de pedido es de 1700 loderas y su consumo diario es de 35 unidades. Si cada faltante le cuesta \$40.00 y conservar en almacén \$6.00 anuales, ¿Cuál deberá ser su punto de renovación de pedidos y sus existencias de seguridad?

XIV.8.- La Refaccionaria Bendix trabaja sistemas de suspensión para vehículos los cuales adquiere de la compañía Suspenmex . Sus ventas durante el periodo de renovación de pedidos han sido las siguientes:

Venta, unidades	Probabilidad
40	0.20
50	0.35
60	0.30
70	0.15

Si cada faltante le cuesta a la refaccionaria $10.00 y el mantenimiento en almacén $13.00 anuales, cada pedido lo hace por 165 unidades y su tiempo de adelanto promedio es de 12 días, calcular: (a) El punto de renovación de pedidos; (b) Las existencias de seguridad; (c) El costo anual por faltantes y conservación en el inventario.

XIV.9.- Si la refaccionaria adoptara el modelo de cantidad de pedido fija y ciclo de tiempo variable con un nivel de servicio del 99%, ¿Cuál sería ahora el valor de las existencias de seguridad que debería manejar?

XIV.10.- La sombrerería "La Montañesa" maneja sus inventarios conforme al modelo de cantidad de pedido fija y ciclo de tiempo variable. Si su cantidad de pedido de sombreros finos de palma es de 600 piezas, su tiempo de adelanto de 6 días, permite agotamientos 2 veces por año y cuenta con la siguiente información sobre la venta de este tipo de sombrero:

Venta mensual	Frecuencia
500	4
520	7
540	13
560	15
580	8
600	3
Total	50

¿Cuál deberá ser su punto de renovación de pedidos y sus existencias de seguridad?

XIV.11.- Si la sombrerería decidiera cambiar su administración de los inventarios por un modelo de ciclo de tiempo fijo y cantidad de pedido variable, ¿Cual sería su valor del punto de renovación del pedido para el mismo nivel de servicio?

XIV.12.- La fábrica de chocolates "Chocolates Excelencia" produce chocolates finos y normales, los cuales ha vendido durante los últimos 12 meses según la siguiente estadística.

Mes	Venta de chocolates finos, kgs.	Venta de chocolates normales, kgs.
Enero	2400	4800
Febrero	2300	4800
Marzo	2000	4500
Abril	1800	3800
Mayo	1700	3500
Junio	1600	3400
Julio	1500	3000
Agosto	1550	2950
Septiembre	1700	3000
Octubre	1650	2900
Noviembre	1950	3350
Diciembre	2300	3850

Si en cada corrida de producción se pueden producir 800 kgs. diarios y establecerla cuesta $1000.00 para cada tipo de chocolate, conservar en inventario es el 28% del valor promedio; sus costos para cada tipo de producto son $4.30 para el fino y $1.95 para el normal. Estimar para cada tipo de chocolate: (a) la cantidad económica del lote de producción; (b) Número de corridas anuales; (c) El tiempo para cada corrida; y (d) El costo total anual por manejo del inventario.

XIV.13.- "Impresos de Rioverde" produce impresos de diversos tipos de los cuales las invitaciones para boda han tenido el siguiente registro de ventas durante los últimos 5 meses:

Mes	Venta, Unidades
1	2800
2	3000
3	3100
4	2700
5	2950

Su tasa de elaboración ha sido de 300 invitaciones diarias en promedio y su departamento contable le ha dado la siguiente información:

Costo de preparación de maquinaria = $855.00 por corrida de impresión
Costo de preparación de materiales = $165.00 por corrida de impresión
Costo de materiales directos = $12.35 por invitación
Costos fijos del negocio = $18,540.00 mensuales
Costo anual de mantenimiento del inventario = $10.50 por invitación

Con estos datos calcular: (a) Cantidad económica del lote de producción; (b) Número óptimo de corridas anuales de producción; (c) Tiempo de ciclo de una corrida; (d) Costo total anual de manejo del inventario.

XIV.14.- La Papelería Gama ha hecho un recuento de sus inventarios por el cierre de operaciones del final del año en curso y ha obtenido la siguiente relación:

Artículo	Costo unitario,$	Existencia, #
Libretas	5.00	42,000
Lapiceros	0.80	75,000
Lápices	0.20	20,000
Mochilas	20.00	250
Carpetas	0.10	36,000
Hojas	0.05	76,000
Borradores	0.40	10,000
Sacapuntas	0.38	10,000
Cintas	10.00	420
Cartulinas	2.20	3,000

Conforme al sistema de clasificación ABC, ¿Cuáles artículos serían de cada tipo?

CAPITULO XV

TEORIA DE JUEGOS

Introducción.

La teoría de juegos se inició en 1928 cuando Von Neumann desarrolló su técnica básica y años más tarde Morgenstern también hizo aportaciones importantes al presente tema.

Los juegos representan situaciones de competencia y de conflicto entre los jugadores, los cuales se supone que son personas racionales que realizan su juego de un modo inteligente con el fin de ganarlo, o bien para minimizar su pérdidas.

Algunos casos reales en los cuales se aplica la teoría de juegos son los juegos de mesa, las negociaciones obrero-patronales, combates militares, campañas políticas, las campañas de publicidad, la planeación empresarial y otras que son propias de los negocios.

En la teoría de juegos puede haber un número variable de jugadores, cada uno de los cuales tiene un diferente número de estrategias posibles cuya combinación nos llevará a determinar el valor del juego.

La teoría de juegos es diferente a la toma de decisiones, ya que en ésta el tomador de decisiones juega contra la naturaleza, la cual es un adversario pasivo cuyas estrategias se definen de una manera probabilística, tal y como se presentó en el capítulo XIII, mientras que por su parte en la teoría de juegos, cada jugador define las probabilidades de sus estrategias buscando lo que más conviene a sus intereses.

En este capítulo se tratará primeramente la terminología, clasificación y notación de los juegos, luego se presentará el desarrollo de estrategias puras con la definición del punto de silla de montar, después se tratará el concepto de dominio en un juego y finalmente se verá la forma de obtener el valor del juego por diferentes métodos como el de la probabilidad conjunta, el gráfico, el método de subjuegos y la programación lineal.

Terminología, clasificación y notación de juegos.

En este inciso presentaremos algunas definiciones útiles para la mejor comprensión del capítulo, así como las clasificaciones más usuales de los juegos y la notación adoptada para los mismos.

Daremos entonces algunas definiciones:

Juego.- Situación competitiva entre varios jugadores cada uno de los cuales tratará de enfrentarlo de modo que maximice sus ganancias.

Estrategias.- Son las distintas acciones que puede tomar un jugador, cada una de los cuales lleva un valor numérico asociado a ella y conducente al valor del juego, dependiendo de las combinaciones de estrategias de los diversos jugadores.

Valor del juego.- Es el resultado numérico final que se obtiene, cuando cada jugador define sus estrategias.

Matriz de pagos.- Es una matriz donde se incluyen todos los resultados del juego para las posibles combinaciones que puede haber. Es similar a la matriz de pagos presentada en la teoría de decisiones.

Clasificación de los juegos.- Los juegos se clasifican de acuerdo a varios criterios, de los cuales los más frecuentes son los siguientes:

(a) El número de jugadores que participan. Pueden ser de dos o más jugadores, en este capítulo sólo presentaremos juegos de 2 jugadores, ya que juegos de un número mayor resultan mucho más complicados y salen del alcance de un texto como éste.

(b) El tipo de estrategias del juego. Las que pueden ser puras si cada uno de los jugadores juega todo el tiempo sólo una de sus estrategias; y mixtas, en las que cada jugador juega varias de sus estrategias en diversas proporciones indicadas por las probabilidades de cada una de ellas.

(c) La suma del juego. La que representa el valor neto del juego, pudiendo ser cero, cuando lo que un jugador gana es igual a lo que el otro pierde, de modo que el resultado neto es cero; y diferente de cero, cuando lo que un jugador gana no es igual a lo que el otro pierde, o bien si ambos jugadores ganan o ambos pierden.

Este último tipo de juego presenta muchas complicaciones para su resolución, de modo que tampoco se incluye en este texto.

Notación.- En la figura XV.1 se presenta la matriz de pagos típica de un juego de suma cero de dos jugadores, que será el tipo que se tratará en este capítulo.

Figura XV.1.-Esquema de un juego de suma cero y dos jugadores.

		Jugador II	
	Estrategias	C	D
Jugador I	A	10	-4
	B	-6	8

En este texto se adopta la convención de que un número positivo en la matriz de pagos significa ganancia para el jugador I y pérdida para el jugador II; mientras que un valor negativo indica lo contrario.

En la matriz observamos que si el jugador I juega su estrategia A y el jugador II juega la C, el resultado es que el primero gana 10, mismo valor que pierde el jugador II, siendo 10 el valor del juego; sin embargo, si el jugador II cambia a su estrategia D, el resultado será que ganará 4, misma cantidad que perderá el primero.

Por otra parte si el jugador I juega su estrategia B y el II la C, este último ganará 6; si por el contrario, el segundo jugador cambiase a su estrategia D, el resultado sería que el primero ganaría 8 al segundo.

Por esto vemos que el juego tendrá un valor dependiendo de las estrategias que seleccione cada jugador, sabiendo que cada uno de éstos buscará elegir sus respectivas estrategias para maximizar sus ganancias o minimizar sus pérdidas.

Un juego puede tener un número variable de estrategias para cada uno de los jugadores, siendo los casos más simples el de dos jugadores con dos estrategias cada uno de ellos, como el ejemplo de la figura XV.1 .

Punto de Silla de Montar.

El punto de silla de montar es aquel valor de la matriz de pagos que es a la vez el mínimo del renglón y el máximo de la columna a los que pertenece, siendo la estrategia a jugar para cada jugador, por constituir el óptimo para ambos.

El punto de silla de montar es el valor *maximin* (máximo de los mínimos) para el jugador I y el *minimax* (mínimo de los máximos) del II, tal y como puede verse en el juego que se presenta en la figura XV.2, asemejándose con esto al criterio ingenuo de decisión *minimax* presentado en el capítulo XIII.

Figura XV.2.- Juego con Punto de Silla de Montar.

		Jugador II		
	Estrategias	C	D	Mínimos de los renglones
Jugador I	A	5	0	$\boxed{0}$ Valor maximin
	B	3	-2	-2
	Máximos de las columnas	5	$\boxed{0}$ valor minimax	

Siendo entonces el valor del juego, cero para el ejemplo de la figura XV.2, ya que será la estrategia óptima de ambos jugadores, la **A** para el **I** y la **D** para el **II**. Esto se explica de una manera simple: Si observamos la matriz anterior, vemos que el jugador **I** se dará cuenta que independientemente de la estrategia que elija el jugador **II**, a él le convendrá su estrategia **A** ya que en todos los casos le da un mejor resultado que la **B**. Por su parte el jugador **II** al analizar el juego con un razonamiento similar, optará por su estrategia **D**, ya que es mejor que la **C** para cualquier opción que elija el jugador **I**, por esto el punto de *silla de montar* constituye la estrategia óptima para ambos jugadores y por consiguiente el valor del juego será el pago correspondiente a él en la matriz de pagos, constituyendo de esta manera un juego de estrategias puras ya que los jugadores sólo elegirán la estrategia respectiva al punto de *silla de montar.*

Este punto recibe su nombre del hecho de ser el valor máximo de los mínimos para el jugador **I** y el mínimo de los máximos para el **II**, lo que nos recuerda la figura de una montura.

Un juego puede o no tener punto de *silla de montar,* pudiendo haber varios en un mismo juego, como el caso siguiente:

Figura XV.3.-
Ejemplo de un juego
con 2 puntos de Silla
de Montar.

Jugador II

	Estrategias	C	D
Jugador I	A	3	-1
	B	5	-1

Como podemos ver en este ejemplo, cuando hay varios puntos de *silla de montar*, éstos corresponderán a un mismo valor del juego.

Por lo antes citado, en todo juego lo primero que debe hacerse es revisar si éste tiene punto de *silla de montar*, ya que de haberlo, su ubicación en la matriz de pagos nos dará el valor del juego.

A continuación presentaremos un ejemplo de esto:

Ejemplo XV.1.- Determine si los siguientes juegos tienen punto de *silla de montar.*

$$(a)\begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 9 \\ -5 & 3 & 11 \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{b})\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 \\ 9 & 6 & 2 \\ 10 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(c)\begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 8 \\ -3 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

Solución:

Para cada uno de los juegos hallaremos sus mínimos del renglón y máximos de la columna.
Entonces para el inciso (a) tendremos:

$$\begin{array}{rccc|l}
 & & & & \text{Mínimo de renglón} \\
 & \multicolumn{3}{c|}{\begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 9 \\ -5 & 3 & 11 \end{pmatrix}} & \begin{array}{l} \boxed{4}\ \text{valor maximin} \\ 1 \\ 3 \end{array} \\
\text{Máximo de columna} & 6 & \boxed{4} & 11 & \\
 & & \text{valor minimax} & &
\end{array}$$

Vemos con esto que al coincidir el valor *maximin* con el *minimax,* es el punto de *silla de montar*, siendo 4 el valor del juego.

Para el inciso (b) tendremos:

$$\begin{array}{rccc|l}
 & & & & \text{Mínimo de renglón} \\
 & \multicolumn{3}{c|}{\begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 \\ 9 & 6 & 2 \\ 10 & 4 & 1 \end{pmatrix}} & \begin{array}{l} \boxed{3}\ \text{valor maximin} \\ 2 \\ 1 \end{array} \\
\text{Máximo de columna} & 10 & 7 & \boxed{3} & \\
 & & & \text{valor minimax} &
\end{array}$$

Siendo el punto de *silla de montar* el 3 ubicado en el primer renglón y la tercera columna, siendo también el valor del juego.

Finalmente para el inciso (c) tendremos:

$$\begin{array}{rccc|l}
 & & & & \text{Mínimo de renglón} \\
 & \multicolumn{3}{c|}{\begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 8 \\ -3 & 4 & 11 \end{pmatrix}} & \begin{array}{l} \boxed{3}\ \text{valor maximin} \\ 2 \\ -3 \end{array} \\
\text{Máximo de columna} & 5 & \boxed{4} & 11 & \\
 & & \text{valor minimax} & &
\end{array}$$

En este caso vemos que el valor *minimax* no coincide con el valor *maximin*, por lo que no hay punto de *silla de montar* y no sabemos el valor del juego, hasta que éste sea resuelto por alguno de los métodos que se presentarán más adelante.

Dominio.

En la teoría de juegos en ocasiones aparecen juegos que pueden ser reducidos de tamaño mediante el concepto de dominio, el cual conforme a la notación convenida es el siguiente: "Habrá dominio en un juego siempre que en la matriz de pagos todos los elementos de una línea dada ya sea renglón o columna, sean mayores o iguales que los de otra línea semejante". Así si todos los elementos de un renglón dado son mayores o iguales que los correspondientes a otro renglón, se dice que el primer renglón domina al último, ya que el jugador I no escogerá la estrategia respectiva del renglón de elementos menores, por lo que dicho renglón puede eliminarse del juego; por su parte si los elementos de una columna dada son menores o iguales que los respectivos elementos de otra columna, se dice que la primera columna domina a la última, ya que por ser menores sus elementos, al jugador **II** le convendrá tomar los menores valores de la matriz de pagos, por lo que no jugará la estrategia correspondiente a su columna de elementos mayores, por lo que ésta puede eliminarse del juego.

Este concepto aplica para juegos en los que no existe punto de *silla de montar*, por lo que forma parte de una estrategia mixta.

En la figura XV.4 se muestra un juego que puede reducirse con la aplicación del concepto de dominio.

Figura XV.4.- Ejemplo de un Juego de 3 x 3.

	Estrategias	Jugador II D	E	F
	A	7	6	5
Jugador I	B	9	4	4
	C	8	-3	6

Como vemos el juego se dice ser de 3 x 3, ya que cada jugador tiene tres estrategias a su disposición.

Si observamos la matriz de pagos del juego, nos daremos cuenta que los elementos de la primera columna son mayores que los de la segunda y la tercera columnas, por lo que el jugador **II** no elegirá su primera columna, ya que a él le convendrán los valores menores del juego, por lo que la columna puede eliminarse, quedando el nuevo juego de la siguiente forma:

Figura XV.5.- Juego reducido por dominio a 3 x 2.

	Estrategias	Jugador II E	F
	A	6	5
Jugador I	B	4	4
	C	-3	6

El cual es ahora de 3 x 2, es decir de tres renglones y dos columnas.

Si observamos nuestra nueva matriz, veremos que los elementos del primer renglón son mayores que los del segundo renglón, por lo que el jugador **I** al analizar esto, no seleccionará su estrategia **B** correspondiente al segundo renglón, por lo cual éste puede eliminarse para dejar el juego de 2 x 2, tal y como se muestra en la figura siguiente:

Figura XV.6.- Juego reducido por dominio a 2 x 2.

	Estrategias	Jugador II D	F
	A	6	5
Jugador I	C	-3	6

De esta última matriz vemos que ya no es posible hacer más reducciones, por lo que el juego deberá solucionarse por alguno de los métodos que se presentarán en seguida, sólo que ahora siendo de 2 x 2 será mucho más sencillo resolverlo que el juego original de 3 x 3.

Es pertinente señalar que el valor del juego no se altera si se resuelve en su tamaño original sin la aplicación del concepto de dominio.

Ahora presentaremos un ejemplo:

Ejemplo XV.2 .- Para los juegos siguientes, analizar la posibilidad de reducirlos por dominio.

$$(a)\begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \qquad (b)\begin{pmatrix} 9 & 6 & -2 & 5 \\ 8 & 6 & -3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 6 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (c)\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

Lo primero que hay que hacer para cada juego es ver si tiene punto de *silla de montar*, lo cual resulta negativo para los 3 casos, por lo que conforme al concepto de dominio se analizará cada uno de ellos. Así para el juego del inciso (a) vemos que el primer renglón domina al segundo, por lo que al eliminar éste tendremos:

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 8 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Ahora vemos que la segunda y tercera columnas dominan a la primera, por lo que al quitar ésta, el juego nos quedará en la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

El cual ya no es susceptible de ser reducido.

Por su parte para el juego del inciso (b), vemos que el primer renglón domina al segundo y el cuarto al tercero, por lo que al eliminar a los dominados, tendremos:

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & -2 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora vemos que las columnas tercera y cuarta dominan a las 2 primeras, por lo que al quitar éstas del juego, éste nos quedará:

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

El cual ya no puede ser reducido.

Finalmente para el juego del inciso (c), vemos que la segunda y tercera columnas dominan a la primera, por lo que al eliminar ésta, tendremos:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

No pudiéndose reducir más el juego por no existir dominios.

Determinación del Valor del Juego.

Para resolver cualquier juego, el procedimiento que debe seguirse es:

1.- Revisar si existe punto de *silla de montar*, en caso de haberlo, el juego habrá sido resuelto siendo su valor el del pago en la matriz que corresponde al punto de *silla de montar.*

2.- Si no hubo punto de *silla de montar,* deberá analizarse la posibilidad de reducir el juego mediante dominios.

3. - Se deberá proceder a solucionar el juego que se haya obtenido en el paso anterior mediante alguno de los métodos que se presentan a continuación.

Método de Probabilidad Conjunta.

Este es un método adecuado para solucionar juegos de 2 x 2 cuyo esquema se muestra en la siguiente figura:

		Jugador II		
Estrategias		1	2	
Jugador I	1	X_{11}	X_{12}	p_1
	2	X_{21}	X_{22}	p_2
		c_1	c_2	

Figura XV.7.- Esquema típico de un juego de 2 x 2.

El valor del juego V, se obtiene por medio de la siguiente fórmula:

$$= X_{11}p_1c_1 + X_{12}p_1c_2 + X_{21}p_2c_1 + X_{22}p_2c_2 \qquad \text{Ec.(XV.1)}$$

Donde :

p_1 = Probabilidad de que el jugador I elija su estrategia 1

p_2 = Probabilidad de que el jugador I elija su estrategia 2

c_1 = Probabilidad de que el jugador II elija su estrategia 1

c_2 = Probabilidad de que el jugador II elija su estrategia 2

Por su parte las probabilidades de cada jugador para jugar una estrategia dada pueden obtenerse por el método aritmético y el algebraico, los cuales se explicarán a continuación.

Método Aritmético.

Este método es muy simple y nos llevará a obtener las probabilidades p_1, p_2, c_1 y c_2 que se señalaron en la figura XV.7 y en la ecuación (XV.1). Conforme a la figura, las probabilidades pueden calcularse por las siguientes ecuaciones:

$$p_1 = |X_{21} - X_{22}| / D \qquad \text{Ec. (XV.2)}$$

$$p_2 = |X_{11} - X_{12}| / D \qquad \text{Ec. (XV.3)}$$

$$c_1 = |X_{12} - X_{22}| / D \qquad \text{Ec. (XV.4)}$$

$$c_2 = |X_{11} - X_{21}| / D \qquad \text{Ec. (XV.5)}$$

Donde cada numerador indica el valor absoluto de la diferencia de 2 pagos señalados como X en el juego.

Por su parte **D** viene dada por el valor absoluto de la diferencia entre las sumas de pagos de las diagonales de la matriz respectiva, tal y como lo señala la expresión siguiente:

$$\mathbf{D} = |(X_{11} + X_{22}) - (X_{12} + X_{21})| \qquad \text{Ec. (XV.6)}$$

Ahora presentaremos un ejercicio ilustrativo de este método.

Ejemplo XV.3.- Determinar las probabilidades de las estrategias para cada jugador y el valor del juego siguiente:

	Estrategias	Jugador II 1	2
Jugador I	1	5	2
	2	3	4

Solución:

Conforme a la Ec. (XV.6), **D** será:

$$\mathbf{D} = |(5+4) - (3+2)| = |9 - 5|$$
$$= 4$$

Entonces las probabilidades de cada estrategia las obtendremos con las ecuaciones (XV.2) a la (XV.5):

$$p_1 = \frac{|3-4|}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$p_2 = \frac{|5-2|}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$c_1 = \frac{|2-4|}{4} = \frac{2}{4} = 0.50$$

$$c_2 = \frac{|5-3|}{4} = \frac{2}{4} = 0.50$$

Por su parte el valor del juego lo calculamos mediante la Ec. (XV.1):

$$\mathbf{V} = (5)(0.25)(0.50) + (2)(0.25)(0.50) + (3)(0.75)(0.50) + (4)(0.75)(0.50)$$
$$= 0.625 + 0.250 + 1.125 + 1.500$$
$$= 3.500$$

Vemos que el valor del juego ha resultado ser un número intermedio de los diferentes pagos que forman la matriz, lo cual es obvio si consideramos la manera cómo se ha calculado.

Método Algebraico.

Este método es un poco más elaborado que el anterior, pero también es útil para determinar las probabilidades de las estrategias de cada jugador p_1, p_2, c_1 y c_2, tal y como están mostradas en la figura XV.7. Se parte del hecho de que la ganancia que cada jugador espera por seleccionar su primera estrategia debe ser igual a su ganancia esperada por jugar su segunda estrategia. Así para el caso del jugador II, lo que éste espera ganar por su primera estrategia es $p_1X_{11} + p_2X_{21}$, mientras que su ganancia esperada para su segunda estrategia es $p_1X_{12} + p_2X_{22}$. Entonces si igualamos ambas ganancias tendremos:

$$p_1X_{11} + p_2X_{21} = p_1X_{12} + p_2X_{22} \qquad \text{Ec. (XV.7)}$$

Y dado que

$$p_1 + p_2 = 1 \qquad \text{Ec. (XV.8)}$$

Si se resuelven estas dos ecuaciones simultáneamente, tendremos:

$$p_1 = \frac{X_{22} - X_{21}}{X_{11} - X_{12} - X_{21} + X_{22}} \qquad \text{Ec. (XV.9)}$$

$$p_2 = \frac{X_{11} - X_{12}}{X_{11} - X_{12} - X_{21} + X_{22}} \qquad \text{Ec. (XV.10)}$$

Por su parte para el jugador I, de una manera similar si igualamos su ganancia para cada estrategia, tendremos:

$$c_1X_{11} + c_2X_{12} = c_1X_{21} + c_2X_{22} \qquad \text{Ec. (XV.11)}$$

Y también

$$c_1 + c_2 = 1 \qquad \text{Ec. (XV.12)}$$

Las que al resolverse nos darán:

$$c_1 = \frac{X_{22} - X_{12}}{X_{11} - X_{12} - X_{21} + X_{22}} \qquad \text{Ec. (XV.13)}$$

$$c_2 = \frac{X_{11} - X_{21}}{X_{11} - X_{12} - X_{21} + X_{22}} \qquad \text{Ec. (XV.14)}$$

En seguida ilustraremos este método con un ejemplo.

Ejemplo XV.4.- Para el juego anterior hallar las estrategias de cada jugador mediante el método algebraico.

Solución :

La matriz de pagos es:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Lo que haremos será calcular las probabilidades de cada estrategia mediante las ecuaciones (XV.9), (XV.10), (XV.13) y (XV.14), con lo cual tendremos:

$$p_1 = \frac{X_{22} - X_{21}}{X_{11} - X_{12} - X_{21} + X_{22}} = \frac{4-3}{5-2-3+4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$p_2 = \frac{X_{11} - X_{12}}{X_{11} - X_{12} - X_{21} + X_{22}} = \frac{5-2}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$c_1 = \frac{X_{22} - X_{12}}{X_{11} - X_{12} - X_{21} + X_{22}} = \frac{4-2}{4} = \frac{2}{4} = 0.50$$

$$c_2 = \frac{X_{11} - X_{21}}{X_{11} - X_{12} - X_{21} + X_{22}} = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = 0.50$$

Con lo cual vemos que se han obtenido los mismos resultados que con el método aritmético utilizado en el ejemplo anterior.

Método de Subjuegos.

Este método es aplicable a juegos de 3 x 2 o de 2 x 3, en los cuales el procedimiento de solución consiste en dividir el juego en 3 subjuegos de 2 x 2, cada uno de los cuales se obtiene a partir del juego original, eliminando de éste una de las 3 estrategias cada vez por parte de aquel jugador que tenga las 3 opciones. Entonces se evalúa cada subjuego y se elige el que tenga el mejor valor para el jugador con 3 estrategias, es decir que se tomará el subjuego de valor máximo si el juego inicial es de 3 x 2 y el subjuego de valor mínimo si el juego es de 2 x 3.

A continuación presentaremos un ejemplo para ilustrar el método actual.

Ejemplo XV.5.- La empresa "Hilos Potosinos" busca ganar mercado, para lo cual dispone de 2 estrategias: (1) Disminuir los precios y (2) mejorar la calidad de su proceso. Su competidor en el estado es la compañía "Textiles M", la cual cuenta con las 2 mismas alternativas estratégicas más una tercera que es no hacer nada.

De un estudio técnico-económico hecho por un grupo de asesores administrativos para "Hilos Potosinos", le han dado la siguiente matriz de pagos.

		Hilos Potosinos	
	Estrategias	Bajar precios	Mejorar Calidad
Textiles M	Bajar Precios	40	-20
	Mejorar Calidad	-10	-16
	No hacer Nada	-20	-14

Donde los pagos son en millones de pesos anuales, los que se han puesto conforme a la notación convencional, es decir que los números positivos favorecen a "Textiles M" y los negativos a "Hilos Potosinos".

¿ Cuál será el valor del juego y las probabilidades para cada estrategia de los jugadores?

Solución:

Este juego no tiene punto de *silla de montar* ni *dominios*, por lo que procederemos a aplicar la metodología de subjuegos, según la cual el juego de 3 x 2 lo dividiremos en 3 subjuegos de 2 x 2, cada uno de los cuales se hará eliminando una estrategia de la compañía "Textiles M".

Primer subjuego, se elimina la primera estrategia de "Textiles M", bajar los precios. Entonces el subjuego de 2 x 2 es:

$$\begin{array}{cc|l} \multicolumn{2}{c}{} & \\ \hline -10 & -16 & m_2 \\ -20 & -14 & m_3 \\ \hline hp_1 & hp_2 & \end{array}$$

Donde las **m** son las probabilidades de las estrategias de "Textiles M" y las **hp** las respectivas para "Hilos Potosinos". Si resolvemos el subjuego, obtendremos:

$$\begin{aligned} m_1 &= 0 \\ m_2 &= 0.5000 \\ m_3 &= 0.5000 \\ hp_1 &= 0.1667 \\ hp_2 &= 0.8333 \\ V_1 &= -15.0 \end{aligned}$$

Segundo subjuego, se elimina la segunda estrategia de "Textiles M", mejorar la calidad. Entonces el subjuego de 2 x 2 es:

$$\begin{array}{cc|l} \hline 40 & -20 & m_1 \\ -20 & -14 & m_3 \\ \hline hp_1 & hp_2 & \end{array}$$

El cual al resolverse nos da lo siguiente:

$$\begin{aligned} m_1 &= 0.0909 \\ m_2 &= 0.0 \\ m_3 &= 0.9091 \\ hp_1 &= 0.0909 \\ hp_2 &= 0.9091 \\ V_2 &= -14.545 \end{aligned}$$

Tercer subjuego, se elimina la tercera estrategia de "Textiles M", no hacer nada. Entonces el subjuego de 2 x 2 es:

$$\begin{array}{cc|l} \hline 40 & -20 & m_1 \\ -10 & -16 & m_2 \\ \hline hp_1 & hp_2 & \end{array}$$

Este subjuego tiene punto de *silla de montar*, el -16 del segundo renglón y segunda columna, ya que es el mínimo del renglón y máximo de columna a la que pertenece, por lo cual tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} m_1 &= 0 \\ m_2 &= 1.0 \\ m_3 &= 0 \\ hp_1 &= 0 \\ hp_2 &= 1.0 \\ V_3 &= -16 \quad \text{(punto de silla de montar)} \end{aligned}$$

Conforme a lo indicado en la metodología de subjuegos, en este caso el jugador que tiene las 3 opciones estratégicas es "Textiles M", quien seleccionará el subjuego del valor máximo, es decir el segundo, por lo que el resultado para el juego original será el de este subjuego.

Método Gráfico.

Este método aunque puede perder exactitud en su resultado, ya que éste se obtiene por lectura de la gráfica del juego, es relativamente rápido e ilustra de una manera conveniente las características del juego.

Se aplica a un juego de **n x 2** estrategias, pudiendo ser **n** cualquier valor, mientras que el hecho de que uno de los jugadores deba tener dos estrategias se explica por la situación de no poder construir gráficas en más de 2 dimensiones.

El procedimiento para este método es el siguiente:

1.- Se trazan 2 ejes verticales paralelos para el jugador que tiene 2 estrategias, (uno por cada estrategia), cada eje deberá tener sus escalas adecuadas a los pagos de la matriz del juego.

2.- Para cada una de las **n** estrategias del otro jugador, trazar una línea recta, la cual irá de un eje a otro de los dibujados en el paso anterior, conforme a los pagos de la línea (ya sea renglón o columna) correspondiente a cada estrategia.

3.- Con las rectas trazadas en el paso anterior se delimita la zona factible de solución, conforme al siguiente criterio:
(a) Si el jugador de las **n** opciones busca maximizar el juego, la zona factible de solución quedará hacia la parte superior de la gráfica.
(b) Si el jugador de las **n** opciones busca minimizar el juego, la zona factible de solución quedará hacia la parte inferior de la gráfica.

4.- Determinar el valor del juego, el cual se situará en la gráfica en uno de los vértices de la zona factible de solución, de acuerdo a lo siguiente:
(a) Si el jugador de las **n** opciones busca maximizar el juego, el vértice de solución será el de valor mínimo.
(b) Si el jugador de las **n** opciones busca minimizar el juego, el vértice de solución será el de valor máximo.

Ahora presentaremos un ejemplo ilustrativo.

Ejemplo XV.6.- Para el juego siguiente aplíquese el método gráfico para encontrar su valor.

	Estrategias	B: B_1	B_2
A	A_1	10	-2
	A_2	5	3
	A_3	4	2
	A_4	3	6

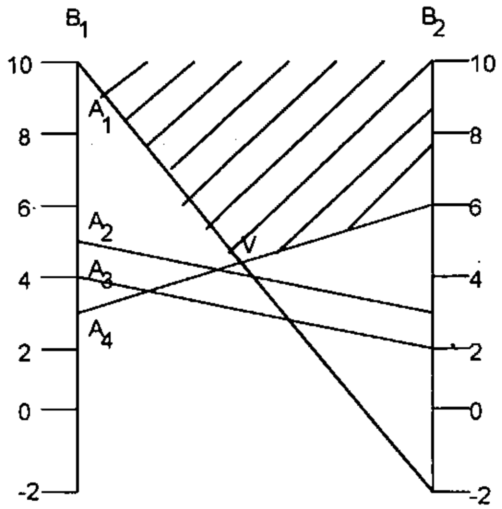
Solución:

Lo primero que debe hacerse es revisar la posibilidad de que exista un punto de *silla de montar*, el cual para nuestro caso no lo hay.

Si observamos la matriz del juego, vemos que el segundo renglón domina al tercero. No obstante lo anterior, resolveremos el juego de 4 x 2, tal y como está planteado para ilustrar gráficamente este dominio.

Procediendo entonces a aplicar la metodología descrita, se colocan 2 ejes verticales para B_1 y B_2 con escalas que deberán contener al menos como valores mínimos a -2 y máximos a 10, por ser los pagos mínimo y máximo de la matriz del juego respectivamente. Luego se trazarán 4 líneas rectas que serán las siguientes:

A_1 que va de 10 en B_1 a -2 en B_2
A_2 que va de 5 en B_1 a 3 en B_2
A_3 que va de 4 en B_1 a 2 en B_2
A_4 que va de 3 en B_1 a 6 en B_2



En la gráfica del juego ya se ha señalado la zona factible de solución por líneas diagonales y el vértice de solución se ha denominado como **V**, para el cual leemos un valor en cualquiera de los ejes de 4.40 que es el valor del juego, el cual corresponde a la intersección de las líneas A_1 y A_4.

También podemos observar que la línea A_2 queda por encima de la A_3, significando esto el dominio del segundo renglón sobre el tercero.

Si este ejemplo se hubiese resuelto por el método de subjuegos, el subjuego determinante del valor del juego sería el de las estrategias A_1 y A_4 para el jugador A, situación que es visible en la gráfica por ser precisamente el punto **V** la intersección de las líneas respectivas a estas estrategias.

Solución de Juegos por Programación Lineal.

Cuando un juego es de 3 x 3 o mayor, el método de solución recomendado es el de la programación lineal, el cual con la *metodología simplex* es eficaz para encontrar el valor del juego y el de las estrategias de cada jugador.

El juego se muestra en la figura XV.8 .

Jugador B

		B_1	B_2	....	B_n
	A_1	X_{11}	X_{12}	....	X_{1n}
Jugador	A_2	X_{21}	X_{22}	....	X_{2n}
A	:	:	:	....	:
	A_m	X_{m1}	X_{m2}	....	X_{mn}

Figura XV.8.-
Esquema de Juego de m x n.

Este juego puede plantearse en 2 formas: bajo el punto de vista del jugador **A**, el cual tratará de maximizar el valor del juego, o bien por el criterio del jugador **B**, quien buscará minimizarlo. Los dos planteamientos dan el valor del juego, así como también las estrategias de cada jugador, lo cual mostraremos en seguida.

Entonces para el jugador **A** que buscará maximizar el valor del juego **V**, tendremos el siguiente planteamiento:

$$\begin{array}{l} X_{11}A_1 + X_{21}A_2 + \dots + X_{m1}A_m \geq V \\ X_{12}A_1 + X_{22}A_2 + \dots + X_{m2}A_m \geq V \\ \dots + \dots + \dots + \dots = .. \\ \dots + \dots + \dots + \dots = .. \\ X_{1n}A_1 + X_{2n}A_2 + \dots + X_{mn}A_m \geq V \end{array} \qquad \text{Ec.(XV.15)}$$

Donde $$A_1 + A_2 + \dots + A_m = 1 \qquad \text{Ec.(XV.16)}$$

Donde cada restricción se ha planteado para la posibilidad de que el otro jugador, es decir el **B**, juegue cada una de sus estrategias, de esta manera la primera restricción aplica para el caso que el jugador **B** haya seleccionado su primera columna, la segunda restricción para la segunda columna de **B** y así sucesivamente hasta la última restricción.

Si en ambas ecuaciones dividimos cada término entre **V**, obtendremos:

$$\begin{array}{l} X_{11}a_1 + X_{21}a_2 + \dots + X_{m1}a_m \geq 1 \\ X_{12}a_1 + X_{22}a_2 + \dots + X_{m2}a_m \geq 1 \\ \dots + \dots + \dots + \dots = .. \\ \dots + \dots + \dots + \dots = .. \\ X_{1n}a_1 + X_{2n}a_2 + \dots + X_{mn}a_m \geq 1 \end{array} \qquad \text{Ec.(XV.17)}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m = 1 \qquad \text{Ec.(XV.18)}$$

Donde, $$a_i = A_i / V \qquad i = 1, 2, \dots, m \qquad \text{Ec.(XV.19)}$$

Con lo que podemos establecer el problema como un caso de programación lineal, siendo la función objetivo **1/V**, la cual deberá minimizarse, ya que el jugador **A** busca maximizar **V**. Entonces el problema nos quedará:

$$\text{Minimizar } 1/V = a_1 + a_2 + \dots + a_m \qquad \text{Ec. (XV.20)}$$

Sujeta a las restricciones dadas por la ecuación (XV.17), siendo las variables a_i no negativas.

El cual se resuelve mediante el *método simplex*, para darnos la función objetivo **1/V** y las variables **ai**, de las que obtendremos el valor del juego **V** y las estrategias **A1** , **A2.** , **...Am** , mientras que las estrategias del jugador **B** se obtienen a partir de las variables duales de la tabla simplex final, como lo ilustramos más adelante al resolver el ejemplo XV.7.

Por su parte el planteamiento para el jugador **B**, que busca minimizar el valor del juego será el siguiente

$$\begin{array}{l} X_{11}B_1 + X_{12}B_2 + \dots + X_{1n}B_n \leq V \\ X21B1 + X_{22}B_2 + \dots + X_{2n}B_n \leq V \\ \dots + \dots + \dots + \dots = .. \\ \dots + \dots + \dots + \dots = .. \\ X_{m1}B_1 + X_{m2}B_2 + \dots + X_{mn}B_n \leq V \end{array} \qquad \text{Ec.(XV.21)}$$

Donde cada restricción se ha formulado para la posibilidad de que el jugador A maneje cada una de sus estrategias.

Por su parte $$B_1 + B_2 + \dots + B_n = 1 \qquad \text{Ec.(XV.22)}$$

Si en estas ecuaciones dividimos entre **V**, obtendremos:

$$\begin{aligned} X_{11}b_1 + X_{12}b_2 + \dots &+ X_{1n}b_n \leq 1 \\ X_{21}b_1 + X_{22}b_2 + \dots &+ X_{2n}b_n \leq 1 \\ \dots + \dots + \dots &+ \dots = .. \\ \dots + \dots + \dots &+ \dots = .. \\ X_{m1}b_1 + X_{m2}b_2 + \dots &+ X_{mn}b_n \leq 1 \end{aligned} \qquad \text{Ec.(XV.23)}$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = 1 \qquad \text{Ec.(XV.24)}$$

Donde $$b_i = B_i / V \quad i = 1, 2, \dots, n \qquad \text{Ec.(XV.25)}$$

Con lo que se puede establecer el problema como programación lineal, siendo la función objetivo **1/V,** la cual buscará maximizarse, puesto que el jugador **B** busca minimizar **V**. El problema será ahora el siguiente:

Maximizar $$1/V = b_1 + b_2 + \dots + b_n \qquad \text{Ec. (XV.26)}$$

Sujeta a las restricciones dadas por la ecuación (XV.23), siendo bi no negativas.

El cual se soluciona con el *método simplex* para darnos la función objetivo **1/V** y las variables **b1, b2,** .... y **bn** , de las que obtendremos **V** y los valores de las estrategias **B1**, **B2**,...**Bn** , mientras que las estrategias del jugador **A** se obtienen a partir de las variables duales de la tabla simplex final siendo precisamente los valores de **a1**, **a2**,..., **am** , de los cuales se estiman las **Ai.**

A continuación presentaremos un caso ilustrativo de esto.

Ejemplo XV.7.- La empresa "Industrias Potosinas, S.A." está negociando con el sindicato los aumentos salariales conforme a la revisión contractual establecida. El sindicato ha adoptado 3 estrategias consideradas como agresiva **A1** , moderada **A2** y poco ambiciosa **A3**, mientras que por su parte la empresa tiene también 3 estrategias **B1** , **B2** y **B3** para las cuales se ha llegado a la siguiente matriz de pagos.

		Empresa	
Estrategias	B_1	B_2	B_3
A_1	17	14	10
Sindicato A_2	15	14	19
A_3	11	18	12

Donde los pagos se expresan como porcentajes.

¿ Cuál será ante esta situación el porcentaje de aumento al que llegarán?, ¿ Qué estrategia utilizará cada parte negociadora?

Solución:

Lo primero para este juego debe ser revisar la posibilidad de que haya punto de *silla de montar* o *domi-*

nios, siendo negativa la respuesta para ambas preguntas, por lo que al ser el juego de 3 x 3, procederemos a resolverlo por medio de la programación lineal.

En este caso el jugador **A** es el sindicato, el cual busca maximizar el valor del juego, por lo que conforme a las ecuaciones (XV.20) y (XV.17), aplicadas a la matriz del juego nos dará:

Minimizar $1/V = a_1 + a_2 + a_3$

Sujeto a:

$$17a_1 + 15a_2 + 11a_3 \geq 1$$
$$14a_1 + 14a_2 + 18a_3 \geq 1$$
$$10a_1 + 19a_2 + 12a_3 \geq 1$$

Siendo a_1, a_2 y a_3 No negativas

El cual al resolverse por el método simplex nos proporciona los siguientes resultados:

$$a_1 = 0.0208333$$
$$a_2 = 0.0330460$$
$$a_3 = 0.0136494$$
$$1/V = 0.0675287$$

Entonces el valor del juego será:

$$V = 1/0.0675287 = 14.81$$

Los valores de las estrategias A_1, A_2 y A_3 del sindicato las obtendremos despejándolas de la ecuación (XV.19):

$$A_1 = a_1V = (0.0208333)\,(14.81) = 0.3085$$
$$A_2 = a_2V = (0.033046)\,(14.81) = 0.4894$$
$$A_3 = a_3V = (0.0136494)\,(14.81) = 0.2021$$

Lo que nos indica que el sindicato adoptará su primera estrategia un 30.85 % de las veces, su segunda estrategia en un 48.94 % de las ocasiones y su tercera estrategia el 20.21 % restante.

Mientras que de la tabla simplex final las variables duales han sido:

Primera variable dual = 0.0258621
Segunda variable dual = 0.0359195
Tercera variable dual = 0.0057471

Las cuales son justamente los valores de **b1** , **b2** y **b3** para el jugador **B**.

Por su parte para conocer las estrategias que utilizará la empresa, plantearemos el caso de programación lineal, de acuerdo a las ecuaciones (XV.26) y (XV.23), para obtener:

Maximizar $1/V = b_1 + b_2 + b_3$

Sujeto a:

$$17b_1 + 14b_2 + 10b_3 \leq 1$$
$$15b_1 + 14b_2 + 19b_3 \leq 1$$
$$11b_1 + 18b_2 + 12b_3 \leq 1$$

Siendo b_1, b_2 y b_3 No negativas

Este caso al solucionarse con el método *simplex* nos dará los siguientes resultados:

$$b_1 = 0.0258621$$
$$b_2 = 0.0359195$$
$$b_3 = 0.0057471$$
$$1/V = 0.0675287$$

Por lo que con estos valores obtendremos las estrategias para el sindicato, las cuales serán:

$$B1 = b1\ V = (0.0258621)(14.81) = 0.3830$$
$$B2 = b2\ V = (.0359195)(14.81) = 0.5319$$
$$B3 = b3\ V = (0.0057471)(14.81) = 0.0851$$

Las variables duales de este problema han sido justamente los valores de **a1** ,**a2** y **a3** obtenidas para el sindicato anteriormente.

Por esto la empresa jugará su primera estrategia el 38.3% de las veces, el 53.19% la segunda y el 8.51% restante su tercera estrategia.

Estos movimientos llevarán a un aumento en la negociación del 14.81 %.

Con este ejemplo vemos que con la programación lineal podemos resolver juegos de cualquier tamaño fácilmente, planteándolo sólo para uno de los jugadores. En este caso hemos hecho la doble formulación con propósitos ilustrativos.

Una observación pertinente para los problemas de juegos que se plantean como programación lineal, es en aquellos casos en los cuales el valor del juego vaya a resultar negativo, para lo cual se deberá tener la precaución de invertir los signos para que dicho valor resulte positivo, ya que la metodología simplex no ofrece solución para valores negativos de la función objetivo.

PROBLEMAS PROPUESTOS

XV.1.- Determínese si los juegos siguientes tienen *punto de silla de montar:*

$$(a)\begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 5 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad (b)\begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad (c)\begin{pmatrix} -8 & -4 & 6 \\ 5 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

XV.2.- Determínese si existe *punto de silla de montar* en los juegos siguientes:

$$(a)\begin{pmatrix} 6 & 0 & 5 \\ -5 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad (b)\begin{pmatrix} 4 & -6 & 8 \\ -3 & 5 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad (c)\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

XV.3.- Para el siguiente juego reduzca por *dominio* y resuelva mediante el *método aritmético* para hallar las estrategias de cada jugador y luego encuentre el valor del juego.

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 5 & -2 & -1 \\ 6 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & -5 & -8 & 10 \end{pmatrix} \end{array}$$

XV.4.- Encuentre el valor de las estrategias de cada jugador por medio del *método algebraico* y el *del juego* para el caso siguiente.

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} 6 & 5 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & -4 & -2 \\ -2 & -3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -8 & -10 \end{pmatrix} \end{array}$$

XV.5.- Un jugador de la ruleta está considerando la posibilidad de adoptar 3 estrategias distintas para su próximo juego, consideradas como de alto, mediano y bajo riesgo. Por otra parte, él sabe que la casa de juego puede a su vez adoptar 2 estrategias, que son la A y la B. La matriz de pagos en dólares es la siguiente

$$\begin{array}{cc} & \text{Casa de Juego} \\ & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \text{Jugador} & \begin{pmatrix} -500 & 1000 \\ -100 & 100 \\ 100 & -200 \end{pmatrix} \end{array}$$

¿Cuáles serán los valores de las estrategias de cada jugador y el resultado del juego?

XV.6.- El Sindicato Naranjero de la Zona Media está negociando el aumento salarial correspondiente a la próxima revisión contractual considerando 3 posturas: Alto incremento, incremento moderado y altas prestaciones, denotadas como A, B y C. Por su parte la parte patronal considera 3 estrategias conocidas como M, N y O, de modo que se ha llegado a la siguiente matriz de pagos expresada en % de aumento de sueldo.

$$\begin{array}{cc} & \text{Parte Patronal} \\ \text{Sindicato} & \begin{pmatrix} 10 & -8 & -6 \\ 6 & 0 & 8 \\ -10 & 4 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

¿Cuáles serán los valores de las estrategias de cada parte y el resultado del juego?

XV.7.- En la guerra del desierto asiático luchan las fuerzas árabes y las judías. Las primeras tienen 3 estrategias militares: Gases tóxicos, aviones a chorro y tanques especiales de ataque, mientras que por su parte los judíos tienen también 3 estrategias que son: Armamento especial, aviones SX24 y bombas de corto alcance. Los balances estimados de bajas en millares de gentes para las diferentes combinaciones de estrategias son:

$$\begin{array}{cc} & \text{Judíos} \\ \text{Árabes} & \begin{pmatrix} -200 & 0 & 300 \\ 350 & 50 & -400 \\ 100 & -100 & -50 \end{pmatrix} \end{array}$$

Encuentre las probabilidades de cada estrategia para cada fuerza y el resultado esperado.

XV.8.- El Partido Democracia planea ganar las próximas elecciones locales para Diputados para lo cual ha considerado la implementación de 4 diferentes acciones: Visitas a colonias populares, visitas a centros comerciales, distribución masiva de volantes y cartulinas y anuncios en radio y televisión. Por su parte la oposición la representa el Partido Nacionalista, el cual piensa trabajar fundamentalmente en 3 aspectos que son: Propaganda masiva, discursos publicados en la prensa y dar apoyos económicos a las gentes de bajos recursos. El balance aproximado de las posibles combinaciones de estrategias entre un partido y el otro se presentan en la siguiente matriz de resultados, expresada en miles de votantes:

$$\begin{array}{cc} & \text{Partido Nacionalista} \\ \text{Partido Democracia} & \begin{pmatrix} 100 & -20 & 0 \\ -20 & 40 & 10 \\ 30 & -50 & 10 \\ -80 & 70 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Halle las probabilidades de las estrategias para cada partido y el resultado esperado.

XV.9.- La firma "Seguros Europa" tiene como competencia en la región a "Aseguradora Potosina" y para el año entrante piensa implementar 3 estrategias encaminadas a ganar mercado en esta zona: Bajar precios, aumentar coberturas y visitas personales a clientes. Por su parte la competencia ha considerado 2 acciones para contrarrestar esto: Mejorar sus servicios y aumentar la promoción. Las posibilidades de ganancia de mercado entre una y otra firma se expresan como porcentajes en la siguiente matriz

$$\begin{array}{cc} & \text{Aseguradora Potosina} \\ \text{Seguros Europa} & \begin{pmatrix} 10 & -10 \\ -5 & 15 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

¿Cuáles serán las probabilidades de que cada firma adopte cada estrategia y el valor del juego?

XV.10.- Halle el valor de las estrategias de cada jugador y el del juego para el caso siguiente

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} 8 & -6 & 4 & -3 \\ -5 & 4 & -3 & 8 \\ -6 & -3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & -3 & -5 \end{pmatrix} \end{array}$$

XV.11.- Para el siguiente juego encuentre su valor y el de las estrategias para cada jugador

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} 5 & 8 & -10 & 9 \\ 7 & -6 & 3 & 2 \\ -3 & 8 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

XV.12.- Halle el valor del juego siguiente, así como también las estrategias de cada jugador

$$\begin{array}{cc} & N \\ M & \begin{pmatrix} 8 & 6 & 3 & -2 \\ -5 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & -10 & -2 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

CAPITULO XVI

MODELOS DE LINEAS DE ESPERA

Introducción.

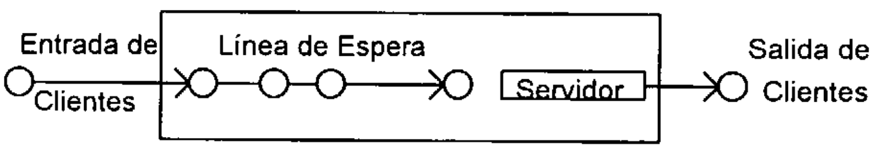
En la vida diaria nos enfrentamos frecuentemente a situaciones en las cuales debemos esperar para recibir un servicio o una mercancía, así podemos citar varios ejemplos, como pagar la cuenta en un supermercado, la espera en la gasolinera para recibir el combustible en nuestro vehículo, la espera de turno en una peluquería o en la fila de un banco para hacer algún trámite bancario, son muestras claras de lo anteriormente señalado. Estos casos suceden por el hecho de que un negocio no puede tener una capacidad ilimitada para atender al total de sus clientes, ya que esto sería incosteable. Sin embargo, cualquier empresa que desee tener éxito, deberá vigilar atentamente este aspecto, ya que muchas de las veces una espera demasiado larga en una fila para ser atendido es la causa de que los clientes prefieran cambiar por alguien de la competencia.

La teoría de líneas de espera, a la cual también se le conoce como *teoría de colas,* inició al principio de este siglo con el ingeniero danés A. K. Erlang quien trabajaba en una compañía telefónica en la cual comenzó a estudiar la espera de los clientes que solicitaban una llamada para ser atendidos. Posteriormente esta teoría se fue desarrollando en otras partes del mundo, al reconocerse su importancia y frecuente aplicación en diferentes áreas de la sociedad. Sin embargo no fue sino hasta después de la segunda guerra mundial cuando el estudio de este tema tuvo un gran auge.

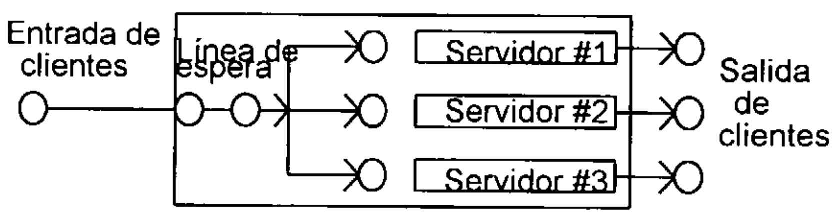
Un *sistema de líneas de espera* se define como un conjunto de clientes, servidores y un orden en el cual los clientes son atendidos siendo un proceso de nacimiento-muerte, donde se considera que un nacimiento sucede cuando un cliente entra a las instalaciones del negocio para recibir el servicio; mientras que una muerte ocurre cuando el cliente una vez que ha sido atendido, sale del establecimiento.

En la figura XVI.1 se presentan algunos sistemas de líneas de espera, los cuales son ampliamente utilizados en la actualidad.

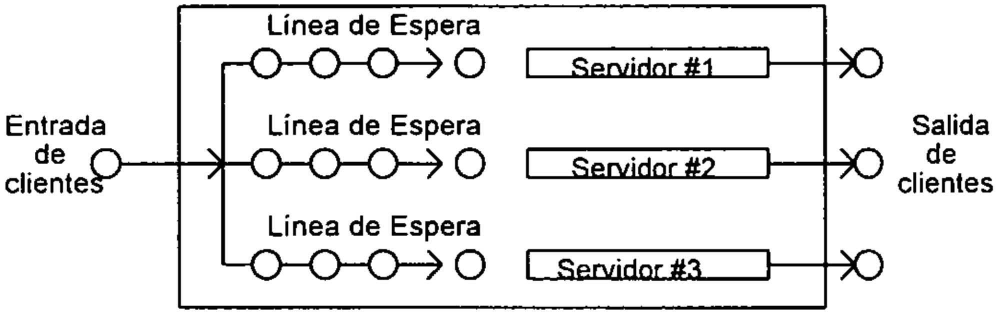
Figura XVI.1.- Algunos sistemas de Líneas de Espera.



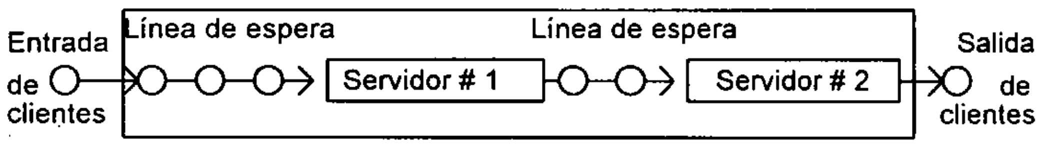
(a) una línea de espera y un servidor



b) Una línea de espera y varios servidores



c) Varias líneas de espera y varios servidores en paralelo



d) Una línea de espera y varios servidores en serie

Es conveniente comentar que a diferencia de otros modelos, los de líneas de espera son descriptivos y no normativos, ya que no son métodos de optimización, sino más bien modelos que buscan describir el funcionamiento de un sistema dado mediante la estimación de sus parámetros más importantes.

Es usual que estos casos se manejen de un modo probabilístico y no determinístico, ya que por lo general no se conoce el momento en que un cliente va a solicitar un servicio.

En este texto presentaremos primeramente la terminología usada en los sistemas de líneas de espera, luego se verán las características más importantes de estos sistemas, después se tratarán algunos de los modelos de líneas de espera más frecuentes para resolver problemas de este tipo, y finalmente se presentará un sistema de líneas de espera que incluye costos.

Terminología.

Se definen los siguientes términos para la mejor comprensión del texto.

Patrón de llegadas. Es la frecuencia de llegadas de los clientes al negocio, definido por el tiempo que transcurre entre la llegada de un cliente y el siguiente.

Patrón de servicio. Es el tiempo de servicio, es decir el tiempo que ocupa un servidor para atender a un cliente.

Disciplina de la línea de espera. Es el orden como se atiende a los clientes.

Capacidad del sistema. Es el número máximo de clientes que pueden estar en el negocio, ya sea en la línea de espera o siendo atendidos.

Estado del sistema. Es el número de clientes que hay en el negocio en un momento dado cualquiera, ya sea en espera o en servicio.

Longitud de la línea de espera. Es el número de clientes que hay en la línea de espera.

Abandono. Es cuando un cliente que está en la línea de espera, se sale de ella y deja el establecimiento debido a que el tiempo de espera es muy grande.

Rechazo. Es la situación que sucede cuando un cliente que llega al negocio no entra a él debido a que la línea de espera es demasiado grande.

Características de las líneas de espera.

Las líneas de espera suelen caracterizarse bajo el sistema de notación *Kendall*, debida al matemático inglés del mismo apellido, la cual es la siguiente:

$$V\,/\,W\,/\,X/\,Y\,/\,Z \qquad \text{Ec. (XVI.1)}$$

Donde:

V = Patrón de llegadas de los clientes
W = Patrón de servicio
X = Número de servidores
Y = Capacidad del sistema
Z = Disciplina de la línea de espera.

Los dos primeros parámetros se denotan por una literal, conforme a la siguiente tabla.

Tabla XVI.1 .- Caracterización de una línea de espera respecto a los patrones de llegada y servicio

Literal	Significado
D	Determinística
M	Distribución probabilística Markoviana
E_k	Distribución de Erlang
G	General

Donde la determinística se aplica para aquellos casos cuando se conoce con toda precisión el tiempo de llegada de los clientes o el tiempo de servicio; la distribución Markoviana, llamada así en honor al matemático A. Markov, se refiere a una distribución aleatoria de probabilidad para definir el número de llegadas, para lo cual normalmente se usa la distribución de Poisson y para definir el tiempo de servicio, representado por lo general por una distribución exponencial negativa, estas 2 distribuciones de probabilidad se tratarán un poco más adelante en este mismo inciso; la distribución de Erlang por su parte se utiliza aplicando la fórmula de Erlang; mientras que la distribución general se usa para cualquier otra situación distinta a las anteriores.

Por lo que respecta al número de servidores, que es el tercer parámetro conforme a la notación de Kendall, simplemente se especifica por un número que corresponderá al de servidores en el sistema.

El siguiente parámetro es la capacidad del sistema, la cual en la gran mayoría de las ocasiones es infinita.

El último parámetro se refiere a la disciplina de la línea de espera, es decir el orden de atención a los clientes, el cual puede ser del tipo PEPS, es decir primero en entrar y primero en salir; o bien UEPS, último en entrar y primero en salir. De estos 2 tipos el más usual es el primero.

Es frecuente omitir en la notación de Kendall a los 2 últimos parámetros, suponiéndose para estos casos que la capacidad del sistema es infinita y su disciplina del tipo PEPS.

En seguida presentaremos las distribuciones de probabilidad de Poisson y la exponencial.

Distribución de probabilidad de Poisson.

La fórmula de esta distribución es la siguiente:

$$p(n;\lambda) = \mathrm{Exp}(^{-}\lambda)\ \lambda^{n} / n! \qquad \text{Ec. (XVI.2)}$$

Donde:

$p(n;\lambda)$ = Probabilidad de que haya n sucesos de una muestra cuyo promedio es λ
n = Número de sucesos
λ = Número promedio de sucesos de la muestra

Así si los sucesos son las llegadas de los clientes a un negocio, si el promedio de llegadas λ, es de 10 clientes por hora, entonces la probabilidad de que lleguen 4 clientes por hora será conforme a la Ec. (XVI.2):

$$p(4;10) = \mathrm{Exp}(-10)\ 10^{4} / 4! = (4.54 \times 10^{-5})\ (10^{4}) / 24 = 0.0189$$

Esta distribución de probabilidad es discreta y una representación gráfica de la misma se muestra en la figura XVI.2, para el caso de **λ = 2.**

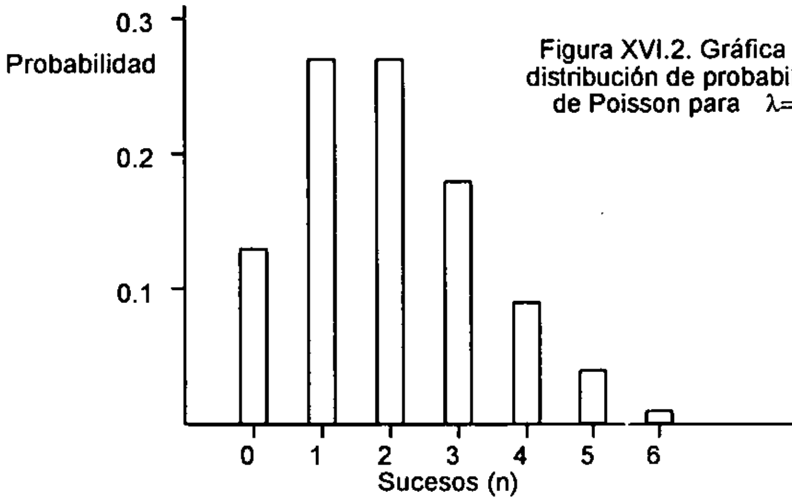


Figura XVI.2. Gráfica de l distribución de probabilida de Poisson para $\lambda = 2$

Esta distribución es muy utilizada para representar llegadas aleatorias de clientes a un sistema de líneas de espera, y supone 4 situaciones: (a) Las llegadas de los clientes son independientes entre sí; (b) las llegadas son independientes del estado del sistema; (c) las llegadas son sucesos sin memoria, es decir que no dependen de eventos anteriores; (d) las llegadas sólo dependen del lapso de tiempo entre una y otra de ellas.

Distribución de probabilidad Exponencial Negativa.

Esta se utiliza cuando los tiempos de servicio son aleatorios para una línea de espera cuyas llegadas se representan por una distribución de Poisson. Esta relación entre ambas distribuciones de probabilidad hace llamarles distribuciones duales.

La distribución exponencial negativa es al igual que la anterior para eventos sin memoria. A diferencia de la distribución de Poisson, la exponencial negativa es continua, siendo su ecuación la siguiente:

$$f(t) = \mu \operatorname{Exp}(-\mu t) \qquad \text{Ec. (XVI.3)}$$

Donde

$f(t)$ = Valor de la función exponencial negativa
t = Tiempo de servicio
μ = Tasa de servicio (inverso del tiempo promedio de servicio)

Si esta ecuación se integra entre los límites de tiempo de cero a **T**, se obtiene la probabilidad de que el servicio sea dado en un lapso de tiempo menor o igual a **T**, es decir,

$$p\,(t \leq T) = 1 - \operatorname{Exp}(-\mu t) \qquad \text{Ec. (XVI.4)}$$

Por lo cual la probabilidad de que el servicio se brinde en un tiempo mayor que T, será el complemento de esta última probabilidad, es decir

$$p\,(t > T) = 1 - p\,(t \leq T) = \operatorname{Exp}(-\mu t) \qquad \text{Ec. (XVI.5)}$$

Así por ejemplo para el caso de una tasa de servicio de 8 clientes por hora, la probabilidad de que el tiempo de servicio sea mayor de 6 minutos, es decir 0.10 horas, será conforme a la ecuación (XVI.5):

$$p\,(t > 0.10) = \operatorname{Exp}\,[-(8)(0.10)] = 0.4493$$

Una representación gráfica de esta distribución de probabilidad se presenta en la figura XVI.3 para el caso particular de $\mu = 4$.

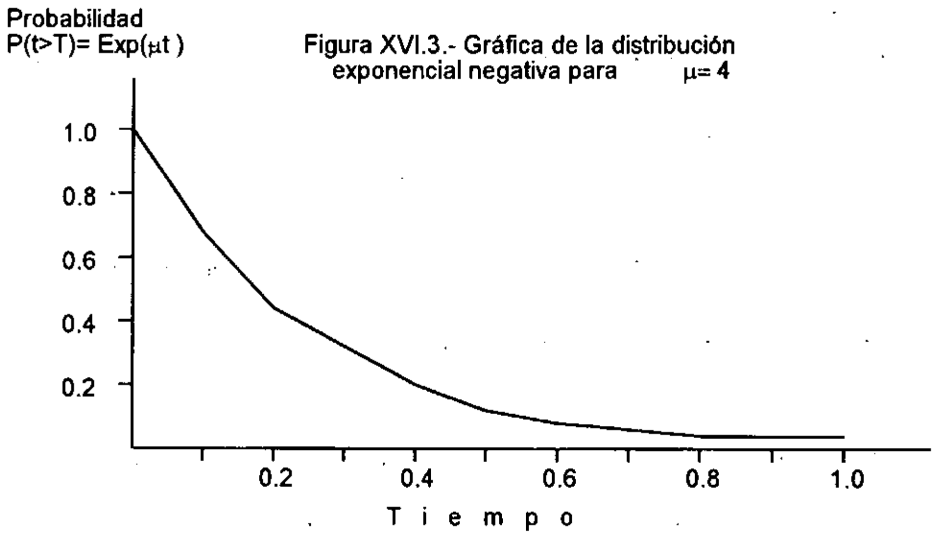


Figura XVI.3.- Gráfica de la distribución exponencial negativa para μ= 4

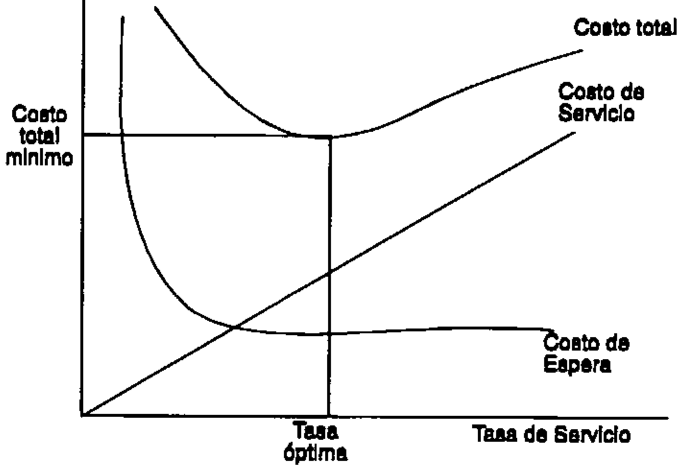
En la cual vemos cómo al aumentar el tiempo, la probabilidad disminuye exponencialmente, de aquí el porqué del nombre de esta distribución.

Costo de un sistema de líneas de espera.

El costo de cualquier sistema de líneas de espera se compone de 2 partes: El costo de la espera, el cual la gran mayoría de las veces es muy difícil de ser cuantificado; y el costo del servicio, el que puede ser fácilmente obtenido por el departamento contable del negocio.

Una representación gráfica de estos costos se muestra en la figura XVI.4 donde vemos que el costo de espera disminuye al aumentar la tasa de servicio, mientras que el costo del servicio aumenta linealmente.

Figura XI.4.- Gráfica del costo de un sistema de líneas de espera



En la figura observamos que el costo total mínimo, que define a su vez a la tasa óptima de servicio, no ocurre en la intersección de los costos de espera y de servicio.

Modelos de líneas de espera.

En este inciso presentaremos algunos de los modelos más usuales de líneas de espera, como son el D/D/1, D/D/S, M/M/1, M/M/S, M/G/1 y el M/D/1.

En todos estos modelos es usual simularlos para analizar las características operativas del mismo, tales como el tiempo promedio de espera y de servicio que pasan los clientes y la longitud promedio de la línea de espera.

Modelo D/D/1.

En este modelo tanto el patrón de llegadas como el de servicio se conocen exactamente y hay sólo un servidor.

Este tipo de situaciones se presentan en algunas ocasiones como en el caso de revisiones médicas de rutina, departamentos de inspección de la calidad en las empresas y otros.

A continuación presentaremos 2 ejemplos de la aplicación de este tipo de modelo.

Ejemplo XVI.1.- El departamento de exámenes médicos de un hospital cita a los pacientes cada 5 minutos comenzando a las 9:00 A.M. para practicarles una revisión general, la cual dura 7 minutos. Durante un lapso de 2 horas de funcionamiento, (a) ¿ Cuál será el número promedio de pacientes en espera y siendo atendidos? y (b) ¿ De qué tamaño será la línea de espera a las 2 horas?

Solución:

Lo que haremos será simular el sistema, lo cual mostramos en la tabla XVI.2.

Tabla XVI.2.- Simulación del caso del ejemplo XVI.1.

Hora	Paciente en espera	Paciente en revisión
9:00	---	A
9:05	B	A
9:07	---	B
9:10	C	B
9:14	---	C
9:15	D	C
9:20	D, E	C
9:21	E	D
9:25	E, F	D
9:28	F	E
9:30	F, G	E
9:35	G, H	F
9:40	G, H, I	F
9:42	H, I	G
9:45	H, I, J	G
9:49	I, J	H
9:50	I, J, K	H
9:55	I, J, K, L	H
9:56	J, K, L	I
10:00	J, K, L, M	I

10:03	K, L, M	J
10:05	K, L, M, N	J
10:10	L, M, N, O	K
10:15	L, M, N, O, P	K
10:17	M, N, O, P	L
10:20	M, N, O, P, Q	L
10:24	N, O, P, Q	M
10:25	N, O, P, Q, R	M
10:30	N, O, P, Q, R, S	M
10:31	O, P, Q, R, S	N
10:35	O, P, Q, R, S, T	N
10:38	P, Q, R, S, T	O
10:40	P, Q, R, S, T, U	O
10:45	Q, R, S,T, U, V	P
10:50	Q, R, S, T, U, V, W	P
10:52	R, S, T, U, V, W	Q
10:55	R, S, T, U, V,W, X	Q
10:59	S, T, U, V, W, X	R
11:00	S, T, U, V, W, X, Y	R

(a) En la tabla vemos que durante las 2 horas hay en todo momento un paciente en revisión. Sin embargo en la línea de espera hay minutos sin ningún paciente hasta algunos lapsos de tiempo de 7 pacientes, por lo cual para obtener el promedio deberemos cuantificar los minutos de cero hasta 7 pacientes de las 9:00 a las 11:00 horas. Entonces al efectuar esto nos dará:

Cero pacientes : 5 + 3 + 1	= 9 minutos
Un paciente :2 + 4 + 5 + 4 + 2	= 17 minutos
Dos pacientes : 1 + 3 + 10 + 3 + 1	= 18 minutos
Tres pacientes : 2 + 4 + 5 + 4 + 2	= 17 minutos
Cuatro pacientes : 1 + 3 + 10 + 3 + 1	= 18 minutos
Cinco pacientes : 2 + 4 + 5 + 4 + 2	= 17 minutos
Seis pacientes : 1 + 3 + 10 + 3 + 1	= 18 minutos
Siete pacientes : 2 + 4	= 6 minutos

Para ilustrar la forma cómo se obtuvieron estos valores, lo haremos paso a paso para el caso de un paciente:

Ha habido un paciente en los siguientes lapsos de tiempo:

Lapso de tiempo	Paciente en espera	Duración, minutos
9:05 - 9:07	B	2
9:10 - 9:14	C	4
9:15 - 9:20	D	5
9:21 - 9:25	E	4
9:28 - 9:30	F	2

Lo cual nos da los 17 minutos totales con un paciente en espera.

Para obtener el promedio de pacientes en espera, simplemente aplicaremos la fórmula siguiente:

$$X_M = \frac{\sum_{i=0}^{n} X_i . T_i}{\sum_{i=0}^{n} T_i} \qquad \text{Ec.(XVI.6)}$$

Donde:

X_M = Número promedio de clientes en espera
X_i = Número individual de clientes en espera
T_i = Tiempo que hubo X_i clientes en espera
n = Número máximo de clientes en espera

Para el presente caso n = 7, por lo cual tendremos

$$X_M = \frac{\sum_{i=0}^{7} X_i . T_i}{\sum_{i=0}^{7} T_i}$$

$$= \frac{(0)(9)+(1)(17)+(2)(18)+(3)(17)+(4)(18)+(5)(17)+(6)(18)+(7)(6)}{9+17+18+17+18+17+18+6}$$

$$= \frac{17+36+51+72+85+108+42}{120} = \frac{411}{120} = 3.425$$

(b) De la tabla XVI.2 observamos que a las 11:00 horas la línea de espera tendrá 7 pacientes incluyendo al Y que se incorpora a esta hora.

Ejemplo XVI.2.- La compañía transportista "Fletes Potosinos" manda a servicio de lavado lotes de 4 camiones cada hora. Cada camión requiere de un tiempo de 15 minutos para el lavado.

Hallar: (a) El número promedio de camiones en espera de lavado; (b) el número promedio de camiones en el sistema; (c) el tiempo promedio que dura un camión en el sistema.

Solución:

En la tabla XVI.3 se presenta una simulación del sistema de la línea de espera formada por los camiones, que en este caso son los clientes, el servicio es el lavado, el cual es realizado por un solo servidor.

Tabla XVI.3 .- Simulación del caso del ejemplo XVI.2

Tiempo, minutos	Camiones en espera	Camión en lavado
0:00	B, C, D	A
15:00	C, D	B
30:00	D	C
45:00	----	D
60:00	F, G, H	E

En este caso con simular una hora es suficiente, ya que la segunda hora será idéntica a la primera.

(a) Es fácil ver de la tabla que en la línea de espera hay 15 minutos de 3 clientes, otros 15 minutos de 2, de uno y de cero clientes, por lo que la mediante la ecuación (XVI.6) obtenemos:

$$X_M = \frac{(0)(15)+(1)(15)+(2)(15)+(3)(15)}{15+15+15+15} = \frac{15+30+45}{60} = \frac{90}{60}$$

$$= 1.50$$

(b) El número promedio de camiones en el sistema será la suma de los que están en espera y en servicio, es decir:

$$1.5 + 1.0 = 2.50$$

Ya que durante toda la hora hay un camión en servicio.

(c) El tiempo promedio que dura un camión en el sistema será la suma del tiempo de espera, más el tiempo de servicio. Para esto hallaremos para cada camión este tiempo:

Camión A:

Tiempo en el sistema = 0 + 15 = 15 minutos

Camión B:

Tiempo en el sistema = 15 + 15 = 30 minutos

Camión C:

Tiempo en el sistema = 30 + 15 = 45 minutos

Camión D:

Tiempo en el sistema = 45 + 15 = 60 minutos

Por lo que el promedio será :

$$tiempo\ promedio = \frac{15+30+45+60}{4} = \frac{150}{4} = 37.50 \quad minutos$$

Modelo D/D/S.

Este es muy parecido al anterior, con la situación de que ahora hay varios servidores, cada uno de los cuales da el servicio a los clientes.

Para su análisis puede hacerse una simulación del sistema de la línea de espera, tal y como se hacía con el modelo anterior.

Presentaremos ahora dos ejemplos.

Ejemplo XVI.3.- Al departamento de control de calidad de la empresa "Envases plásticos de Rioverde" llegan cada hora 4 lotes de envases para su inspección, la cual se realiza por parte de 2 encargados, cada uno de los cuales tarda 34 minutos en la revisión. En un turno de 8 horas: (a) ¿ Cuántos lotes de envases en espera de ser revisados habrá al final del mismo?; (b) ¿Cuál será el número promedio de lotes en la línea de espera a lo largo del turno?.

Solución:

Para contestar las 2 preguntas lo primero que haremos será simular la operación del sistema durante un turno, cuya situación se presenta en la siguiente tabla:

Tabla XVI.4.- Simulación del sistema de la línea de espera de "Envases Plásticos de Rioverde"

Tiempo de turno, Hrs.	Lotes en espera de revisión	Lote en revisión, Inspector 1	Lote en revisión, Inspector 2
0:00	C, D	A	B
0:34	----	C	D
1:00	E, F, G, H	C	D
1:08	G, H	E	F
1:42	----	G	H
2:00	I, J, K ,L	G	H
2:16	K, L	I	J
2:50	----	K	L

3:00	M, N , O, P	K	L
3:24	O, P	M	N
3:58	----	O	P
4:00	Q, R, S, T	O	P
4:32	S, T	Q	R
5:00	S, T, U, V, W, X	Q	R
5:06	U, V, W, X	S	T
5:40	W, X	U	V
6:00	W, X, Y, Z, A1, B1,	U	V
6:14	Y, Z, A1, B1	W	X
6:48	A1, B1	Y	Z
7:00	A1, B1, C1, D1, E1, F1	Y	Z
7:22	C1, D1, E1, F1,	A1	B1
7:56	E1, F1	C1	D1
8:00	E1, F1, G1, H1, I1, J1	C1	D1

(a) De la tabla vemos que al final de las 8 horas del turno habrá 2 lotes de envases en espera de revisión: el E1 y el F1, esto sin considerar los 4 lotes que llegan justamente en esos momentos.

(b) Para obtener la respuesta de este inciso, vemos que hay lapsos de 0, 2, 4 y 6 lotes de envases en la línea de espera, los cuales debemos valorar.

Cero lotes:

Lapso de tiempo	Lotes en espera	Duración, minutos
0:34 - 1:00	---	26
1:42 - 2:00	---	18
2:50 - 3:00	---	10
3:58 - 4:00	---	2

Tiempo con cero lotes = 26 + 18 + 10 + 2 = 56 minutos

Procediendo de manera similar, para 2 lotes en espera tendremos:
Tiempo con 2 lotes = 34 + 34 + 34 + 34 + 28 + 20 + 12 + 4 = 200 minutos

Por su parte para 4 lotes :
Tiempo con 4 lotes = 8 + 16 + 24 + 32 + 34 + 34 + 34 = 182 minutos

Finalmente para 6 lotes:
Tiempo con 6 lotes = 6 + 14 + 22 = 42 minutos

Entonces conforme a la ecuación (XVI.6), tendremos:

$$X_M = \frac{(0)(56)+(2)(200)+(4)(182)+(6)(42)}{56+200+182+42} = \frac{400+728+252}{480} = \frac{1380}{480} = 2.875 \quad \text{lotes promedio}$$

en espera.

Ejemplo XVI.4.- Al departamento contable de la compañía "Comercial y Abarrotes Potosinos" llegan lotes de 20 pólizas cada 30 minutos. Hay 3 auxiliares contables, los cuales tardan exactamente 4, 5 y 7 minutos respectivamente para procesar cada póliza. En una tarde donde laboran una hora. (a) ¿ Cuál será el número promedio de pólizas en espera de ser procesadas?; (b) ¿Cuántas pólizas habrá procesado cada auxiliar?

Solución:

Lo primero será simular la línea de espera durante el tiempo de trabajo de 1 hora. En la tabla

XVI.5 se presenta este sistema.

Tabla XVI.5 .- Simulación del sistema de la línea de espera del departamento contable de "Comercial y Abarrotes Potosinos"

Tiempo de trabajo en horas	Pólizas en espera	Pólizas Auxiliar 1	en Auxiliar 2	procesamiento Auxiliar 3
0:00	4-20	1	2	3
0:04	5-20	4	2	3
0:05	6-20	4	5	3
0:07	7-20	4	5	6
0:08	8-20	7	5	6
0:10	9-20	7	8	6
0:12	10-20	9	8	6
0:14	11-20	9	8	10
0:15	12-20	9	11	10
0:16	13-20	12	11	10
0:20	15-20	13	14	10
0:21	16-20	13	14	15
0:24	17-20	16	14	15
0:25	18-20	16	17	15
0:28	20	18	17	19
0:30	21-40	18	20	19
0:32	22-40	21	20	19
0:35	24-40	21	22	23
0:36	25-40	24	22	23
0:40	27-40	25	26	23
0:42	28-40	25	26	27
0:44	29-40	28	26	27
0:45	30-40	28	29	27
0:48	31-40	30	29	27
0:49	32-40	30	29	31
0:50	33-40	30	32	31
0:52	34-40	33	32	31
0:55	35-40	33	34	31
0:56	37-40	35	34	36
1:00	39-60	37	38	36

(a) Si observamos de la tabla a la columna de la línea de espera, vemos que hay lapsos de tiempo desde una póliza en espera hasta lapsos de 20 pólizas, por lo cual crearemos una nueva tabla para la solución de este inciso.

Tabla XVI.6.- Tabla auxiliar para la obtención del número promedio de pólizas en espera.

Lapso de tiempo	Número de pólizas en espera	Tiempo de espera, minutos de espera	Producto del número de pólizas por el tiempo
0:00 - 0:04	17	4	68
0:04 - 0:05	16	1	16
0:05 - 0:07	15	2	30
0:07 - 0:08	14	1	14

0:08 - 0:10	13	2	26
0:10 - 0:12	12	2	24
0:12 - 0:14	11	2	22
0:14 - 0:15	10	1	10
0:15 - 0:16	9	1	9
0:16 - 0:20	8	4	32
0:20 - 0:21	6	1	6
0:21 - 0:24	5	3	15
0:24 - 0:25	4	1	4
0:25 - 0:28	3	3	9
0:28 - 0:30	1	2	2
0:30 - 0:32	20	2	40
0:32 - 0:35	19	3	57
0:35 - 0:36	17	1	17
0:36 - 0:40	16	4	64
0:40 - 0:42	14	2	28
0:42 - 0:44	13	2	26
0:44 - 0:45	12	1	12
0:45 - 0:48	11	3	33
0:48 - 0:49	10	1	10
0:49 - 0:50	9	1	9
0:50 - 0:52	8	2	16
0:52 - 0:55	7	3	21
0:55 - 0:56	6	1	6
0:56 - 1:00	4	4	16
Totales	---	60	642

Por lo que el número promedio deberá calcularse mediante la ecuación (XVI.6), en la cual el numerador será la sumatoria de los valores de la cuarta columna de esta última tabla y el denominador será la sumatoria de los tiempos dados en la tercera columna, entonces tendremos:

$$X_M = 642/60 = 10.7 \text{ pólizas promedio en espera}$$

(b) Este inciso lo resolveremos contando el número de pólizas procesadas por cada auxiliar. Así tendremos.
Auxiliar 1:

Pólizas procesadas = 1,4,7,9,12,13,16,18,21,24,25,28,30,33 y 35 = 15

Auxiliar 2

Pólizas procesadas = 2,5,8,11,14,17,20,22,26,29,32 y 34 = 12

Auxiliar 3

Pólizas procesadas = 3,6,10,15,19,23,27 y 31 = 8

Estos resultados también podrían haberse obtenido dividiendo el tiempo de trabajo, que es 60 minutos para este caso, entre el tiempo que tarda cada auxiliar para procesar una póliza, lo cual es más sencillo para solucionar este inciso, es decir:

Auxiliar 1

$$\text{Pólizas procesadas} = \frac{60 \ \textit{minutos}}{4 \ \textit{min/póliza}} = 15 \ \textit{pólizas}$$

Auxiliar 2

$$\text{Pólizas procesadas} = \frac{60 \ \textit{minutos}}{5 \ \textit{min/póliza}} = 12 \ \textit{pólizas}$$

Auxiliar 3

$$\text{Pólizas procesadas} = \frac{60 \ \ minutos}{7 \ \ min / póliza} = 8.57 \ \ pólizas$$

Esto significa que el auxiliar 3 está procesando la novena póliza al momento de completarse los 60 minutos.

Modelo M/M/1.

Estos modelos se aplican a sistemas de líneas de espera cuyas llegadas siguen una distribución de probabilidad de Poisson, sus tiempos de servicio se representan por medio de la distribución exponencial negativa, tienen un solo servidor, la capacidad del sistema es infinito y la disciplina de la línea es del tipo PEPS.

Para este tipo de modelos es usual aplicar la metodología de la simulación que se verá ampliamente en el capítulo XX para el análisis de estos sistemas.

Para describir sus características, se hace uso de las fórmulas siguientes:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad \text{Ec.(XVI.7)}$$

$$P_o = 1 - \rho \qquad \text{Ec.(XVI.8)}$$

$$P_n = P_0 \rho^n \qquad \text{Ec.(XVI.9)}$$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad \text{Ec.(XVI.10)}$$

$$L_q = L - \rho = \rho^2/(1-\rho) \qquad \text{Ec.(XVI.11)}$$

$$w = \frac{L}{\lambda} \qquad \text{Ec.(XVI.12)}$$

$$w_q = \frac{L_q}{\lambda} \qquad \text{Ec.(XVI.13)}$$

$$w = w_q + 1/\mu \qquad \text{Ec.(XVI.14)}$$

$$p_t = \text{Exp}(-t / w) \qquad \text{Ec. (XVI.15)}$$

$$p_{qt} = \rho\, \text{Exp}(-t / w) \qquad \text{Ec. (XVI.16)}$$

Donde:

ρ = Factor de utilización del sistema o probabilidad de que el sistema esté ocupado
λ = Tasa de llegadas de clientes, clientes/unidad de tiempo
μ = Tasa de servicio, clientes atendidos/unidad de tiempo
P_0 = Probabilidad de que el sistema esté vacío
P_n = Probabilidad de que el sistema esté ocupado por n clientes
L = Número promedio de clientes en el sistema, ya sea esperando o siendo atendidos
L_q = Número promedio de clientes en la línea de espera
w = Tiempo promedio que dura un cliente en el sistema (es la suma del tiempo promedio de

espera más el de servicio)
w_q = Tiempo promedio de espera de los clientes
p_t = Probabilidad de que un cliente permanezca t unidades de tiempo en el sistema.
p_{qt}= Probabilidad de que un cliente permanezca t unidades de tiempo en la línea de espera.

En estos sistemas para que haya estabilidad, λ deberá ser menor que μ, ya que si fuese mayor, la longitud de la línea de espera se volvería muy grande con el paso del tiempo.

Un aspecto interesante de este modelo es analizar la sensibilidad de los parámetros del sistema ante variaciones en la tasa de servicio, lo cual puede estudiarse adecuadamente mediante la simulación, tema que se tratará en el último capítulo.

A continuación presentaremos un ejemplo ilustrativo del uso de este modelo.

Ejemplo XVI.5.- El Sr. José Pérez es el propietario del "Minisuper de Rioverde" y desea saber las características de la cola que se hace en la única caja de la que dispone en su negocio. Su hijo José Antonio, quien actualmente estudia su carrera profesional le ha dicho que él puede solucionarle su problema, ya que recientemente ha cursado la materia de Investigación de Operaciones donde estudió las líneas de espera. José Antonio ha hecho observaciones sobre el sistema de la línea de espera del establecimiento, llegando a la conclusión de que puede describirlo mediante el modelo M/M/1, con una tasa promedio de llegadas de 9 clientes por hora y una tasa promedio de servicio de 12 clientes por hora. En esta situación, (a) ¿Cuáles serán las características de la línea de espera?; (b) ¿Cuál sería la probabilidad de que un cliente permanezca 10 minutos en espera ?; (c)¿Cuál sería la probabilidad de que un cliente permanezca 30 minutos en el sistema ?; (d) ¿Cómo cambiarían estos parámetros si se modificara la tasa de servicio?

Solución:

(a) Para este caso λ es 9 clientes/hora y μ es 12 clientes/hora, por lo que al calcular las características de la línea de espera mediante las fórmulas dadas por las ecuaciones (XVI.7) a la (XVI.16), tendremos:

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu} = 9/12 = 0.75$$

El sistema está ocupado en promedio el 75% del tiempo.

$$P_o= 1-\rho = 0.25$$

La probabilidad de que no haya ningún cliente en el negocio es del 25%.

$$L=\frac{\rho}{1-\rho} = 0.75/(1\text{-}0.75) = 3$$

Habrá en promedio 3 clientes en el sistema.

$$L_q = L - \rho = 3 - 0.75 = 2.25$$

Habrá 2.25 clientes promedio en la línea de espera

$$w=\frac{L}{\lambda} = \frac{3 \ clientes}{9 \ cl./hora}=0.333 \ horas$$
$$= 20 \text{ minutos}$$

Este es el tiempo promedio que dura un cliente en el establecimiento

$$w_q=\frac{L_q}{\lambda} = \frac{2.25 \ clientes}{9 \ cl./hora}=0.25 \ horas$$
$$= 15 \text{ minutos}$$

El cual es el tiempo promedio de los clientes en espera del servicio
Finalmente el tiempo promedio de servicio, que es el inverso de la tasa de servicio μ, es

$$1/\mu = w - w_q = 20 - 15 = 5 \text{ minutos}$$

(b) Ahora conforme a la ecuación (XVI.16), tendremos,

$$p_q t = \rho \, Exp(-t / w) = (0.75) \, Exp(-10 / 20) = 0.455$$

Esto significa que la probabilidad buscada es del 45.5%.
(c) Según la Ec.(XVI.15), tendremos,

$$p_t = Exp(-t/w) = Exp(-30/20) = 0.223$$

Es decir que la probabilidad es del 22.3%.

(d) Para cambios en μ, lo que se tiene que hacer es volver a estimar los valores de ρ, P_0, L, L_q, w y w_q mediante las mismas fórmulas. En la tabla XVI.7 se presentan estos resultados para valores de μ, que van desde 15 hasta 10.

Tabla XVI.7.- Sensibilidad del sistema de la línea de espera del "Minisuper de Rioverde"

μ,clientes/hr	ρ	P_0	L,clientes	L_q,clientes	w,minutos	w_q,minutos
15	0.60	0.40	1.50	0.90	10.0	6.00
14	0.64	0.36	1.80	1.16	12.0	7.71
13	0.69	0.31	2.25	1.56	15.0	10.38
12	0.75	0.25	3.00	2.25	20.0	15.00
11	0.82	0.18	4.50	3.68	30.0	24.55
10	0.90	0.10	9.00	8.10	60.0	54.00

De esta tabla vemos que al disminuir μ y aproximarse al valor de λ, los tiempos de espera w_q, y total en el negocio w, aumentan drásticamente, lo cual se muestra en la figura XVI.5, donde se grafica μ en las abcisas y los tiempos w_q y w en las ordenadas.

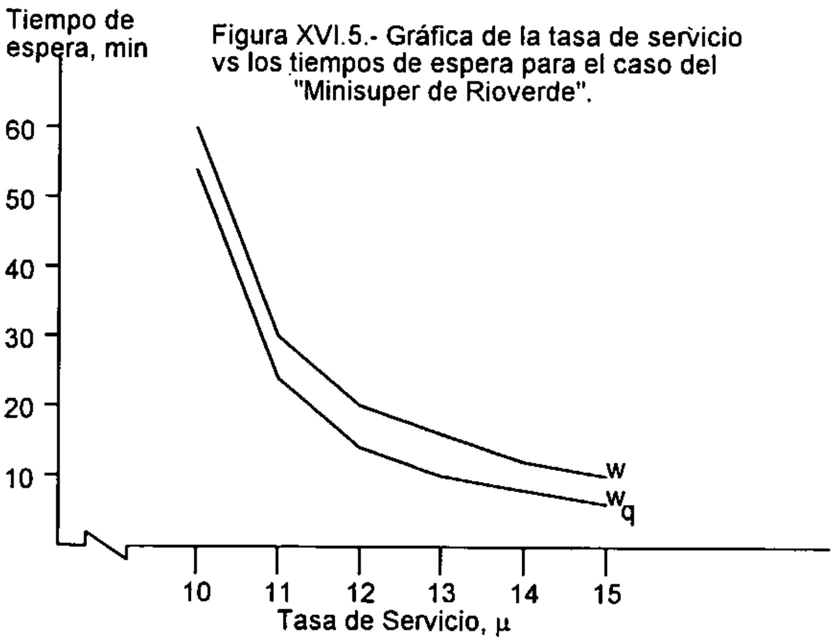


Figura XVI.5.- Gráfica de la tasa de servicio vs los tiempos de espera para el caso del "Minisuper de Rioverde".

Modelo M/M/S.

Este modelo es igual al anterior excepto en el tercer parámetro, ya que ahora se tendrán S servidores, cada uno de los cuales atenderá a los clientes con la misma tasa promedio de servicio μ. El sistema de la línea de espera formada será estable cuando λ sea menor al producto de S por μ.

Las fórmulas descriptivas de las características del sistema son más complicadas que las del modelo anterior y son las siguientes:

El factor de utilización del sistema ρ, vendrá dado por:

$$\rho = \frac{\lambda}{S\mu} \qquad \text{Ec.(XVI.17)}$$

Por su parte la probabilidad de que el sistema esté vacío P_0, será:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s} \frac{(s\rho)^n}{S!} + \frac{S^S \rho^{S+1}}{S!(1-\rho)}} \qquad \text{Ec.(XVI.18)}$$

Mientras que la probabilidad de que el sistema esté ocupado P_{SO}, lo que ocurrirá cuando el número de clientes en el sistema **n**, sea mayor o igual que S, se puede obtener con la siguiente fórmula:

$$P_{SO} = \frac{(\rho S)^S}{S!} \frac{1}{1-\rho} P_0 \qquad \text{Ec.(XVI.18)}$$

El número promedio de clientes en la línea de espera L_q, será:

$$Lq = \frac{1}{1-\rho} P_{so} \qquad \text{Ec.(XVI.20)}$$

Por su parte el número promedio de clientes en el sistema L, vendrá dado por:

$$L = Lq + \rho S \qquad \text{Ec.(XVI.21)}$$

Mientras que los tiempos promedio que tarda un cliente en el sistema w, o en la línea de espera w_q, vendrán dados por las ecuaciones (XVI.12) y (XVI.13) respectivamente.

Por su parte la probabilidad de que un cliente pase un tiempo igual o mayor que t en espera será:

$$P_{qt} = P_{SO} Exp[-s\mu t(1-\rho)] \qquad \text{Ec.(XVI.22)}$$

Y la probabilidad de que el cliente pase un tiempo igual o mayor que t en el sistema será:

$$p_t = Exp(-\mu t)\left[1 + P_{SO} \frac{1 - Exp[-\mu t(s-1-\rho s)]}{s-1-\rho s}\right] \qquad \text{Ec.(XVI.23)}$$

A continuación presentaremos un caso que muestra la aplicación de las fórmulas de este modelo.

Ejemplo XVI.6.- Una gasolinera cuenta con 3 bombas de gasolina atendida cada una por un despachador. Actualmente cada bomba tiene su propia línea de espera, pero un ingeniero que es amigo del propietario le ha sugerido a éste que sería mejor si hubiese una sola línea de espera en la que se formasen todos los automóviles que van a cargar combustible, para de allí ser atendidos luego por alguno de los 3 empleados. Si la tasa promedio de llegadas de clientes es de 24 cada hora y la tasa media de servicio de cada despachador es de 10 clientes por hora, ¿Será razonable lo que el ingeniero le propone al dueño del negocio?

Solución:

Como la gasolinera funciona actualmente puede considerarse como 3 sistemas idénticos de líneas de espera del tipo **M/M/1** con λ =24/3=8 clientes/hora en cada fila. Entonces las características de cada uno de estos sistemas, los calcularemos con las ecuaciones (XVI.7) a la (XVI.14) para obtener:

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{8}{10}=0.80$$

$$P_o=1-\rho=0.20$$

$$L=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{0.80}{0.20}=4 \text{ clientes en el sistema}$$

$$L_q=L-\rho=4-0.80=3.20 \text{ clientes en espera}$$

$$w=\frac{L}{\lambda}=\frac{4}{8}=0.50 \text{ horas} = 30 \text{ minutos}$$

$$w_q=\frac{L_q}{\lambda}=\frac{3.20}{8}=0.40 \text{ horas} = 24 \text{ minutos}$$

Por su parte lo que el ingeniero le propone al dueño de la gasolinera es un sistema del tipo M/M/S, para el cual calcularemos sus características mediante las fórmulas dadas por las ecuaciones (XVI.17) a la (XVI.21), con las cuales obtendremos:

$$\rho=\frac{\lambda}{S\mu}=\frac{24}{(3)(10)}=0.80$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{3}\frac{[(3)(0.8)]^n}{n!}+\frac{(3)^3\ (0.8)^4}{3!\ (1-0.8)}}$$

Donde la sumatoria será:

$$\sum_{n=0}^{3}\frac{(2.4)^n}{n!}=\frac{(2.4)^0}{0!}+\frac{2.4}{1!}+\frac{(2.4)^2}{2!}+\frac{(2.4)^3}{3!}$$

$$= 1 + 2.4 + 2.88 + 2.304 = 8.584$$

Con lo cual

$$P_o=\frac{1}{8.584+9.216}=0.05618$$

Entonces

$$P_{so} = \frac{(2.4)^3}{3!} \quad \frac{1}{1-0.8} \ (0.05618) \quad = 0.6472$$

Por su parte

$$Lq = \frac{1}{1-0.8}(0.6472) = 3.236 \text{ clientes en espera}$$

$$L = 3.236 + 2.4 = 5.636 \text{ clientes en el sistema}$$

$$w_q = \frac{Lq}{\lambda} = \frac{3.236}{24} = 0.1348 \text{ horas} = 8.09 \text{ minutos}$$

$$w = \frac{L}{\lambda} = \frac{5.636}{24} = 0.2348 \text{ horas} = 14.09 \text{ minutos}$$

Con lo cual vemos que cada cliente se vería beneficiado, ya que en estas circunstancias pasaría en la gasolinera aproximadamente la mitad del tiempo que con el sistema anterior, razón por la cual al propietario sí le conviene implementar lo que el ingeniero le ha sugerido.

Modelo M/G/1.

Este modelo se caracteriza por un patrón de llegadas de los clientes de tipo aleatorio según la distribución de Poisson, mientras que el patrón de servicio es de tipo general, el cual puede ajustarse a diversas funciones conocidas de probabilidad, una de las cuales es la distribución normal, por otra parte se dispone de un solo servidor, la capacidad del sistema es infinito y la disciplina de la línea de espera es del tipo PEPS.

Para este modelo es necesario conocer conforme al segundo parámetro descriptivo de la notación de Kendall, es decir el patrón de servicio, tanto el tiempo promedio en que se atiende a un cliente, denominado como $1/\mu$, así como la desviación estándar de la misma variable, denotada como σ. Con esto la fórmula para calcular el número promedio de clientes en la línea de espera L_q, es:

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2\ (1-\ \rho)} \qquad \text{Ec. (XVI.24)}$$

Donde si λ se maneja en unidades de clientes/hora, σ deberá estar en horas. Aquí ρ sigue siendo el cociente de λ y μ, tal y como se maneja en el modelo **M/M/1.**

Por su parte el número promedio de clientes en el sistema **L**, se obtiene con la ecuación,

$$L = Lq + \rho \qquad \text{Ec. (XVI.25)}$$

Mientras que los tiempos promedio que pasan los clientes en el sistema y en la línea de espera , **w** y w_q respectivamente, se obtienen mediante las ecuaciones (XVI.12) y (XVI.13) ya vistas.

En seguida presentaremos un caso ilustrativo del uso de este modelo.

Ejemplo XVI.7.- El Sr. Amador Martínez es el propietario de una peluquería en la que él atiende personalmente a sus clientes, los cuales llegan aleatoriamente según una distribución de Poisson con una tasa promedio de 4 cada hora. El tiempo que el Sr. Martínez tarda para atender a un cliente sigue una distribución normal con media de 12 minutos y desviación estándar de 3.6 minutos. (a) ¿Cuál será el número promedio de clientes en espera y en la peluquería? (b) ¿ Cuál será el tiempo promedio de espera y total en la peluquería que pasa cada cliente?

Solución:

Para este problema tenemos los siguientes datos:

$\lambda = 4$ clientes/hora
$\mu = 1/12$ minutos = 0.0833 clientes /minuto
= 5 clientes/hora
$\sigma = 3.6$ minutos = 0.06 horas

Por lo tanto el factor de utilización ρ, será:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{5} = 0.8$$

El número promedio de clientes en espera L_q, lo obtendremos mediante la ecuación (XVI.24):

$$L_q = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2\,(1-\rho)} = \frac{(4)^2\ (0.06)^2 + (0.8)^2}{2\,(1-0.8)}$$

$$= \frac{0.0576 + 0.64}{0.40} = 1.74 \text{ clientes}$$

El promedio de clientes en la peluquería L, lo calculamos por medio de la ecuación (XVI.25):

$$L = L_q + \rho = 1.74 + 0.80 = 2.54 \text{ clientes}$$

Por su parte los tiempos promedio de espera w_q y total en la peluquería w, que pasan los clientes serán:

$$w_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1.74}{4} = 0.435 \text{ horas } = 26.1 \text{ minutos en espera}$$

$$w = \frac{L}{\lambda} = \frac{2.54}{4} = 0.635 \text{ horas } = 38.1 \text{ minutos en la peluquería}$$

Modelo M/D/1.

Este modelo puede considerarse un caso especial del anterior con la excepción de que el segundo parámetro, es decir el tiempo de servicio, ahora es determinístico, por lo que al conocerse exactamente, su desviación estándar σ es cero, con lo cual la ecuación (XVI.24) nos quedará en la siguiente forma:

$$L_q = \frac{\rho^2}{2\,(1-\rho)} \qquad \text{Ec.(XVI.26)}$$

Las demás características del sistema **L**, **w** y w_q se obtienen con las ecuaciones (XVI.25), (XVI.12) y (XVI.13) respectivamente.

Para fines comparativos presentaremos la aplicación de este modelo al caso de la peluquería.

Ejemplo XVI.8.- En el caso de la peluquería del ejemplo anterior, ¿Cómo se verán afectadas las características del sistema si ahora el tiempo de servicio a los clientes se conoce con toda precisión y es de 12 minutos?

Solución:

Los datos del problema λ y μ son iguales, por lo que L_q lo obtendremos mediante la ecuación (XVI.26):

$$L_q = \frac{(0.8)^2}{2\,(1-0.8)} = 1.60 \text{ clientes}$$

Por su parte L será;

$$L = L_q + \rho = 1.60 + 0.8 = 2.40 \text{ clientes}$$

El tiempo promedio de espera w_q, será entonces:

$$w_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1.60}{4} = 0.40 \text{ horas} = 24 \text{ minutos}$$

Mientras que el tiempo total que pasa cada cliente en la peluquería w, será ahora:

$$w = \frac{L}{\lambda} = \frac{2.40}{4} = 0.6 \text{ horas} = 36 \text{ minutos}$$

Vemos con esto que los tiempos de espera y en el sistema han disminuido un poco al no haber variaciones en los tiempos de servicio a los clientes.

Línea de espera de costo mínimo.

Cuando en un sistema de líneas de espera se conoce el costo de la espera, es posible minimizar el costo total, el cual estará integrado por el costo de la espera más el del servicio a los clientes, buscando con esto optimizar las operaciones de la empresa.

La manera de hacer lo antes señalado se ilustrará en el siguiente ejemplo.

Ejemplo XVI.9.- La compañía "Naranjas Finas de Rioverde" produce naranjas de alta calidad mediante un proceso de maduración, lavado y pintado de la fruta, para luego enviarla a diferentes partes del país. El servicio de transporte de la fruta lo tiene contratado con "Fletes de la Zona Media". Puesto que los pedidos son aleatorios, se considera que se programan envíos de naranja bajo una función poissoniana de probabilidad con una media de 3 camiones por día. La empresa sólo tiene una estación de carga, la cual la llevan a cabo estibadores que son empleados de la propia compañía, los cuales ganan $50.00 por un turno de 8 horas y cada uno puede cargar un camión por turno. El tiempo de carga de los camiones se considera que sigue una distribución normal con media de 8 horas y una desviación estándar de 1 hora. El contrato con la compañía transportista señala que la empresa debe pagar a ésta por la demora en la carga $100.00 diarios por cada camión.

¿Cuántos estibadores debe utilizar la empresa si trabaja un solo turno diariamente a fin de minimizar su costo total de pago a los estibadores más el pago por demoras?

Solución:

El sistema de la línea de espera es del tipo M/G/1, en el que el costo total se compondrá por el costo de carga y el de demoras, esto es:

$$\text{Costo Total} = \text{Costo de Estibado} + \text{Costo de Demoras}$$

A su vez el costo de estibado será:

$$\text{Costo de Estibado} = 50.0\ N \qquad \$/\text{día}$$

Siendo **N** el número de estibadores asignados a las maniobras de carga. Dado que λ es igual a 3 (promedio de llegadas), **N** deberá ser mayor a este número a fin de que el sistema sea estable.

Por su parte el costo de demoras será:

$$\text{Costo de Demoras} = (3)(100)\ w = 300 \quad \$/\text{día}$$

Donde **W** es el tiempo de espera que un camión pasa en el sistema.

Lo que haremos será dar diferentes valores a **N**, de 4 en adelante y estimar para cada uno de ellos las características del sistema y su costo, a fin de encontrar la **N** que haga mínimo al costo total.

Como el sistema es del tipo **M/G/1**, calcularemos L_q mediante la ecuación (XVI.24) y L por la (XVI.25), para obtener con ellas a w y w_q.

Procederemos a efectuar esto para el caso particular de N=4:

Si **N** es 4, entonces μ será este mismo valor ya que cada estibador carga en promedio un camión por turno. Entonces el factor de utilización del sistema ρ será:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4} = 0.75$$

La desviación estándar σ es una hora, es decir 1/8 de turno, por lo que si aplicamos la ecuación (XVI.24), obtendremos a L_q, la cual será:

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2\ (1-\rho)} = \frac{(3)^2(1/8)^2 + (0.75)^2}{2\ (1-0.75)} = 1.406 \text{ clientes}$$

Por su parte **L** será:

$$L = L_q + \rho = 1.406 + 0.75 = 2.156$$

Mientras que los tiempos de espera w_q y tiempo total en el sistema w serán:

$$w_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1.406}{3} = 0.469$$

$$w = \frac{L}{\lambda} = \frac{2.156}{3} = 0.719$$

Con esto el costo total será:

$$C_T = 50N + 300w = (50)(4) + (300)(0.719) = 415.63\ \$/día$$

El cual incluye el costo del estibado y el de la espera.

Para otros valores de **N** se hace un procedimiento similar, cuyos resultados se sintetizan en la tabla siguiente:

Tabla XVI.8.- Resumen de resultados para diferentes valores de N.

N estibadores	4	5	6	7	8	9	10	11	12
λ camiones/día	3	3	3	3	3	3	3	3	3
μ camiones/día	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ρ	0.75	0.60	0.50	0.429	0.375	0.333	0.30	0.273	0.25
L_q camiones	1.406	0.626	0.391	0.284	0.225	0.189	0.165	0.148	0.135
L camiones	2.156	1.226	0.891	0.713	0.60	0.522	0.465	0.421	.385
w_q días	0.469	0.209	0.13	0.095	0.075	0.063	0.055	0.049	0.045
w días	0.719	0.409	0.297	0.238	0.20	0.174	0.155	0.14	0.128
C_T $/día	415.63	372.58	389.06	421.33	460.00	502.21	546.50	592.00	638.40

En la tabla vemos que el costo mínimo ocurre para una **N** de 5, por lo cual éste será el número óptimo de estibadores a manejar.

PROBLEMAS PROPUESTOS

XVI.1.- El Instituto Regional del Deporte desea hacer un chequeo médico de aptitud física a los deportistas de la ciudad, por lo cual los ha citado cada 10 minutos a partir de las 9:00 a.m.del sábado, el examen lo realizará el doctor Pérez, el cual tarda 14 minutos con cada persona. Se tiene planeado que cuando haya 4 personas en espera le ayudará el doctor Ruiz para agilizar el trabajo, solamente que éste dura para hacer el mismo examen 1 minuto más que el otro doctor y se detendrá hasta que no haya gente en espera a la hora en que él termine una prueba. (A) ¿A qué hora iniciará el segundo doctor sus actividades? (b) ¿A qué hora se parará por primera vez? (c) ¿Cuál será el número promedio de pacientes en espera durante las tres primeras horas de labores? Supóngase que el primer paciente llega a chequeo a las 9:00 a.m.

XVI.2.- A la oficina de trámites hacendarios llegan solicitudes de asesoría cada 4 minutos, mismas que atiende un empleado que tarda exactamente 5 minutos en darles salida. Cuando llegan a juntarse en espera de revisión 5 solicitudes llega un segundo empleado, que tarda 6 minutos en darles el servicio, y se detiene hasta que no haya trabajos pendientes. (a) ¿A qué hora se necesitarán los servicios del segundo empleado? (b) ¿A qué hora se detendrá por primera ocasión? (c) ¿Cuál será el número promedio de solicitudes en espera y en la oficina durante las dos primeras horas de actividades? Suponga que la primera solicitud llega exactamente a la hora en que la oficina inicia sus operaciones.

XVI.3.- La sala de belleza "Sentirse Bonita" tiene 2 sillas de atención al público, si recibe clientes cada 6 minutos y la primera servidora tarda 11 minutos en darles atención, mientras que la segunda como no tiene suficiente experiencia tarda 16 minutos para brindar el mismo servicio. Simule las 2 primeras horas de actividades de la sala de belleza y calcule lo siguiente: (a) El número promedio de clientes en espera durante las dos horas, (b) El número de clientes atendidos por la primera servidora, (c) El número de clientes atendidos por la segunda servidora.

XVI.4.- La oficina de cobros de los servicios municipales recibe clientes cada 2 minutos exactamente y tiene dos empleados para darles el servicio de cobranza, los cuales tardan 4 y 5 minutos exactamente. Si el primer cliente llega a las 9:00 a.m., (a) ¿Cuál será el número promedio de clientes en espera durante las 2 primeras horas? (b) ¿ De qué tamaño será la línea de espera después de 2 horas?

XVI.5 .- A la Oficina Subalterna de Rentas llegan clientes cada 3 minutos, los cuales son atendidos por dos servidores en serie, el primero de ellos tarda 4 minutos en darles el servicio, mientras que el segundo tarda 2 minutos. (a) ¿Cuál será el tamaño de las líneas de espera de cada servidor después de una hora de labores? (b) ¿Cuántos clientes habrán sido atendidos por cada servidor en ese mismo lapso de tiempo?

XVI.6.- Al Banco Local Rioverdense llegan clientes bajo un patrón de distribución poissoniano con media de 1.5 minutos, los cuales son atendidos en 3 que funcionan en paralelo con una media de servicio de 4 minutos para cada cajero. La tasa de servicio sigue una distribución exponencial. Calcúlense: (a) El tiempo promedio de los clientes en espera, (b) El número promedio de clientes en espera, (c) ¿Cuál será la probabilidad de que un cliente dure en espera 30 minutos o más?

XVI.7.- Si para el caso anterior se cambiara el sistema por el de una sola línea de espera con los mismos 3 cajeros, ¿Cuáles serían las respuestas a los mismos incisos?

XVI.8.- "Tortillas Hamasa" tiene llegada poissoniana de clientes a su negocio con una media de 2 minutos, los cuales son atendidos por un solo cajero que les da el servicio en forma exponencial con una media de 92 segundos, (a) ¿Cuál será el número promedio de clientes en espera y en la tortillería? (b) ¿Cuál será el tiempo promedio de los clientes en espera y en el negocio? (c) ¿Cuál será la probabilidad de que un cliente dure en espera y en la tortillería más de 10 minutos?

XVI.9.- La compañía minera "Metalmex" recibe muestras de mineral cada 5 minutos en forma poissoniana, las que ordena bajo un sistema de tipo PEPS, luego las muestras son analizadas en el laboratorio por 2 químicos que tienen la misma aptitud para el análisis, el cual dura tiempos variables dependiendo de lo que contengan las muestras, pero se ha determinado que bajo un patrón de tipo exponencial la media de cada análisis es de 7 minutos. Calcular: (a) El número promedio de muestras en espera de ser analizadas, (b) El tiempo promedio que tarda una muestra en el laboratorio, (c) La probabilidad de que una muestra dure en el laboratorio más del promedio.

XVI.10.- La Panadería Juanita tiene registros de sus llegadas de clientes los cuales son los siguientes:

Llegada de clientes por hora	Frecuencia observada
0	2
1	6
2	13
3	18
4	18
5	14
6 o más	19
Total	90

Si el servicio de la panadería se tarda exactamente 12 minutos. (a) ¿Cuál será el número promedio de clientes en espera y en la panadería? (b) ¿Cuál será el tiempo promedio de espera y en el negocio de cada cliente?

XVI.11.- El taller de reparación de calzado "Oscarito" dispone de un registro de sus llegadas de clientes, ya que su propietario es amigo de un estudiante universitario que lo ha orientado al respecto, sus estadísticas son las siguientes:

Llegada de clientes por hora	Frecuencia observada
0	4
1	12
2	18
3	18
4	13
5 o más	15
Total	80

Por otra parte el zapatero también tiene registros de sus tiempos de servicio, los cuales son:

Tiempos de servicio, minutos	Frecuencia observada
10	13
12	20
14	29
16	30
18	17
20	11
Total	120

El amigo del zapatero le ha indicado que las llegadas siguen una distribución de probabilidad de Poissson y los tiempos de servicio obedecen la curva normal, ante esto: (a) ¿Cuál será el número promedio de clientes en espera y en el taller? (b) ¿Cuál será el tiempo promedio de espera y en el negocio de cada cliente?

XVI.12.- El Sr. Luis Aguilar tienen una flotilla de 4 camiones fleteros a los que da un chequeo general y servicio en su propio taller después de cada viaje que realizan, con el objeto de minimizar fallas ya que ha firmado un atractivo contrato de fleteo con una firma que manufactura productos del campo. El Sr. Aguilar ha estimado que cada 8 horas que pasa un camión en el taller le ocasiona un costo por demoras de $300.00, mientras que por otra parte cuenta con 4 mecánicos, cada uno de los cuales tarda en promedio 6 horas para darles el servicio requerido a los camiones. Los mecánicos ganan $120 .00 por un turno de 8 horas. Si los camiones llegan al taller con una distribución de Poissson de media 8 horas los tiempos de servicio se distribuyen en forma exponencial. ¿Cuál será el número óptimo de mecánicos a emplear a fin de minimizar el costo total por concepto de demoras y sueldos?

CAPITULO XVII

ANALISIS DE MARKOV

Introducción.

El análisis de Markov debe su nombre al matemático ruso A. Markov quien en la primera década de nuestro siglo fue el primero en estudiar este tipo de fenómenos aplicándolo al movimiento browniano. Posteriormente hubo otros científicos que aportaron al desarrollo de la teoría y las aplicaciones de este tema, entre los que destacan Wiener y Kolmogorov.

El análisis de Markov estudia los cambios que sufre una variable en un proceso dado, donde las propiedades del sistema dependen de la situación del mismo en un periodo anterior, por lo tanto está formado por modelos de tipo probabilístico. Además a semejanza del capítulo anterior, los modelos markovianos son descriptivos y no de optimización.

A estos modelos suele conocérseles como *Cadenas de Markov* debido a que las condiciones del sistema en un periodo dado, van eslabonadas a las del periodo anterior así como también a las del posterior a él, de modo que si conocemos el estado de un periodo cualquiera, podemos obtener con ello el del periodo siguiente y repetir este procedimiento cuantas veces sea necesario para conocer la situación futura.

Estos modelos se aplican en diversas áreas de la administración como son las de mercadotecnia, donde se utilizan para describir la lealtad de los clientes hacia un producto dado; también se aplican a la planeación de personal, al manejo de cartera para la correcta administración de las cuentas por cobrar y al análisis del reemplazo de los equipos, los cuales pueden ser de transporte, o bien la maquinaria de producción.

Este capítulo se presenta tratando primeramente la terminología utilizada en el tema; luego se hará la introducción de un caso base; posteriormente se tratará la manera de obtener la matriz de transición ; más tarde se verá la forma de utilizar esta matriz para calcular con ella las condiciones del sistema tanto en un periodo posterior como las del estado estable; después se presentará la manera de obtener la matriz fundamental y sus aplicaciones; finalmente se tratará sobre la estimación de los tiempos para la primera transición del sistema de un estado a otro distinto y el tiempo de regreso de un estado a sí mismo.

Terminología.

En este inciso daremos algunas definiciones útiles para la mejor comprensión del capítulo.

Estado.- Se define como el conjunto de condiciones bajo las cuales se encuentra el sistema en un momento dado.

Probabilidad de Transición.- Es la probabilidad de pasar de un estado a otro distinto.

Estado Estable.- Es un estado en el cual ya no hay cambios en el sistema, es decir que se alcanza el equilibrio.

Estado Absorbente.- Es un estado el cual una vez que se llega a él, ya no hay posibilidad de dejarlo, por esto se dice que el estado absorbe a la *cadena de Markov*.

Tiempos de Transición.- Son los periodos de tiempo que deben transcurrir para que el sistema cambie de un estado inicial a otro final distinto. En el caso de que un sistema vaya otra vez al estado inicial del cual partió, a este tiempo se le denomina de regreso.

Cadena Cíclica.- Es también conocida como periódica y es aquella cadena en la cual hay una secuencia constante de cambios entre los estados del sistema. A cada secuencia completa se le llama ciclo. Cuando una cadena de Markov es cíclica, el sistema deja de ser probabilístico y se convierte en determinístico.

Ahora vamos a presentar un caso base de una cadena markoviana.

Caso Base.

El mercado de aguas de botellón en Rioverde tiene a 4 competidores, los cuales son: Aqualite, Brissa, Perlita y Hialina, los cuales según las estadísticas del mes anterior vendieron lo siguiente:

Marca	Venta, # Botellones	% Mercado
Aqualite	188	18.80
Brissa	278	27.80
Perlita	306	30.60
Hialina	228	22.80
Totales	1000	100.00

También se han aplicado unas encuestas a algunos clientes para conocer acerca de la lealtad de éstos hacia las diferentes marcas y la información obtenida se ha resumido en la siguiente tabla:

Tabla XVII.1.-Resultados de las encuestas.

Marca	Número de clientes encuestados	Número de clientes fieles	Número de clientes que cambian	Cómo cambian los clientes
Aqualite	30	21	9	3aB, 4aP, y 2aH
Brissa	40	32	8	3aA, 4aP, y 1aH
Perlita	50	38	12	4aA, 6aB, y 2aH
Hialina	30	18	12	4aA, 3aB, y 5aP

Donde en la última columna se han indicado las marcas mediante sus iniciales, así por ejemplo, si observamos el primer renglón nos damos cuenta que Aqualite ha perdido a 9 clientes, de los cuales según la última columna de ese renglón 3 se cambiarán a Brissa, 4 a Perlita y los 2 restantes a Hialina.

Con los resultados de las encuestas, ¿Qué deben esperar cada una de las marcas?

Matriz de Probabilidades de Transición.

Esta es una matriz cuadrada, donde el número de renglones y de columnas será igual al de estados que tenga la cadena de Markov, siendo cada elemento de la matriz, la probabilidad de transición respectiva de pasar del estado que encabeza el renglón donde está ubicado el elemento hacia el estado encabezado por la columna, así por ejemplo el elemento de la matriz correspondiente al primer renglón y a la segunda columna será la probabilidad de pasar del primer estado al segundo.

La figura XVII.1 es un caso de una matriz de transición de 3 estados, denotados como A, B y C

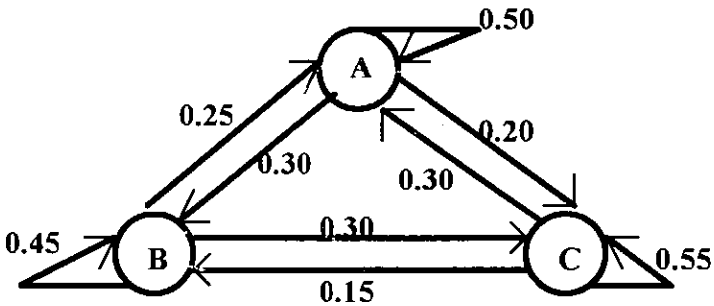
Figura XVII.1.- Ejemplo de una Matriz de Transición de tres estados: A, B y C:

	A	**B**	**C**
A	**0.50**	**0.30**	**0.20**
B	**0.25**	**0.45**	**0.30**
C	**0.30**	**0.15**	**0.55**

En la figura observamos que para el primer renglón las probabilidades de transición indican que habrá un 50% de los clientes que serán fieles a la marca (o estado) **A**, por su parte un 30% cambiarán de **A** a **B** y el 20% restante cambiará de **A** a **C**. Como puede verse, la suma de probabilidades de cada renglón es la unidad, dado que cada marca tendrá un 100% de sus clientes al inicio del proceso de Markov, de los cuales retendrá una parte y el resto cambiará a otras marcas debido a diversas razones que tendrán que ver con las estrategias de mercadotecnia que cada marca maneje.

En la figura XVII.2 se muestra un diagrama de estados para la matriz de transición de la figura XVII.1.

Figura XVII.2.- Diagrama de Estados para la Matriz de Transición de la figura XVII.1.



En esta figura vemos la manera cómo la matriz de transición queda representada en el diagrama, así los estados se indican por medio de círculos y las flechas que salen de ellos son las probabilidades de que sus clientes cambien a otro estado, por esto las flechas que regresan al mismo estado del que salen, señalan las probabilidades de que los clientes sean retenidos por esa marca respectiva. Las puntas de cada flecha indican la marca o estado que gana clientes a la marca de la cual salió dicha flecha, así por ejemplo en la figura anterior, la flecha que sale de **C** y llega a **B**, marcada con 0.15 nos muestra que este valor será la probabilidad de que la marca **B** le gane clientes a la **C**.

También es posible representar la matriz de transición por medio de un diagrama de árbol, así para el caso anterior, si tenemos un cliente que se encuentra en el estado B al inicio del periodo cero, su diagrama será el que se muestra en la siguiente figura:

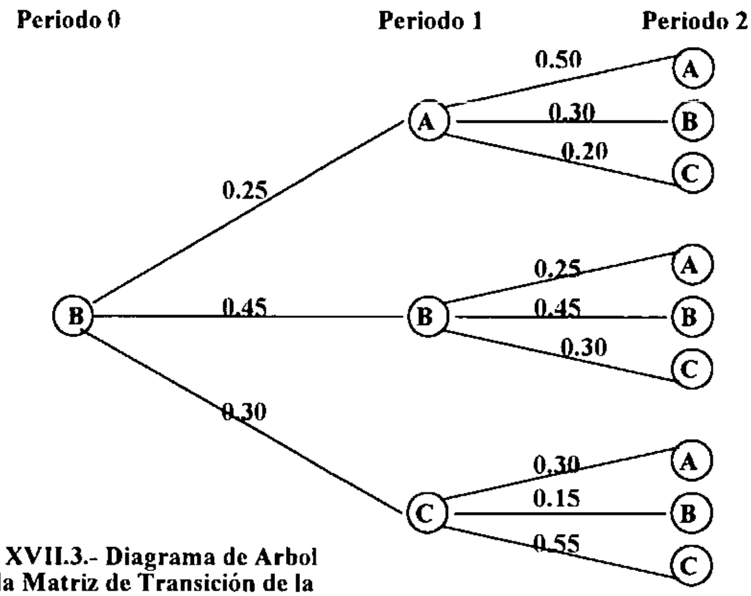


Figura XVII.3.- Diagrama de Arbol para la Matriz de Transición de la figura XVII.1 para 2 periodos.

En este diagrama vemos que el cliente en el periodo cero se encuentra en el estado **B** y conforme a la matriz de transición tiene para el siguiente periodo la probabilidad de pasar a **A** de 0.25, a **B** de 0.45 y de ir a **C** en 0.30. Luego si el cliente en el periodo uno se halla en un estado dado tendrá las probabilidades de ir a otro estado para el periodo dos, conforme a la matriz de transición, tal y como se indica en el diagrama anterior.

En este diagrama también se han señalado las probabilidades de que el cliente se encuentre en un estado cualquiera en el periodo dos, las cuales son probabilidades condicionales. Así estas probabilidades serán:

Probabilidad condicional de que el cliente esté en A en el periodo 2 dado que estaba en B en el periodo cero.

$$p(A,2\,/\,B,0)=(0.25)(0.50)+(0.45)(0.25)+(0.30)(0.30)$$
$$= 0.125+0.1125+0.090= 0.3275$$

Probabilidad condicional de que el cliente esté en **B** en el periodo 2, dado que estaba en B en el periodo cero:

$$p(B,2\,/\,B,0)=(0.25)(0.30)+(0.45)(0.45)+(0.30)(0.15)$$
$$= 0.075+0.2025+0.045 = 0.3225$$

Probabilidad condicional de que el cliente esté en C en el periodo 2, dado que estaba en B en el periodo cero:

$$p(C,2\,/\,B,0)=(0.25)(0.20)+(0.45)(0.30)+(0.30)(0.55)$$
$$= 0.050+0.135+0.165= 0.350$$

Como vemos, cada una de estas probabilidades se ha calculado mediante la suma de 3 opciones que el cliente tiene de hallarse en el periodo dos en un estado dado cualquiera.

En general la matriz de transición se representa mediante la fórmula siguiente:

$$P = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} \qquad \text{Ec.(XVII.1)}$$

Donde: **Pi j** = Probabilidad de transición de cambiar del estado **i** al **j**

i = Renglón correspondiente al elemento

j = Columna correspondiente al elemento

Además se deberá cumplir con lo siguiente:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \qquad \text{Ec.(XVII.2)}$$

Para $i=1,2,....,n$

Esto es que la sumatoria de probabilidades para cada renglón deberá ser la unidad.

Para ilustrar la forma de obtener la matriz de transición, presentaremos un ejemplo:

Ejemplo XVII.1.- Para el caso base obtener la matriz de transición.

Solución:

Para resolver este problema debemos utilizar la información de las encuestas, la cual se halla resumida en la tabla XVII.1 y denotaremos cada marca por su letra inicial.

Así para la marca Aqualite, vemos que se encuestaron a 30 clientes, de los cuales 21 son leales a la marca, por lo tanto,

$$p_{AA} = \frac{21}{30} = 0.70$$

Por su parte los 9 clientes restantes cambiarán de marca, de los cuales 3 se irán a Brissa, 4 a Perlita y 2 a Hialina, con esto tendremos:

$$p_{AB} = \frac{3}{30} = 0.10$$

$$p_{AP} = \frac{4}{30} = 0.1333$$

$$p_{AH} = \frac{2}{30} = 0.0667$$

Para la marca Brissa se encuestaron a 40 clientes de los cuales 32 son fieles a la marca, por esto,

$$p_{BB} = \frac{32}{40} = 0.80$$

De los 8 clientes que desean cambiar de marca, 3 se irán a Aqualite, 4 a Perlita y 1 a Hialina, por lo tanto, tendremos:

$$p_{BA} = \frac{3}{40} = 0.075$$

$$p_{BP} = \frac{4}{40} = 0.10$$

$$p_{BH} = \frac{1}{40} = .025$$

Por su parte para la marca Perlita se encuestaron a 50 clientes, de los cuales 38 serán fieles a la marca, es decir,

$$p_{PP} = \frac{38}{50} = 0.76$$

De los 12 clientes que están dispuestos a cambiar de marca, 4 se irían a Aqualite, 6 a Brissa y 2 a Hialina, por lo tanto tendremos:

$$p_{PA} = \frac{4}{50} = 0.08$$

$$p_{PB} = \frac{6}{50} = 0.12$$

$$p_{PH} = \frac{2}{50} = 0.04$$

Finalmente para Hialina, 18 de los 30 clientes encuestados seguirán con esta marca, por lo cual tendremos,

$$p_{HH} = \frac{18}{30} = 0.60$$

De los 12 clientes que quieren cambiar de marca, 4 desean a Aqualite, 3 a Brissa y 5 a Perlita, por lo cual esto nos dará:

$$p_{HA} = \frac{4}{30} = 0.1333$$

$$p_{HB} = \frac{3}{30} = 0.10$$

$$p_{HP} = \frac{5}{30} = 0.1667$$

Reuniendo estas probabilidades en la matriz, ésta nos quedará en la forma siguiente:

$$P = \begin{pmatrix} 0.70 & 0.10 & 0.1333 & 0.0667 \\ 0.075 & 0.80 & 0.10 & 0.025 \\ 0.08 & 0.12 & 0.76 & 0.04 \\ 0.1333 & 0.10 & 0.1667 & 0.60 \end{pmatrix}$$

Donde se han colocado los elementos de la matriz en el mismo orden en que se obtuvieron, es decir que el primer renglón se refiere a Aqualite, el segundo a Brissa, el tercero a Perlita y el último a Hialina.

Condiciones del sistema para periodos posteriores.

Una vez que se tiene la matriz de transición, la cual debe obtenerse mediante información de la cadena markoviana tal y cómo lo hemos visto en el inciso anterior, ya que no es posible derivarla matemáticamente, entonces estaremos en condiciones de poder obtener la situación del sistema para uno o varios periodos posteriores. Para esto se utiliza la siguiente fórmula:

$$\underline{Q}(m) = \underline{Q}(0)P^m \qquad \text{Ec.(XVII.3)}$$

Donde:

Q(m) = Vector de condiciones del sistema para el periodo m.
Q(0) = Vector de condiciones para el periodo inicial.
m = Número de periodos transcurridos.
P = Matriz de Transición.

Aquí debemos recurrir a la multiplicación matricial, tal y como se vio en el capítulo referente al repaso de álgebra, ya que tanto el vector **Q(m)** como el **Q(0)** son de 1 por **n**, es decir de un renglón y de **n** columnas, donde **n** será el número de estados de la cadena, mientras que la matriz **P** será de **n x n**, por lo cual se cumplirá con las reglas de la multiplicación matricial, que señalan que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de renglones de la segunda. Así para obtener **Q(1)**, es decir el vector de condiciones después de un periodo, tendremos:

Q(1)= Q(0)P Ec.(XVII.4)

Por su parte para hallar **Q(2)**, el vector de condiciones después de dos periodos, tendremos:

Q(2)= Q(0)P2 Ec. (XVII.5)

Pero también

Q(2)= Q(1)P Ec.(XVII.6)

Con lo cual vemos que con las nuevas condiciones obtenidas para el primer periodo **Q(1)**, podemos obtener las del segundo periodo **Q(2)**.

Ilustraremos esto con la aplicación de la metodología antes explicada al caso base.

Ejemplo XVII.2.- Hallar las participaciones de mercado de las diferentes marcas del caso base: (a) Para el periodo 1; (b) para el periodo 2; (c) para otros periodos subsecuentes.

Solución:

Para el caso base las participaciones de mercado constituyen el vector de condiciones de la cadena de Markov, siendo las iniciales (del periodo cero) las siguientes:

$$\mathbf{Q(0)}= (0.188\ 0.278\ 0.306\ 0.228)$$

Por lo cual mediante la ecuación (XVII.4) podemos resolver el inciso (a) para obtener las participaciones del primer periodo.

(a)

$$\mathbf{Q(1) = Q(0)\ P}$$

Si sustituimos **Q(0)** y **P**, la cual obtuvimos al solucionar el ejemplo XVII.1, tendremos:

$$\mathbf{Q(1)} = (0.188 \quad 0.278 \quad 0.306 \quad 0.228)\begin{pmatrix} 0.70 & 0.10 & 0.1333 & 0.0667 \\ 0.075 & 0.80 & 0.10 & 0.025 \\ 0.08 & 0.12 & 0.76 & 0.04 \\ 0.1333 & 0.10 & 0.1667 & 0.60 \end{pmatrix}$$

Por lo cual conforme a las reglas de multiplicación matricial, tendremos para el vector **Q(1)**:

Elemento del primer renglón
y la primera columna:

$$q(1)_{11} = (0.188)(0.70) + (0.278)(0.075) + (0.306)(0.08) + (0.228)(0.1333)$$
$$= 0.1316 + 0.02085 + 0.02448 + 0.0304 = 0.20733$$

Elemento del primer renglón
y la segunda columna:

$$q(1)_{12} = (0.188)(0.10) + (0.278)(0.80) + (0.306)(0.12) + (0.228)(0.10)$$
$$= 0.0188 + 0.2224 + 0.03672 + 0.0228 = 0.30072$$

Elemento del primer renglón
y la tercera columna:

$$q(1)_{13} = (0.188)(0.1333) + (0.278)(0.10) + (0.306)(0.76) + (0.228)(0.1667)$$
$$= 0.025067 + 0.0278 + 0.23256 + 0.0380 = 0.32343$$

Elemento del primer renglón
y cuarta columna

$$q(1)_{14} = (0.188)(0.0667) + (0.278)(0.025) + (0.306)(0.04) + (0.228)(0.60)$$
$$= 0.012533 + 0.00695 + 0.01224 + 0.1368 = 0.16852$$

Por lo cual **Q(1)** es:

$$Q(1) = (0.20733 \quad 0.30072 \quad 0.32343 \quad 0.16852)$$

(b) Ahora por medio de la ecuación (XVII.6) podemos obtener las participaciones del mercado para el final del segundo periodo, es decir:

$$\mathbf{Q(2) = Q(1)\,P}$$

$$Q(2) = (0.20733 \quad 0.30072 \quad 0.32343 \quad 0.16852)\begin{pmatrix} 0.70 & 0.10 & 0.1333 & 0.0667 \\ 0.075 & 0.80 & 0.10 & 0.025 \\ 0.08 & 0.12 & 0.76 & 0.04 \\ 0.1333 & 0.10 & 0.1667 & 0.60 \end{pmatrix}$$

La cual al resolverse nos dará:
Elemento del primer renglón
y la primera columna:

$$q(2)_{11} = (0.20733)(0.70) + (0.30072)(0.075) + (0.32343)(0.08) + (0.16852)(0.1333)$$

$$= 0.14531 + 0.022554 + 0.025874 + 0.022469 = 0.21603$$

Elemento del primer renglón
y la segunda columna:

$$q(2)_{12} = (0.20733)(0.10) + (0.30072)(0.80) + (0.32343)(0.12) + (0.16852)(0.10)$$

$$= 0.020733 + 0.240576 + 0.038812 + 0.0168512 = 0.31697$$

Elemento del primer renglón
y la tercera columna:

$$q(2)_{13} = (0.20733)(0.1333) + (0.30072)(0.10) + (0.32343)(0.76) + (0.16852)(0.1667)$$

$$= 0.027644 + 0.030072 + 0.245807 + 0.028087 = 0.33161$$

Elemento del primer renglón
y la cuarta columna.

$$q(2)_{14} = (0.20733)(0.0667) + (0.30072)(0.025) + (0.32343)(0.04) + (0.16852)(0.60)$$

$$= 0.013822 + 0.007518 + 0.012937 + 0.101112 = 0.13539$$

Por lo que al final del segundo periodo, las participaciones de mercado serán:

$$\mathbf{Q(2)} = (0.21603 \quad 0.31697 \quad 0.33161 \quad 0.13539)$$

(c) Para este inciso se pueden obtener las participaciones de mercado para periodos posteriores mediante la ecuación (XVII.3), o bien la siguiente que es equivalente:

$$Q(m) = Q(m-1)\,P \qquad \text{Ec.(XVII.7)}$$

Los resultados para los periodos del cero al séptimo se sintetizan en la tabla siguiente:

Tabla XVII.2.- Participaciones de mercado de las marcas para los periodos del cero al séptimo.

Periodo	Aqualite	Brissa	Perlita	Hialina
0	0.1880	0.2780	0.3060	0.2280
1	0.20733	0.30072	0.32343	0.16852
2	0.21603	0.31697	0.33161	0.13539
3	0.2196	0.3285	0.3351	0.1168
4	0.2207	0.3367	0.3363	0.1063
5	0.2208	0.3424	0.3364	0.1004
6	0.2205	0.3464	0.3361	0.0970
7	0.2202	0.3492	0.3356	0.0950

Aquí vemos que las participaciones de mercado cambian más en los primeros periodos que en los subsecuentes, para los cuales podemos ver que los cambios son menores. Esto nos da la idea de que el sistema se ha movido a un punto quizás cercano al estado estable.

Condiciones del Estado Estable.

Al resolver el inciso (c) del ejemplo anterior hemos visto que la cadena markoviana formada por las marcas vendedoras de agua de botellón se ha acercado al estado estable. De hecho una manera posible aunque no la más eficiente, de obtener las condiciones del sistema para el estado estable, es repetir iterativamente los cálculos hechos para los primeros periodos hasta que ya no haya cambios en las participaciones de mercado de las diferentes marcas.

Otra forma de lograr esto es mediante la metodología que en seguida explicaremos:

Lo primero será retomar la ecuación (XVII.7), la cual es:

$$\mathbf{Q(m) = Q(m-1)\,P}$$

Donde

$$Q(m) = (e_1 \quad e_2 \quad e_3 \ldots\ldots\ldots \; e_n) \qquad \text{Ec. (XVII.8)}$$

Siendo

ei = Participación de mercado de la marca i

Una vez que se ha alcanzado el estado estable, tendremos que

$$\mathbf{Q(m) = Q(m-1)} = (e_1 \quad e_2 \quad e_3 \ldots\ldots\ldots \; e_n) \qquad \text{Ec.(XVII.9)}$$

Ya que no habrá cambios entre el vector **Q(m -1)** y el del siguiente periodo **Q(m)**.

Por su parte la matriz de transición **P** viene dada por la ecuación (XVII.1).

Si observamos la manera cómo se lleva a cabo la multiplicación matricial conforme a la ecuación (XVII.7) cuando se multilplica el primer renglón de **Q(m-1)** por la primera columna de **P** para obtener el primer elemento de **Q(m)**, el cual será e_1, es decir,

$$e_1 = p_{11}\, e_1 + p_{21}\, e_2 + \ldots\ldots\ldots + pn_1\, e_n \qquad \text{Ec. (XVII.10)}$$

Por su parte para el segundo elemento de Q(m), el cual se obtendrá por multiplicar el primer renglón de Q(m -1) por la segunda columna de P, tendremos:

$$e_2 = p_{12}\, e_1 + p_{22}\, e_2 + \ldots\ldots\ldots + pn_2\, e_n \qquad \text{Ec. (XVII.11)}$$

De una manera similar se hace esto para el enésimo elemento, para obtener:

$$e_n = p_{1n} e_1 + p_{2n} e_2 + \dots\dots\dots + p_{nn} e_n \qquad \text{Ec. (XVII.12)}$$

Con esto habremos generado un sistema de n ecuaciones algebraicas lineales con igual número de incógnitas, las cuales serán e1, e2, ..., en, sólo que estas n ecuaciones no son todas independientes, por lo que debemos incorporar la ecuación que nos falta, la cual es la de la sumatoria de las participaciones de mercado en el estado estable, la cual debe ser igual a la unidad, es decir,

$$e_1 + e_2 + \dots\dots\dots\dots + e_n = 1 \qquad \text{Ec. (XVII.13)}$$

Con lo cual nuestro sistema ya tiene el mismo número de ecuaciones independientes que de incógnitas. Este sistema puede solucionarse mediante un método apropiado como el *Gauss Jordan* presentado en el capítulo II de este texto; o bien si el sistema es de tres estados, puede resolverse por medio de la regla de *Cramer*.

Una observación importante es la siguiente: Si analizamos el sistema generado de n ecuaciones con n incógnitas, nos daremos cuenta que las participaciones de mercado iniciales no intervienen para nada. Esto significa que las condiciones de estado estable dependen sólo de la matriz de transición y no de las condiciones iniciales.

A continuación aplicaremos esta metodología al caso base.

Ejemplo XVII.3.- Obtener para el caso base las participaciones de mercado en el estado estable.

Solución:

Puesto que el caso base consta de 4 estados, esto nos generará un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, el cual será el siguiente.

$$\begin{aligned}
e_1 &= p_{11} e_1 + p_{21} e_2 + p_{31} e_3 + p_{41} e_4 \\
e_2 &= p_{12} e_1 + p_{22} e_2 + p_{32} e_3 + p_{42} e_4 \\
e_3 &= p_{13} e_1 + p_{23} e_2 + p_{33} e_3 + p_{43} e_4 \\
e_4 &= p_{14} e_1 + p_{24} e_2 + p_{34} e_3 + p_{44} e_4
\end{aligned}$$

Sólo que de estas 4 ecuaciones tenemos 3 que son independientes, por lo que la ecuación faltante será la de la sumatoria de participaciones de mercado, según la ecuación (XVII.13),

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 1$$

Ahora con nuestro sistema de ecuaciones totalmente formado, procederemos a sustituir las probabilidades de transición de la matriz respectiva, para obtener:

$$\begin{aligned}
e_1 &= 0.70\, e_1 + 0.075\, e_2 + 0.08\, e_3 + 0.1333\, e_4 \\
e_2 &= 0.10\, e_1 + 0.80\, e_2 + 0.12\, e_3 + 0.10\, e_4 \\
e_3 &= 0.1333\, e_1 + 0.10\, e_2 + 0.76\, e_3 + 0.1667\, e_4 \\
e_4 &= 0.0667\, e_1 + 0.025\, e_2 + 0.04\, e_3 + 0.60\, e_4
\end{aligned}$$

$$e1 + e2 + e3 + e4 = 1$$

De aquí tomaremos 4 ecuaciones, de las cuales una debe ser necesariamente la última y las otras 3 las escogeremos arbitrariamente, tomando las 3 primeras, las cuales luego de reacomodarse e igualarse a cero, nos quedarán en la forma siguiente.

$$\begin{aligned}
-0.30 e_1 + 0.075\, e_2 + 0.08\, e_3 + 0.1333\, e_4 &= 0 \\
0.10\, e_1 - 0.20\, e_2 + 0.12\, e_3 + 0.10\, e_4 &= 0 \\
0.1333\, e_1 + 0.10\, e_2 - 0.24\, e_3 + 0.1667\, e_4 &= 0
\end{aligned}$$

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 1$$

Este sistema ya puede solucionarse por cualquier método que sea adecuado como el Gauss Jordan, con el cual se obtiene la siguiente solución:

$e_1 = 0.2188$
$e_2 = 0.3556$
$e_3 = 0.3336$
$e_4 = 0.0920$

Estos resultados junto con las participaciones de mercado de las marcas para los periodos cero y séptimo los agrupamos en la siguiente tabla:

Tabla XVII.3.- Resultados del caso base.

Marca	Part. Mercado Periodo 0	Part. Mercado Periodo 7	Part. Mercado Estado Estable	Diferencia del Estado Estable y el Periodo 0
Aqualite	0.1880	0.2202	0.2188	+ 3.08
Brissa	0.2780	0.3492	0.3556	+ 7.76
Perlita	0.3060	0.3356	0.3336	+ 2.76
Hialina	0.2280	0.0950	0.0920	- 13.60

Se han incluido las participaciones del periodo 7 con el fin de compararlas con el estado estable, para darnos cuenta de que ya no hay un cambio significativo en ellas, por lo que en el periodo 7 ya estamos cerca del equilibrio del sistema.

También en la última columna se presentan las diferencias porcentuales entre las participaciones de mercado de las marcas entre el periodo cero y las del estado estable, con lo cual nos damos cuenta que la marca Hialina perderá irremediablemente la mayor parte de su mercado en caso de no efectuar alguna medida de mercadotecnia conveniente a fin de cambiar el rumbo de estas tendencias. Por su parte las otras marcas ganan mercado siendo Brissa la de mayor ganancia.

Obtención y Aplicaciones de la Matriz Fundamental.

La matriz fundamental es muy útil para el análisis y solución de situaciones en las que aparecen estados absorbentes, ya que estos casos no pueden manejarse en la forma normal que ha sido descrita en los incisos anteriores.

La metodología para obtener la matriz fundamental, la cual se denotará como **R**, es la siguiente:

1.- Obtener la matriz de transición **P** en la forma usual, incluyendo a los estados absorbentes.

2.- Eliminar de la matriz **P** los renglones correspondientes a los estados absorbentes.

3.- De lo que ha quedado de **P** en el paso anterior, dividirlo en 2 partes: S que será la parte no absorbente respectiva (se incluirán aquí las columnas no absorbentes) y **T**, que llevará las columnas absorbentes.

4.- Obtener la matriz **U** mediante la siguiente fórmula:

$$U = I - S \qquad \text{Ec.(XVII.14)}$$

Siendo **I** la matriz identidad del mismo orden que S.

5.- Finalmente se obtiene la matriz fundamental **R**, por medio de la ecuación siguiente:

$$R = U\text{-}1 \qquad \text{Ec.(XVII.15)}$$

Donde vemos que **R** es la matriz inversa de **U**, la cual puede obtenerse por medio de algunos de los métodos de inversión de matrices vistos en el capítulo II.

Esta matriz **R** es de suma utilidad para aquellos casos donde existen estados absorbentes, ya que cada elemento nos da información sobre la situación del sistema, lo cual dejaremos en claro al resolver el ejemplo XVII.4.

Otra matriz que es muy útil en estos casos es la matriz de proporciones denominada como **W**, la cual puede obtenerse fácilmente mediante la siguiente expresión:

$$W=RT \qquad \text{Ec. (XVII.16)}$$

La matriz **W** nos da las proporciones de cuales y cuantos de los estados no absorbentes llegarán a uno de los estados absorbentes.

Ilustraremos lo antes explicado con el planteamiento de un caso de este tipo.

Ejemplo XVII.4.-La escuela secundaria "Francisco I. Madero" está haciendo un estudio de su población estudiantil a fin de planear mejor sus actividades futuras. De los 3 grados que hay, se han recabado las siguientes estadísticas durante el último ciclo escolar.

Tabla XVII.4.- Estadísticas de la Escuela "Francisco I. Madero" durante el último ciclo escolar.

Grado Escolar	Número de Alumnos	Alumnos Aprobados	Alumnos Reprobados	Alumnos que se retiraron
Primero	600	534	42	24
Segundo	520	481	26	13
Tercero	500	445	30	25
Totales	1620	1460	98	62

De aquí todos los alumnos que aprobaron el tercer año obtuvieron su graduación del nivel de educación secundaria.

Si para el siguiente ciclo escolar la escuela tiene 1200 solicitudes de alumnos de nuevo ingreso, de los cuales un promedio del 80% aprueban el examen de admisión. ¿Qué debe hacer la administración escolar para los años venideros?

Solución:

Lo primero será obtener la matriz de transición P para este caso, la cual constará de 5 estados, los cuales serán uno por cada grado escolar, otro por los que abandonan la escuela y otro más por los que se gradúan.

Para los del primer grado escolar que son 600, habrá una fracción de 534/600 =0.89 que pasan al segundo grado; permanecen en el primer grado los reprobados, es decir 42/600 = 0.07; mientras que los restantes son alumnos que se retiran, es decir 24/600 = 0.04.

De los alumnos del segundo grado, pasan al tercero una proporción de 481/520 = 0.925; permanecen en segundo año 26/520= 0.05; se retiran 13/520 = 0.025.

De los alumnos del tercer grado se gradúan los que resultan aprobados, es decir una fracción de 445/500 = 0.89; permanecen en el tercer año los reprobados, éstos son 30/500 = 0.06; mientras que los que se retiran son 25/500 = 0.05.

Por su parte para los estados de los que se gradúan y los que se retiran, los alumnos que llegan a uno de esos estados no van a ninguna parte después, lo cual significa que estos dos estados son absorbentes. Con esto nuestra matriz de transición tendrá 5 estados tal y como lo habíamos comentado y quedará en la forma siguiente.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & G & R \\ \hline 1 & 0.07 & 0.89 & 0 & 0 & 0.04 \\ 2 & 0 & 0.05 & 0.925 & 0 & 0.025 \\ 3 & 0 & 0 & 0.06 & 0.89 & 0.05 \\ G & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ R & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Donde cada grado se ha denotado por su número respectivo, **G** es el estado de los que se gradúan y **R** de los que se retiran.

Lo siguiente será obtener la matriz fundamental, para la cual conforme al procedimiento señalado ya tenemos el primer paso por lo que iremos al segundo paso, según el cual de la matriz de transición anterior, eliminaremos los renglones absorbentes, **G** y **R** en este caso, para obtener:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & G & R \\ \hline 1 & 0.07 & 0.89 & 0 & 0 & 0.04 \\ 2 & 0 & 0.05 & 0.925 & 0 & 0.025 \\ 3 & 0 & 0 & 0.06 & 0.89 & 0.05 \end{array}$$

Luego el tercer paso nos indica dividir esta última matriz en dos partes: la matriz **S**, que incluirá las columnas no absorbentes, es decir la 1, 2 y 3; y la matriz **T**, la cual llevará las columnas **G** y **R**, es decir las absorbentes, con esto tendremos:

$$S = \begin{pmatrix} 0.07 & 0.89 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0.925 \\ 0 & 0 & 0.06 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & 0.04 \\ 0 & 0.025 \\ 0.89 & 0.05 \end{pmatrix}$$

Posteriormente según el cuarto paso, obtendremos la matriz **U** mediante la ecuación (XVII.14):

$$U = I - S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.07 & 0.89 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0.925 \\ 0 & 0 & 0.06 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0.93 & -0.89 & 0 \\ 0 & 0.95 & -0.925 \\ 0 & 0 & 0.94 \end{pmatrix}$$

Finalmente según el quinto paso, obtendremos la matriz fundamental **R** mediante la ecuación (XVII.15):

$$R = U^{-1} = \begin{pmatrix} 0.93 & -0.89 & 0 \\ 0 & 0.95 & -0.925 \\ 0 & 0 & 0.94 \end{pmatrix}^{-1}$$

De esta matriz **U** obtendremos su inversa por medio del método de Gauss Jordan para obtener:

$$R = \begin{pmatrix} 1.0753 & 1.0074 & 0.9913 \\ 0 & 1.0526 & 1.0358 \\ 0 & 0 & 1.0638 \end{pmatrix}$$

Esta es nuestra matriz fundamental la cual se interpreta de la siguiente manera: Cada renglón nos brinda el número promedio de periodos que cada estudiante del estado respectivo al renglón pasa en cada estado correspondiente a la columna donde está ubicado el elemento, así por ejemplo el elemento del primer renglón y la segunda columna, que es 1.0074 nos muestra el número promedio de periodos que un estudiante de primer grado (valor del renglón), pasa en el segundo grado (valor de la columna).

Otra información que se obtiene de esta matriz es la siguiente: Para cada renglón de la matriz la sumatoria de sus elementos nos indica el número de periodos de tiempo que pasarán para que un elemento que se encuentra en el estado respectivo al renglón alcance uno de los estados absorbentes, así para el caso del segundo renglón la sumatoria de sus elementos es 2.0884 (0 + 1.0526 + 1.0358), el cual nos indicará el número de periodos que transcurren en promedio antes de que un estudiante del segundo grado alcance uno de los estados absorbentes, es decir graduarse o retirarse de la escuela.

Como podemos ver con esto, la matriz fundamental es muy útil para la administración , ya que nos da información valiosa sobre la situación del sistema, la cual es necesaria para la planeación adecuada de las operaciones.

Ahora procederemos a calcular la matriz de proporciones **W**, mediante la ecuación (XVII.16), con la cual obtendremos:

$$W = RT$$

$$= \begin{pmatrix} 1.0753 & 1.0074 & 0.9913 \\ 0 & 1.0526 & 1.0358 \\ 0 & 0 & 1.0638 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0.04 \\ 0 & 0.025 \\ 0.89 & 0.05 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.8822 & 0.1178 \\ 0.9219 & 0.0781 \\ 0.9468 & 0.0532 \end{pmatrix}$$

En esta matriz los renglones se refieren a los estados no absorbentes, es decir cada grado escolar y las columnas a los absorbentes, la primera para los graduados y la segunda para los retirados, con esto cada elemento nos indica qué proporción del total de los estudiantes de un estado no absorbente lograrán en promedio cada uno de los estados absorbentes, así para nuestro caso de los estudiantes del primer grado el 88.22% lograrán graduarse y los restantes 11.78% se retirarán antes de terminar sus estudios, mientras que los del segundo año se graduarán el 92.19% y el 7.81% no lo harán ; finalmente de los del tercer grado se graduarán el 94.68% y se retirarán el 5.32% restante.

De esta forma la administración escolar puede esperar que de los 960 alumnos que ingresarán en el próximo ciclo (80% de 1200 solicitudes), de éstos,

(960) (0.8822) = 847 se graduarán en 3 años

Con esto la escuela deberá planear sus operaciones, organizarse y contratar personal adicional para enfrentar sus retos futuros, ya que esto implica un incremento en el número de estudiantes graduados del 90% para los próximos 3 años con respecto al ciclo actual, en el cual sólo se gradúan 445 alumnos.

Tiempo de Transición de un estado a otro .

En este inciso veremos la manera de estimar el tiempo para que alguien que se encuentre en un estado dado del sistema, cambie a otro, ya sea éste un estado distinto al inicial o el mismo, en cuyo caso al tiempo de transición se le conoce como tiempo de regreso.

La fórmula para calcular el tiempo de transición desde un estado inicial hasta otro final distinto es la siguiente:

$$f_{ij} = 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} p_{ik} f_{kj} \qquad \text{Ec. (XVII.17)}$$

Donde:

f_{ij} = Tiempo de transición para pasar del estado i al j
p_{ik} = Probabilidad de transición de pasar del estado i al k
n = Número de estados del sistema

Por su parte para calcular el tiempo de regreso de un cliente desde un estado inicial **i** hacia el mismo estado, la fórmula es la siguiente:

$$f_{ii} = \frac{1}{e_i} \qquad \text{Ec. (XVII.18)}$$

Donde:

f_{ii} = Tiempo de regreso para salir de **i** y volver ahí mismo
e_i = Probabilidad del estado de i en condiciones de estado estable.

Ahora ilustraremos la aplicación de estas fórmulas con un ejemplo.

Ejemplo XVII.5.- Obtener los tiempos de transición y de regreso para el caso base.
Solución:

Lo primero será retomar la matriz de transición del caso base la cual era

$$P = \begin{pmatrix} 0.70 & 0.10 & 0.1333 & 0.0667 \\ 0.075 & 0.80 & 0.10 & 0.025 \\ 0.08 & 0.12 & 0.76 & 0.04 \\ 0.1333 & 0.10 & 0.1667 & 0.60 \end{pmatrix}$$

Podemos entonces calcular los tiempos de transición entre estados distintos usando la ecuación (XVII.17), para obtener:

Estado final j = **B**
Para ir de **A** a **B** (**i=A, j=B**):

$$f_{AB} = 1 + \sum_{k=A,\,P,\,H} p_{Ak} f_{kB}$$

Esto es

$$\begin{aligned} fAB &= 1 + pAA\, fAB + pAP\, fPB + pAH\, fHB \\ &= 1 + 0.70\, fAB + 0.1333\, fPB + 0.0667\, fHB \end{aligned}$$

Aquí hemos denotado las diferentes marcas mediante sus iniciales, tal y como se había manejado antes. La última ecuación tiene 3 incógnitas, por lo que para poder solucionarla harán falta otras 2 ecuaciones, las cuales se obtendrán al plantear la ecuación (XVII.17) para los otros dos posibles estados iniciales **P** y **H**.

Entonces al hacer esto, tendremos:

Para ir de **P** a **B** (**i=P, j=B**):

$$f_{PB} = 1 + \sum_{k=A,P,H} p_{Pk} f_{kB}$$

Esto es

$$\begin{aligned} fPB &= 1 + pPA\, fAB + pPP\, fPB + pPH\, fHB \\ &= 1 + 0.08\, fAB + 0.76\, fPB + 0.04\, fHB \end{aligned}$$

Siendo ésta la segunda ecuación.

Para ir de **H** a **B** (**i=H, j=B**):

$$f_{HB} = 1 + \sum_{k=A,P,H} p_{Hk} f_{kB}$$

Esto es

$$\begin{aligned} fHB &= 1 + pHA\, fAB + pHP\, fPB + pHH\, fHB \\ &= 1 + 0.1333\, fAB + 0.1667\, fPB + 0.60\, fHB \end{aligned}$$

Siendo ésta nuestra tercera ecuación, por lo que ya tenemos nuestro sistema de ecuaciones completamente formado, las cuales al rearreglarse nos quedan en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 0.30\, fAB - 0.1333\, fPB - 0.0667\, fHB &= 1 \\ -0.08\, fAB + 0.24\, fPB - 0.04\, fHB &= 1 \\ -0.1333\, fAB - 0.1667\, fPB + 0.40\, fHB &= 1 \end{aligned}$$

Este sistema se resuelve fácilmente mediante la regla de Cramer o el método de Gauss Jordan para obtener:

$$fAB = 9.314 \text{ meses}$$
$$fPB = 8.818 \text{ meses}$$
$$fHB = 9.279 \text{ meses}$$

Puesto que los periodos de tiempo del caso base eran meses.

Procediendo de una manera análoga para el estado final **j=H**, tendremos:

Para ir de **A** a **H** (**i=A, j=H**):

$$f_{AH} = 1 + \sum_{k=A,B,P} p_{Ak} f_{kH}$$

Esto es

$$fAH = 1 + pAA\ fAH + pAB\ fBH + pAP\ fPH$$
$$= 1 + 0.70\, fAH + 0.10\, fBH + 0.1333\, fPH$$

Ahora para ir de **B** a **H** (**i=B, j=H**):

$$f_{BH} = 1 + \sum_{k=A,B,P} p_{Bk}\, f_{kH}$$

Esto es

$$fBH = 1 + pBA\ fAH + pBB\ fBH + pBP\ fPH$$
$$= 1 + 0.075\, fAH + 0.80\, fBH + 0.10\, fPH$$

Finalmente para ir de **P** a **H** (**i=P, j=H**):

$$f_{PH} = 1 + \sum_{k=A,B,P} p_{Pk} f_{kH}$$

Esto es

$$fPH = 1 + pPA\ fAH + pPB\ fBH + pPP\ fPH$$
$$= 1 + 0.08\, fAH + 0.12\, fBH + 0.76\, fPH$$

Si rearreglamos estas 3 ecuaciones, tendremos:

$$0.30\, fAH - 0.10\, fBH - 0.1333\, fPH = 1$$
$$-0.075\, fAH + 0.20\, fBH - 0.10\, fPH = 1$$
$$-0.08\, fAH - 0.12\, fBH + 0.24\, fPH = 1$$

El cual al resolverse nos da lo siguiente:

$$fAH = 23.151 \text{ meses}$$
$$fBH = 26.164 \text{ meses}$$
$$fPH = 24.966 \text{ meses}$$

Ahora para ir al estado final **j=A**, tendremos:

Para ir de **B** a **A** (**i=B, j=A**):

$$f_{BA} = 1 + \sum_{k=B,P,H} p_{Bk} f_{kA}$$

Esto es

$$fBA = 1 + pBB\ fBA + pBP\ fPA + pBH\ fHA$$
$$= 1 + 0.80\, fBA + 0.10\, fPA + 0.025\, fHA$$

Para ir de **P** a **A** **(i=P, j=A)**:

$$f_{BA} = 1 + \sum_{k=B,P,H} p_{Pk} f_{kA}$$

Esto es

$$fP\,A = 1 + pPB\ fBA\ + pPP\ \ fPA\ + pPH\, fHA$$
$$= 1 + 0.12\, fBA\ + 0.76\, fPA\ + 0.04\, fHA$$

Luego para ir de **H** a **A** **(i=H, j=A)**:

$$fH\,A = 1 + \sum_{k=B,P,H} p_{Hk}\ f_{kA}$$

Esto es

$$fHA\ = 1 + pHB\ \ fB\,A + pHP\ fP\,A + pH\,H\ fHA$$
$$= 1 + 0.10\, fB\,A + 0.1667\, fP\,A + 0.60\, fH\,A$$

Entonces al rearreglar estas 3 ecuaciones, tendremos:

$$0.20\, fBA - 0.10\, fP\,A - 0.025\, fHA = 1$$
$$-0.12\, fBA + 0.24\, fP\,A - 0.04\, fHA = 1$$
$$-0.10\, fBA - 0.1667\, fP\,A + 0.40\, fHA = 1$$

Las cuales al solucionarse nos dan:

fBA = 12.406 meses
fPA = 12.147 meses
fHA = 10.663 meses

Finalmente para ir al estado final **j=P**, tendremos:

Para ir de **A** a **P** **(i=A, j=P)**:

$$fAP = 1 + \sum_{k=A,B,H} p_{Ak}\ f_{kP}$$

Esto es

$$fAP\ = 1 + pAA\, fAP + pAB\, fBP + pAH\, fHP$$
$$= 1 + 0.70 fAP + 0.10\, fBP + 0.0667\, fHP$$

Para ir de **B** a **P** **(i=B, j=P)**:

$$fBP = 1 + \sum_{K=A,B,H} p_{Bk} f_{kP}$$

Esto es

$$fBP\ = 1 + pBA\, fAP + pBB\, fBP + pBH\, fHP$$
$$= 1 + 0.075\, fAP + 0.80\, fBP + 0.025\, fHP$$

Luego para ir de **H** a **P** **(i=H, j=P)**:

$$fHP = 1 + \sum_{K=A,B,H} p_{Hk} f_{kP}$$

Esto es

$$ƒHP = 1+pHA\,ƒAP + pHB\,ƒBP + pHH\,ƒHP$$
$$= 1+0.1333\,ƒAP + 0.10\,ƒBP + 0.60\,ƒHP$$

Las cuales al rearreglarse, nos dan:

$$0.30\,ƒAP - 0.10\,ƒBP - 0.0667\,ƒHP = 1$$
$$-0.075\,ƒAP + 0.20\,ƒBP - 0.025\,ƒHP = 1$$
$$-0.1333\,ƒAP - 0.10\,ƒBP + 0.40\,ƒHP = 1$$

Cuya solución es:

$$ƒAP = 7.937 \text{ meses}$$
$$ƒBP = 8.898 \text{ meses}$$
$$ƒHP = 7.370 \text{ meses}$$

Ahora procederemos a estimar los tiempos de regreso a un mismo estado inicial, para lo cual utilizaremos las probabilidades de estado estable del caso base, las cuales son:

eA = 0.2188
eB = 0.3556
eP = 0.3336
eH= 0.0920

Entonces mediante la ecuación (XVII.18) calcularemos los tiempos de regreso. los cuales serán:

$$f_{AA} = \frac{1}{e_A} = \frac{1}{0.2188} = 4.570 \text{ meses}$$

$$f_{BB} = \frac{1}{e_B} = \frac{1}{0.3556} = 2.812 \text{ meses}$$

$$f_{PP} = \frac{1}{e_P} = \frac{1}{0.3336} = 2.998 \text{ meses}$$

$$f_{HH} = \frac{1}{e_H} = \frac{1}{0.092} = 10.870 \text{ meses}$$

Todos estos resultados se agrupan en la tabla siguiente:

Tabla XVII.5.- Tiempos de Transición y Regreso para el caso base en meses.

Estado final Estado inicial	Aqualite	Brissa	Perlita	Hialina
Aqualite	4.570	9.314	7.934	23.151
Brissa	12.406	2.812	8.898	26.164
Perlita	12.147	8.818	2.998	24.966
Hialina	10.663	9.279	7.370	10.870

En ella vemos cómo los tiempos para que Hialina logre captar clientes son notoriamente mayores, debido a que es la marca con peores posibilidades de ganar mercado.

PROBLEMAS PROPUESTOS

XVII.1.- El Sr. Antonio Zúñiga está planteándose la posibilidad de vender su huerta de naranjas, la cual consta de 10 hectáreas, se considera por experiencias de años pasados que la cosecha puede ser excelente, buena, regular o mala. Dado que la cantidad de frutos tiende a ser alternante, es decir que luego de un año bueno sigue por lo general uno malo y viceversa, cuando se ha tenido una producción excelente el siguiente año la probabilidad de repetir es de sólo un 10%, un 20% de lograr una cosecha buena, 30% de que sea regular y el restante 40% de que sea mala; si la producción ha sido buena, entonces para el año siguiente las posibilidades son de un 23% de que se repita, 17% de que sea excelente, un 32% de que sea regular y el resto de que sea mala; si la cosecha ha sido regular, entonces la probabilidad de cada opción es la misma, es decir el 25% y finalmente si la producción ha sido mala, para el año siguiente las posibilidades son de un 33% de que sea excelente, un 38% de que sea buena y un 29% de que sea regular.

El costo anual promedio por hectárea se estima en $6000.00 y los ingresos para cada opción de producción son:

Opción de Producción	Ingresos, $/Ha. año
Excelente	15,000.00
Buena	10,000.00
Regular	6,000.00
Mala	3,000.00

Calcule:

(a) La matriz de probabilidades de transición.
(b) Si el último año fue regular, ¿ Cuál será la probabilidad de ganancias para el año siguiente?
(c) ¿ Cuál será la situación para un futuro lejano?
(d) ¿ Cuántos periodos tendrán que transcurrir para pasar de una cosecha determinada hasta una excelente?

XVII.2.- La compañía "Secretarias al Instante" ofrece los servicios de recursos humanos para eventos tales como conferencias, seminarios, congresos y otros similares. La empresa cuenta con capacitación continua para sus trabajadoras, razón por la cual es frecuente que se les examine en su aptitud para su trabajo. Por esto también se tiene un escalafón de niveles de aptitud los cuales van desde el I, que es el más bajo hasta el IV que es el de mayor capacidad. De estadísticas de años anteriores se tiene la siguiente información: De las secretarias de nivel I, el 20% permanecen en ese nivel, el 43% pasan al II, el 20% pasan al III y el 17% restante lo hacen hasta el IV nivel; por su parte para las del nivel II, un 25% ahí se quedan, 7% se atrasan al I, 43% van al III y 25% brincan hasta el IV; de las que se hallan en el tercer nivel, 3% van al segundo, 52% permanecen y el resto van al IV; finalmente de las de nivel IV, permanecen ahí el 82% y el resto bajan al III. Los cambios de categorías se dan anualmente.

Obtener:

(a) La matriz de transición.
(b) Para una secretaria que se halle en el nivel II, ¿qué esperará para los 2 próximos años?
(c) ¿Cuáles serán las probabilidades a largo plazo?
(d) ¿Cuántos periodos tomará en promedio llegar al nivel IV partiendo de los otros 3 ?

XVII.3.- La presa "Las Golondrinas" capta agua en la temporada de lluvias, parte de la cual se asigna a los ejidatarios del lugar para fines agrícolas según la tabla siguiente de abastecimiento.

Nivel de agua en la presa	Abasto para agricultura
Vacía	0
1/5	0
2/5	1/5
3/5	2/5
4/5	2/5
Llena	3/5

Del servicio meteorológico se han obtenido datos de precipitaciones pluviales de años anteriores, los cuales convertidos a fracciones de la capacidad de la presa han sido los siguientes:

Precipitación pluvial	Probabilidad
0	0.10
1/5	0.25
2/5	0.30
3/5	0.20
4/5	0.10
5/5	0.05

Ante esto estime:

(a) La Matriz de probabilidades de transición.
(b) Si la presa se halla a 2/5 de su capacidad, ¿cuál será la situación para los 2 periodos siguientes?
(c) ¿Cuál sería la situación a largo plazo?
(d) Partiendo de cada estado distinto, ¿cuáles serán los tiempos que transcurrirán para llegar a tener la presa vacía?
(e) ¿Cuáles serán los tiempos para quedar con la presa llena?

XVII.4.- La empresa "Frutas de Rioverde" maneja cajas de plástico en las cuales embarca las frutas que trabaja en la temporada de cosecha, cada año después de esta época, se revisan estas cajas y por lo general de las que están en buen estado el 8% están deterioradas y el 2% inservibles, por lo cual salen de la circulación para ser revisadas y reparadas; del total de las deterioradas el 67% en promedio son reparadas y pueden volver a ser utilizadas, mientras que el 33% restante están inservibles.

Obtenga:

(a) La matriz de transición.
(b) Si se inicia con una caja en buen estado, ¿Cuál será la situación después de una y de dos temporadas?
(c) ¿Cuál será el estado de las cajas a largo plazo?
(d) ¿Cuál será el tiempo promedio para que se llegue de una caja buena o deteriorada a una inservible?
(e) ¿Cuál será la matriz fundamental?

XVII.5.- Una clínica especializada para enfermos de SIDA está haciendo un estudio de sus estadísticas de enfermos y ha encontrado lo siguiente: Del total de gentes que se hacen un examen para ver si se han contagiado con el virus, el 8% resultan positivos y el resto negativos; los que resultan positivos pasan a observación, para cuidar el desarrollo del virus, de ellos el 20% resultan sanos y sin ningún problema, sólo que deberán someterse a nuevos exámenes posteriormente, el 40% permanecen en observación, el 28% pasan a ser hospitalizados y el restante 12% van a terapia intensiva; de los que son hospitalizados, el 6% logra salir de la clínica ya totalmente recuperados, el 20% pasan a la etapa de observación, el 23% siguen hospitalizados, el 32% pasan a terapia intensiva y el 19% fallecen; finalmente de los que llegan a terapia intensiva, el 15% pasa nuevamente a observación, el 32% a hospitalización, el 26% permanece y el resto fallece.

Calcule:

(a) La matriz de transición.
(b) Si se parte de un paciente que se somete a examen por primera vez, ¿Cuál será la situación después de uno, dos y tres periodos?
(c) ¿Cuál será la matriz fundamental?
(d) ¿Cuáles serán los tiempos para llegar de una etapa cualquiera hasta la de sanos?
(e) ¿Cuáles serán los tiempos para llegar de una etapa cualquiera hasta la de muerte?

XVII.6.- El Banco de la Zona Media está analizando su cartera de clientes, ya que últimamente ha tenido muchos problemas de cartera vencida. Dispone de la siguiente información: Del total de clientes del banco, el 51% solicitan crédito y el 49% no lo hace; de los que solicitan un crédito, el 3% pagan puntualmente, el 69% siguen con saldos y el resto pasan a cartera vencida; de los que han llegado a cartera vencida, el 18% logran pagar todo, el 21% pasan a ser clientes con saldo normal, el 35% siguen y el resto pasan a ser considerados como incobrables, situación que maneja el departamento legal.

Estime lo siguiente:

(a) La matriz de transición.
(b) De los clientes que solicitan por primera ocasión un crédito, ¿Cómo estarán después de uno, dos y tres periodos?
(c) ¿Cuáles serán los tiempos promedio para pasar de clientes con saldo o de cartera vencida hasta la categoría de incobrables?

XVII.7.- La Compañía Distribuidora de Pan Exquisito cuenta con una flotilla de 38 vehículos para hacer llegar sus productos a los detallistas, quienes por lo general son pequeñas tiendas. Cada fin de mes se hace un chequeo mecánico de cada unidad, de registros anteriores se sabe que de los vehículos que se someten a revisión, el 78% se halla en buenas condiciones, el 15% deben someterse a una reparación menor y el 7% restante a reparación mayor, como es el arreglo general del motor; de los vehículos que llegan a reparación menor, el 65% quedan listos para dar servicio nuevamente, el 18% permanecen y el 17% restante van hasta reparación mayor; finalmente de los que llegan a arreglo mayor, el 38% quedan reparados, el 40% pasan luego a reparación menor, el 7% siguen y el 15% restante deberán ser reemplazados.

Calcule:

(a) La matriz de transición.
(b) ¿Cuál será la situación de los 38 vehículos después de uno, 2 y 3 meses?
(c) ¿Cuál será la matriz fundamental?
(d) ¿Cuáles serán los tiempos para llegar de un estado dado hasta el de reemplazo?

CAPITULO XVIII

MODELOS DE PRONOSTICOS

Introducción.

Los pronósticos son una parte muy importante en la planeación de las empresas e instituciones, ya que todos los departamentos de éstas elaborarán sus planes operativos, objetivos, presupuestos y programas basados en ellos.

Así por ejemplo el departamento de ventas y mercadotecnia necesita un pronóstico de ventas para fijar sus objetivos y planes. Del mismo modo las secciones de producción y mantenimiento diseñarán sus planes y programas de adquisición de materias primas, contrataciones de personal y mantenimiento preventivo de la maquinaria apoyados en un pronóstico de las cantidades y los tiempos de producción. Por su parte los departamentos contable y financiero elaborarán sus presupuestos y flujos de efectivo basados en un pronóstico sobre los ingresos y egresos para el siguiente periodo.

Por lo antes señalado es fácil darse cuenta de la gran importancia que tienen los pronósticos en la etapa de planeación de todos los negocios.

Todos los modelos existentes de pronósticos se basan en datos históricos de la variable que se va a pronosticar para obtener de ellos proyecciones hacia el futuro.

En este texto se presentan primeramente las clasificaciones más comunes sobre los modelos de pronósticos, luego se tratan algunos de los modelos más usuales como son el método gráfico, modelos de series de tiempo, modelos causales y finalmente los modelos subjetivos.

Clasificación de los Modelos de Pronósticos.

Hay 2 maneras más usuales de clasificar los modelos de pronósticos, las cuales son las siguientes:

1.- Según el plazo de tiempo para el cual se utilizan, pudiendo ser de corto, mediano o largo plazo.

2.- Según el tipo de modelo, los que pueden ser cualitativos y cuantitativos, los que a su vez se subdividen conforme al esquema de la figura XVIII.1

Figura XVIII.1.- Clasificación de los Modelos de Pronósticos según su tipo.

- **Tipo de Pronóstico**
  - **Modelos Cualitativos**
    - **Método Gráfico**
    - **Modelos Subjetivos**
  - **Modelos Cuantitativos**
    - **Modelos de Series de Tiempo**
      - **Nivel Constante**
      - **Estacionales**
      - **Tendencia**
    - **Modelos Causales**

Método Gráfico.

Este método aún cuando no es propiamente un modelo que nos proporcione como resultado un pronóstico, sí nos ilustra adecuadamente sobre cuál de los diferentes modelos puede ser el más conveniente para estimar los pronósticos.

Consiste en graficar datos pasados de la variable que se va a pronosticar respecto al tiempo, tratando con esto de visualizar cómo se ha comportado dicha variable en el pasado y con ello seleccionar entonces alguno de los modelos que se juzgue apropiado para hacer las proyecciones hacia el futuro.

Se recomienda que se use este método como etapa inicial siempre que se tenga que hacer pronósticos, para después elegir el modelo que se crea más conveniente para el cálculo de los mismos.

Este método requiere que quien lo ejecute tenga experiencia sobre el comportamiento de la variable que se va a pronosticar, ya que pudiera haber fluctuaciones de la misma que hayan sido ocasionadas por diferentes razones.

Para ilustrar este método, presentaremos el siguiente ejercicio.

Ejemplo XVIII.1.- La ferretería "La Rioverdense" tiene su estadística de ventas de tornillos durante los últimos 6 meses, la cual se muestra en la siguiente tabla

Tabla XVIII..1.- Venta de tornillos de "La Rioverdense" en los últimos 6 meses.

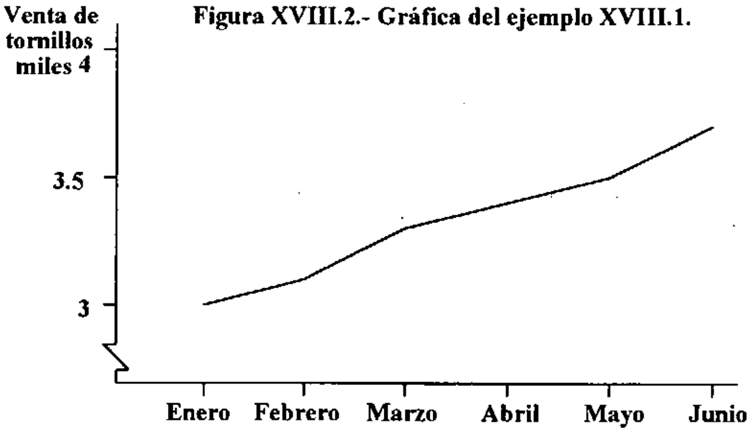
Mes	Venta de Tornillos millares
Enero	3.0
Febrero	3.1
Marzo	3.3
Abril	3.4
Mayo	3.5
Junio	3.7

Basados en esta información, ¿Qué puede esperarse para los siguientes meses?

Solución:

Lo primero que haremos será graficar los datos de la tabla, ubicando al tiempo en el eje de las abcisas y a la venta de tornillos en el de las ordenadas. Esta gráfica se presenta en la figura XVIII.2.

Figura XVIII.2.- Gráfica del ejemplo XVIII.1.



En ella vemos que hay una tendencia de aumento en la venta de tornillos, por lo que para los siguientes meses podría esperarse que se vendiera un mayor número de ellos.

Esto nos sugiere el uso de un modelo de tendencia para obtener los pronósticos en los meses siguientes, el cual se verá más adelante.

Modelos de Series de Tiempo.

Los modelos de series de tiempo representan la variable que se va a pronosticar respecto al tiempo y basados en estos datos, tratan de predecir lo que sucederá en el futuro.

De acuerdo a la clasificación presentada en la figura XVIII.1, los 3 modelos más usuales de series de tiempo son los de nivel constante, los estacionales y los de tendencia, de los cuales se muestra una representación gráfica típica en la figura XVIII.3, en la cual vemos que con sus variaciones aleatorias normales, los de nivel constante mantienen aproximadamente un mismo valor de la variable pronosticada; por su parte los estacionales muestran fluctuaciones en el tiempo bajo un mismo patrón de cambios, es decir que hay aumentos y disminuciones de la variable pronosticada que se repiten a lo largo del tiempo en forma cíclica, un ejemplo típico de estos modelos es la venta de refrescos, la cual aumenta en los meses de clima caliente y disminuye en los meses fríos: finalmente los modelos de tendencia muestran un cambio en la variable pronosticada, ya sea para aumentar como en el caso de la figura XVIII.3, o bien para disminuir. La gran mayoría de los casos de este tipo se manejan bajo la suposición de que el cambio en la variable pronosticada es lineal respecto al tiempo, lo cual es válido para la mayoría de las ocasiones.

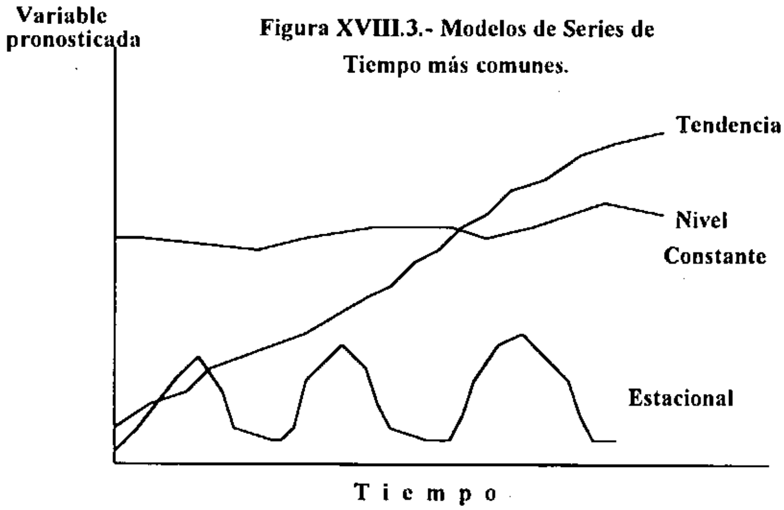


Figura XVIII.3.- Modelos de Series de Tiempo más comunes.

Ahora veremos cada uno de los 3 tipos de modelos de series de tiempo antes mencionados.

Modelos de Nivel Constante.

Estos modelos son los más sencillos, ya que suponen que la variable pronosticada conservará el valor anterior sucedido en los últimos periodos de tiempo.

En este inciso presentaremos 4 métodos que son los más conocidos para manejar series de tiempo de nivel constante, los cuales son: *Ultimo Valor*, *Promedios*, *Promedios Móviles* y *Suavizamiento Exponencial*.

Método del Ultimo Valor.

Este método es el más sencillo de todos, ya que simplemente el pronóstico para el próximo periodo será el del valor de la variable en el periodo inmediato anterior, conforme a la ecuación (XVIII.1):

$$P_{t+1} = = X_t \qquad \text{Ec.(XVIII:1)}$$

Donde:

Pt+1 = Pronóstico para la variable para el periodo t+1
X t = Valor de la variable pronosticada en el periodo t.

En esta ecuación los subíndices se refieren a los periodos de tiempo respectivos.

Método de los Promedios.

Este método también es sencillo ya que pronostica el valor de la variable que se está considerando para el periodo siguiente mediante el cálculo del promedio del total de los valores de los periodos anteriores. Según la fórmula siguiente:

$$P_{t+1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Xi}{n} \qquad \text{Ec.(XVIII.2)}$$

Donde:

Pt+1 = Variable pronosticada para el periodo **t+1**
Xi = Valor de la variable en el periodo **i**.
n = Número total de datos o de periodos

Este método aunque es muy simple, puede resultar tedioso si el número de periodos para los cuales se dispone de información es muy elevado.

Método de los Promedios Móviles.

Este método es parecido al anterior con la ventaja de que sólo considera unos cuantos datos para obtener el promedio, los cuales siempre serán los de los últimos periodos, de aquí el porqué del nombre de *promedios móviles*. Esto tiene además la ventaja de que el pronóstico estará basado en la información más reciente que se tiene, lo cual lo hace más sensible a posibles fluctuaciones de la variable pronosticada.

La expresión para calcular el pronóstico es la siguiente:

$$P_{t+1} = \frac{\sum_{i=n-m+1}^{n} X_i}{m} \qquad \text{Ec.(XVIII.3)}$$

Donde:

m= Número de datos considerado para calcular el promedio

Los restantes términos que aparecen en la fórmula son los mismos que se manejaban en el modelo anterior. Presentaremos ahora un ejemplo ilustrativo de los 3 métodos antes vistos.

Ejemplo XVIII.2.- La empresa "Bicicletas El Rayo" desea hacer un pronóstico de sus ventas para el próximo mes, para lo cual dispone de datos sobre el último año de operaciones, los cuales se presentan en la siguiente tabla

Ejemplo XVIII.2.- Ventas del año anterior de "Bicicletas El Rayo"

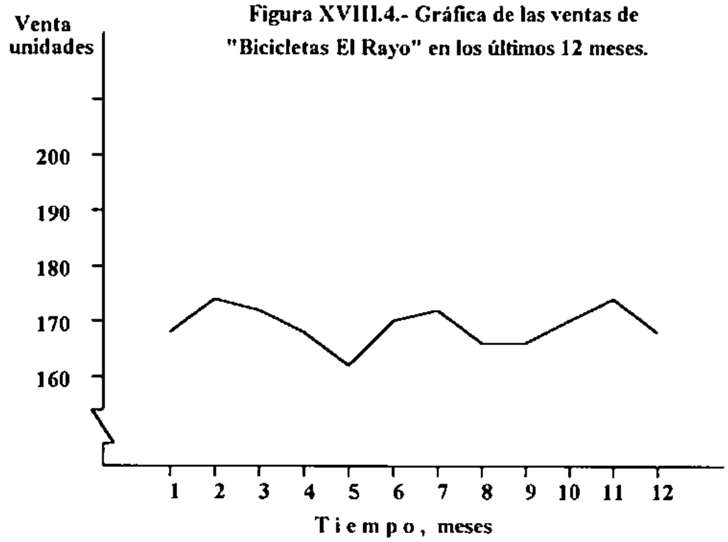
Mes anterior	Venta, unidades
1	168
2	174
3	171
4	167
5	161
6	170
7	172
8	166
9	166
10	169
11	173
12	168

Resuélvase este caso utilizando los 3 métodos de pronósticos vistos anteriormente.

Solución:

Lo primero será hacer una gráfica de los datos del año anterior, para saber cómo se ha comportado la venta de las bicicletas en el pasado, esto se muestra en la figura XVIII.4, en la cual se presenta la venta en las ordenadas y el tiempo en las abcisas.

Figura XVIII.4.- Gráfica de las ventas de "Bicicletas El Rayo" en los últimos 12 meses.



La figura nos indica que los datos han variado dentro de ciertos límites sin mostrar ninguna tendencia definida o un patrón de cambios cíclicos, por lo cual es razonable considerar las variaciones como normales y emplear un modelo de nivel constante.

(a) Para el método del último valor, nuestro pronóstico será simple y sencillamente el dato del mes anterior, es decir el 12, una venta de 168 unidades.

(b) Para el método de los promedios, obtendremos el pronóstico por medio de la ecuación (XVIII.2), aplicada a los doce datos, entonces:

$$P_{13} = \frac{\sum_{i=1}^{12} X_i}{12} = \frac{168+174+171+167+161+170+172+166+166+169+173+168}{12}$$

$$= \frac{2025}{12} = 169 \text{ unidades.}$$

(c) Finalmente para el método de los promedios móviles, debemos definir el número de periodos que tomaremos para el cálculo del pronóstico. En este caso elegiremos 5 datos, por lo que este será el valor de **m**. Entonces al aplicar la ecuación (XVIII.3), obtendremos:

$$P_{13} = \frac{\sum_{i=8}^{12} X_i}{12} = \frac{166+166+169+173+168}{5} = \frac{842}{5} = 168 \text{ unidades}$$

Con lo cual vemos que los resultados obtenidos con los 3 métodos son muy parecidos.

Método del Suavizamiento Exponencial.

Este método es un poco más sofisticado que los anteriores, pues obtiene el pronóstico mediante una ponderación del último valor conocido de la variable pronosticada y del pronóstico hecho para ese mismo periodo anterior. Esto nos lo indica la siguiente expresión matemática:

$$P_{t+1} = \alpha X_t + (1-\alpha)P_t \qquad \text{Ec.(XVIII.4)}$$

Donde:

Pt+1 = Pronóstico para la variable para el periodo **t+1**
α = Constante de suavizado
Xt = Valor de la variable en el periodo **t.**
Pt = Pronóstico de la variable en el periodo **t**

La constante de suavizado α debe tener un valor entre cero y la unidad, algunos autores sugieren que se utilicen preferentemente valores entre 0.1 y 0.3.

Para utilizar la ecuación anterior por primera vez se necesitará un pronóstico del periodo anterior **Pt**, con el cual no se cuenta, por lo que se recomienda tomar como tal el valor observado de la variable en un periodo anterior, es decir **Xt-1**.

En seguida aplicaremos este método al caso de "Bicicletas El Rayo"

Ejemplo XVIII.3.- Para el caso del ejemplo anterior, calcúlense los pronósticos para el tercer mes y los subsecuentes utilizando: (a) α =0.1; (b) α =0.3. Compárense los resultados con los datos reales que se tienen.

Solución:

Para el tercer mes, la ecuación (XVIII.4) será:

$$\mathbf{P3} = \alpha X_2 + (1-\alpha)P_2$$

Pero **P2** lo tomaremos igual a **X1**, entonces con esto tendremos:

$$\mathbf{P3} = \alpha X_2 + (1-\alpha)X_1$$

Al sustituir α =0.1 y los valores de **X** de la información con la que se cuenta, obtendremos:

$$\mathbf{P3} = (0.1)(174)+(1\text{-}0.1)(168)=168.6$$

Luego para el cuarto mes,

$$\begin{aligned} P4 &= \alpha X_3 + (1-\alpha)P_3 \\ &= (0.1)(167) + (1\text{-}0.1)(168.6)=168.84 \end{aligned}$$

Entonces por un procedimiento análogo, para el quinto mes tendremos:

$$\begin{aligned} P5 &= \alpha X_4 + (1-\alpha)P_4 \\ &=(0.1)(167)+(1\text{-}0.1)(168.84)=168.66 \end{aligned}$$

Los resultados completos, así como los obtenidos para α =0.3 se resumen en la siguiente tabla:

Tabla XVIII.3.-Resultados del ejemplo XVIII.3

Mes	Venta real	Pronóstico para α =0.1	% de error para α =0.1	Pronóstico para α =0.3	% de error para α =0.3
1	168	---	---	---	---
2	174	168.	---	168.	---
3	171	168.6	1.40	169.8	0.70
4	167	168.84	1.10	170.16	1.89
5	161	168.66	4.76	169.21	5.10
6	170	167.89	1.24	166.75	1.91
7	172	168.10	2.27	167.72	2.49
8	166	168.49	1.50	169.01	1.81
9	166	168.24	1.35	168.10	1.27
10	169	168.02	0.58	167.47	0.91
11	173	168.12	2.82	167.93	2.93
12	168	168.6	0.36	169.45	0.86

De estos resultados vemos que los pronósticos calculados para α =0.1 son mejores puesto que dan menores porcentajes de error. En general, al hacerse menor α , el modelo se vuelve más lento para ajustarse a cambios en la variable pronosticada; sin embargo, si se supone que su uso es para obtener pronósticos de variables de nivel constante, esto representa en realidad una ventaja.

Modelos Estacionales.

Estos modelos muestran variaciones en la variable pronosticada respecto al tiempo de una manera cíclica, es decir con incrementos y decrementos en determinados lapsos de tiempo que por lo regular siempre son los mismos, razón por la cual se denominan estacionales.

El caso típico que ilustra este tipo de modelos es el de las bebidas gaseosas, las cuales aumentan su volumen de ventas en los meses de altas temperaturas y disminuyen en época de frío.

Para pronosticar con estos modelos, lo que se hace es obtener los factores estacionales para cada lapso de tiempo conocido como estación, el cual se obtiene dividiendo la venta obtenida en cada estación entre la venta total del periodo que se toma para el análisis, el cual es usualmente un año. Una vez que se tienen todos los factores estacionales, se multiplica cada factor por la venta total que se espera para el periodo siguiente, la cual a su vez debió haberse obtenido mediante otro pronóstico. Esto significa que para el caso de las bebidas gaseosas, podriamos utilizar un modelo de pronósticos que fuera adecuado para obtener la venta esperada del año siguiente y el modelo actual para estimar los pronósticos de cada estación (las cuales son meses para este caso).

Cuando se dispone de información sobre las ventas en varios periodos anteriores, pueden calcularse factores estacionales promedio, los cuales serán los cocientes obtenidos al dividir la sumatoria de ventas en cada estación para todos los periodos entre la sumatoria de ventas totales de los mismos periodos.

Esta metodología la ilustraremos al solucionar el siguiente ejemplo.

Ejemplo XVIII.4.- La empresa "Refrescos de la Zona Media" dispone de estadísticas de ventas de refrescos durante los dos años anteriores, desglosados por meses, las cuales se muestran en la tabla siguiente:

Tabla XVIII.4.- Ventas de "Refrescos de la Zona Media", en millares de cajas.

	Año	
Mes	1993	1994
Enero	2.8	3.0
Febrero	3.2	3.3
Marzo	4.5	4.6

Abril	5.0	5.1
Mayo	6.1	6.0
Junio	5.3	5.5
Julio	5.2	5.3
Agosto	5.1	5.2
Septiembre	4.8	5.1
Octubre	4.6	.7
Noviembre	4.2	4.5
Diciembre	3.8	4.0
Totales	54.6	56.3

Basados en el hecho de que la empresa tendrá varios programas de publicidad y promocionales durante el próximo año, se espera que el volumen de ventas sea superior al de 1994 en un 10%. ¿Cuánto debe esperarse para cada mes?

Solución:

Si la empresa desea vender en 1995 un 10% más que en 1994, entonces,

$$\text{Pronóstico} = (56300)(1.10) = 61930 \text{ cajas}$$

Ahora lo que debemos obtener son los factores estacionales, cada uno de los cuales se estimará conforme a lo señalado en la metodología descrita anteriormente, considerando los datos de ventas de los dos años anteriores mediante la fórmula siguiente:

$$FE_j = \frac{\sum_{k=1}^{n} V_{jk}}{\sum_{k=1}^{n} VA_k} \qquad \text{Ec.(XVIII.5)}$$

Donde:

Fej = Factor estacional para el mes **j**
Vj k = Venta del mes j en el año **k**
VAK = Venta del año **k**
n = Número de años tomados para el cálculo

Entonces si aplicamos esta ecuación al ejemplo, donde **n=2**, tendremos para el mes de enero, que es el primer mes:

$$FE_1 = \frac{V_{11} + V_{12}}{VA_1 + VA_2} = \frac{2.8 + 3.0}{54.6 + 56.3} = \frac{5.8}{110.9} = 0.0523$$

Donde para los años el subíndice **1** se refiere a 1993 y el **2** a 1994.

Procediendo de una manera análoga se obtienen los factores estacionales para los meses restantes, los cuales se presentan en la siguiente tabla:

Tabla XVIII.5.- Factores Estacionales y Pronóstico de Ventas para 1995.

Mes	Factor Estacional	Pronóstico para 1995
Enero	0.0523	3239
Febrero	0.0586	3629
Marzo	0.0820	5078

Abril	0.0911	5642
Mayo	0.1091	6757
Junio	0.0974	6032
Julio	0.0947	5865
Agosto	0.0929	5753
Septiembre	0.0893	5530
Octubre	0.0839	5196
Noviembre	0.0784	4855
Diciembre	0.0703	4354
Totales	1.0	61930

En ella también han sido incluidas en la tercera columna las ventas pronosticadas para cada mes de 1995, las cuales se obtienen mediante la multiplicación del factor estacional de cada mes por la venta total del año 1995, es decir 61930 cajas.

Modelos de Tendencia.

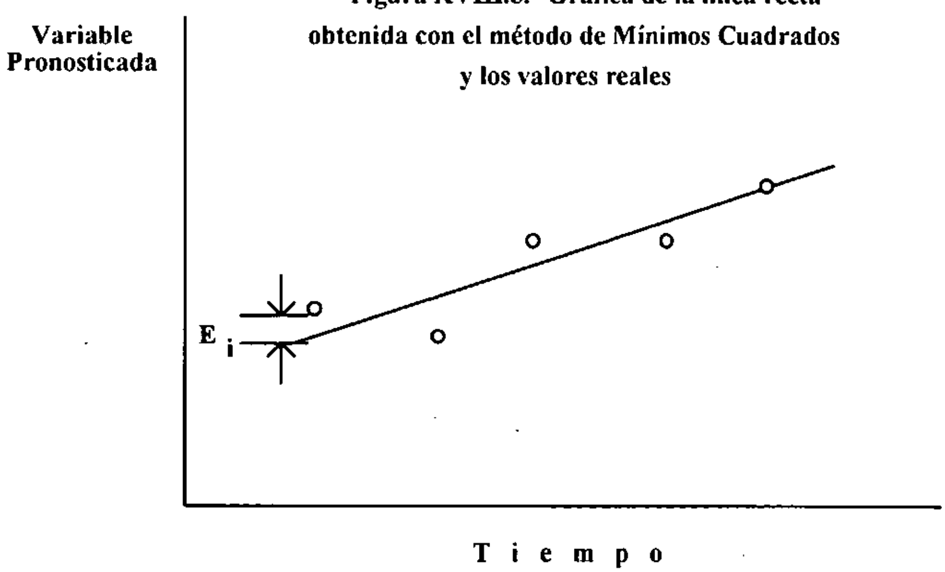
Estos modelos son adecuados para aquellos casos cuando al graficar la variable observada respecto al tiempo, la relación muestra una tendencia ya sea de aumento, como en el caso de la figura XVIII.3, o bien de disminución.

Esta variación de la variable pronosticada respecto al tiempo puede ser lineal o no lineal. Por fines didácticos en este texto sólo presentaremos el primer tipo, ya que es el que aparece en el ámbito empresarial en la mayoría de las ocasiones.

Para obtener la relación matemática que describe cómo cambia la variable con respecto al tiempo, se hace uso de una técnica que resulta muy útil para estos casos, denominada **Mínimos Cuadrados,** la cual explicaremos ahora.

Este método de los mínimos cuadrados, tal y como su nombre lo indica, trata de minimizar la sumatoria de los errores elevados al cuadrado, donde cada error será la diferencia entre el valor real de la variable pronosticada o variable dependiente y el valor que predice el método, el cual quedará sobre la línea recta obtenida al graficar la ecuación que nos proporciona esta técnica. Una representación gráfica se muestra en la figura XVIII.5.

Figura XVIII.5.- Gráfica de la línea recta obtenida con el método de Mínimos Cuadrados y los valores reales



Donde la ecuación de la línea recta trazada se obtiene por medio del método y los puntos en la figura son los valores reales de la variable pronosticada, siendo la diferencia entre ambos valores el error, denotado como Ei.

La ecuación que relaciona a la variable pronosticada o variable dependiente con el tiempo o variable independiente, es la siguiente:

$$y = a + b\,t \qquad \text{Ec.(XVIII.6)}$$

Donde:

y = Valor calculado para la variable dependiente
a = Ordenada al origen de la línea recta
b = Pendiente de la línea recta
t = Tiempo o variable independiente

Mediante la metodología de mínimos cuadrados obtenemos las ecuaciones para calcular los valores de a y b, las cuales son las siguientes:

$$a = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i t_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2} \qquad \text{Ec.(XVIII.7)}$$

$$b = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} y_i t_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2} \qquad \text{Ec.(XVIII.8)}$$

Donde:

n = Número de datos usados para obtener la ecuación
y_i = Valor de la variable pronosticada para el dato **i**
t_i = Valor del tiempo para el dato **i**

En este texto no se incluye el desarrollo matemático para la obtención de estas ecuaciones.
Ahora presentaremos un ejemplo ilustrativo de la aplicación de este método.

Ejemplo.XVIII.5.- Un vendedor de dulces abrió su negocio recientemente. Sus ventas durante los primeros 5 meses de operación han sido las siguientes:

Tabla XVIII.6.- Ventas de dulces durante los primeros 5 meses.

Mes	1	2	3	4	5
Venta, Docenas de cajas	120	134	143	156	168

¿Qué puede esperar el vendedor para los próximos 3 meses?

Solución:

Conforme a la notación manejada en la metodología de mínimos cuadrados, el tiempo t será cada mes y la venta será la variable dependiente y.

Entonces procederemos a obtener con los datos de la tabla, cada uno de los términos que aparecen en las ecuaciones (XVIII.7) y (XVIII.8), los cuales serán:

$$n = 5$$

$$\sum_1^5 y_i = 120 + 134 + 143 + 156 + 168 = 721$$

$$\sum_1^5 t_i^2 = (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (4)^2 + (5)^2 = 55$$

$$\sum_1^5 t_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum_1^5 y_i t_i = (120)(1) + (134)(2) + (143)(3) + (156)(4) + (168)(5) = 2281$$

Ahora calcularemos a y b mediante las fórmulas respectivas:

$$a = \frac{(721)(55) - (15)(2281)}{(5)(55) - (15)^2} = \frac{5440}{50} = 108.80$$

$$b = \frac{(5)(2281) - (15)(721)}{(5)(55) - (15)^2} = \frac{590}{50} = 11.80$$

Por lo tanto la ecuación que nos relaciona la venta y con el tiempo t es:

$$y = 108.80 + 11.80t$$

Si ahora aplicamos la ecuación para estimar y para valores de t desde 1 hasta 5, obtendremos:

Para $t = 1$, $y = 108.80 + (11.80)(1) = 120.60$
Para $t = 2$, $y = 108.80 + (11.80)(2) = 132.40$
Para $t = 3$, $y = 108.80 + (11.80)(3) = 144.20$
Para $t = 4$, $y = 108.80 + (11.80)(4) = 156.00$
Para $t = 5$, $y = 108.80 + (11.80)(5) = 167.80$

Estos resultados se muestran en la siguiente tabla, así como también su error respecto a los valores reales.

Tabla XVIII.7.- Comparación del pronóstico y los valores reales.

Mes	1	2	3	4	5
Venta real	120	134	143	156	168
Pronóstico	120.6	132.4	144.2	156	167.8
% Error	0.50	1.21	0.84	0	0.12

Donde vemos que el error es muy bajo en todos los meses, por lo que la aproximación lograda con la ecuación se considera muy buena.

Ahora aplicaremos esta ecuación para pronosticar las ventas futuras de los siguientes 3 meses, es decir el sexto, séptimo y octavo mes:

Mes 6, y=108.80+(11.80)(6)=179.6
Mes 7, y=108.80+(11.80)(7)=191.4
Mes 8, y=108.80+(11.80)(8)=203.2

Por lo que de mantenerse la tendencia de los 5 primeros meses, éstas serán las ventas pronosticadas mediante el método de mínimos cuadrados.

Modelos Causales.

Estos modelos se basan en la suposición de que la variable pronosticada (variable dependiente) depende de uno o varios factores (variables independientes), de manera que ante unos cambios de éstos, los cuales serán las causas, corresponderán variaciones en la primera, que serán los efectos, de aquí el porqué del nombre de estos modelos.

Para relacionar matemáticamente a la variable pronosticada con las variables independientes, se recurre nuevamente a la técnica de los mínimos cuadrados, la cual cuando existen varias variables independientes, recibe el nombre común de **Regresión Lineal Múltiple,** la cual se denomina así por el hecho de suponer que las variaciones se dan linealmente. De hecho cuando sólo existe una variable independiente, el modelo se convierte en el visto en el inciso anterior para los modelos de tendencia el cual se conoce como **Regresión Lineal Simple.**

Las variables independientes pueden ser factores internos o externos de las empresas, de manera que ésta podrá controlar solamente los primeros. Así por ejemplo, para el caso de la productividad de un negocio, si suponemos que ésta depende de factores tales como la motivación de sus empleados y de la situación económica del país, la empresa podrá influir únicamente en el primero de ellos, no así en el segundo.

En este inciso presentaremos las fórmulas para un modelo causal de dos variables independientes, para el cual su ecuación respectiva es la siguiente:

$$y = b_0 + b_1 X + b_2 Z \qquad \text{Ec.(XVIII.9)}$$

Donde:

y = Variable pronosticada
X,Z = Variables independientes
b0 , b1 , b2 = Coeficientes de ajuste

Para la cual las fórmulas para obtener estos coeficientes son las siguientes:

$$b_0 = \frac{D_0}{D} \qquad \text{Ec.(XVIII.10)}$$

$$b_1 = \frac{D_1}{D} \qquad \text{Ec. (XVIII.11)}$$

$$b_2 = \frac{D_2}{D} \qquad \text{Ec. (XVIII.12)}$$

Donde **D0** , **D1** , **D2** y **D** son determinantes de tercer orden, los cuales se calculan mediante las siguientes ecuaciones:

$$D_0 = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} Z_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i X_i & \sum_{i=1}^{n} X_i^2 & \sum_{i=1}^{n} X_i Z_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i Z_i & \sum_{i=1}^{n} X_i Z_i & \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \end{vmatrix} \qquad \text{Ec.(XVIII.13)}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} Z_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} y_i X_i & \sum_{i=1}^{n} X_i Z_i \\ \sum_{i=1}^{n} Z_i & \sum_{i=1}^{n} y_i Z_i & \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \end{vmatrix} \qquad \text{Ec.(XVIII.14)}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} X_i^2 & \sum_{i=1}^{n} y_i X_i \\ \sum_{i=1}^{n} Z_i & \sum_{i=1}^{n} X_i Z_i & \sum_{i=1}^{n} y_i Z_i \end{vmatrix} \qquad \text{Ec.(XVIII.15)}$$

$$D = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} Z_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} X_i^2 & \sum_{i=1}^{n} X_i Z_i \\ \sum_{i=1}^{n} Z_i & \sum_{i=1}^{n} X_i Z_i & \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \end{vmatrix} \qquad \text{Ec.(XVIII.16)}$$

Donde

n= Número de datos

El subíndice i se refiere a cada dato para calcular las sumatorias que aparecen como elementos de los determinantes.

A continuación se presenta un ejemplo ilustrativo del uso de este modelo.

Ejemplo XVIII.6.- El citricultor José Torres ha hecho algunas pruebas experimentales sobre la cantidad de naranjas que un árbol puede producir. Considera que la producción depende básicamente de dos factores que son la cantidad de fertilizante así como también el número de riegos que se aplican a cada árbol anualmente. De las pruebas que el Sr. Torres ha efectuado, se tienen los datos que se presentan en la siguiente tabla:

Tabla XVIII.8.- Resultados de las pruebas experimentales

Producción, naranjas/árbol	520	680	600	785	720	915
Fertilizante, kg./árbol	4	4	6	6	8	8
Número de riegos anuales	15	20	15	20	15	20

Ante esta situación, ¿Le convendrá al Sr. Torres incrementar la fertilización hasta 10 kg/árbol y los riegos a 25 al año? esto le representaría un costo adicional de $ 45.00 por cada árbol, mientras que la naranja la puede vender a $ 0.80 por kg. Cada naranja tiene en promedio un peso de 225 gramos y la producción promedio en los últimos años ha sido de 700 naranjas por árbol.

Solución:

Lo primero que debemos hacer es saber qué cantidad adicional de naranjas puede el Sr. Torres producir por incrementar su fertilización y riego, para luego hacer un balance económico entre los ingresos y los costos adicionales para saber cuál debe ser la decisión correcta.

Entonces se debe obtener la ecuación que nos relacione la producción de cada árbol, que será la variable dependiente, con las cantidades de fertilizante y de riegos, que serán las variables independientes. De esta forma reacomodaremos la información de la tabla anterior para asignar los datos con cada variable.

Producción, y	520	680	600	785	720	915
Fertilizante, X	4	4	6	6	8	8
Riegos, Z	15	20	15	20	15	20

Por lo que los datos requeridos para calcular cada uno de los determinantes dados por las ecuaciones (XVIII.13) a la (XVIII.16) serán:

$$n=6$$

$$\sum_{i=1}^{6} y_i = 520+680+600+785+720+915 = 4220$$

$$\sum_{i=1}^{6} X_i = 4+4+6+6+8+8 = 36$$

$$\sum_{i=1}^{6} Z_i = 15+20+15+20+15+20 = 105$$

$$\sum_{i=1}^{6} y_i X_i = (520)(4)+(680)(4)+(600)(6)+(785)(6)+(720)(8)+(915)(8) = 26190$$

$$\sum_{i=1}^{6} y_i Z_i = (520)(15)+(680)(20)+(600)(15)+(785)(20)+(720)(15)+(915)(20)$$
$$= 75200$$

$$\sum_{i=1}^{6} X_i Z_i = (4)(15)+(4)(20)+(6)(15)+(6)(20)+(8)(15)+(8)(20) = 630$$

$$\sum_{i=1}^{6} X_i^2 = (4)^2+(4)^2+(6)^2+(6)^2+(8)^2+(8)^2 = 232$$

$$\sum_{i=1}^{6} Z_i^2 = (15)^2+(20)^2+(15)^2+(20)^2+(15)^2+(20)^2 = 1875$$

Ahora con estos valores calcularemos los determinantes:

$$D_0 = \begin{vmatrix} 4220 & 36 & 105 \\ 26190 & 232 & 630 \\ 75200 & 630 & 1875 \end{vmatrix} = -910500$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 4220 & 105 \\ 36 & 26190 & 630 \\ 105 & 75200 & 1875 \end{vmatrix} = 195750$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 36 & 105 \\ 36 & 232 & 26190 \\ 105 & 630 & 75200 \end{vmatrix} = 129600$$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 36 & 105 \\ 36 & 232 & 630 \\ 105 & 630 & 1875 \end{vmatrix} = 3600$$

Entonces aplicaremos las ecuaciones (XVIII.10), (XVIII.11) y (XVIII.12) para obtener los coeficientes de ajuste, esto es,

$$b_0 = \frac{D_0}{D} = \frac{-910500}{3600} = -252.9167$$

$$b_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{195750}{3600} = 54.375$$

$$b_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{129600}{3600} = 36$$

Por lo cual nuestra ecuación de regresión será:

$$y = -252.9167 + 54.375\ X + 36\ Z$$

Con esta ecuación podemos ahora comparar los valores reales de la tabla con los estimados mediante la ecuación, los cuales se presentan ahora:

Tabla XVIII.9.- Comparación entre los valores reales y los calculados con la ecuación de regresión

y real	520	680	600	785	720	915
X	4	4	6	6	8	8
Z	15	20	15	20	15	20
y calculada	504.6	684.6	613.3	793.3	722.1	902.1
% Error	2.96	0.67	2.22	1.06	0.29	1.41

Con lo cual vemos que el ajuste es muy bueno, ya que el error promedio es del 1.44%, lo que nos indica que la ecuación de regresión es confiable.

Ahora procederemos a estimar mediante esta ecuación lo que se produciría al aplicarse las cantidades de fertilizante y riegos, X=10 y Z=25, para obtener:

$$y = -252.9167+(54.375)(10)+(36)(25)=1191$$

Esto representa un incremento de 491 naranjas por árbol, lo que generará el siguiente ingreso adicional.:

$$491\frac{\text{Naranjas}}{Arbol}\,\text{x}0.225\frac{\text{Kgs}}{\text{Naranja}}\,x0.80\frac{\$}{Kg} = 88.38\$\,/\,Arbol$$

Lo cual compensa el costo adicional de 45.0 $/árbol, por lo que el señor Torres debe incrementar las cantidades de fertilización y riego.

Existen otros modelos causales como el **Econométrico**, que se aplica a problemas económicos, en el cual se relaciona la variable pronosticada con varias variables independientes, sólo que este tipo de modelos ya no se presenta en esta obra.

Modelos Subjetivos.

Estos modelos son cualitativos y se utilizan para hacer pronósticos ante situaciones poco conocidas como pueden ser las áreas de innovación tecnológica, social, política y otras.

Estos modelos se basan en la opinión de los expertos, quienes apoyados en sus conocimientos y su experiencia emiten sus juicios sobre las preguntas planteadas para poder hacer una predicción.

Un método de este tipo que es quizás el más popular, es el **Delphi,** el cual fue desarrollado en la década de los 60 y consiste en elaborar cuestionarios, los cuales se envían a diversos expertos, quienes los contestan y luego se analizan las respuestas; una vez identificadas las similitudes y diferencias de éstas, se elabora un segundo cuestionario para que los conocedores hagan saber sus opiniones acerca de las diferencias habidas en sus respuestas al primer cuestionario, de modo que se logre establecer un consenso entre ellos, para lo cual si fuese necesario puede hacerse un tercer cuestionario. Una vez que se ha logrado el consenso entre los expertos, en base a éste se elabora el pronóstico. Como podemos ver esta técnica depende primordialmente de la calidad con la que se hayan hecho los cuestionarios.

Existen otros modelos subjetivos, los cuales no se incluyen en este texto.

PROBLEMAS PROPUESTOS

XVIII.1.- "Abarrotes Fernandenses" tiene un registro de sus ventas de azúcar en los pasados 10 meses, los cuales son los siguientes.

Mes	Venta, toneladas
1	44.0
2	42.0
3	48.0
4	45.0
5	46.3
6	44.9
7	45.7
8	47.4
9	47.2
10	46.9

¿Cuál será el pronóstico para el mes próximo?, resuelva por los siguientes modelos:
(a) Ultimo Valor; (b) Promedios; (c) Promedios Móviles utilizando los 5 últimos meses.

XVIII.2.- Para el caso anterior resuelva mediante Suavizamiento Exponencial usando (a) α =0.1; (b) α =0.2; (c) α =0.3

XVIII.3.- La Escuela Normal Rioverdense tiene una estadística de sus alumnos de nuevo ingreso durante los pasados 10 años, la cual es la siguiente:

Año	Número de Alumnos
1	550
2	485
3	525
4	530
5	542
6	493
7	487
8	502
9	528
10	499

¿Cuál será el pronóstico para el año próximo?, resuelva con los modelos siguientes:
(a) Ultimo Valor; (b) Promedios; (c) Promedios Móviles utilizando los 5 últimos años.

XVIII.4.- Con Suavizamiento Exponencial resuelva el problema anterior con (a) α =0.15 y (b) α =0.30

XVIII.5.- "Bebidas Finas de la Zona Media" tiene su registro de ventas de los pasados 3 años, el cual se presenta desglosado por meses en la siguiente tabla.

Mes y Año	1993	1994	1995
Enero	1500	1600	1610
Febrero	1750	1700	1720

Marzo	2500	2300	2400
Abril	2800	2850	2800
Mayo	3100	3150	3150
Junio	2950	3050	3000
Julio	2900	2850	2850
Agosto	2850	2830	2820
Septiembre	2500	2620	2550
Octubre	2470	2510	2500
Noviembre	2100	2080	2100
Diciembre	1800	1790	1800
Total	29220	29330	29300

¿Cuál será el pronóstico para cada mes del año de 96?

XVIII.6.- "Helados Ricosa" tiene sus registros de ventas en litro de helado por trimestre de los 3 años pasados, los que se incluyen en la siguiente tabla.

		Año	
Periodo	1	2	3
Trimestre 1	1200	1250	1420
Trimestre 2	2400	2700	2860
Trimestre 3	2600	3100	3160
Trimestre 4	1700	1900	2060
Total	7900	8950	9500

¿Cuál será el pronóstico para cada trimestre del año entrante?

XVIII.7.- La empresa "Don Cacahuate" tiene sus ventas de los últimos 10 años, las cuales se presentan en la siguiente tabla en millares de toneladas.

Año	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Venta	3.70	4.10	4.40	4.85	5.35	6.00	6.60	6.95	7.40	7.80	57.15

¿Cuánta venta se pronostica para los próximos 5 años?

XVIII.8.- La Escuela Superior de Agronomía está teniendo cada vez menor demanda de alumnos de nuevo ingreso, situación que tiene muy preocupados a sus directivos, su estadística de los últimos 10 años en millares es la siguiente:

Año	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
Alumnos	15.30	14.08	13.50	12.95	12.43	11.98	11.47	10.88	10.32	9.57

(a) ¿Cuál será el pronóstico para los tres próximos años?
(b) De mantenerse esta tendencia, ¿Cuánto tiempo pasará para que la demanda llegue a cero?

XVIII.9.- La tienda SAM lleva un registro sobre su venta de switches de tipo M y de tipo N, la cual es la siguiente expresada en miles.

Año	89	90	91	92	93	94	95
Tipo M	89.3	95.6	103.1	109.4	116.0	123.1	129.6
Tipo N	145.0	153.0	162.0	171.0	179.7	187.3	195.0

¿Cuál será el pronóstico para los 3 años próximos para cada tipo de switch?

XVIII.10.- "Laboratorios Clínicos Maravilla" realiza un estudio sobre las condiciones que afectan a la población bacteriana existente en un residuo alimenticio. De variaciones hechas en la presión y la temperatura local, se tienen los siguientes datos:

Presión psias	40	40	40	50	50	50	60	60	60
Temperatura grados C	10	20	30	10	20	30	10	20	30
Población millones	4.1	5.0	6.0	3.8	4.4	5.3	3.4	3.9	4.8

¿Cuál será la población bacteriana esperada para las siguientes condiciones?:
(a) Si la presión es 55 psias y la temperatura 40°C; (b) Si la presión es de 80 psias y la temperatura 25°C; (c) Si la presión es de 20 psias y la temperatura 50°C.

XVIII.11.- La producción de cajas de plástico sin defecto depende primordialmente de 2 factores que son la velocidad de la máquina de moldes y la presión de soplado del aire. Para variaciones en estos parámetros se ha obtenido la siguiente información:

Vel. máquina cajas/minuto	100	150	200	100	150	200	100	150	200
Presión soplado psias	40	40	40	55	55	55	70	70	70
% Defectuoso	0.5	1.3	2.0	0.7	1.6	2.4	1.0	1.8	2.7

¿Cuál será el porcentaje de defectuosos para las siguientes condiciones?:
(a) Velocidad de 150 cjs/min y presión de 85 psias; (b) Velocidad de 250 y presión de 55

XVIII.12.- La Compañía de bolsa sabe que la venta de acciones en el mercado cambiario depende fundamentalmente de la inflación y del puntaje global. De estudios sobre la variación de estos factores se tienen los siguientes datos:

% de inflación	Puntaje global	Acciones vendidas
10	5000	500
20	5000	610
30	5000	730
10	8000	700
20	8000	830
30	8000	950

¿Cuántas acciones se venderán? (a) Si la inflación es el 15% y el puntaje de 7000; (b) Si la inflación sube al 40% y el puntaje es de 10000.

CAPITULO XIX

MODELOS DE REEMPLAZO Y MANTENIMIENTO DE EQUIPOS

Introducción.

Los aspectos del reemplazo y mantenimiento de los equipos son muy importantes en las empresas industriales debido a que constituyen un factor que repercute directamente en sus costos, de tal forma que su adecuada administración nos ayuda a la obtención de mayores utilidades.

Las nociones de probabilidad y estadística son de gran utilidad para la mejor comprensión de los temas que se tratarán en este capítulo.

Para cualquier gerente es conveniente tener una idea acertada acerca de la duración de los equipos, ya que con esto podrá minimizar paros en la producción y el reparto, los cuales traerían consigo pérdidas por tiempos ociosos del personal, mermas de materiales y otros problemas que incidirían directamente sobre los costos.

Es normal el hecho de que un equipo en uso continuo sufra desgaste en sus diferentes partes que lo componen. El administrador eficaz al entender esto, tomará las decisiones correctas en lo que respecta al mantenimiento y/o al reemplazo de los equipos, eligiendo aquella opción que le signifique el mínimo costo total en sus operaciones.

En ocasiones puede ser aconsejable reemplazar un equipo en uso no por el hecho de que se haya dañado, sino porque hoy en día continuamente aparecen equipos más modernos, los cuales ejecutan las tareas para las que han sido diseñados de una manera más eficiente, con lo cual se lograría una disminución en los costos.

También suele suceder que una misma operación sea considerada simultáneamente como reemplazo y como mantenimiento de los equipos, tal es el caso del cambio en la suspensión de un vehículo de reparto, ya que este hecho se catalogará como reemplazo desde el punto de vista del sistema de suspensión, pero se tomará como mantenimiento desde el enfoque del equipo automotriz.

En este capítulo presentaremos primeramente la terminología más frecuente del tema; luego estudiaremos modelos de reemplazo con desgaste determinístico, donde se incluye la manera de seleccionar la alternativa que nos brinde el menor costo total, así como también la forma de estimar el tiempo óptimo para el reemplazo de los equipos; posteriormente se verán modelos probabilísticos de reemplazo, los cuales consideran que el desgaste de los equipos se da de una manera aleatoria, en estos modelos se verán las curvas de supervivencia y mortalidad de los equipos; más tarde se tratará el concepto de probabilidad de avería donde se incluye la determinación del tiempo promedio de aparición de la avería, así como lo que sucede cuando se introduce un límite de funcionamiento para los equipos; después se presentará la forma de obtener la probabilidad de consumo de equipos ya sean éstos nuevos o usados; luego se estudiará acerca del aprovisionamiento de equipos y finalmente se tratarán aspectos relacionados con el mantenimiento de los equipos, como el económico.

Terminología.

Ahora daremos algunas definiciones útiles para la mejor comprensión del tema.

Política de Reemplazo.- Es el plan predeterminado de la empresa referente al reemplazo de sus equipos.

Política de Mantenimiento.- Es el plan predeterminado de la compañía acerca del mantenimiento de sus equipos.

Tasa de Aprovisionamiento.- Es el número de equipos reemplazados por unidad de tiempo.

Tasa de Mantenimiento.- Es el valor que alcanza la tasa de aprovisionamiento después de un periodo de tiempo suficientemente largo.

Grado de Desgaste.- Es el grado de deterioro que tiene un equipo dado, el cual normalmente se expresa como porcentaje.

Límite de Funcionamiento.- Es el periodo de tiempo máximo que se le permite a un equipo funcionar antes de ser retirado.

Función de Supervivencia.- Es la relación matemática que expresa el número de equipos supervivientes que existen en un momento dado respecto al número inicial de los mismos.

Función de Mortalidad.- Es la relación que nos indica el número de equipos que han dejado de funcionar por descompostura en un momento dado respecto al número inicial de los mismos.

Función de Utilización de los Equipos.- Es la política que fija la empresa respecto al número de equipos que tendrá en funcionamiento y su aprovisionamiento.

Edad de un Equipo.- Es el tiempo que tiene en funcionamiento un equipo en un momento dado. Suele expresarse de distintas maneras como por ejemplo horas de funcionamiento, kilómetros recorridos y otros.

Probabilidad de Avería.- Es la probabilidad de que un equipo sufra una avería en un lapso de tiempo dado.

Consumo de Equipos.- Es el número de equipos que dejan de funcionar y que deben de ser reemplazados.

Valor de Rescate.- Es el valor económico al cual se venden los equipos que se retiran del funcionamiento.

Modelos de Reemplazo de equipos con desgaste determinístico.

Estos modelos se utilizan cuando los costos de mantenimiento se conocen exactamente y nos llevan a la selección del equipo cuyo costo por periodo sea el mínimo. Para la determinación de estos costos deben tomarse en consideración los valores de adquisición y de rescate de los equipos, así como también los costos anuales de mantenimiento para cada uno de ellos, ponderados por la tasa de interés vigente en los mercados financieros bajo el criterio del cambio del valor del dinero a través del tiempo.

El costo de un periodo para cada equipo puede obtenerse por medio de la siguiente ecuación:

$$C_k = \frac{1}{n}\left[A + \sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{(1+i)^{j-1}} - \frac{R}{(1+i)^n}\right] \qquad \text{Ec.(XIX.1)}$$

Donde
- **k** = Subíndice de referencia para cada equipo
- $\mathbf{C_k}$ = Costo para un periodo del equipo k
- **n** = Número de periodos de duración del equipo
- **A** = Valor de adquisición del equipo
- $\mathbf{m_j}$ = Costo de mantenimiento del equipo en el periodo **j**
- **i** = Tasa de interés vigente
- **R** = Valor de Rescate del equipo

De esta forma el procedimiento de cálculo es simple y sencillamente el aplicar la ecuación anterior para cada uno de los equipos en cuestión y seleccionar aquel que resulte con el menor costo. Esto quedará claro al estudiar el ejemplo siguiente:

Ejemplo XIX.1.- El Sr. Benito Pérez busca la mejor opción sobre la adquisición de una camioneta tipo pick up para el desarrollo de sus labores agrícolas. Tiene 4 alternativas, las marcas "La Económica", "La Mejor", "Fuerza Motriz" y "ZM", para cada una de ellas se tiene la información que se sintetiza en la tabla XIX.1

Tabla XIX.1.- Datos de las camionetas

						m_j				
Marca	k	A_k,M$	n_k,años	1	2	3	4	5	6	R_k,M$
La Económica	1	45	4	7	8	9.3	10.8	-	-	28
La Mejor	2	65	6	4	4.6	5.5	6.6	7.9	9	35
Fuerza Motriz	3	62	6	3.8	4.8	6.1	7.5	9	11	29
ZM	4	60	5	4	4.7	5.7	7.3	9.4	-	26

Donde cada dato se identifica mediante su literal correspondiente según la ecuación (XIX.1), con los datos de los valores monetarios en millones de pesos (M$) y los periodos de tiempo en años.

La tasa actual de interés bancario es del 24% anual. ¿Cuál opción deberá elegir el Sr. Pérez?

Solución:

Lo que debe hacerse es aplicar la fórmula dada por la ecuación (XIX.1) a cada una de las opciones y elegir aquella que resulte con el menor costo.

Entonces para la marca "La Económica" tendremos:

$$C_1 = \frac{1}{4}\left[45 + \left(7 + \frac{8}{1.24} + \frac{9.3}{(1.24)^2} + \frac{10.8}{(1.24)^3}\right) - \frac{28}{(1.24)^4}\right]$$

$$= \frac{1}{4}(45 + 25.164 - 11.843) = 14.580 \text{ M\$ / año}$$

Ahora para la segunda opción, es decir "La Mejor", tendremos:

$$C_2 = \frac{1}{6}\left[65 + \left(4 + \frac{4.6}{1.24} + \frac{5.5}{(1.24)^2} + \frac{6.6}{(1.24)^3} + \frac{7.9}{(1.24)^4} + \frac{9}{(1.24)^5}\right) - \frac{35}{(1.24)^6}\right]$$

$$= \frac{1}{6}(65 + 21.160 - 9.628) = 12.755 \text{ M\$ / año}$$

Por su parte para "Fuerza Motriz" obtendremos:

$$C_3 = \frac{1}{6}\left[62 + \left(3.8 + \frac{4.8}{1.24} + \frac{6.1}{(1.24)^2} + \frac{7.5}{(1.24)^3} + \frac{9}{(1.24)^4} + \frac{11}{(1.24)^5}\right) - \frac{29}{(1.24)^6}\right]$$

$$= \frac{1}{6}(62 + 23.131 - 7.978) = 12.859 \text{ M\$ / año}$$

Finalmente para "ZM" tendremos:

$$C_4 = \frac{1}{5}\left[60 + \left(4 + \frac{4.7}{1.24} + \frac{5.7}{(1.24)^2} + \frac{7.3}{(1.24)^3} + \frac{9.4}{(1.24)^4}\right) - \frac{26}{(1.24)^5}\right]$$

$$= \frac{1}{5}(60 + 19.302 - 8.869) = 14.089 \text{ M\$ / año}$$

De aquí vemos que la alternativa con el menor costo por periodo es la segunda, es decir "La Mejor", razón por la cual el Sr. Pérez deberá elegirla.

Una aclaración importante que es conveniente señalar es que hasta ahora se ha considerado que los costos anuales de mantenimiento m_i se tienen al principio de cada periodo, es por ello que los costos del primer año no van ponderados por la tasa de interés correspondiente.

También se ha supuesto que la tasa de interés es constante para cada uno de los periodos, lo cual raras veces sucede en la realidad. Si esto no fuese así, habría que ponderar los costos de cada año mediante sus respectivas tasas de interés. Al considerar esto la ecuación (XIX.1) deberá modificarse por la fórmula siguiente:

$$C_k = \frac{1}{n}\left[A + \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{\prod_{k=0}^{j-1}(1+i_k)} - \frac{R}{\prod_{k=0}^{n}(1+i_k)}\right] \qquad \text{Ec.(XIX.2)}$$

Donde cada $\mathbf{i_k}$ es la tasa de interés correspondiente al periodo **k**, haciendo $\mathbf{i_0=0}$.
Para ilustrar el uso de esta fórmula, la aplicaremos al caso anterior en el ejercicio siguiente:

Ejemplo XIX.2.- Si para el ejemplo anterior las tasas de interés han variado cada año siendo

Año	Tasa de Interés %
1	24
2	26
3	27
4	28
5	29
6	30

¿Cuál es ahora la mejor opción para el Sr. Pérez?

Solución:

Ahora aplicaremos la ecuación (XIX.2) para cada una de las opciones.
Para "La Económica", la sumatoria nos dará:

$$m_1 + \frac{m_2}{(1+i_1)} + \frac{m_3}{(1+i_1)(1+i_2)} + \frac{m_4}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)}$$

$$= 7 + \frac{8}{1.24} + \frac{9.3}{(1.24)(1.26)} + \frac{10.8}{(1.24)(1.26)(1.27)} = 24.847$$

Por su parte el término correspondiente al valor de rescate será:

$$\frac{R}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)(1+i_4)} = \frac{28}{(1.24)(1.26)(1.27)(1.28)} = 11.024$$

Por lo que su costo por año es:

$$C_1 = \frac{1}{4}(45 + 24.847 - 11.024) = 14.706 \text{ M\$ / Año}$$

Ahora para "La Mejor" su sumatoria será:

$$= 4 + \frac{4.6}{1.24} + \frac{5.5}{(1.24)(1.26)} + \frac{6.6}{(1.24)(1.26)(1.27)} + \frac{7.9}{(1.24)(1.26)(1.27)(1.28)} + \frac{9}{(1.24)(1.26)(1.27)(1.28)(1.29)}$$

$$= 20.413$$

El término del valor de rescate es:

$$\frac{35}{(1.24)(1.26)(1.27)(1.28)(1.29)(1.30)} = 8.217$$

Por lo que su costo anual será:

$$C_2 = \frac{1}{6}(65 + 20.413 - 8.217) = 12.866 \text{ M\$ / Año}$$

Ahora para la tercera opción. "Fuerza Motriz" su sumatoria será:

$$= 3.8 + \frac{4.8}{1.24} + \frac{6.1}{(1.24)(1.26)} + \frac{7.5}{(1.24)(1.26)(1.27)} + \frac{9}{(1.24)(1.26)(1.27)(1.28)} + \frac{11}{(1.24)(1.26)(1.27)(1.28)(1.29)}$$

$$= 22.256$$

Mientras que el término del valor de rescate es:

$$\frac{29}{(1.24)(1.26)(1.27)(1.28)(1.29)(1.30)} = 6.809$$

Siendo entonces su costo anual

$$C_3 = \frac{1}{6}(62 + 22.256 - 6.809) = 12.908 \text{ M\$ / Año}$$

Finalmente para la alternativa de "ZM" su sumatoria será:

$$= 4 + \frac{4.7}{1.24} + \frac{5.7}{(1.24)(1.26)} + \frac{7.3}{(1.24)(1.26)(1.27)} + \frac{9.4}{(1.24)(1.26)(1.27)(1.28)} = 18.819$$

El término del valor de rescate es:

$$\frac{26}{(1.24)(1.26)(1.27)(1.28)(1.29)} = 7.936$$

Siendo su costo por año

$$C_4 = \frac{1}{5}(60 + 18.819 - 7.936) = 14.177 \text{ M\$ / Año}$$

De aquí vemos que la alternativa de menor costo sigue siendo la segunda, aunque ahora casi se le ha igualado la tercera, es decir la de "Fuerza Motriz", ya que la diferencia entre una y otra es de sólo $ 42.0.

Tiempo óptimo de reemplazo de los equipos.

Una pregunta muy importante que todo administrador debe hacerse es cuál debe ser el tiempo más conveniente para reemplazar sus equipos. La respuesta a esta pregunta se da basado en un análisis de los costos, es decir que el tiempo óptimo para el reemplazo será aquel periodo para el cual los costos ponderados de adquisición y mantenimiento de los equipos se minimicen. De hecho el equipo deberá reemplazarse en el momento para el cual el costo del siguiente periodo sea mayor que el costo promedio ponderado de los periodos anteriores, pues para ese periodo sería más costoso seguir manteniendo el equipo actual que el reemplazarlo por uno nuevo. Esto se expresa matemáticamente por la siguiente fórmula:

$$C_{j+1} > \frac{A + \sum_{j=1}^{j} C_j a^{j-1}}{\sum_{j=1}^{j} a^{j-1}} \qquad \text{Ec.(XIX.3)}$$

Donde: C_j = Costo de mantenimiento para el periodo j.
A = Valor de adquisición del equipo.
α = Factor de ponderación dado por la Ec.(XIX.4)

En esta expresión vemos que el lado izquierdo de la desigualdad es el costo del siguiente periodo y el lado derecho es el promedio ponderado de los costos de los periodos anteriores.

Por su parte el factor de ponderación α, viene dado por la siguiente expresión:

$$a = \frac{1}{1+i} \qquad \text{Ec.(XIX.4)}$$

Siendo i la tasa de interés vigente para el lapso de tiempo para el cual se hace el análisis. Al igual que en el apartado anterior, si la tasa cambiase de un periodo a otro, habría que introducir diferentes valores del factor de ponderación para cada periodo.

A continuación veremos un caso numérico de este tipo.

Ejemplo XIX.3.- El Sr. Juan Hernández está analizando la posibilidad de reemplazar su camión fletero, para lo cual dispone de un registro de los costos anuales de mantenimiento que ha tenido en los últimos 15 años, los cuales han sido los siguientes:

Año	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Costo	7	7.5	8	9	10	12	13.6	15	17	19	22	26	31	36	42

Los costos se han dado en millares de pesos (M$). Si el valor de adquisición del camión fue de M$ 125.0 y la tasa de interés ha sido constante e igual al 15% anual ¿Cuándo deberá el Sr. Hernández reemplazar su camión?

Solución:

Para resolver este problema iremos calculando para cada periodo el valor de α^{j-1}, para luego obtener su sumatoria desde el periodo inicial hasta el actual; también estimaremos el valor de $A+\Sigma C_j\alpha^{j-1}$ y finalmente el cociente de este valor entre la sumatoria de α^{j-1}. Esto se resume en la tabla siguiente:

Tabla XIX.2.- Solución del ejemplo XIX.3

Año, j	C_j, M$	α^{j-1}	$\Sigma\alpha^{j-1}$	$A+\Sigma C_j\alpha^{j-1}$	$A+\Sigma C_j\alpha^{j-1}/\Sigma\alpha^{j-1}$
1	7	1	1	132.0	132.0
2	7.5	0.8696	1.8696	138.52	74.09
3	8	0.7561	2.6257	144.57	55.06
4	9	0.6575	3.2832	150.49	45.84
5	10	0.5718	3.8550	156.21	40.52
6	12	0.4972	4.3522	162.17	37.26
7	13.6	0.4323	4.7845	168.05	35.12
8	15	0.3759	5.1604	173.69	33.66
9	17	0.3269	5.4893	179.25	32.67
10	19	0.2843	5.7716	184.65	31.99
11	22	0.2472	6.0188	190.09	31.58
12	26	0.2149	6.2337	195.68	31.39
13	31	0.1869	6.4206	201.47	31.38
14	36	0.1625	6.5831	207.32	31.49
15	42	0.1413	6.7245	213.25	31.71

De esta tabla vemos que el equipo debe reemplazarse al final del año 13, ya que para entonces sería más caro mantener el equipo anterior que su reemplazo.

Es interesante observar que para el periodo 13 el cociente dado en la última columna de la tabla anterior es un mínimo, situación que coincide con el hecho de ser el tiempo óptimo para el reemplazo del equipo.

Modelos de Reemplazo de equipo con desgaste aleatorio.

En la mayoría de las ocasiones no nos es posible conocer con precisión el desgaste de los equipos en servicio en las empresas, por lo que se considera que éste se da en forma aleatoria o bien bajo alguna distribución de probabilidad conocida. Para el estudio de estos casos, presentaremos algunos tópicos que es conveniente conocer.

Curvas de Supervivencia y Mortalidad de los equipos.

Las curvas de supervivencia y mortalidad de los equipos son representaciones gráficas de las funciones de supervivencia y de duración de los equipos respectivamente para diferentes lapsos de tiempo.

La definición matemática de la función de supervivencia es la siguiente:

$$v_j = \frac{n_j}{n_0} \qquad \text{Ec.(XIX.5)}$$

Donde:

v_j = Valor de la función de supervivencia para el tiempo j
n_j = Número de equipos que funcionan al tiempo j
n_0 = Número de equipos iniciales en funcionamiento
j = Periodo de tiempo correspondiente

Por su parte la función de duración f_j se define por la siguiente expresión:

$$f_j = \frac{n_{j-1} - n_j}{n_0} \qquad \text{Ec.(XIX.6)}$$

Esta función es el cociente de los equipos que han dejado de funcionar en un instante dado j, entre el número inicial de los mismos.

Las curvas de supervivencia y mortalidad son simplemente las gráficas de estas funciones respecto al tiempo.

Probabilidad de Avería.

La probabilidad de avería se define como el número de equipos que dejan de funcionar respecto a los que están en operación en un momento dado y se expresa matemáticamente mediante la ecuación siguiente:

$$Av_j = \frac{n_{j-1} - n_j}{n_{j-1}} \qquad \text{Ec.(XIX.7)}$$

Donde:

Av_j= Probabilidad de avería de los equipos en el tiempo j

Los restantes términos ya han sido definidos en el inciso anterior.

Tiempo promedio de aparición de la avería.

El tiempo promedio de aparición de la avería se obtiene por medio de la fórmula siguiente:

$$t_{av} = \sum_{j=1}^{\infty} j f_j \qquad \text{Ec.(XIX.8)}$$

Donde:

t_{av} = Tiempo promedio de aparición de la avería
j = Lapso de tiempo respectivo

Por su parte la desviación estándar de este tiempo es la raíz cuadrada de la variancia, la cual viene dada por la expresión siguiente:

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^{\infty} j^2 f_j - t_{av}^2 \qquad \text{Ec.(XIX.9)}$$

Presentaremos ahora un caso que nos ayudará a aclarar estos conceptos.

Ejemplo XIX.4.- En una compañía del ramo eléctrico se han probado fusibles para analizar su duración y se han obtenido los datos que se presentan en la tabla XIX.3.

Obtener:

(a) La curva de supervivencia de los equipos.
(b) La curva de mortalidad.
(c) Las probabilidades de avería para cada lapso de tiempo.
(d) El tiempo promedio de aparición de la avería y
(e) La desviación estándar de la aparición de la avería.

Tabla XIX.3.- Datos de fusibles en operación respecto al tiempo.

Tiempo, semanas	Fusibles en operación
0	1000
1	996
2	989
3	976
4	950
5	919
6	877
7	826
8	764
9	690
10	600
11	504
12	419
13	343
14	273
15	215
16	169
17	129
18	97
19	71
20	47
21	29
22	15
23	7
24	1
25	0

Solución:

Con los datos de la tabla obtendremos para cada lapso de tiempo j, la función de supervivencia v_j por medio de la ecuación (XIX.5), la función de duración f_j mediante la ecuación (XIX.6) y la probabilidad de avería Av_j haciendo uso de la ecuación (XIX.7), las cuales se muestran en la siguiente tabla:

Tabla XIX.4.- Funciones de supervivencia, duración y probabilidades de avería de los fusibles

Tiempo j	Supervivientes n_j	v_j	f_j	Av_j
0	1000	1.0	0	0
1	996	0.996	0.004	0.0040
2	989	0.989	0.007	0.0070
3	976	0.976	0.013	0.0131
4	950	0.95	0.026	0.0266
5	919	0.919	0.031	0.0326
6	877	0.877	0.042	0.0457
7	826	0.826	0.051	0.0582
8	764	0.764	0.062	0.0751
9	690	0.69	0.074	0.0969
10	600	0.6	0.090	0.1304
11	504	0.504	0.096	0.16
12	419	0.419	0.085	0.1687
13	343	0.343	0.076	0.1814
14	273	0.273	0.070	0.2041
15	215	0.215	0.058	0.2125
16	169	0.169	0.046	0.2140
17	129	0.129	0.040	0.2367
18	97	0.097	0.032	0.2481
19	71	0.071	0.026	0.2680
20	47	0.047	0.024	0.3380
21	29	0.029	0.018	0.3830
22	15	0.015	0.014	0.4828
23	7	0.007	0.008	0.5333
24	1	0.001	0.006	0.8571
25	0	0	0.001	1

Las gráficas de las funciones de supervivencia y duración se presentan en la figura XIX.1

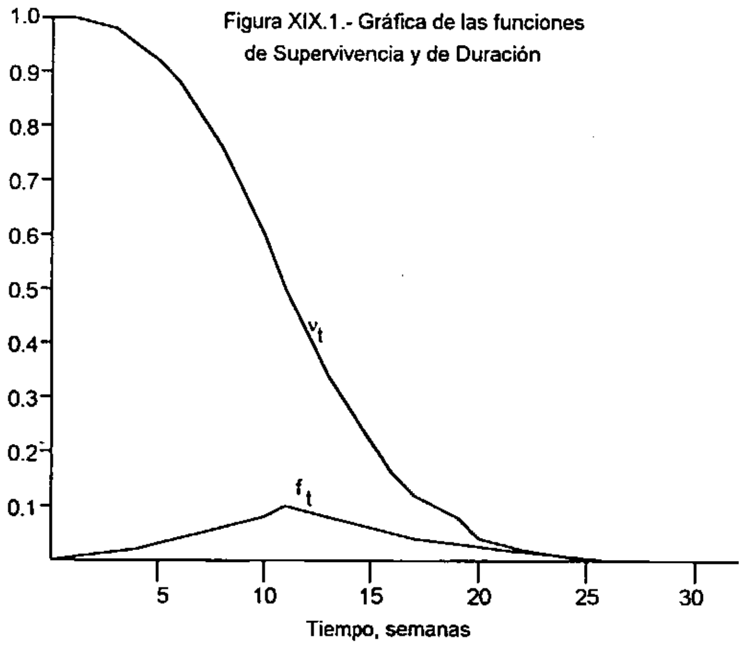
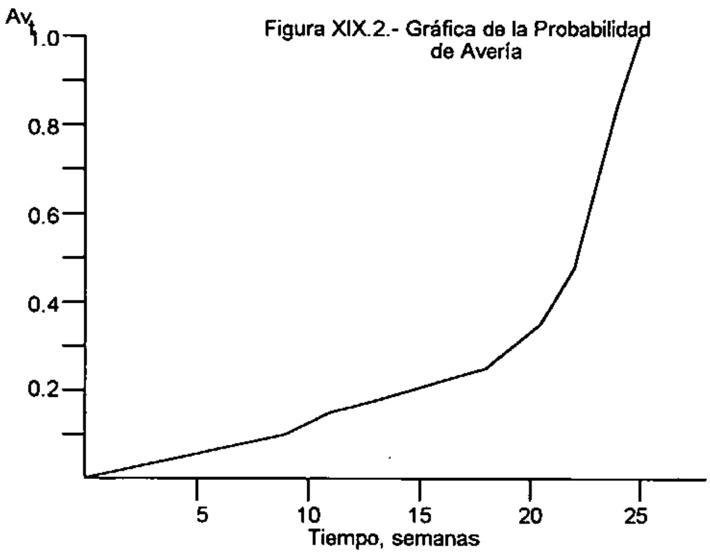


Figura XIX.1.- Gráfica de las funciones de Supervivencia y de Duración

Por su parte la figura XIX.2 nos muestra la gráfica de las probabilidades de avería.

Ahora para el inciso (d), obtendremos el tiempo promedio de aparición de la avería mediante la fórmula (XIX.8):

$$t_{av} = \sum_{j=1}^{25} jf_j = 1(.004) + 2(.007) + 3(.013) + 4(.026) + 5(.031) + 6(.042) + 7(.051) + 8(.062) + 9(.074)$$
$$+10(.09) + 11(.096) + 12(.085) + 13(.076) + 14(.07) + 15(.058) + 16(.046) + 17(.04) + 18(.032)$$
$$+19(.026) + 20(.024) + 21(.018) + 22(.014) + 23(.008) + 24(.006) + 25(.001) = 11.906 \textit{ semanas}$$



Por su parte la variancia la calcularemos con la ecuación (XIX.9) para obtener:

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^{25} j^2 f_j - t_{av}^2 = 1^2(.004) + 2^2(.007) + 3^2(.013) + 4^2(.026) + 5^2(.031) + 6^2(.042) + 7^2(.051) + 8^2(.062)$$
$$+9^2(.074) + 10^2(.09) + 11^2(.096) + 12^2(.085) + 13^2(.076) + 14^2(.07) + 15^2(.058) + 16^2(.046)$$
$$+17^2(.04) + 18^2(.032) + 19^2(.026) + 20^2(.024) + 21^2(.018) + 22^2(.014) + 23^2(.008) + 24^2(.006)$$
$$+25^2(.001) - (11.906)^2 = 21.747$$

Por lo que la desviación estándar será:

$$\sigma = \sqrt{21.747} = 4.663, \textit{ semanas}$$

Tiempo límite de funcionamiento para los equipos.

Cuando se introduce un tiempo límite de funcionamiento para los equipos, en la curva de supervivencia v_j se presenta un quiebre vertical hasta llegar a cero justo en dicho tiempo límite, tal y como se muestra en la figura XIX.3.

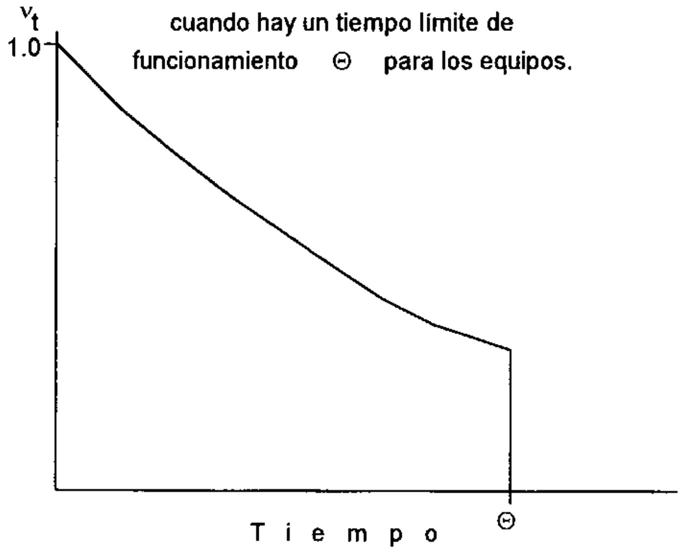
Por su parte el tiempo promedio de aparición de la avería como es de esperarse disminuye, así como también la variancia, tal y como se ve en las expresiones siguientes:

$$t_{av} = \sum_{j=1}^{\Theta} j f_j \qquad \text{Ec.(XIX.10)}$$

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^{\Theta} j^2 f_j - t_{av}^2 \qquad \text{Ec.(XIX.11)}$$

Siendo Θ el tiempo límite de funcionamiento para los equipos.

Figura XIX.3.- Curva típica de supervivencia cuando hay un tiempo límite de funcionamiento Θ para los equipos.



Ejemplo XIX.5.- Para el problema anterior calcúlese el tiempo promedio de aparición de la avería y la desviación estándar si se fija un tiempo límite de funcionamiento para los equipos de 15 años.

Solución:

Para el caso aplicaremos las ecuaciones (XIX.10) y (XIX.11) para obtener:

$$t_{av} = \sum_{j=1}^{15} j f_j = 1(.004) + 2(.007) + 3(.013) + 4(.026) + 5(.031) + 6(.042) + 7(.051) + 8(.062) + 9(.074)$$

$$+10(.09) + 11(.096) + 12(.085) + 13(.076) + 14(.07) + 15(.058) = 10.256 \textit{semanas}$$

$$^2 = \sum_{j=1}^{15} j^2 f_j - t_{av}^2 = 1^2(.004) + 2^2(.007) + 3^2(.013) + 4^2(.026) + 5^2(.031) + 6^2(.042) + 7^2(.051) + 8^2(.062)$$

$$+9^2(.074) + 10^2(.09) + 11^2(.096) + 12^2(.085) + 13^2(.076) + 14^2(.07) + 15^2(.058) - (10.256)^2 = 17.922$$

La desviación estándar será entonces:

$$= \sqrt{17.922} = 4.233 \textit{ semanas}$$

Probabilidad de Consumo de equipos nuevos.

La probabilidad de que se consuman k equipos en un lapso de tiempo t, denominada p_{kt} viene dada por la siguiente fórmula:

$$p_{kt} = \sum_{j=1}^{t} v_{t-j}\, f_j \qquad \text{Ec.(XIX.12)}$$

Donde:

p_{kt} = Probabilidad de consumir o reemplazar **k** equipos a un tiempo **t**.
v_{t-j} = Función de Supervivencia de los equipos en el lapso de tiempo de j a t
f_j = Función de Duración del equipo, dada por la ecuación (XIX.6)

Como vemos esta probabilidad es la sumatoria para todo el lapso de tiempo desde cero hasta **t** de los productos o probabilidades compuestas de que el equipo sobreviva en el lapso de tiempo de **j** a **t**, multiplicada por la función de duración del equipo de **j-1** a **j**.

Existe otra fórmula que nos relaciona a p_{kt} con $p_{k-1,t}$ la cual es:

$$p_{kt} = \sum_{j=1}^{t} p_{k-1,t-j}\, f_j \qquad \text{Ec.(XIX.13)}$$

La que nos indica que la probabilidad de hacer **k** reemplazos del equipo desde el tiempo cero hasta t es la sumatoria de las probabilidades de haber realizado **k-1** reemplazos en el tiempo desde **j** hasta **t** multiplicada por la probabilidad de que el equipo haya dejado de funcionar en el lapso de **j-1** a **j**.

Con esta última fórmula nos es posible obtener las probabilidades de realizar 2 reemplazos del equipo en un lapso de tiempo cualquiera si conocemos las respectivas probabilidades de hacer un reemplazo en ese mismo periodo.

Es fácil darse cuenta que las probabilidades de hacer cualquier número **k** de reemplazos a tiempo cero será:

$$p_{k0} = 0 \qquad \text{Ec.(XIX.14)}$$

Por su parte la probabilidad de que no haya habido reemplazos a un tiempo **t** dado cualquiera, será simplemente la función de supervivencia del equipo, es decir:

$$p_{0t} = v_t = \frac{n_t}{n_0} \qquad \text{Ec.(XIX.15)}$$

A continuación presentaremos un ejemplo ilustrativo del uso de estas fórmulas

Ejemplo XIX.6.- Para el caso de los fusibles, obténgase las probabilidades de hacer 1 y 2 reemplazos en lapsos de tiempo que vayan desde una hasta 25 semanas.

Solución:

Para solucionar este problema haremos uso de los datos de las funciones de supervivencia y de duración que se tienen, los cuales se hallan en la tabla XIX.4.

(a) Para **k=1** reemplazo con $p_{10}=0$, si aplicamos la ecuación (XIX.12), para **t=1**, tendremos:

$$p_{11} = \sum_{j=1}^{1} v_{1-j}\, f_j = v_0 f_1 = (1)(0.004) = 0.004$$

Ahora para **t=2**:

$$p_{12} = \sum_{j=1}^{2} v_{2-j}\, f_j = v_1 f_1 + v_0 f_2 = (0.996)(0.004) + (1)(0.007) = 0.0110$$

Para **t=3**:

$$p_{13} = \sum_{j=1}^{3} v_{3-j}\, f_j = v_2 f_1 + v_1 f_2 + v_0 f_3 = (.989)(.004) + (.996)(.007) + (1)(.013) = 0.0239$$

Para **t=4**:

$$p_{14} = \sum_{j=1}^{4} v_{4-j} f_j = v_3 f_1 + v_2 f_2 + v_1 f_3 + v_0 f_4$$
$$= (.976)(.004) + (.989)(.007) + (.996)(.013) + (1)(.026) = 0.0498$$

Procediendo en forma similar se obtienen las restantes probabilidades, las cuales se presentan en la tabla XIX.5.

(b) Para k=2 reemplazos con p_{20}=0, aplicaremos la ecuación (XIX.13) para **t=1** para obtener:

$$p_{21} = \sum_{j=1}^{1} p_{1,1-j} f_j = p_{10} f_1 = (0)(0.004) = 0$$

Ahora para **t=2**:

$$p_{22} = \sum_{j=1}^{2} p_{1,2-j} f_j = p_{11} f_1 + p_{10} f_2 = (.004)(.004) + (0)(.007) = 0.000016$$

Para **t=3**:

$$p_{23} = \sum_{j=1}^{3} p_{1,3-j} f_j = p_{12} f_1 + p_{11} f_2 + p_{10} f_3 = (.0110)(.004) + (.004)(.007) + (0)(.013) = 0.000072$$

Para **t=4**:

$$p_{24} = \sum_{j=1}^{4} p_{1,4-j} f_j = p_{13} f_1 + p_{12} f_2 + p_{11} f_3 + p_{10} f_4$$
$$= (.0239)(.004) + (.0110)(.007) + (.004)(.013) + (0)(.026) = 0.000225$$

Procediendo de igual modo se obtienen las demás p_{2t}, las que se indican en la siguiente tabla

Tabla XIX.5.- Resultados del ejemplo XIX.6

t	p_{1t}	p_{2t}
0	0	0
1	0.004	0
2	0.0110	0.000016
3	0.0239	0.000072
4	0.0498	0.000225
5	0.0804	0.000613
6	0.1216	0.0014
7	0.1712	0.0028
8	0.2307	0.0053
9	0.3008	0.0091
10	0.3848	0.0150
11	0.4722	0.0234
12	0.5451	0.0352
13	0.6048	0.0511
14	0.6534	0.0716
15	0.6845	0.0973
16	0.6977	0.1282
17	0.6991	0.1641
18	0.6867	0.2046
19	0.6630	0.2489
20	0.6329	0.2959
21	0.5932	0.3442
22	0.5477	0.3918
23	0.4958	0.4368
24	0.4427	0.4777
25	0.3868	0.5128

Por su parte la sumatoria de estas probabilidades a un tiempo dado **t**, de hacer cero, uno, dos o más reemplazos será la unidad, esto es:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{kt} = 1 \qquad \text{Ec.(XIX.16)}$$

Así para el ejemplo anterior si tomamos un tiempo cualquiera, por decir 8 semanas, vemos que

$$p_{18} = 0.2307$$

$$p_{28} = 0.0053$$

Por su parte la probabilidad de cero reemplazos es el valor de la función de supervivencia para este mismo tiempo, es decir

$$p_{08} = v_8 = 0.7640$$

Con lo que su sumatoria será prácticamente la unidad, ya que las probabilidades de hacer 3 o más reemplazos son muy pequeñas, por lo tanto

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{k8} = p_{08} + p_{18} + p_{28} = 0.7640 + 0.2307 + 0.0053 = 1.0$$

Con lo cual queda demostrada la validez de la ecuación (XIX.16).

Otra información que también es muy importante en estos casos es la de conocer cuál será el consumo promedio de equipos para un lapso de tiempo dado, el cual se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\overline{m}_t = \sum_{j=0}^{\infty} j \; p_{jt} \qquad \text{Ec.(XIX.17)}$$

Donde:

$\overline{m}_t$ = Consumo promedio de equipos a tiempo t
j = Posibilidades de consumo de equipos
p_{jt} = Probabilidad de consumir j equipos a un tiempo t

Así para el caso anterior para t=8 semanas, si aplicamos esta ecuación obtendremos:

$$\overline{m}_8 = \sum_{j=0}^{\infty} j \; p_{j8} = (0)(p_{08}) + (1)(p_{18}) + (2)(p_{28}) + \ldots + \infty p_{\infty 8}$$

$$= (0)(0.7640) + (1)(0.2307) + (2)(0.0053) = 0.2413$$

Con esto vemos que consumiremos 0.2413 equipos en promedio en un lapso de tiempo de 8 semanas.

Probabilidad de Consumo de equipos usados.

Es también interesante saber cuando se cuenta con un equipo usado, cuál será su probabilidad de consumo o reemplazo, la cual obviamente será mayor que para el caso en que el equipo es nuevo.

Si se cuenta con un equipo que ha sido usado anteriormente durante un tiempo dado cualquiera que llamaremos α, su función de supervivencia será ahora $v_{\alpha t}$, la cual se obtiene mediante la siguiente relación:

$$v_{\alpha t} = \frac{v_{t+\alpha}}{v_\alpha} \qquad \text{Ec.(XIX.18)}$$

Es decir que la función de supervivencia del equipo será el cociente de dividir su función de supervivencia cuando el equipo es nuevo, recorrida los α periodos entre su función de supervivencia en el momento α.

Por su parte para la obtención de la probabilidad de **k** consumos a tiempo **t**, recurrimos a la ecuación siguiente:

$$p_{kt} = \sum_{j=1}^{t} v_{t-j} f_{\alpha j} \qquad \text{Ec. (XIX.19)}$$

Donde todos los términos son los mismos que se habían venido manejando para el caso cuando los equipos eran nuevos, con excepción de la función de duración $\mathbf{f_{\alpha j}}$, la cual viene dada ahora por la siguiente expresión:

$$f_{\alpha j} = v_{\alpha, j-1} - v_{\alpha, j} \qquad \text{Ec. (XIX.20)}$$

Ilustraremos la forma de usar estas ecuaciones con el siguiente ejercicio.

Ejemplo XIX.7.- Para el caso de los fusibles, ¿Cuáles serán las probabilidades de consumir un equipo, si éste ya ha sido usado previamente durante 10 semanas?

Solución:

Para nuestro caso α=**10**, por lo que en una tabla colocaremos los valores de v_t, $v_{t+\alpha}$, los calculados para $v_{\alpha t}$ mediante la ecuación (XIX.18) y los de la función $\mathbf{f_{\alpha t}}$ obtenidos con la fórmula (XIX.20), con lo cual dicha tabla nos quedará de la siguiente manera:

Tabla XIX.6.- Valores de v_t, $v_{t+\alpha}$, $v_{\alpha t}$ y $f_{\alpha t}$.

Tiempo t	v_t	$v_{t+\alpha}$	$v_{\alpha t}$	$f_{\alpha t}$
0	1	0.600	1	---
1	0.996	0.504	0.840	0.160
2	0.989	0.419	0.698	0.142
3	0.976	0.343	0.572	0.126
4	0.950	0.273	0.455	0.117
5	0.919	0.215	0.358	0.097
6	0.877	0.169	0.282	0.076
7	0.826	0.129	0.215	0.067
8	0.764	0.097	0.162	0.053
9	0.890	0.071	0.118	0.044
10	0.600	0.047	0.078	0.040
11	0.504	0.029	0.048	0.030
12	0.419	0.015	0.025	0.023
13	0.343	0.007	0.012	0.013
14	0.273	0.001	0.002	0.010
15	0.215	0	0	0.002
16	0.169	0	0	0
17	0.129	0	0	0
18	0.097	0	0	0
19	0.071	0	0	0
20	0.047	0	0	0
21	0.029	0	0	0
22	0.015	0	0	0
23	0.007	0	0	0
24	0.001	0	0	0
25	0	0	0	0

Entonces procederemos a estimar las probabilidades de consumo de equipos mediante la ecuación (XIX.19), haciendo p_{k0}=0.

Entonces para **t=1**:

$$p_{11} = \sum_{j=1}^{1} v_{1-j} f_{\alpha j} = v_0 f_{\alpha 1} = (1)(0.16) = 0.16$$

Ahora para **t=2**:

$$p_{12} = \sum_{j=1}^{2} v_{2-j} f_{\alpha j} = v_1 f_{\alpha 1} + v_0 f_{\alpha 2} = (0.996)(0.160) + (1)(0.142) = 0.3014$$

Para **t=3**:

$$p_{13} = \sum_{j=1}^{3} v_{3-j} f_{\alpha j} = v_2 f_{\alpha 1} + v_1 f_{\alpha 2} + v_0 f_{\alpha 3}$$

$$= (0.989)(0.16) + (0.996)(0.142) + (1)(0.126) = 0.4257$$

Para **t=4**:

$$p_{14} = \sum_{j=1}^{4} v_{4-j} f_{\alpha j} = v_3 f_{\alpha 1} + v_2 f_{\alpha 2} + v_1 f_{\alpha 3} + v_0 f_{\alpha 4}$$

$$= (0.976)(0.16) + (0.989)(0.142) + (0.996)(0.126) + (1)(0.117)$$

$$= 0.5391$$

Procediendo en forma análoga se obtienen los resultados que se resumen en la tabla XIX.7, los cuales se comparan con los obtenidos para el caso cuando los equipos eran nuevos.

Tabla XIX.7.- Resultados del ejemplo XIX.7 comparados con los del ejemplo XIX.6

t	p_{1t} Equipos nuevos	p_{1t} Equipos usados
0,	0	0
1	0.0040	0.1600
2	0.0110	0.3014
3	0.0239	0.4257
4	0.0498	0.5391
5	0.0804	0.6284
6	0.1216	0.6936
7	0.1712	0.7433
8	0.2307	0.7735
9	0.3008	0.7866
10	0.3848	0.7882
11	0.4722	0.7702
12	0.5451	0.7363
13	0.6048	0.6861
14	0.6534	0.6287
15	0.6845	0.5609
16	0.6977	0.4920
17	0.6991	0.4260
18	0.6867	0.3636
19	0.6630	0.3060
20	0.6329	0.2538

En esta tabla vemos que las probabilidades de consumo de equipos son notoriamente mayores para el caso de los equipos usados para los primeros periodos, ya por ahí del periodo 13 en adelante tienden a igualarse e incluso posteriormente las de los equipos nuevos aparecen más altas que las de los usados, debido a que para estos periodos de tiempo ya los equipos nuevos tienen desgaste, mientras que los usados posiblemente ya hayan sido reemplazados.

Aprovisionamiento de Equipos.

Es importante considerar el aprovisionamiento de equipos en las empresas, ya que con el funcionamiento normal, éstos se irán desgastando y averiando, por lo que deberemos tomar las medidas preventivas necesarias para cuando esto suceda y evitar con ello pérdidas innecesarias de tiempo. Esto se conoce en la terminología del presente tema como el aprovisionamiento de los equipos.

Si iniciamos las actividades con n_0 equipos nuevos, el número de éstos que habrá en un momento dado de tiempo t, será:

$$n_t = n_0 v_t \qquad \text{Ec.(XIX.21)}$$

Normalmente la alta administración empresarial fija a su arbitrio la manera como desean aprovisionar los equipos, de acuerdo con un patrón conocido como función de utilización, denotada como u_t, de la cual se muestra una representación gráfica en la figura XIX.4.

Si r_j es el número de equipos reemplazados hasta el tiempo j, entonces la tasa de aprovisionamiento de equipos denominada ρ_j será:

$$\rho_j = r_j - r_{j-1} \qquad \text{Ec.(XIX.22)}$$

Por su parte el número de equipos supervivientes a un tiempo t y provenientes de este aprovisionamiento será:

$$\rho_j v_{t-j} = (r_j - r_{j-1}) v_{t-j} \qquad \text{Ec.(XIX.23)}$$

Entonces el número de equipos que habrá a un tiempo t será la sumatoria de estos supervivientes más el de los equipos iniciales que aún siguen funcionando, es decir:

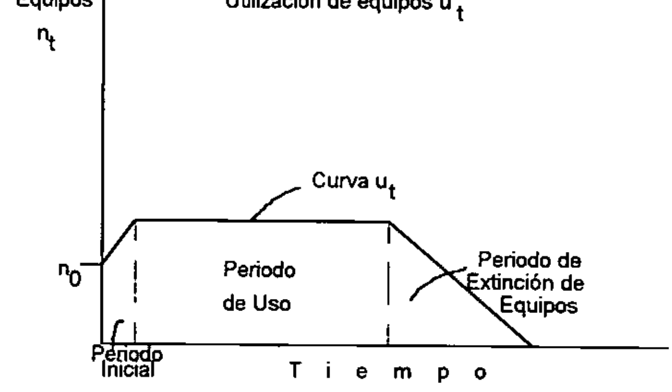
$$u_t = n_0 v_t + \sum_{j=1}^{t} \rho_j v_{t-j} \qquad \text{Ec.(XIX.24)}$$

Si de esta ecuación despejamos ρ_t, obtendremos:

$$\rho_t = u_t - n_0 v_t - \sum_{j=1}^{t-1} \rho_j v_{t-j} \qquad \text{Ec.(XIX.25)}$$

La cual nos permite calcular ρ_t en cualquier momento.

Figura XIX.4.- Curva típica de la Función de Utilización de equipos u_t



A continuación presentaremos un ejemplo.

Ejemplo XIX.8.- La empresa "Metales Potosinos" tiene un número inicial de 25 motobombas en servicio, las cuales desea mantener funcionando con una función de utilización u_t dada en la tabla XIX.8, en la que también se presenta la función de supervivencia de los equipos v_t para diferentes tiempos.

Tabla XIX.8.- Funciones de Supervivencia y Utilización para las motobombas de "Metales Potosinos"

t, meses	v_t	u_t
0	1	25
1	1	38
2	0.99	50
3	0.98	63
4	0.96	75
5	0.92	88
6	0.86	100
7	0.77	100
8	0.65	100
9	0.52	100
10	0.37	100
11	0.30	100
12	0.24	100
13	0.19	100
14	0.14	100
15	0.09	100
16	0.05	100
17	0.02	100
18	0	100
19	0	100
20	0	100
21	0	100
22	0	100
23	0	100
24	0	100
25	0	100

¿Cómo será la tasa de aprovisionamiento ρ_t?

Solución:

Las tasas de aprovisionamiento ρ_t para los diferentes periodos de tiempo las iremos obteniendo mediante la fórmula (XIX.25). Las funciones de utilización u_t y de supervivencia v_t están dadas en la tabla XIX.8, Por su parte el valor de ρ_0 es lógicamente cero.

Entonces al aplicar la ecuación (XIX.25) para **t=1**, tendremos:

$$\rho_1 = u_1 - n_0 v_1 - \sum_{j=1}^{0} \rho_j \, v_{1-j} = u_1 - n_0 v_1 = 38 - (25)(1) = 13$$

Ahora para **t=2**:

$$\rho_2 = u_2 - n_0 v_2 - \sum_{j=1}^{1} \rho_j \, v_{2-j} = u_2 - n_0 v_2 - \rho_1 v_1$$

$$= 50 - (25)(0.99) - (13)(1) = 12.25$$

Para t=3:

$$\rho_3 = u_3 - n_0 v_3 - \sum_{j=1}^{2} \rho_j \; v_{3-j} = u_3 - n_0 v_3 - \rho_1 v_2 - \rho_2 v_1$$

$$= 63 - (25)(0.98) - (13)(0.99) - (12.25)(1) = 13.38$$

Para t=4:

$$\rho_4 = u_4 - n_0 v_4 - \sum_{j=1}^{3} \rho_j \; v_{4-j} = u_4 - n_0 v_4 - \rho_1 v_3 - \rho_2 v_2 - \rho_3 v_1$$

$$= 75 - (25)(0.96) - (13)(0.98) - (12.25)(0.99) - (13.38)(1) = 12.75$$

Si proseguimos con la metodología, se obtienen los resultados que se resumen en la tabla XIX.9.

En esta tabla también se presentan los valores de r_t para cada lapso de tiempo, los cuales vienen siendo el número total de equipos reemplazados, siendo la sumatoria de las ρ_t antes obtenidas, conforme a la siguiente ecuación:

$$r_t = \sum_{j=1}^{t} \rho_j \qquad \text{Ec.(XIX.26)}$$

Tabla XIX.9.- Valores de las tasas de aprovisionamiento ρ_t y número total de equipos reemplazados r_t.

t, meses	ρ_t	r_t
0	0	0
1	13	13
2	12.25	25.25
3	13.38	38.63
4	12.75	51.38
5	14.52	65.90
6	14.53	80.43
7	4.06	84.49
8	5.99	90.48
9	7.70	98.18
10	9.85	108.03
11	9.72	117.75
12	10.15	127.90
13	10.43	138.33
14	10.54	148.87
15	10.56	159.43
16	10.22	169.65
17	9.68	179.33
18	9.97	189.30
19	9.89	199.19
20	10.06	209.25
21	10.02	219.27
22	9.92	229.19
23	9.86	239.05
24	9.80	248.85
25	9.78	258.63

Cuando se conoce la función de utilización y la tasa de aprovisionamiento de los equipos, es posible entonces obtener la función de supervivencia, la cual si se despeja de la ecuación (XIX.25) nos da la siguiente fórmula:

$$v_t = \frac{u_t - \sum_{j=1}^{t} \rho_j \, v_{t-j}}{n_0} \qquad \text{Ec.(XIX.27)}$$

Haciendo $v_0=1$, es posible calcular las siguientes v_t para los siguientes lapsos de tiempo.

Tasa de Mantenimiento.

La tasa de mantenimiento se ha definido como el valor que toma la tasa de aprovisionamiento después de un periodo de tiempo suficientemente largo y se expresa matemáticamente por la fórmula siguiente:

$$\rho^* = \lim_{t \to \infty} \rho_t = \frac{n_0}{t_{av}} \qquad \text{Ec.(XIX.28)}$$

Es decir que la tasa de mantenimiento es el cociente del número inicial de equipos dividido entre el tiempo promedio de aparición de la avería, el cual había sido definido mediante la ecuación (XIX.8).

Ejemplificaremos este concepto con el caso de los fusibles.

Ejemplo XIX.9.- Para el caso de los fusibles cuya función de supervivencia se ha dado en la tabla XIX.4, obtener las respectivas tasas de aprovisionamiento, así como la tasa de mantenimiento si el número inicial de equipos es de 1000 y la función de utilización es constante todo el tiempo e igual a 1000.

Solución:

Para este caso tenemos que $\mathbf{n_0= 1000=u_t}$ para todos los lapsos de tiempo, mientras que $\rho_0=0$. Entonces si aplicamos la fórmula (XIX.25) al caso tendremos:

$$\rho_t = 1000(1 - v_t) - \sum_{j=1}^{t-1} \rho_j \, v_{t-j}$$

Entonces para **t=1**:

$$\rho_1 = 1000(1 - v_1) = 1000(1 - 0.996) = 4$$

Por su parte para **t=2**:

$$\rho_2 = 1000(1 - v_2) - \rho_1 v_1 = 1000(1 - 0.989) - 4(0.996) = 7.016$$

Ahora para **t=3**:

$$\rho_3 = 1000(1 - v_3) - \rho_1 v_2 - \rho_2 v_1 = 1000(1 - 0.976) - 4(0.989) - 7.016(0.996) = 13.056$$

Para **t=4**:

$$\rho_4 = 1000(1 - v_4) - \rho_1 v_3 - \rho_2 v_2 - \rho_3 v_1$$

$$= 1000(1 - 0.95) - 4(0.976) - 7.016(0.989) - 13.056(0.996) = 26.153$$

Si se sigue con este procedimiento, se obtienen los valores que se presentan en la tabla siguiente:

Tabla XIX.10.- Valores de tasas de aprovisionamiento ρ_t y del número total de equipos reemplazados r_t para el caso de los fusibles.

t	v_t	ρ_t	r_t
0	1	0	0
1	0.996	4	4
2	0.989	7.03	11.03
3	0.976	13.06	24.09
4	0.950	26.15	50.24
5	0.919	31.39	81.63
6	0.877	42.79	124.42
7	0.826	52.46	176.88
8	0.764	64.50	241.38
9	0.690	77.96	319.34
10	0.600	96.03	415.37
11	0.504	104.80	520.17
12	0.419	97.41	617.58
13	0.343	92.85	710.43
14	0.273	92.20	802.63
15	0.215	86.23	888.86
16	0.169	80.67	969.53
17	0.129	81.45	1050.98
18	0.097	80.38	1131.36
19	0.071	81.15	1212.51
20	0.047	85.58	1298.09
21	0.029	85.38	1383.47
22	0.015	86.10	1469.57
23	0.007	83.78	1553.35
24	0.001	84.65	1638.00
25	0	81.70	1719.70

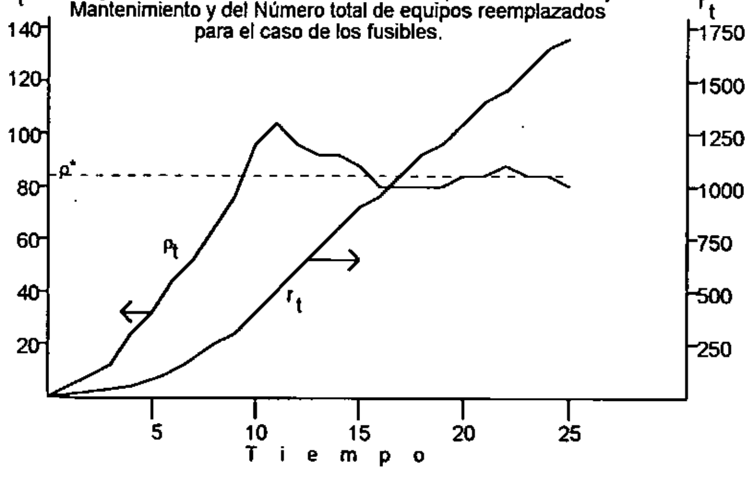
Una representación gráfica de la tasa de aprovisionamiento y del número total de equipos reemplazados se muestra en la figura XIX.5

Por su parte la tasa de mantenimiento la calcularemos mediante la fórmula (XIX.28), ya que el tiempo promedio de aparición de la avería para los fusibles era de 11.906, por lo cual tendremos:

$$\rho^* = \frac{1000}{11.906} = 83.96 \ \ equipos$$

Esta tasa también se muestra en la figura XIX.5.

Figura XIX.5.- Gráfica de las Tasas de Aprovisionamiento y Mantenimiento y del Número total de equipos reemplazados para el caso de los fusibles.



Reemplazo óptimo de los equipos en grupo.

Ahora presentaremos un estudio comparativo sobre el reemplazo de los equipos en servicio considerando 2 posibilidades: (a) Reemplazar los equipos en grupo; (b) hacerlo individualmente uno por uno.

Este estudio nos conducirá a determinar cuál es el tiempo óptimo para llevar a cabo el reemplazo.

Sin introducirnos en el desarrollo matemático de este tema, sólo daremos la fórmula que establece la condición que debe cumplir el tiempo óptimo de reemplazo, la cual es la siguiente:

$$S_{j-1} < \frac{C_a}{C_b} n_0 < S_j \qquad \text{Ec.(XIX.29)}$$

Donde:

S_j = Función de tiempo de reemplazo dada por la ecuación (XIX.30)
C = Costo de cada equipo si el reemplazo se realiza en grupo
C_b = Costo de cada equipo si el reemplazo se efectúa individualmente
n_0 = Número inicial de equipos

Por su parte la función del tiempo de reemplazo viene dada por la siguiente ecuación:

$$S_j = jr_j - (j+1)r_{j-1} \qquad \text{Ec.(XIX.30)}$$

Donde:

j = Lapso de tiempo respectivo
r_j = Número total de equipos reemplazados hasta el tiempo j

El procedimiento para determinar el tiempo óptimo de reemplazo será ir calculando para cada lapso de tiempo j, la correspondiente S_j para conocer en qué momento se satisface la condición planteada en la ecuación (XIX.29).

Por su parte el costo total del reemplazo de los equipos para un tiempo j, viene dado por la siguiente expresión matemática:

$$CT_j = C_a n_0 + C_b\, r_{j-i} \qquad \text{Ec.(XIX.31)}$$

Mientras que el costo por periodo será el cociente de este costo total dividido entre el número de periodos j, es decir:

$$C_j = \frac{CT_j}{j} = \frac{C_a n_0 + C_b r_{j-1}}{j} \qquad \text{Ec.(XIX.32)}$$

Este costo presenta un mínimo al momento en que se satisface la condición de optimalidad.

A continuación resolveremos un ejemplo ilustrativo de esta metodología.

Ejemplo XIX.10.- Para el caso de "Metales Potosinos", determinar cuál es el tiempo óptimo para el reemplazo de los equipos en grupo si el costo de cada equipo es de $ 5200.0 si se efectúa el reemplazo por grupos y de $ 7000.0 si se hace individualmente.

Solución:

Conforme al procedimiento explicado anteriormente, iremos calculando para cada lapso de tiempo j, la S_j correspondiente para ver en cual momento se satisface la condición de optimalidad señalada por la ecuación (XIX.29).

Para este caso tenemos

$$\frac{C_a}{C_b} n_0 = \frac{5200}{7000}(25) = 18.57$$

Para j=1, estimaremos S_1 por medio de la ecuación (XIX.30):

$$S_1 = r_1 - 2r_0 = 13 - 2(0) = 13$$

Donde las $\mathbf{r_j}$ se han tomado de la tabla XIX.9.

Por su parte el costo C_j lo calcularemos mediante la fórmula (XIX.32) para obtener:

$$C_1 = \frac{(5200)(25) + (7000)(0)}{1} = 130000 \ \$ \ / \ año$$

Ahora para j=2 tendremos:

$$S_2 = 2r_2 - 3r_1 = 2(25.25) - 3(13) = 11.50$$

Siendo el costo por periodo

$$C_2 = \frac{(5200)(25) + (7000)(13)}{2} = 110500 \ \$ \ / \ año$$

Ahora para j=3:

$$S_3 = 3r_3 - 4r_2 = 3(38.63) - 4(25.25) = 14.89$$

Mientras que el costo es

$$C_3 = \frac{(5200)(25) + (7000)(25.25)}{3} = 102250 \ \$ \ / \ año$$

Para j=4:

$$S_4 = 4r_4 - 5r_3 = 4(51.38) - 5(38.63) = 12.37$$

Y el costo

$$C_3 = \frac{(5200)(25) + (7000)(38.13)}{4} = 100102.50 \ \$ \ / \ año$$

Para j=5:

$$S_5 = 5r_5 - 6r_4 = 5(65.9) - 6(51.38) = 21.22$$

Siendo el costo

$$C_5 = \frac{(5200)(25) + (7000)(51.38)}{5} = 97932 \ \$ \ / \ año$$

Aquí vemos que se satisface ya la condición de optimalidad, pues

$$S_4 < \frac{C_a}{C_b} n_0 < S_5$$

$$2.37 < 18.57 < 21.22$$

Por lo que se debe efectuar el reemplazo por grupos al final del quinto periodo dando un mínimo para el costo por periodo, lo cual podemos comprobar si calculamos el costo respectivo del sexto periodo, esto es

$$C_6 = \frac{(5200)(25) + (7000)(65.9)}{6} = 98550 \ \$ \ / \ año$$

El cual al ser mayor que el anterior nos indica un mínimo en el quinto periodo.

PROBLEMAS PROPUESTOS

XIX.1.- El empresario Pablo Losada tiene una flotilla de camiones fleteros y necesita adquirir camionetas de carga ligera nuevas, para lo cual ha pensado en analizar las posibles marcas para elegir la que sea de costo mínimo anual, tiene 4 opciones las cuales son las marcas Chevere, Rápidas, Económicas y Eficient, las cuales tienen una vida útil similar de 5 años. Los costos de adquisición y mantenimiento anual, así como los valores de rescate se presentan en la tabla siguiente.

Costo de mantenimiento anual, M$/año

Marca	Costo de Adquisición, M$	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5	Valor de Rescate, M$
Chevere	150	3	6	12	22	35	48
Rápidas	130	2	5	8	15	30	38
Económica	160	5	7	10	14	22	45
Eficient	145	3	5	10	20	33	45

Si la tasa de interés vigente es del 28% anual y se supone constante para los 5 años, ¿Cuál es la marca de mínimo costo anual y cuál será el monto de éste?.

XIX.2.- Si para el caso anterior la tasa de interés fuera variable e igual al 24% para el primer año, 27% para el segundo, 32% para el tercero, 30% para el cuarto y 28% para el último año, ¿Cuáles serían las respuestas a las mismas preguntas del problema anterior?

XIX.3.- Juan Sánchez está buscando la opción más económica para adquirir un televisor de color de 25 pulgadas, para lo cual ha obtenido la información que se presenta en la siguiente tabla.

Costo anual de mantenimiento, $/año

Marca	Duración	Costo de compra, $	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5	Valor de Reventa, $
Sonora	5	5000	100	150	180	200	240	1200
Pesonic	5	4500	80	150	190	220	260	1000
Electric	4	3800	40	80	150	250	---	300

Si la tasa de interés es constante e igual al 22%, ¿cuál será su mejor alternativa y cuánto su costo total anual?

XIX.4.- Si para el caso anterior la tasa fuera variable, siendo del 24% en el primer año, el 27% el segundo, 32% el tercero, 30% el cuarto y del 28% el último año, ¿cuál será entonces la mejor opción y cuánto su costo?

XIX.5.- La Constructora Regional Potosina está buscando determinar el lapso de tiempo más adecuado para renovar sus máquinas revolvedoras, las cuales le cuestan actualmente 25,000.00 pesos cada una. De registros de costos de mantenimiento se tiene lo siguiente

Año	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Costo, $	3000	3300	3750	4200	4950	6000	7500	9000	11000	14000

¿Cuál será el tiempo óptimo de reemplazo y cuánto su costo total anual?

XIX.6.- Si para el problema anterior las tasas de interés cambiaran cada año y fuesen

Año	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tasa, %	16	17	18	20	22	24	25	27	30	33

¿Cuáles serían los valores del tiempo óptimo de reemplazo y el costo total anual?

XIX.7.- La empresa Ilumitodo ha hecho una prueba sobre la duración en servicio de focos de 60 watts y para 100 unidades que se han puesto a funcionar ha obtenido lo siguiente

Tiempo, Semanas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Focos en Servicio	100	98	92	82	69	53	33	18	10	4	0.

¿Cuáles serán los valores de las funciones de supervivencia y duración y el de las probabilidades de avería para estos lapsos de tiempo?

XIX.8.- Para el caso de los focos del problema anterior, calcular: (a) El tiempo promedio de aparición de la avería y su desviación estándar; (b) lo mismo del inciso anterior cuando se introduce un tiempo límite de funcionamiento de 8 semanas.

XIX.9.- La "Fábrica de Aceros Saposa" utiliza en su maquinaria microswitches del tipo BWR, por lo que ha decidido hacer un estudio sobre la duración de estas piezas y ha encontrado lo siguiente

Tiempo, meses	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Piezas en servicio	200	192	174	150	120	87	57	42	32	24	17	11	6	3	1	0

Determine para estos mismos tiempos los valores de las funciones de supervivencia y de duración de las piezas, así como también las probabilidades de avería.

XIX.10.- Para el problema anterior hallar: (a) El tiempo promedio de aparición de la avería y su desviación estándar; (b) lo mismo, cuando se fija un tiempo límite de funcionamiento para las piezas de 10 meses.

XIX.11.- Para el caso de los focos calcular las probabilidades de consumo de equipos nuevos para los casos siguientes: (a) Un reemplazo en 7 semanas; (b) 1 reemplazo en 10 semanas; (c) 2 reemplazos en 7 semanas; (d) 2 reemplazos en 10 semanas; (e) 3 reemplazos en 7 semanas; (f) 3 reemplazos en 10 semanas.

XIX.12.- Para el problema de los microswitches, hallar las probabilidades de consumo de equipos nuevos para los casos siguientes: (a) Un reemplazo en 5 meses; (b) 1 reemplazo en 10 meses; (c) 1 reemplazo en 15 meses; (d) 2 reemplazos de 5 meses; (e) 2 reemplazos en 10 meses; (f) 2 reemplazos en 15 meses; (g) 3 reemplazos en 5 meses; (h) 3 reemplazos en 10 meses; (i) 3 reemplazos en 15 meses.

XIX,13.- Para el caso de los focos, determine la sumatoria de las probabilidades de hacer cero, uno, dos y tres reemplazos en un tiempo de 7 semanas.

XIX.14.- Para los microswitches del problema XIX.9, determine la sumatoria de probabilidades de hacer cero, uno, dos y tres reemplazos en un lapso de tiempo de 10 meses.

XIX.15.- Para el problema de los focos, hallar: (a) El consumo promedio de equipos para un tiempo de 7 semanas; (b) el consumo promedio en un tiempo de 10 semanas; (c) la probabilidad de consumo en 7 semanas cuando ha habido un uso previo de los focos de 5 semanas; (d) la probabilidad de consumo en 10 semanas si ya hubo uso de los focos durante 10 semanas.

XIX.16.- Para el caso de los microswitches, hallar los siguientes consumos promedio de equipos: (a) Para un tiempo de 5 meses; (b) para 10 meses; (c) para 15 meses; (d) la probabilidad de consumo de piezas en 10 meses cuando han sido usadas anteriormente durante 5 meses; (e) la probabilidad de consumo para 15 meses si ya se usaron por 5 meses.

XIX.17.- La Compañía Distribuidora Nacional de Abarrotes dispone a nivel nacional de una infraestructura de distribución para hacer llegar sus productos a la clientela. Cuenta inicialmente con 300 camiones, los cuales desea mantener en este mismo número durante todo el tiempo. La función de supervivencia de los camiones se ha obtenido experimentalmente y es la siguiente.

Tiempo, años	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Función de supervivencia	1	0.92	0.80	0.64	0.48	0.30	0.18	0.12	0.07	0.03	0

Calcular: (a) Para cada año, la tasa de aprovisionamiento y el número total de equipos reemplazados; (b) el tiempo promedio de aparición de avería y la desviación estándar, (c) la tasa de mantenimiento para los equipos.

XIX.18.- "Cromados de Lujo" hace cromado de accesorios de automóviles, para lo cual utiliza moldes de cromado, de los cuales dispone en un principio de 150 y sus funciones de supervivencia y de utilización para diferentes tiempos son las siguientes

Tiempo, años	0	1	2	3	4	5	6
Función de Supervivencia	1	0.84	0.56	0.31	0.13	0.05	0
Función de Utilización	150	120	100	100	100	100	100

Calcúlese: (a) La tasa de aprovisionamiento y el número de moldes reemplazados en cada tiempo; (b) el tiempo promedio de aparición de la avería y su desviación estándar, (c) la tasa de mantenimiento de los moldes.

XIX.19.- Para la Compañía Distribuidora Nacional de Abarrotes obtenga cuándo deberá hacer el reemplazo de sus camiones en grupo que minimice el costo anual respectivo y el monto de éste, si el costo de cada camión individual es de $240,000 y en grupo de $150,000.

XIX.20.-Para "Cromados de Lujo" el costo individual de cada molde es de $2400 y si compra en grupo obtiene un precio de $1500 por cada uno, ¿cuándo deberá hacerse el reemplazo de los moldes en grupo y cuál será el costo anual correspondiente?

CAPITULO XX

SIMULACION

Introducción.

En este capítulo hablaremos sobre la simulación, la cual en las últimas décadas ha visto aumentar su uso y popularidad de una manera impresionante dentro de los ámbitos industrial y comercial, debido en buena medida al gran desarrollo de las computadoras, las cuales constituyen una herramienta valiosísima para la aplicación de esta técnica.

La simulación puede aplicarse a casi la totalidad de las áreas de cualquier empresa, tales como planeación corporativa, finanzas, contabilidad, personal, producción, mantenimiento, ventas, mercadotecnia, investigación y desarrollo, ingeniería y otras.

Por lo que respecta a la Investigación de Operaciones, la simulación puede aplicarse al estudio de sistemas de líneas de espera, modelos de inventarios, juegos de negocios, modelos de inversión, flujos de efectivo, análisis markovianos y otros que suelen ser de gran interés.

En este texto trataremos primeramente la definición de la simulación, sus características y usos más importantes y las etapas de las que consta el proceso. También se presentarán las partes que conforman un diagrama de flujo y la manera de elaborarlo. Posteriormente se verán algunos métodos para generar números aleatorios. Luego se tratará el método de Montecarlo, el cual juega un papel relevante en el proceso de la simulación. También se hablará sobre la forma de probar la bondad del ajuste que puede obtenerse con una serie de datos para representar una distribución de probabilidad dada. Finalmente se presentarán algunos casos en los que se aplica el proceso de simulación con la finalidad de ilustrar al lector de una manera apropiada sobre este tema, razón por la cual estos casos se solucionarán en forma manual.

Definición.

La simulación puede definirse como la representación de un fenómeno que sucede en el mundo real mediante un modelo matemático que iguale los resultados obtenidos con él a los valores reales.

Características de la simulación.

La simulación es muy útil para el administrador, ya que con la ayuda de una computadora es posible dar seguimiento a procesos que se asemejan a los que suceden en la vida real, con la gran ventaja de que no se corren riesgos, se evitan peligros y se ahorran gastos y tiempo, lo cual es muy conveniente para el investigador, quien además puede analizar las relaciones de causa - efecto del sistema que se está estudiando y con ello evaluar su comportamiento ante variaciones en sus principales parámetros operativos y de diseño, lo cual le dará una mejor visión de la situación. Por esto la simulación también puede usarse para el diseño de equipos, procedimientos y sistemas operativos de las empresas, lo cual redundará necesariamente en un incremento en la productividad de las mismas.

La simulación puede ser determinística, si la información que se maneja se conoce con precisión, o bien probabilística o estocástica, si los datos con los que se cuenta son de tipo probabilístico.

La simulación no consiste en teoremas ni leyes físicas, es más bien un proceso aplicado a mejorar sistemas existentes o diseñar nuevos mediante la experimentación y el análisis de los resultados obtenidos con ella. Es un proceso descriptivo, no normativo, que generalmente nos lleva a soluciones que aun cuando no sean las óptimas, podemos tener la certeza de que estarán muy próximas a ésta, lo cual lejos de ser una desventaja es lo contrario, ya que habrá casos para los cuales los procedimientos matemáticos no nos darán una solución analítica, siendo entonces la simulación la única opción viable para el administrador.

Es importante señalar que para que la simulación sea confiable, será necesario validar el modelo, esto significa el hecho de comparar sus resultados con valores reales conocidos, a fin de confirmar el grado de aproximación entre unos y otros.

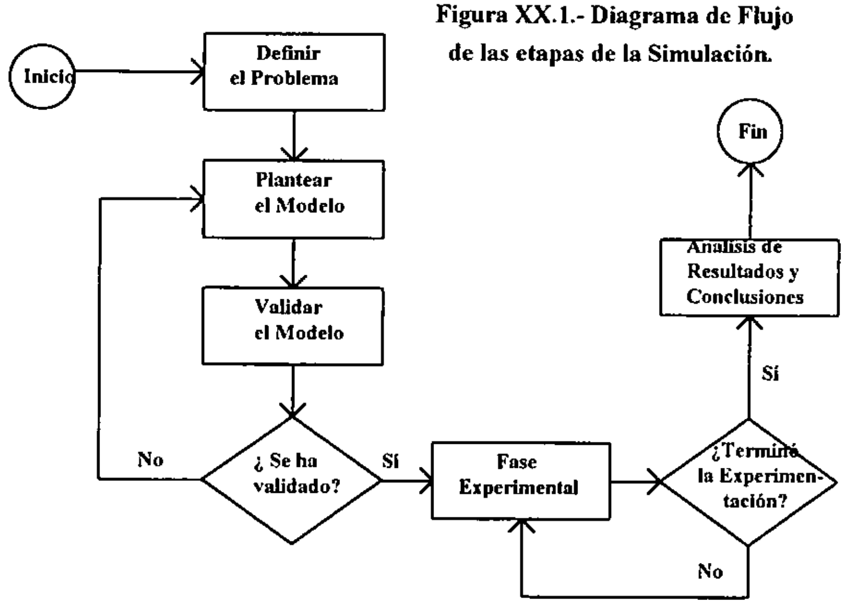
Todo modelo de simulación maneja eventos que van teniendo lugar a medida que el tiempo transcurre, para lo cual se incluyen incrementos de éste, los cuales pueden ser de dos tipos: (a) Fijos, también conocidos como secciones de tiempo; y (b) variables o de secuenciación de eventos. Los primeros deben utilizarse con incrementos de tiempo pequeños para poder lograr buenos resultados, esto aumenta el número de cálculos requeridos para resolver cualquier problema dado. Por su parte los segundos son los más empleados en la simulación y van registrando cada uno de los eventos que acontecen, sumándole al reloj los lapsos de tiempo necesarios para llevarlos a cabo.

Otra característica de los modelos de simulación es que entre mayor sea el tamaño de la corrida, sus resultados serán más confiables. El tamaño de una corrida se define por el número de iteraciones, siendo una iteración cada incremento de tiempo para el caso de los modelos de incrementos de tiempo fijos, o bien cada evento para los de incrementos variables. Todo modelo muestra en sus primeras iteraciones efectos transitorios, durante los cuales los valores de las variables estudiadas oscilan de una manera considerable, tendiendo a estabilizarse a medida que las iteraciones se van sucediendo. Por esta razón es conveniente utilizar un número adecuado de ellas al efectuar la corrida, lo cual no representa un gran problema, debido a la aparición en los últimos años de computadoras cada vez más potentes y versátiles que facilitan en buena medida estas tareas.

Etapas de la simulación.

Toda simulación consta de una serie de etapas que deben seguirse para llevarla a feliz término. Los diferentes autores sobre la materia están de acuerdo en un procedimiento que con sus variantes lógicas pudiera ser el de la figura XX.1.

Figura XX.1.- Diagrama de Flujo de las etapas de la Simulación.



La explicación de esta figura es la siguiente: El proceso de simulación se inicia definiendo el problema, paso que consiste en establecer claramente los objetivos que se pretenden alcanzar con la corrida, también en identificar aquella información que será necesaria para las etapas subsecuentes y especificar los límites y alcances del caso. Luego viene el paso del planteamiento del modelo, esto es definir los procedimientos lógicos y matemáticos del problema, así como la forma en que van a manejarse los datos. La etapa siguiente es la de la validación del modelo, la cual consiste en verificar que éste reproduzca fielmente la realidad, si esto no se consigue deberá replantearse el modelo, en caso contrario se va a la siguiente etapa la cual es la fase experimental donde deben definirse las variables que van a ser investigadas, cuando esto se ha conseguido, la etapa final es la del análisis de los resultados, para de aquí sacar las conclusiones pertinentes del caso, revisando si se alcanzaron los objetivos planteados desde un principio.

Diagramas de Flujo.

En todos los procesos de simulación es muy conveniente incluir un diagrama de flujo que indique el procedimiento que se sigue paso por paso.

Un diagrama de flujo es una representación gráfica del proceso que se efectúa para lograr un objetivo, como puede ser para nuestro caso el simular un problema cualquiera.

La figura XX.1 es un ejemplo de esto para señalar las etapas generales de simulación.

Todo diagrama de flujo se compone de varias partes que son las siguientes:

1.- Etapa de inicio o terminación del proceso o algoritmo, las cuales se representan mediante círculos.
2.- Etapas de ejecución, las que consisten en llevar a cabo una operación o actividad bien definida. Estas se señalan gráficamente por medio de rectángulos.
3.- Etapas lógicas o de decisión, las cuales al resolverse positiva o negativamente, de ello dependerá el curso de acción que se tome, pudiendo ser éste el volver a una etapa anterior o bien proseguir con el procedimiento. Suelen representarse por medio de rombos.
4.- Conexión entre las etapas, la cual se hace mediante flechas que indican el sentido del flujo de las operaciones.

Algunos autores incluyen etapas de entradas y salidas de información del proceso y representan éstas por paralelogramos, en la figura XX.1 éstas no han sido incluidas.

Como podemos ver, un diagrama de flujo para una simulación es muy parecido a aquellos que se utilizan para los programas computacionales.

Generación de Números Aleatorios.

En este inciso trataremos acerca de los números aleatorios, los cuales desempeñan un papel muy importante en la metodología de Montecarlo que veremos más adelante en este mismo capítulo, razón por la que ahora nos ocuparemos de ellos.

Un número aleatorio es por naturaleza un número que se elige al azar entre un universo de posibilidades de tamaño previamente definido. Así por ejemplo si deseáramos seleccionar un número aleatorio entre 10 posibilidades totales, podríamos hacer 10 trozos de papel, cada uno con un número distinto, introducirlos en un recipiente y sacar al azar uno de ellos, técnica conocida como **Números en un Sombrero.** Sin embargo para la simulación de casos, se requieren grandes cantidades de valores aleatorios, los cuales se generan mediante dispositivos especiales como es el caso de aleatorizadores electrónicos, así como también existen tablas de números aleatorios que incluyen una gran cantidad de ellos, como la tabla de la *Random Corporation*, la cual consta de un millón de dígitos.

No obstante lo anterior, ni los dispositivos especiales ni las tablas son lo más adecuado para efectuar la simulación en computadoras personales, ya que los primeros requerirían de adaptaciones especiales para ser instalados, mientras que las segundas necesitarían un espacio muy grande en memoria para poder ser almacenadas.

Es por esto que se han desarrollado métodos específicos para la generación de números aleatorios, los cuales mediante un algoritmo producen una serie de números que deberán pasar las pruebas respectivas de aleatoriedad, como son la de ser estadísticamente independientes y la de tener una distribución de probabilidad uniforme.

Hay dos métodos que son ampliamente conocidos para la generación de números aleatorios: El del **Cuadrado Medio** desarrollado por Von Neumann en 1946 y el **Congruencial** que fue propuesto por Lehmer en 1959. Estos algoritmos inician con un número cualquiera denominado *semilla* y van calculando el valor siguiente a partir del inmediato anterior, es por esta razón que a los números generados de esta manera suele llamárseles *seudoaleatorios*, ya que pueden predecirse.

De estos 2 métodos, el mejor es el *congruencial*, ya que satisface mejor las pruebas de aleatoriedad que el del *cuadrado medio*.

Método del Cuadrado Medio.

Consiste en los siguientes pasos:

1.- Definir el número de dígitos que tendrán los valores aleatorios de la serie que se va a generar. A este número de dígitos se le denotará como **n**.
2.- Elegir al azar el valor de la semilla o número aleatorio inicial, el cual deberá ser de **n** dígitos.
3.- Se eleva al cuadrado la semilla, este resultado por lo general será de **2n** dígitos. En caso de que el número de dígitos no contenga **2n** valores, se le agregarán ceros a la izquierda hasta completar la cantidad antes mencionada.
4.- Del número obtenido en el paso anterior, se tomarán los **n** dígitos centrales, siendo éste el nuevo número aleatorio.
5.- Con este número aleatorio se regresa al paso tercero para generar el siguiente valor de la serie. El algoritmo se repetirá tantas veces como sea necesario para generar la cantidad suficiente de valores según lo requiera el caso.

A continuación presentaremos un ejemplo ilustrativo.

Ejemplo XX.1.- Mediante el método del cuadrado medio genere 20 números aleatorios de 4 dígitos, con el valor de 864 como semilla.

Solución:

Conforme al procedimiento señalado anteriormente, los 2 primeros pasos ya están definidos en el planteamiento del problema, siendo **n**=4 dígitos y la semilla 0864, por lo cual iremos directamente al tercer paso, según el cual debemos elevar la semilla al cuadrado,

$$(0864)^2 = 746496$$

Este número es de 6 dígitos, por lo que de acuerdo al cuarto paso, le agregaremos dos ceros a la izquierda para completar 8, que es el valor de **2n**,

$$00746496$$

Del cual tomaremos los 4 dígitos centrales, tal y como quedó establecido en el quinto paso, por esto nuestro nuevo valor aleatorio será 7464.

De aquí regresaremos al tercer paso para elevar este valor al cuadrado para obtener:

$$(7464)2 = 55711296$$

El que ya es de 8 dígitos, por lo cual si tomamos los 4 de la parte central, el nuevo número aleatorio es el 7112.

Si proseguimos con el algoritmo se generan los 20 valores que se listan en la tabla siguiente:

Tabla XX.1.- Números aleatorios de 4 dígitos obtenidos.

0864	7204	5645	6098
7464	8976	8660	1856
7112	5685	9956	4447
5805	3192	1219	7758
6980	1888	4859	1865

Este método no es muy conveniente, ya que suelen ocurrir repeticiones y ciclos para series de valores que no son muy grandes, así para el ejemplo que hemos resuelto, si se hubiesen seguido generando más números, se obtendrían los valores que se indican en la tabla XX.2.

Tabla XX.2.- Valores siguientes de la serie de la tabla XX.1

4782	5980	6685	5600	3600
8675	7604	6892	3600	9600
2556	8208	4996	9600	1600
5331	3712	9600	1600	5600
4195	7789	1600	5600	3600

De la tabla vemos que cuando la serie genera el número 9600 se llega a un ciclo de 4 números diferentes, los cuales se repetirán indefinidamente. Esto nos da una clara idea de las desventajas del presente método.

En la simulación de casos, los números que deben generarse deben ser fracciones entre cero y la unidad, lo cual no significa ningún problema, ya que simplemente lo que se hace es manejar la misma cantidad de decimales como dígitos tenga el número aleatorio, así por ejemplo, si el valor aleatorio que se genera es el 0753, éste se tomará como 0.0753 para la corrida de simulación.

Método Congruencial.

Este método es superior al del cuadrado medio y se basa para el cálculo de un número aleatorio cualquiera en la siguiente fórmula general:

$$X_i = (a\, X_{i-1} + b)\ (\text{Módulo } M) \qquad \text{Ec.(XX.1)}$$

Donde:

X_i = **i** ésimo número aleatorio
a, b, M = Constantes
X_{i-1} = Número aleatorio inmediato anterior a **X_i**.

En esta ecuación el paréntesis correspondiente al módulo **M** significa que el valor del otro paréntesis (**$a\, X_{i-1} + b$**) se dividirá entre **M** y se tomará el residuo del cociente, el cual será el valor de **X_i** . Por su parte las constantes **a, b** y **M** se definen de varias formas según el método congruencial del que se trate. Así para el caso de que **b** sea cero, da lugar a los métodos congruenciales multiplicativos; mientras que cuando **a=1** y **b** es diferente a cero, se trata de los métodos aditivos; finalmente si **a** y **b** toman otros valores cualesquiera, aparece el método mixto. Por su parte el valor de **M** suele definirse como una potencia entera de 2, dependiendo del tipo de computadora que se utilice para la generación de los números aleatorios.

De los métodos congruenciales más conocidos se tiene el de *Learmouth-Lewis*, el cual se basa en la siguiente ecuación:

$$X_i = 75\, X_{i-1}\ (\text{Módulo } 231 - 1) \qquad \text{Ec.(XX.2)}$$

Esta fórmula da resultados muy satisfactorios que cumplen con las diversas pruebas estadísticas, razón por la cual se recomienda ampliamente su uso.

En el ejemplo XX.2 se presenta una ilustración simple de la forma de generar números aleatorios mediante un método congruencial.

Ejemplo XX.2.-Utilizando la misma semilla del ejemplo anterior, calcúlense 20 números aleatorios mediante el método congruencial con valores de a=5, b=3 y M=210 =1024.

Solución:

$$X_i = (5X_{i-1} + 3) \text{ (Módulo 1024)}$$

Si usamos la semilla del ejemplo anterior, $X_0 = 0864$, por lo que al aplicar esta última ecuación tendremos:

$$X_1 = \{(5)(864)+3\} \text{ (Módulo 1024)}$$
$$X_1 = (4323) \text{ (Módulo 1024)}$$

Entonces al dividir 4323 entre 1024 nos da como resultado, 4.2217, por lo que 1024 x 4 =4096, con lo cual el residuo será:

$$X_1 = 4323 - 4096 = 227$$

Para el siguiente número aleatorio tendremos:

$$X_2 = \{(5)(227)+3\} \text{ (Módulo 1024)}$$
$$X_2 = (1138) \text{ (Módulo 1024)}$$
$$X_2 = 1138 - 1024 = 114$$

Si se continúa con el mismo procedimiento, se generan los 20 valores que se muestran en la tabla siguiente:

Tabla XX.3.- Serie de 20 números aleatorios obtenidos con el método congruencial.

864	007	666	777
227	038	261	816
114	193	284	1011
573	968	399	962
820	747	974	717

Si esta serie se continuase se llegan a generar un total de 1024 diferentes números antes de que ocurran repeticiones, situación que nos muestra claramente las ventajas del método congruencial sobre el del cuadrado medio.

De hecho cuando se manejan valores de **a** y **b** que sean los indicados en la tabla XX.4 y que el módulo sea una potencia entera de 2, como pueden ser 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256,...., etc., se generarán exactamente la misma cantidad de números aleatorios que el valor del módulo antes de que sucedan repeticiones, esto se da independientemente del valor de la semilla que se seleccione.

Tabla XX.4.- Valores recomendados de **a** y **b** para el método congruencial.

a	**b**
1	1
5	3
9	5
13	7
17	9
21	11
25	13
29	15

De hecho los pares de valores de **a** y **b** se pueden aumentar a cantidades mayores si así se requiere, pero bajo la sucesión que se puede observar en la tabla anterior, en la cual **a** aumenta su valor en cuatro unidades cada vez, mientras que **b** lo hace en dos unidades.

Es conveniente señalar que el método congruencial no tiene el mismo funcionamiento para cualquier grupo de valores de **a**, **b** y **M**, ya que si por ejemplo se eligen **a**=2, **b**=4 y **M**=100, con una semilla de 45, el 23avo número de la serie será igual al tercero, siendo el número 92. Esto nos da una buena idea de la importancia de elegir adecuadamente los valores **a**, **b** y **M**.

Actualmente la mayoría de los fabricantes de computadoras ofrecen paquetes de programas generadores de números aleatorios los cuales están fácilmente disponibles para aplicaciones de simulación.

En este texto se incluye en el apéndice una tabla con 500 números aleatorios de 4 cifras cada uno, la cual se utilizará en la resolución de los casos de simulación que se presentarán en este capítulo, lo cual se efectuará en forma manual para fines ilustrativos.

Método de Montecarlo.

En los casos de simulación se manejan variables aleatorias cuya distribución de probabilidad es conocida, tal es el caso de la demanda de mercancías en un problema de inventarios, o bien el tiempo en el caso de las líneas de espera y en los de administración de proyectos mediante el método **PERT**, sólo por citar unos cuantos.

Para generar valores de esas variables aleatorias se utiliza una técnica denominada *Método de Montecarlo*, la cual apoyada en un generador de números aleatorios, convierte éstos por medio de una transformación simple en valores de la variable aleatoria.

Esta transformación suele hacerse de 3 formas distintas: *Gráfica, tabular* y de *transformación matemática*, cada una de las cuales explicaremos ahora.

Enfoque Gráfico.- En éste se construye una gráfica en la cual se coloca en el eje de las abcisas a la variable aleatoria de la cual se van a generar los valores y en el de las ordenadas a la probabilidad acumulada para la cual aplica cada uno de los valores de la variable aleatoria. Esta probabilidad acumulada será válida en un intervalo que irá desde el valor superior del intervalo inmediato anterior hasta el nivel de probabilidad acumulada que corresponde a cada valor de la variable aleatoria. Para el caso del primer valor de ésta, se tomará el intervalo desde cero hasta el valor de su probabilidad acumulada, la cual será igual a la probabilidad individual.

Por esto la representación gráfica irá aumentando en forma escalonada para los diferentes valores de la variable aleatoria, tal y como lo veremos al solucionar el ejemplo XX.3.

Así el procedimiento del Montecarlo para este enfoque consiste en los pasos siguientes:

1.- Generar un número aleatorio, el cual se tomará con los dígitos que contenga como la fracción entre cero y la unidad respectiva.
2.- Con el valor obtenido en el paso anterior, se entra a la gráfica por el eje de las ordenadas y se mueve uno paralelamente al eje de las abcisas hasta el escalón de la línea que corresponda.
3.- Al llegar al escalón nos moveremos ahora hacia abajo paralelamente al eje de las ordenadas hasta alcanzar el eje de las abcisas.
4.- Obtendremos el valor de la variable aleatoria leyéndolo en la escala del eje de las abcisas.

A continuación presentaremos un caso ilustrativo de este enfoque.

Ejemplo XX.3.- Para los datos del expendio de tortas "El Tigre", presentado en la tabla XIII.2, constrúyase la gráfica de la probabilidad acumulada vs. la demanda y obténgase el valor de ésta para el número aleatorio 0.5000.

Solución:

Listaremos en una tabla para cada demanda, su probabilidad individual, la probabilidad acumulada, la cual será la suma de las probabilidades individuales hasta ese nivel de demanda y los intervalos para los cuales aplican aquéllas.

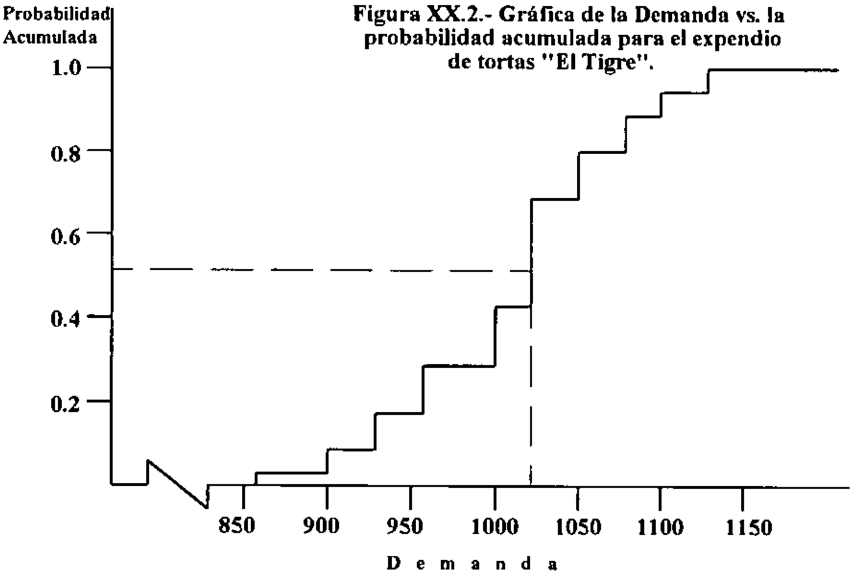
Tabla XX.5.-Valores de demandas y probabilidades para el expendio de tortas "El Tigre"

Demanda	Probabilidad individual	Probabilidad acumulada	Intervalo
860	0.02	0.02	0 -0.02
900	0.06	0.08	0.0201 - 0.08
930	0.08	0.16	0.0801 - 0.16
960	0.10	0.26	0.1601 - 0.26
1000	0.16	0.42	0.2601 - 0.42
1020	0.24	0.66	0.4201 - 0.66
1050	0.14	0.80	0.6601 - 0.80
1080	0.10	0.90	0.8001 - 0.90
1100	0.06	0.96	0.9001 - 0.96
1130	0.04	1.00	0.9601 - 1.00

Aquí hemos manejado 4 cifras decimales para diferenciar los intervalos para los cuales aplica cada valor de la demanda.

Si graficamos estos datos, obtendremos la línea que se muestra en la figura XX.2.

Figura XX.2.- Gráfica de la Demanda vs. la probabilidad acumulada para el expendio de tortas "El Tigre".



En esta figura hemos indicado mediante líneas punteadas el procedimiento de Montecarlo para el número aleatorio 0.5000, con este valor entramos en la gráfica por el eje vertical, moviéndonos paralelamente al eje horizontal hasta el escalón respectivo, a partir del cual bajamos paralelamente al eje de las ordenadas hasta el de las abcisas, donde leemos el valor correspondiente de la demanda, que es 1020, el cual corresponde a este número aleatorio.

Enfoque Tabular.- El enfoque tabular es muy similar al gráfico con la diferencia de que en este enfoque no es necesario elaborar la gráfica de la probabilidad acumulada vs. la variable aleatoria, sólo se construye la tabla respectiva, tal y como se hizo en el ejemplo anterior, obteniendo el valor de la variable aleatoria por medio del siguiente procedimiento.

1.- Se produce un número aleatorio mediante el generador respectivo, el cual se maneja como fracción entre cero y la unidad con el número de dígitos que contenga.
2.- Se analiza en cuál intervalo de probabilidad acumulada se halla el número aleatorio.
3.- El valor de la variable aleatoria que corresponda al intervalo localizado en el paso anterior, será el número buscado.

Por esta metodología nos damos cuenta fácilmente que en el caso del ejemplo anterior para el número aleatorio 0.5000, éste se sitúa en el intervalo de probabilidad acumulada que va desde 0.4201 hasta 0.6000, el cual corresponde a una demanda de 1020, por lo cual éste será el valor de la variable aleatoria buscado.

Enfoque de Transformación Matemática.- Este enfoque es el más adecuado para utilizarse en simulaciones por computadora, ya que se aplica para aquellos casos en los que la variable aleatoria de la cual se van a generar valores está definida por una función de distribución de probabilidad continua.

Entonces lo que se hace es obtener la función de probabilidad acumulada para la variable aleatoria, lo cual se logra al integrar la ecuación de la función de probabilidad, luego la función de probabilidad acumulada se iguala al valor del número aleatorio generado y de esta expresión algebraica se despeja a la variable aleatoria.

Este procedimiento matemático lo efectuaremos para el caso de algunas de las funciones de probabilidad continuas más usuales en el ámbito de la investigación de operaciones, como son la distribución uniforme, la exponencial negativa y la normal.

Función de Probabilidad Uniforme.

Para esta distribución de probabilidad, su función viene dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = 0 \qquad \text{para } 0 \leq x \leq U$$

$$f(x) = \frac{1}{V - U} \qquad \text{para } U \leq x \leq V \qquad \text{Ec. (XX.3)}$$

Donde:

$f(x)$ = Función de probabiliddd de la variable **x**.
U = Límite inferior de la distribución de probabilidad
V = Límite superior de la distribución de probabilidad

Por su parte la función de probabilidad acumulada **F(x)** será la integral de esta función de probabilidad, es decir:

$$F(x) = \int_U^x f(x)dx \qquad \text{Ec.(XX.4)}$$

Entonces al sustituir **f(x)** dada por la ecuación (XX.3) en esta última expresión y efectuar la integración entre los límites señalados obtendremos:

$$F(x) = \frac{x - U}{V - U} \qquad \text{Ec. (XX.5)}$$

Ahora esta ecuación se iguala al número aleatorio generado, el cual denotaremos como **r**, por lo que al despejar de ella a **x** tendremos:

$$x = U + r(V - U) \qquad \text{Ec. (XX.6)}$$

Siendo ésta la ecuación de transformación buscada, la cual nos permitirá convertir cualquier número aleatorio **r** en un valor de la variable aleatoria **x**.

Función de Probabilidad Exponencial Negativa.

Esta función de probabilidad tal y como se vio en al capítulo XVI, se define mediante la siguiente expresión:

$$f(x) = \mu \; Exp(-\mu \, x) \qquad \text{para } 0 \leq x \leq \infty \qquad \text{Ec. (XX.7)}$$

Siendo μ la media de la distribución. Por su parte la probabilidad acumulada **F(x)** será:

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx \qquad \text{Ec.(XX.8)}$$

La cual al integrarse nos dará:

$$F(x) = 1 - Exp(-\mu \, x) \qquad \text{Ec. (XX.9)}$$

Entonces si igualamos esta expresión con el número aleatorio generado **r** y luego despejamos a **x** obtendremos:

$$x = -\frac{1}{\mu} \ln(1 - r) \qquad \text{Ec. (XX.10)}$$

Puesto que la variable aleatoria es simétrica, es posible reemplazar en esta fórmula (1-r) por **r**, para obtener:

$$x = -\frac{1}{\mu} \ln r \qquad \text{Ec.(XX.11)}$$

La cual es la ecuación de transformación.

Esta ecuación resulta muy útil para la generación de valores de variables aleatorias que siguen una distribución de probabilidad exponencial negativa, así como también la de Poisson, dado que estas dos distribuciones son duales, por lo cual es muy empleada en la simulación de líneas de espera para generar valores de los tiempos entre las llegadas de los clientes y los tiempos de servicio, tal y como lo veremos más adelante en uno de los casos que se presentarán en este capítulo.

Función de Probabilidad Normal.

Para hacer la transformación matemática de la función de probabilidad normal, una de las formas más aceptadas es mediante la aplicación del teorema de límite central, del cual no se presentará el desarrollo matemático, sólo daremos la fórmula a la cual se llega, que es la siguiente:

$$x = \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \sum_{i=1}^{n} r_i + \left(x - \frac{n}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \right) \qquad \text{Ec. (XX.12)}$$

Donde:

x = Valor generado de la variable aleatoria
ri = i ésimo número aleatorio
n = Total de números aleatorios requerido
σ = Desviación estándar de los **n** números aleatorios
x = Media de los **n** números aleatorios

Esta ecuación da muy buenos resultados aun para pequeños valores de **n**, presentando algunos errores, sólo en los extremos de la distribución normal. Es usual definir **n** entre 5 y 10. Cuando se toma **n=12**, la ecuación anterior reduce a:

$$x = \sum_{i=1}^{12} r_i - 6 \qquad \text{Ec. (XX.13)}$$

Para la cual **x=0** y **σ =1**.

Esta expresión es muy simple ya que se toman 12 números aleatorios entre 0 y 1 y a su sumatoria se le restan 6 unidades, dándonos el valor de la variable aleatoria buscado. Esto aun cuando requiere de 12 números aleatorios para obtener solamente una estimación de la variable aleatoria, en realidad no significa ningún problema cuando la simulación se hace con una computadora.

Por su parte este valor de **x** generado no es directamente el valor de la variable aleatoria, ya que ésta se obtendrá mediante la siguiente transformación:

$$Z = xm + Ds\ x \qquad \text{Ec.(XX.14)}$$

Donde:

Z = Valor de la variable aleatoria generado para la simulación
x = Valor de la variable aleatoria generado mediante la ecuación (XX.13)
xm = Media de la variable aleatoria que se va a simular
Ds =Desviación estándar de la variable aleatoria que se va a simular

Ahora ilustraremos esta metodología con el caso siguiente:

Ejemplo XX.4.- Para los datos del ejemplo anterior sobre la demanda de tortas, generar 10 valores de ésta mediante la ecuación (XX.13).

Solución:

Lo primero será generar 10 valores de **x**, cada uno de los cuales requerirá 12 números aleatorios, los cuales se tomarán de la tabla respectiva que se halla en el apéndice. Entonces si tomamos los 12 primeros números aleatorios de la primera columna, éstos son:

0.4764, 0.8416, 0.9434, 0.3420, 0.6827, 0.8521, 0.1129, 0.5806, 0.9285, 0.6955, 0.5937 y 0.8044
cuya sumatoria es 7.8538, por lo que x se estima con la ecuación (XX.13), siendo igual a 1.8538.

Luego tomamos los siguientes números aleatorios de la segunda columna de la tabla mencionada, los cuales son:

0.6279, 0.8234, 0.5273, 0.1820, 0.6383, 0.1471, 0.3208, 0.8224, 0.6331, 0.5482, 0.3445 y 0.4611.
Para los cuales su sumatoria es 6.0761, resultando **x** igual a 0.0761.

Si procedemos de manera similar con las otras columnas de la tabla de números aleatorios se generan los siguientes valores para **x**:

Tercer valor de x = -0.5789
Cuarto valor de x = -0.3860
Quinto valor de x = -0.9888
Sexto valor de x = -0.0865
Séptimo valor de x = 1.4192
Octavo valor de x = 0.2136
Noveno valor de x = 0.2619
Décimo valor de x = 0.1890

Ahora con estos 10 valores de **x**, por medio de la fórmula (XX.14) obtendremos los valores respectivos de la demanda de tortas, para los que su media y desviación estándar tomadas del capítulo XIII eran:

$$\mathbf{xm} = 1012.60$$
$$\mathbf{DS} = 61.215$$

Por lo tanto para el primer valor de **x** tendremos:

$$\mathbf{Z} = 1012.60+(61.215)(1.8538) = 1126.1$$

Por su parte para el segundo valor se tiene:

$$\mathbf{Z} = 1012.60+(61.215)(0.0761) = 1017.3$$

Procediendo de igual forma se obtienen los siguientes valores:

Tercer valor de x =	977.2
Cuarto valor de x =	989.0
Quinto valor de x =	952.1
Sexto valor de x =	1007.3
Séptimo valor de x =	1099.5
Octavo valor de x =	1025.7
Noveno valor de x =	1028.6
Décimo valor de x =	1024.2

Para estos valores obtenidos de la demanda de tortas, su media es de 1024.7 y su desviación estándar es 50.05, debiéndose las diferencias respecto a los datos reales principalmente al hecho de ser pocos los valores que se han generado.

Pruebas de la Bondad del Ajuste.

En todos los eventos probabilísticos como son los problemas de inventarios, los fenómenos de líneas de espera, la demanda de mercancías por parte de los clientes y otros que se presentan en la vida diaria es usual el hecho de tratar de describirlos mediante alguna función de distribución de probabilidad conocida, lo cual nos puede simplificar en buena medida los cálculos que tienen que efectuarse para solucionar dichos casos. Por esta razón es aconsejable que si se va a representar un acontecimiento por medio de una de esas funciones, esto sea validado, es decir que se pruebe la bondad del ajuste que nos da la función mencionada respecto a los datos reales obtenidos experimentalmente.

Existen varias pruebas estadísticas para este propósito, una de las cuales es muy popular, ya que es muy confiable y simple a la vez, se trata de la **ji cuadrada,** $\chi 2$, la cual consiste en los siguientes pasos:

1.- Se agrupan los datos obtenidos experimentalmente en clases, cuidando que ninguna de ellas tenga menos de 5 observaciones. En caso de que esto suceda, se deberán agrupar las clases que estén en esta situación en una sola, para satisfacer este punto.

2.- Para cada clase de datos se obtiene el valor teórico correspondiente mediante la fórmula respectiva de la función de probabilidad que va a ser validada.

3.- Se calcula para cada clase de datos el valor de **ji cuadrada** X^2, por medio de la fórmula siguiente:

$$\chi_i^2 = \frac{(O_i - r_i)^2}{r_i} \qquad \text{Ec. (XX.15)}$$

$$\chi_i^{\,2} = \frac{(O_i - r_i)^2}{r_i} \qquad \text{Ec. (XX.15)}$$

Donde:

i = i ésima clase de datos
$\chi 2$ = Valor de ji cuadrada para la clase de datos **i**
Oi = Valor observado para la clase de datos **i**
ri = Valor teórico para la clase de datos i

4.- Se estima el número de grados de libertad con la siguiente expresión:

$$gl = n_c - n_p - 1 \qquad \text{Ec.(XX.16)}$$

Donde:

gl = Número de grados de libertad
nc = Número de clases de datos
np = Número de parámetros de la función de probabilidad

Aquí es conveniente aclarar que np es el número de parámetros necesarios para definir la función de probabilidad, así por ejemplo para el caso de la distribución de Poisson con definir λ podemos calcular las frecuencias de cada valor, por lo cual **np** es uno; para la distribución exponencial **np** es también la unidad, siendo μ el parámetro correspondiente; por su parte la distribución normal necesita dos parámetros, que son la media y la desviación estándar para hallar las frecuencias de cada valor, siendo **np**=2.

5.- Definir el nivel de significancia α, de la prueba de ajuste. Aquí (1-α) será el grado de confianza de la prueba. Es usual definir α=0.05, esto representa un 95% de nivel de confiabilidad en la prueba.
6.- Obtener de tablas estadísticas tales como la que se incluye en el apéndice de este texto, el valor de ji cuadrada teórica, denotada como χ**t 2**.
7.- Comparar la ji cuadrada teórica con la calculada χ**c2**, la cual se obtiene como la sumatoria de las **jis** cuadradas individuales obtenidas en el tercer paso, conforme a la ecuación siguiente.

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{n_c} \chi_i^2 \qquad \text{Ec. (XX.17)}$$

Si la χ**t 2** > χc **2,** se acepta la prueba estadística de ajuste para el nivel de confianza manejado, en caso contrario se rechaza.

A continuación presentaremos un par de ejemplos de este tipo de pruebas para el caso 2 de las funciones de probabilidad más utilizadas en la investigación de operaciones: La exponencial y la normal.

Ejemplo XX.5.- Validar mediante la prueba de la **ji cuadrada** si los datos siguientes de servicio a clientes en una oficina gubernamental pueden representarse por una función exponencial con una tasa de servicio de 0.333 clientes por minuto para un nivel de confianza del 95%.

Tiempo de servicio, minutos	Frecuencia Observada
1	18
2	15
3	12

Solución:

Aplicaremos la metodología de la **ji cuadrada** descrita anteriormente, según la cual conforme al primer paso hay en la tabla 6 clases de datos, las cuales cumplen con el requisito de tener como mínimo 5 observaciones cada una, por lo que no será necesario hacer agrupaciones de varias clases en una sola.

Luego conforme al segundo paso deberemos calcular para cada clase del los datos, la frecuencia teórica mediante la fórmula de la función exponencial, la cual es la siguiente:

$$f(t_i) = Exp(-\mu\, t_i - 1) - Exp(-\mu\, t_i) \qquad \text{Ec. (XX.18)}$$

Siendo:

f**(ti)** = Probabilidad de que suceda el evento i
ti = Tiempo del evento **i**
μ = Tasa de servicio

Por su parte la frecuencia teórica **ri** se calculará simplemente mediante la multiplicación de la función f**(ti)** por el número total de observaciones **nt**, es decir,

$$ri = f(ti)nt \qquad \text{Ec. (XX.19)}$$

Siendo **nt** igual a 70 para este caso.

Entonces procedemos a calcular el valor de **ri** para cada una de las clases de los datos.
Para **i=1**, tendremos.

$$f(t_1) = Exp(0) - Exp[-(0.333)(1)] = 0.28347$$

Por su parte **r1** será

$$r_1 = f(t_1)n_t = (0.28347)(70) = 19.843$$

Para **i=2**:

$$f(t_2) = Exp[-(0.333)(1)] - Exp[-(0.333)(2)] = 0.20311$$

$$r^2 = f(t_2)\, n_t = (0.20311)(70) = 14.218$$

Para **i=3**:

$$f(t_3) = Exp[-(0.333)(2)] - Exp[-(0.333)(3)] = 0.14554$$

$$r_3 = f(t_3)n_t = (0.14554)(70) = 10.188$$

Para **i=4**:

$$f(t_4) = Exp[-(0.333)(3)] - Exp[-(0.333)(4)] = 0.10428$$

$$r_4 = f(t_4)n_t = (0.10428)(70) = 7.300$$

Para **i=5**:

$$f(t_5) = Exp[-(0.333)(4)] - Exp[-(0.333)(5)] = 0.07472$$

$$r_5 = f(t_5)n_t = (0.07472)(70) = 5.230$$

Para **i=6**:

$$f(t_6) = Exp[-(0.333)(5)] = 0.18888$$

$$r_6 = f(t_6)n_t = (0.18888)(70) = 13.221$$

En esta clase la estimación agrupa a todos los tiempos restantes, es decir 6 minutos o más, por lo cual se calculó tomando como minuendo para la resta de las exponenciales a *Exp*(-∞) que es cero.

Ahora conforme al paso siguiente calcularemos para cada clase de datos el valor de **χt 2** por medio de la ecuación (XX.15), considerando los valores de la frecuencia observada como las respectivas oi. Entonces tendremos:

Para i=1:

$$\chi_i^2 = \frac{(o_1 - r_1)^2}{r_1} = \frac{(18 - 19.843)^2}{19.843} = 0.171$$

Para i=2:

$$\chi_2^2 = \frac{(o_2 - r_2)^2}{r_2} = \frac{(15 - 14.218)^2}{14.218} = 0.043$$

Para i=3:

$$\chi_3^2 = \frac{(o_3 - r_3)^2}{r_3} = \frac{(12 - 10.188)^2}{10.188} = 0.322$$

Para i=4:

$$\chi_4^2 = \frac{(o_4 - r_4)^2}{r_4} = \frac{(10 - 7.300)^2}{7.300} = 0.999$$

Para i=5:

$$\chi_5^2 = \frac{(o_5 - r_5)^2}{r_5} = \frac{(8 - 5.230)^2}{5.230} = 1.467$$

Para i=6:

$$\chi_6^2 = \frac{(o_6 - r_6)^2}{r_6} = \frac{(7 - 13.221)^2}{13.221} = 2.927$$

Luego de acuerdo al cuarto paso, el número de grados de libertad será:

$$gl = nc - np - 1 = 6 - 1 - 1 = 4$$

Entonces según los dos pasos siguientes, si buscamos en las tablas de **ji cuadrada** para α=0.05 con 4 grados de libertad, obtendremos.

$$\chi t\ 2 = 9.488$$

Después conforme al último paso, estimaremos la **χt 2** mediante la fórmula (XX.17), para obtener:

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{n_c} \chi_i^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 + \chi_4^2 + \chi_5^2 + \chi_6^2$$
$$= 0.171 + 0.043 + 0.322 + 0.999 + 1.467 + 2.927 = 5.929$$

Si hacemos la comparación, veremos que la **ji cuadrada** calculada es menor que la teórica, por lo tanto el ajuste de la distribución DEBE SER ACEPTADO.

Ejemplo XX.6.- Analizar si los datos siguientes se ajustan a una distribución normal para un nivel de significancia de 0.05.

Clase de datos, i	Rango de clase	Punto intermedio, Xi	Frecuencia observada, oi
1	800-850	825	5
2	850-900	875	10
3	900-950	925	18
4	950-1000	975	36
5	1000-1050	1025	16
6	1050-1100	1075	9
7	1100-1150	1125	6

Solución:

Para estos datos la media $\overline{X}$ y la desviación estándar σ se calculan en la forma tradicional tomando cada Xi como el valor intermedio del rango de cada clase de los datos, con lo que se obtiene:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i o_i}{\sum_{i=1}^{n} o_i} \qquad \text{Ec..X.20)}$$

$$\overline{X} = \frac{825x5 + 875x10 + 925x18 + 975x36 + 1025x16 + 1075x9 + 1125x6}{5 + 10 + 18 + 36 + 16 + 9 + 6} = 975$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 o_i}{\sum_{i=1}^{n} o_i}} \qquad \text{Ec.(XX.21)}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(-150)^2(5) + (-100)^2(10) + (-50)^2(18) + (0)^2(36) + (50)^2(16) + (100)^2(9) + (150)^2(6)}{5 + 10 + 18 + 36 + 16 + 9 + 6}} = 72.28$$

En estas fórmulas **n** es el número de clases de datos, la cual es 7 para este problema.

Aquí vemos que ninguna de las clases tiene menos de 5 observaciones, por lo que no hubo que hacer agrupaciones.

Para obtener el valor teórico de la función normal, lo primero que haremos será obtener para cada límite de las diferentes clases, el valor de su variable normalizada **Z**, conforme a la siguiente expresión:

$$Z = \frac{l - \overline{X}}{\sigma} \qquad \text{Ec.(XX.22)}$$

Siendo l el límite respectivo.

Luego con este valor de **Z**, se obtiene su porcentaje del área bajo la curva normal, la cual se lee en tablas adecuadas, tal como se anexa en el apéndice de este texto. Este porcentaje de área representa la probabilidad acumulada. Después se obtiene la probabilidad teórica de cada clase efectuando la diferencia entre los valores de probabilidad acumulada de los límites superior e inferior.

Este procedimiento lo ilustraremos para la primera clase, para la cual su límite inferior es 800, de modo que **Z** será:

$$Z = \frac{l - \overline{X}}{\sigma} = \frac{800 - 975}{72.28} = -2.421$$

Este valor de **Z** corresponde a una área bajo la curva de 0.0078.

Luego para el límite superior de 850, tendremos:

$$Z = \frac{l - \overline{X}}{\sigma} = \frac{850 - 975}{72.28} = -1.729$$

La que corresponde a una área bajo la curva de 0.0419.

Por lo tanto el valor de la probabilidad teórica para cada clase será la diferencia de áreas entre el límite superior y el inferior, pero por el hecho de tratarse en este caso de la primera clase de datos, la probabilidad será directamente la del límite superior, es decir

$$r1 = 0.0419$$

Si procedemos de manera análoga, se obtienen los datos que se presentan en la tabla XX.6

Tabla XX.6.- Datos y valores calculados para la distribución normal.

Clase, i	Rango de clase	Punto inter-medio, **Xi**	Frecuencia observada, **oi**	Límites de clase	**Z**	Area bajo la curva	Frecuencia teórica, **ri**	$\chi c2$
				800	-2.421	0.0078		
1	800-850	825	5				4.19	0.16
				850	-1.729	0.0419		
2	850-900	875	10				10.78	0.06
				900	-1.038	0.1497		
3	900-950	925	18				21.50	0.57
				950	-0.346	0.3647		
4	950-1000	975	36				27.06	2.95
				1000	0.346	0.6353		
5	1000-1050	1025	16				21.50	1.41
				1050	1.038	0.8503		
6	1050-1100	1075	9				10.78	0.29
				1100	1.729	0.9581		
7	1100-1150	1125	6				4.19	0.78
				1150	2.421	0.9922		
			100				100	6.22

En esta tabla ya se han calculado los valores de la **ji cuadrada** mediante la ecuación (XX.15), siendo su sumatoria igual a 6.22.

Para este caso el número de grados de libertad es:

$$gl = nc - np - 1 = 7-2-1=4$$

Entonces para 4 grados de libertad y un nivel de significancia de 0.05, la **ji cuadrada** teórica obtenida de la tabla respectiva del apéndice es:

$$\chi_t^2 = 9.488$$

La cual por ser mayor que la calculada, nos indica que el ajuste DEBE SER ACEPTADO.

Casos de Simulación.

Ahora presentaremos varios ejemplos de casos de simulación los cuales se resolverán en forma manual con la finalidad de ilustrar su planteamiento y solución.

Estos casos son 5 en total y tratan sobre algunos temas de la investigación operativa, tales como líneas de espera, teoría de decisiones y modelos de inventarios. En realidad cualquier problema que contenga variables probabilísticas puede ser manejado como simulación.

A continuación veremos estos ejemplos.

CASO DE UN VENDEDOR DOMICILIARIO

Ejemplo XX.7.- Un vendedor domiciliario de artículos de cocina maneja 3 diferentes mercancías, las cuales según sus registros vende con las frecuencias que se señalan en la tabla XX.7, en la que también se presentan las ganancias que le dan al vendedor por cada artículo.

Tabla XX.7.- Registros de ventas del vendedor domiciliario.

Artículo	Probabilidad de venta	Ganancia $/art.
Juego de cubiertos	0.45	35.00
Batería de cocina	0.35	50.00
Vajilla	0.20	100.00

El vendedor también dispone de la siguiente información:

Cuando él toca a la puerta, le abren en un 45% de las veces. De las ocasiones en que le abren, un 30% lo hacen hombres y un 70% mujeres. Cuando es un hombre quien sale a la puerta, el vendedor realiza una venta en un 20% de las veces, mientras que cuando sale una mujer lo logra en un 40% del tiempo.

Simúlese 25 visitas del vendedor.

Solución:

En este caso hay varias etapas que se irán simulando bajo el enfoque tabular de la metodología de Montecarlo, los cuales sucederán en el orden siguiente:

1.- El vendedor llama a la puerta. Generaremos un número aleatorio de la columna 9 de la tabla del apéndice, si el valor está entre 0 y 4500, sí le abrirán la puerta, en caso que el número sea entre 4501 y 9999, entonces no le abrirán. Si abrieron la puerta iremos al paso siguiente, en caso contrario repetiremos este paso para la visita siguiente.

2.- Dado que llegamos a este paso debido a que han abierto la puerta, ahora simularemos quién lo hizo, por lo cual tomaremos un número aleatorio de la columna 10 de la tabla respectiva, el cual si se halla entre 0 y 3000, indicará que un hombre ha salido a la puerta, en caso que el valor aleatorio sea entre 3001 y 9999, habrá sido una mujer.

3.- Ahora veremos si se logra la venta. Si un hombre fue quien abrió la puerta, obtendremos un número aleatorio, leyéndolo ahora de la columna de la tabla, el cual si su valor está entre 0 y 2000, la venta se habrá obtenido, en caso que el número haya sido entre 20001 y 9999, entonces no se habrá logrado. Por su parte, si fue una mujer quien salió a la puerta, tomaremos el número aleatorio de la misma columna de la tabla y si su valor se halla entre 0 y 4000, significará que la venta se ha logrado, en caso que el número se halle entre 4001 y 9999, la venta no se habrá logrado. Si la venta se ha obtenido, iremos al paso siguiente, en caso contrario, simularemos la siguiente visita desde el primer paso.

4.- Dado que llegamos aquí porque la venta se ha efectuado, haremos una última simulación para saber qué artículo es el que se ha vendido, por lo que tomaremos otro número aleatorio de la tabla, el cual leeremos de la sexta columna, si su valor se halla entre 0 y 4500, se habrá vendido un juego de cubiertos, si el número está entre 4501 y 8000, será una batería de cocina y si el valor aleatorio se halla entre 8001 y 9999, el artículo vendido será una vajilla.

Procederemos ahora a hacer lo señalado anteriormente para la primera visita domiciliaria del vendedor: Conforme al primer paso, tomaremos el primer número aleatorio de la novena columna de la tabla del apéndice, en la cual leemos 6049, por lo que la puerta no se abrirá, por lo que repetiremos este paso nuevamente para la segunda visita, volviendo a leer otro valor aleatorio de la misma columna el cual es el 8767, por lo cual la puerta tampoco se abrirá en esta ocasión, por lo que tomando el número aleatorio siguiente para la tercera visita, éste es el 2006, por lo que la puerta ahora sí será abierta, de aquí iremos a la etapa segunda, según la cual leeremos un número aleatorio de la décima columna de la tabla, el cual será el 7488, por lo cual será una mujer quien halla salido a la puerta. Luego de acuerdo al tercer paso, tomaremos un valor aleatorio de la quinta columna de la tabla, leyendo en ella el número 1634, el cual corresponde a una respuesta positiva a la proposición de venta del vendedor. Finalmente y conforme al cuarto paso del procedimiento indicado leeremos un número aleatorio de la columna 6 de la tabla, el cual será el 2396, que corresponde a que el artículo vendido habrá sido un juego de cubiertos, el que dará al vendedor una ganancia de $35.00.

Si repetimos este procedimiento se obtendrán los resultados que se presentan en la tabla XX.8, a los cuales el lector puede dar seguimiento fácilmente.

Tabla XX.8.- Resultados del ejemplo XX.7.

Número de visita	No. aleatorio columna 9	¿Abren la puerta?	No. aleatorio columna 10	¿Quién abrió?	No. aleatorio columna 5	¿Hubo venta?	No. aleatorio columna 6	¿Qué artículo se vende?	Ganancia N$
1	6049	No	---	---	---	---	---	---	---
2	8767	No	---	---	---	---	---	---	---
3	2006	Sí	7488	Mujer	1634	Sí	2396	Cub.	35.00
4	5730	No	---	---	---	---	---	---	---
5	0495	Sí	2934	Hombre	7344	No	---	---	---
6	3101	Sí	7914	Mujer	2809	Sí	5582	Bat.	50.00
7	4610	No	---	---	---	---	---	---	---
8	4470	Sí	1305	Hombre	0746	Sí	7556	Bat.	50.00
9	8980	No	---	---	---	---	---	---	---
10	9966	No	---	---	---	---	---	---	---
11	5169	No	---	---	---	---	---	---	---
12	3276	Sí	5501	Mujer	3049	Sí	7468	Bat.	50.00
13	7886	No	---	---	---	---	---	---	---
14	8456	No	---	---	---	---	---	---	---
15	3884	Sí	7983	Mujer	6203	No	---	---	---
16	1254	Sí	5684	Mujer	2923	Sí	0858	Cub.	35.00
17	3691	Sí	1598	Hombre	6696	No	---	---	---
18	3666	Sí	6963	Mujer	4031	No	---	---	---
19	9208	No	---	---	---	---	---	---	---
20	3189	Sí	6852	Mujer	2875	Sí	4840	Bat.	50.00
21	1403	Sí	3131	Mujer	3496	Sí	0382	Cub.	35.00
22	3751	Sí	4537	Mujer	8306	No	---	---	---
23	6926	No	---	---	---	---	---	---	---
24	1609	Sí	3739	Mujer	4229	No	---	---	---
25	5649	No	---	---	---	---	---	---	---
Totales	---	13 Sí	---	3 Hom. y	---	7 Sí y	---	3 Cub. y	305.00
		12 No		10 Muj.		6 No.		4 Bat.	

En el último renglón de esta tabla se han sumarizado los totales de cada columna simulada, donde vemos que de las 25 visitas en 13 de las ocasiones han contestado el llamado del vendedor a la puerta, habiendo sido 3 veces un hombre y 10 veces una mujer. En estas 13 respuestas, en 7 de las veces se ha logrado la venta, siendo los artículos vendidos 3 juegos de cubiertos y 4 baterías, lo que ha significado para el vendedor una ganancia de $ 305.00.

En este caso los resultados analíticos hubieran sido distintos, ya que de las 25 visitas, responderían a la puerta 11.25 veces y las 13.75 restantes no. De estas 11.25 respuestas, 3.375 sería un hombre y 7.875 veces una mujer. De las salidas de hombres a la puerta, se lograría la venta en 0.675 veces y de las mujeres en 3.15 ocasiones, con lo cual habría una venta en 3.825 de las veces. Finalmente de estas ocasiones de venta serían 1.72 juegos de cubiertos, 1.34 baterías y 0.765 vajillas para una ganancia de $ 203.70.

Con esto vemos que los resultados analíticos no son muy parecidos a los obtenidos con la corrida de simulación, lo cual se debe principalmente al bajo número de visitas simuladas, ya que si el número de ellas se incrementara, los resultados se asemejarían más a los analíticos.

CASO DE UN JUEGO DE APUESTAS

Ejemplo XX.8.- Un juego de apuestas se define de modo que se lanza un dado hasta en 15 ocasiones. Para que el jugador A gane, necesita que antes de ese número de lanzamientos salgan 4 veces consecutivas números nones o pares, de lo contrario perderá esa serie. Simúlense 5 series del juego.

Solución:

Mediante la lectura de números aleatorios tomados de la tercera columna de la tabla del apéndice, convertiremos éstos en un número del dado, como éste tiene seis caras, las cuales son igualmente probables (suponiendo que el dado no esté defectuoso), entonces tomaremos como base para la transformación la tabla siguiente.

Rango de Números Aleatorios del dado	Número simulado
0 -1666	1
1667 - 3333	2
3334 - 5000	3
5001 - 6667	4
6668 - 8333	5
8334 - 9999	6

Con lo cual podemos iniciar el juego. Entonces el primer número aleatorio de la tercera columna de la tabla respectiva es el 4446, que corresponde a una tirada de un 3 del dado, que es un número non; luego el siguiente número aleatorio es el 6427, que corresponde a un 4 que es par; después el siguiente número aleatorio leído es el 5902, que representa un lanzamiento de un 4, que también es par, teniendo con éste 2 pares consecutivos; luego leemos el número 0318, que se transforma en un 1 del dado, siendo non, con lo cual se rompe la racha que se llevaba de números consecutivos; el siguiente valor aleatorio es el 5901, que corresponde al número 4 del dado, siendo par; luego sigue el número aleatorio 3044, que corresponde al 2 del dado siendo par también ; luego viene el número 1699, que se convierte en un lanzamiento de un 2 del dado, siendo el tercer par consecutivo; el siguiente valor aleatorio es el 5783, que representa una tirada de un 4 del dado siendo el cuarto par consecutivo en 8 tiradas, por lo que esta primera serie de las apuestas la gana el jugador **A**.

Si se continúa con las series restantes se generan los resultados que se sintetizan en la tabla XX.9, en la cual vemos que al cabo de las 5 series simuladas el jugador **A** ganará 3 de ellas y el **B** las otras 2, por lo que el resultado neto será de una serie a favor del jugador **A**.

Tabla XX.9.- Resultados del juego del ejemplo XX.

	Primera serie		Segunda serie		Tercera serie		Cuarta serie		Quinta serie	
Lanzamiento	No. Aleatorio	No. del dado	No. Aleat.	No. del dado	No. Aleat.	No. del dado	No. Aleat.	No. del dado	No. Aleat.	No. del dado
1	4446	3	8764	6	4890	3	0927	1	3768	3
2	6427	4	2161	2	9776	6	7016	5	2195	2
3	5902	4	3694	3	2229	2	4141	3	3828	3
4	0318	1	6072	4	2966	2	4020	3	1475	1
5	5901	4	8224	5	0140	1			3216	2
6	3044	2	1455	1	4011	3			6002	4
7	1699	2	1443	1	7544	5			3188	2
8	5783	4	6255	4	1074	1			1513	1
9			6251	4					6474	4
10			1108	1					8907	6
11			5595	4					7463	5
12			1456	1					9956	6
13			4637	3					6363	4
14			6472	4					5897	4
15			0933	1					8300	5
Result.	---	Gana A	---	Gana B	---	Gana A		Gana A	---	Gana B

CASO DE LINEAS DE ESPERA

Ejemplo XX.9.- Simular la línea de espera para los primeros 50 clientes en el caso del "Minisuper de Rioverde" visto en el ejemplo XVI.5, para el cual $\lambda=9$ clientes/hora y $\mu=12$ clientes/hora y comparar los resultados con los analíticos.

Solución:

Para simular un ejemplo de este tipo de línea de espera M/M/1, utilizaremos la ecuación de transformación (XX.11) dada para la distribución exponencial, con la cual generaremos a partir de números aleatorios, los tiempos entre las llegadas da cada cliente, así como también los tiempos de servicio. Esta ecuación adaptada a nuestro caso es la siguiente:

$$X = -\frac{60}{\lambda \text{ o } \mu} \ln r$$

Donde **X** será el valor del tiempo entre llegadas o de servicio, según se use en el denominador **λ o μ**, por su parte el 60 del numerador se ha puesto ahí para la conversión de los tiempos generados a minutos y **r** será el número aleatorio tomado de la tabla del apéndice, para lo cual leeremos de la primera columna para los tiempos entre las llegadas de los clientes y de la segunda para los tiempos de servicio. Estos valores aleatorios se tomarán como la fracción de la unidad para su utilización en la ecuación anterior.

Siendo ésta la situación, procederemos a efectuar la simulación de la línea de espera, para lo cual leeremos el primer número aleatorio de la primera columna de la tabla citada, para obtener

$$X = -\frac{60}{\lambda}\ln r = -\frac{60}{9}\ln(0.4764) = 4.94 \ min.$$

Por lo cual si el negocio abre sus puertas al público a las 7:00 A.M., el primer cliente al que denominaremos **A**, llegará a las 7:04.94 horas.

Luego su tiempo de servicio lo estimaremos tomando el primer número aleatorio de la segunda columna de la tabla para obtener.

$$X = -\frac{60}{\mu}\ln r = -\frac{60}{12}\ln(0.6279) = 2.33 \ \textit{min.}$$

Por lo que si el cliente llega a las 7:04.94 a la caja y se le da servicio en 2.33 minutos, saldrá a las 7:07.27 horas.

Por su parte para el segundo cliente **B**, tomaremos el siguiente número aleatorio de la primera columna para obtener

$$X = -\frac{60}{9}\ln(0.8416) = 1.1 \quad \textit{min.}$$

Por lo cual su llegada será al tiempo del cliente anterior más este nuevo valor, es decir a las 7:06.09. Aquí nos damos cuenta que **B** llegará a la caja del establecimiento antes de que salga **A**, por lo que será el primer cliente en la línea de espera.

Para este cliente su tiempo de servicio lo estimaremos de la misma manera con el siguiente número aleatorio de la segunda columna de la tabla respectiva, esto es

$$X = -\frac{60}{12}\ln(0.8234) = 0.97\textit{min.}$$

Sólo que el cliente entrará a la caja tan pronto como haya salido el anterior, es decir a las 7:07.27, saliendo de ella al tiempo obtenido mediante la suma de este último valor más el tiempo de servicio estimado para B, es decir 7:07.27+0.97=7:08.24. Por lo tanto B tendrá que esperar un tiempo igual a la diferencia de su tiempo de entrada al servicio menos el tiempo de su llegada al mismo, es decir 7:07.27-7:06.09=1.18 minutos.

Si continuamos con este procedimiento y colocamos los resultados en forma tabular, se generan los valores que se presentan en la tabla XX.10, de la cual puede seguirse el curso de la simulación fácilmente. En ella se han puesto en un mismo renglón el tiempo de servicio de los clientes y el de llegada del cliente siguiente, con el objeto de programar en el reloj simulado el primer evento que suceda, el cual puede ser la llegada del próximo cliente, o bien la salida del cliente actual.

En esta tabla el tiempo de la siguiente llegada de un cliente dado es la suma del tiempo de llegada del cliente anterior más el tiempo entre llegadas generado para el cliente; mientras que el tiempo de salida del servicio es la suma del tiempo de servicio más el tiempo de entrada al mismo; por su parte el tiempo que permanece un cliente en la línea de espera se obtiene mediante la resta del tiempo en que dicho cliente entra al servicio menos el tiempo de su llegada al negocio.

En la tabla también se ha incluido en la última columna el suceso que originó algún cambio en el sistema, ya sea que se trate de la llegada de un nuevo cliente, o bien de la salida de un cliente del establecimiento.

De esta tabla podemos estimar los tiempos promedio de servicio mediante el cociente de la sumatoria de los tiempos de cada cliente entre el número de ellos, esto nos da

$$\frac{255.07}{50} = 5.10 \ \textit{minutos / cliente}$$

El número de clientes promedio en la línea de espera se obtiene sumando los minutos de 0, 1, 2, 3, 4 y 5 clientes en la fila, los cuales son

Número de clientes en la línea de espera	Tiempo, minutos
0	136.86
1	94.86
2	34.62
3	13.99
4	1.40
5	0.32
Total	282.05

Tabla XX.10.- Simulación de la línea de espera del Minisuper de Rioverde

Reloj simulado	Cliente que llega	Cliente próxima llegada	Número aleatorio generado	Tiempo entre llegadas	Tiempo próxima llegada	Cliente en servicio	Número aleatorio generado	Tiempo de servicio	Tiempo entrada a servicio	Tiempo salida de servicio	Cliente en espera	Tiempo de espera	Evento
7:00.00	---	A	0.4764	4.94	7:04.94	---	---	---	---	---	---	---	Inicio
7:04.94	A	B	0.8416	1.15	7:06.09	A	0.6279	2.33	7:04.94	7:07.27	---	0	Llega A
7:06.09	B	C	0.9434	0.39	7:06.48	A	0.8234	0.97	7:07.27	7:08.24	B	1.18	Llega B
7:06.48	C	D	0.3420	7.15	7:13.63	A	0.5273	3.20	7:08.24	7:11.44	B,C	1.76	Llega C
7:07.27	---	---	---	---	---	B	---	---	---	---	C	---	Sale A
7:08.24	---	---	---	---	---	C	---	---	---	---	---	---	Sale B
7:11.44	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	Sale C
7:13.63	D	E	0.6827	2.54	7:16.17	D	0.1820	8.52	7:13.63	7:22.15	---	0	Llega D
7:16.17	E	F	0.8521	1.07	7:17.24	D	0.6383	2.24	7:22.15	7:24.39	E	5.98	Llega E
7:17.24	F	G	0.1129	14.54	7:31.78	D	0.1471	9.58	7:24.39	7:33.97	E,F	7.15	Llega F
7:22.15	---	---	---	---	---	E	---	---	---	---	F	---	Sale D
7:24.39	---	---	---	---	---	F	---	---	---	---	---	---	Sale E
7:31.78	G	H	0.5806	3.62	7:35.40	F	0.3208	5.68	7:33.97	7:39.65	G	2.19	Llega G
7:33.97	---	---	---	---	---	G	---	---	---	---	---	---	Sale F
7:35.40	H	I	0.9285	0.49	7:35.89	G	0.8224	0.98	7:39.65	7:40.63	H	4.25	Llega H
7:35.89	I	J	0.6955	2.42	7:38.31	G	0.6331	2.29	7:40.63	7:42.92	H,I	4.74	Llega I
7:38.31	J	K	0.5937	3.48	7:41.79	G	0.5482	3.01	7:42.92	7:45.93	H,I,J	4.61	Llega J
7:39.65	---	---	---	---	---	H	---	---	---	---	I,J	---	Sale G
7:40.63	---	---	---	---	---	I	---	---	---	---	J	---	Sale H
7:41.79	K	L	0.8044	1.45	7:43.24	I	0.3445	5.33	7:45.93	7:51.26	J,K	4.14	Llega K
7:42.92	---	---	---	---	---	J	---	---	---	---	K	---	Sale I
7:43.24	L	M	0.2219	10.04	7:53.28	J	0.4611	3.87	7:51.26	7:55.13	K,L	8.02	Llega L
7:45.93	---	---	---	---	---	K	---	---	---	---	L	---	Sale J
7:51.26	---	---	---	---	---	L	---	---	---	---	---	---	Sale K
7:53.28	M	N	0.5570	3.90	7:57.18	L	0.3193	5.71	7:55.13	8:00.84	M	1.85	Llega M
7:55.13	---	---	---	---	---	M	---	---	---	---	---	---	Sale L
7:57.18	N	O	0.5496	3.99	8:01.17	M	0.6273	2.33	8:00.84	8:03.17	N	3.66	Llega N
8:00.84	---	---	---	---	---	N	---	---	---	---	---	---	Sale M
8:01.17	O	P	0.5054	4.55	8:05.72	N	0.4841	3.63	8:03.17	8:06.80	O	2.00	Llega O
8:03.17	---	---	---	---	---	O	---	---	---	---	---	---	Sale N
8:05.72	P	Q	0.0661	18.11	8:23.83	O	0.7303	1.57	8:06.80	8:08.37	P	1.08	Llega P

Reloj simulado	Cliente que llega	Cliente próxima llegada	Número aleatorio generado	Tiempo entre llegadas	Tiempo próxima llegada	Cliente en servicio	Número aleatorio generado	Tiempo de servicio	Tiempo entrada a servicio	Tiempo salida de servicio	Cliente en espera	Tiempo de espera	Evento
8:06.80	---	---	---	---	---	P	---	---	---	---	---	---	Sale O
8:08.37	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	Sale P
8:23.83	Q	R	0.7321	2.08	8:25.91	Q	0.8875	0.60	8:23.83	8:24.43	---	0	Llega Q
8:24.43	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	Sale Q
8:25.91	R	S	0.1799	11.44	8:37.35	R	0.7051	1.75	8:25.91	8:27.66	---	0	Llega R
8:27.66	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	Sale R
8:37.35	S	T	0.4934	4.71	8:42.06	S	0.1989	8.07	8:37.35	8:45.42	---	---	Llega S
8:42.06	T	U	0.8262	1.27	8:43.33	S	0.4071	4.49	8:45.42	8:49.91	T	3.36	Llega T
8:43.33	U	V	0.9586	0.28	8:43.61	S	0.8374	0.89	8:49.91	8:50.80	T,U	6.58	Llega U
8:43.61	V	W	0.1882	11.14	8:54.75	S	0.7055	1.74	8:50.80	8:52.54	T,U,V	7.19	Llega V
8:45.42	---	---	---	---	---	T	---	---	---	---	U,V	---	Sale S
8:49.91	---	---	---	---	---	U	---	---	---	---	V	---	Sale T
8:50.80	---	---	---	---	---	V	---	---	---	---	---	---	Sale U
8:52.54	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	Sale V
8:54.75	W	X	0.9670	0.22	8:54.97	W	0.0684	13.41	8:54.75	9:08.16	---	0	Llega W
8:54.97	X	Y	0.2039	10.60	9:05.57	W	0.1291	10.24	9:08.16	9:18.40	X	13.19	Llega X
9:05.57	Y	Z	0.8416	1.15	9:06.72	W	0.5973	2.58	9:18.40	9:20.98	X,Y	12.83	Llega Y
9:06.72	Z	A1	0.5670	3.78	9:10.50	W	0.4676	3.80	9:20.98	9:24.78	X,Y,Z	14.26	Llega Z
9:08.16	---	---	---	---	---	X	---	---	---	---	Y,Z	---	Sale W
9:10.50	A1	B1	0.1198	14.16	9:24.66	X	0.5432	3.05	9:24.78	9:27.83	Y,Z,A1	14.28	Llega A1
9:18.40	---	---	---	---	---	Y	---	---	---	---	Z,A1	---	Sale X
9:20.98	---	---	---	---	---	Z	---	---	---	---	A1	---	Sale Y
9:24.66	B1	C1	0.5263	4.28	9:28.94	Z	0.0414	15.92	9:27.83	9:43.75	A1,B1	3.17	Llega B1
9:24.78	---	---	---	---	---	A1	---	---	---	---	B1	---	Sale Z
9:27.83	---	---	---	---	---	B1	---	---	---	---	---	---	Sale A1
9:28.94	C1	D1	0.0385	21.71	9:50.65	B1	0.5133	3.33	9:43.75	9:47.08	C1	14.81	Llega C1
9:43.75	---	---	---	---	---	C1	---	---	---	---	---	---	Sale B1
9:47.08	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	Sale C1
9:50.65	D1	E1	0.5169	4.40	9:55.05	D1	0.9999	0	9:50.05	9:50.05	---	0	Llega y sale D1
9:55.05	E1	F1	0.4031	6.06	10:01.11	E1	0.8408	0.87	9:55.05	9:55.92	---	0	Llega E1
9:55.92	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	Sale E1

Reloj simulado	Cliente que llega	Cliente próxima llegada	Número aleatorio generado	Tiempo entre llegadas	Tiempo próxima llegada	Cliente en servicio	Número aleatorio generado	Tiempo de servicio	Tiempo entrada a servicio	Tiempo salida de servicio	Cliente en espera	Tiempo de espera	Evento
10:01.11	F1	G1	0.3457	7.08	10:08.19	F1	0.8123	1.04	10:01.11	10:02.15	---	0	Llega F1
10:02.15	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	Sale F1
10:08.19	G1	H1	0.3859	6.35	10:14.54	G1	0.1531	9.38	10:08.19	10:17.57	---	0	Llega G1
10:14.54	H1	I1	0.7228	2.16	10:16.70	G1	0.3643	5.05	10:17.57	10:22.62	H1	3.03	Llega H1
10:16.70	I1	J1	0.1165	14.33	10:31.03	G1	0.1267	10.33	10:22.62	10:32.95	H1,I1	5.92	Llega I1
10:17.57	---	---	---	---	---	H1	---	---	---	---	I1	---	Sale G1
10:22.62	---	---	---	---	---	I1	---	---	---	---	---	---	Sale H1
10:31.03	J1	K1	0.5089	4.50	10:35.53	I1	0.5407	3.07	10:32.95	10:36.02	J1	1.92	Llega J1
10:32.95	---	---	---	---	---	J1	---	---	---	---	---	---	Sale I1
10:35.53	K1	L1	0.5544	3.93	10:39.46	J1	0.9780	0.11	10:36.02	10:36.13	K1	0.49	Llega K1
10:36.02	---	---	---	---	---	K1	---	---	---	---	---	---	Sale J1
10:36.13	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	Sale K1
10:39.46	L1	M1	0.0840	16.51	10:55.97	L1	0.0016	32.19	10:39.46	11:11.65	---	0	Llega L1
10:55.97	M1	N1	0.1186	14.21	11:10.18	L1	0.4942	3.52	11:11.65	11:15.17	M1	15.68	Llega M1
11:10.18	N1	O1	0.7678	1.76	11:11.94	L1	0.4425	4.08	11:15.17	11:19.25	M1,N1	4.99	Llega N1
11:11.65	---	---	---	---	---	M1	---	---	---	---	N1	---	Sale L1
11:11.94	O1	P1	0.1892	11.10	11:23.04	M1	0.1351	10.01	11:19.25	11:29.26	N1,O1	7.31	Llega O1
11:15.17	---	---	---	---	---	N1	---	---	---	---	O1	---	Sale M1
11:19.25	---	---	---	---	---	O1	---	---	---	---	---	---	Sale N1
11:23.04	P1	Q1	0.3382	7.23	11:30.27	O1	0.2323	7.30	11:29.26	11:36.56	P1	6.22	Llega P1
11:29.26	---	---	---	---	---	P1	---	---	---	---	---	---	Sale O1
11:30.27	Q1	R1	0.8149	1.36	11:31.63	P1	0.4579	3.91	11:36.56	11:40.47	Q1	6.29	Llega Q1
11:31.63	R1	S1	0.3519	6.96	11:38.59	P1	0.5468	3.02	11:40.47	11:43.49	Q1,R1	8.84	Llega R1
11:36.56	---	---	---	---	---	Q1	---	---	---	---	R1	---	Sale P1
11:38.59	S1	T1	0.9641	0.24	11:38.83	Q1	0.2481	6.97	11:43.49	11:50.46	R1,S1	4.90	Llega S1
11:38.83	T1	U1	0.8436	1.13	11:39.96	Q1	0.5049	3.42	11:50.46	11:53.88	R1,S1,T1	11.63	Llega T1
11:39.96	U1	V1	0.8762	0.88	11:40.84	Q1	0.2928	6.14	11:53.88	12:00.02	R1 a U1	13.92	Llega U1
11:40.47	---	---	---	---	---	R1	---	---	---	---	S1,T1,U1	---	Sale Q1
11:40.84	V1	W1	0.8749	0.89	11:41.73	R1	0.6185	2.40	12:00.02	12:02.42	S1 a V1	19.18	Llega V1
11:41.73	W1	X1	0.9527	0.32	11:42.05	R1	0.2282	7.39	12:02.42	12:09.81	S1 a W1	20.69	Llega W1
11:42.05	X1	Y1	---	---	---	R1	0.4711	3.76	12:09.81	12:13.57	S1 a X1	27.76	Llega X1

Siendo entonces el número promedio de clientes en la línea de espera

$$\frac{(0)(136.86)+(1)(94.86)+(2)(34.62)+(3)(13.99)+(4)(1.4)+(5)(0.32)}{282.05}=0.75 \quad clientes$$

Por su parte el tiempo promedio que pasa un cliente en la línea de espera es el cociente de la sumatoria de los tiempos de cada uno de ellos, los cuales pueden leerse de la penúltima columna de la tabla, dividida entre el número de clientes, lo que nos dará lo siguiente

$$\frac{301.05}{50}=6.02 \text{ minutos}$$

El número promedio de clientes en servicio se obtiene de una manera similar al de clientes en espera, es decir sumando los tiempos de cero y un cliente en servicio, los cuales son 54.10 y 227.95 minutos respectivamente y promediándolos, con lo que tendremos

$$\frac{(54.1)(0)+(227.95)(1)}{282.05}=0.808 \text{ clientes}$$

Finalmente en la tabla XX.11 se presentan estos resultados para los 50 clientes del caso, comparándolos con los valores analíticos, así como también con los resultados para 2500 clientes, los cuales han sido generados mediante un programa de computadora.

Tabla XX.11.- Comparación de los resultados de la simulación con los valores analíticos.

Parámetros	Resultado analítico	Resultado del caso 50 clientes	Resultados del caso 2500 clientes
Clientes en espera	2.25	0.76	2.36
Tiempo promedio en espera	15.0	6.02	15.15
Tiempo promedio de servicio	5.0	5.10	4.95
Clientes en servicio	0.75	0.81	0.77
Clientes totales	3.0	1.57	3.13
Tiempo total en el sistema	20.0	11.12	20.10

De esta tabla vemos cómo los resultados para los 2500 clientes se asemejan más a los valores analíticos que los de los 50 clientes del caso, esto se debe a los efectos transitorios iniciales, los cuales siempre están presentes, por lo que se recomienda que un caso como éste se maneje con un número adecuado de clientes, a fin de que los resultados obtenidos sean representativos de la realidad. Aun cuando esto sería muy tedioso efectuarlo en forma manual, no significa un gran problema si se tiene al alcance una computadora, el hecho de haberlo resuelto de esta manera ha sido con fines ilustrativos.

CASO DE INVENTARIOS

Ejemplo XX.10.- La Mueblera Rioverdense está considerando manejar sus inventarios bajo el modelo del punto de renovación de pedidos, para lo cual sus últimas estadísticas de ventas de estufas es la siguiente

Demanda, estufas/semana	Frecuencia de ventas	Rango de probab. acumulada
12	0.05	0-0.05
13	0.07	0.0501-0.12
14	0.09	0.1201-0.21
15	0.17	0.2101-0.38
16	0.30	0.3801-0.68
17	0.14	0.6801-0.82
18	0.11	0.8201-0.93
19	0.07	0.9301-1.00

Por su parte para los tiempos de entrega se dispone de los siguientes datos

Tiempo de entrega, semanas	Probabilidad	Rango de probab. acumulada
2	0.25	0-0.25
3	0.50	0.2501-0.75
4	0.20	0.7501-0.95
5	0.05	0.9501-1.00

Sus costos por los diferentes conceptos son:

Conservación del inventario = 0.20 $/estufa semanal
Faltantes = 20 $/faltante
Colocación de pedidos = 60 $/pedido

Los pedidos se hacen los fines de semana y se reciben el fin de la semana correspondiente según el tiempo de entrega. La cantidad económica de pedido es de 90 estufas.

Simúlese el manejo del inventario para puntos de renovación del pedido de 48, 60 y 72 estufas y determínese cuál es la mejor opción, comparando los resultados con los valores de la solución analítica.

Solución:

Para este problema habrá 3 corridas, una para cada punto de renovación del pedido planteado. En cada caso lo que haremos será simular la cantidad de estufas en existencia, para lo cual se generarán números aleatorios tanto de las demandas como de los tiempos de entrega mediante la metodología de Montecarlo bajo el enfoque tabular, por esto en las estadísticas anteriores se han agregado los rangos de probabilidades acumuladas para cada demanda y cada tiempo de entrega, luego iremos viendo cómo cambia la cantidad de estufas en inventario debido a la demanda de las semanas que van transcurriendo, cada una de las cuales se generará mediante un número aleatorio, hasta llegar al nivel del punto de renovación del pedido, donde éste se colocará generándose el tiempo de entrega respectivo mediante otro número aleatorio, calculando los costos por los diferentes conceptos, es decir por conservación del inventario, por faltantes y por la colocación del pedido.

El tiempo se manejará en semanas, tomándose como plazo de tiempo para cada corrida de simulación el de un año, o sea 52 semanas, iniciando en la semana cero con una existencia igual a la cantidad económica de pedido, es decir 90 estufas.

Entonces para cada corrida se hará una tabla donde se pondrá en cada renglón una semana del tiempo, y en cada columna se colocarán la demanda, las cantidades de estufas en existencia, el tiempo de entrega del nuevo pedido y los costos por cada concepto.

Así podemos iniciar con el primer valor del punto de renovación del pedido, es decir 48 estufas, entonces al comenzar la primera semana tendremos 90 estufas, luego generaremos la demanda leyendo un valor aleatorio, el que tomaremos de la tercera columna de la tabla respectiva del apéndice, el cual será para esta primera semana el 0.4446 (expresado como fracción de la unidad), el cual corresponde a una demanda de 16 estufas, ya que queda comprendido dentro del rango de probabilidad acumulada que va de 0.3801 a 0.68, por lo cual la existencia al final de la semana será de 74 estufas, siendo el inventario promedio durante la semana (90+74)/2=82 unidades, por lo que el costo de conservación será de 82 x 0.20 = 16.40 pesos. Como la existencia no es menor o igual al punto de renovación del pedido, no se pide al final de la semana, razón por la cual no se incurre en costo por este concepto, así como tampoco por faltantes.

En la segunda semana, se inicia con 74 estufas en inventario, leemos el número aleatorio siguiente, el cual es el 0.6427, el cual corresponde a una demanda de 16 unidades, por lo que la existencia al final de la semana será de 58 estufas, siendo entonces el inventario promedio de (74+58)/2=66 unidades, ocasionando un costo de conservación de 66 x 0.20 = 13.20 pesos y nuevamente no se coloca pedido.

Para la tercera semana el número aleatorio que sigue es el 0.5902, que corresponde a una demanda de 16 estufas, por lo que la existencia de las mismas será al final de la semana de 42 unidades, siendo el inventario promedio de 50 estufas, con un costo de conservación de $10.00. Al final de la semana la existencia es menor que el punto de renovación del pedido, por lo cual debemos colocar éste, incurriendo en el costo respectivo de $60, mientras que para obtener el tiempo de entrega correspondiente, leeremos de la cuarta columna y del onceavo renglón de la tabla del apéndice un valor aleatorio el cual es el 0.1834, el cual conforme a la tabla de probabilidad acumulada de los tiempos de entrega, genera un valor para éste de 2 semanas, por lo que el pedido se recibirá al final de la quinta semana.

Para la cuarta semana, el número aleatorio leído es el 0.0318, el cual corresponde a una demanda de 12 estufas, por lo que al final de la semana la existencia será de 30, siendo el inventario promedio de 36 unidades, lo cual da un costo de conservación de $7.20, no habiendo costos por pedidos ni por faltantes.

Si continuamos con este procedimiento, se obtienen los resultados que se muestran en la tabla XX.12, en la cual vemos que al terminar la quinta semana la existencia ha llegado a 14 estufas y que para comenzar la semana siguiente ya se contaría con el nuevo pedido, por lo cual se iniciará con 104 unidades, siendo la demanda de esta semana de 15 estufas, por lo que la existencia promedio es de (104+89)/2 = 96.5.

Tabla XX.12.- Resultados de la corrida para un punto de renovación del pedido de 48 estufas.

Tiempo, semanas	Número aleatorio	Demanda, estufas	Inventario final, estufas	Inventario promedio, estufas	Costo de Conservación, $	Costo de Pedido, $	Número aleatorio	Tiempo de entrega, semanas	Costo por Faltantes, $
0	---	---	90	---	---	---	---	---	---
1	0.4446	16	74	82	16.40	---	---	---	---
2	0.6427	16	58	66	13.20	---	---	---	---
3	0.5902	16	42	50	10.00	60.00	0.1834	2	---
4	0.0318	12	30	36	7.20	---	---	---	---
5	0.5901	16	14	22	4.40	---	---	---	---
6	0.3044	15	89	96.5	19.30	---	---	---	---
7	0.1699	14	75	82	16.40	---	---	---	---
8	0.5783	16	59	67	13.40	---	---	---	---
9	0.8764	18	41	50	10.00	60.00	0.1084	2	---
10	0.2161	15	26	33.5	6.70	---	---	---	---
11	0.3694	15	11	18.5	3.70	---	---	---	---
12	0.6072	16	85	93	18.60	---	---	---	---
13	0.8224	18	67	76	15.20	---	---	---	---
14	0.1455	14	53	60	12.00	---	---	---	---
15	0.1443	14	39	46	9.20	60.00	0.6791	3	---
16	0.6255	16	23	31	6.20	---	---	---	---
17	0.6251	16	7	15	3.00	---	---	---	---
18	0.1108	13	0	3.5	0.70	---	---	---	120.00
19	0.5595	16	74	82	16.40	---	---	---	---
20	0.1456	14	60	67	13.40	---	---	---	---
21	0.4637	16	44	52	10.40	60.00	0.3007	3	---
22	0.6472	16	28	36	7.20	---	---	---	---
23	0.0933	13	15	21.5	4.30	---	---	---	---
24	0.4890	16	0	7.5	1.50	---	---	---	20.00
25	0.9776	19	71	80.5	16.10	---	---	---	---
26	0.2229	15	56	63.5	12.70	---	---	---	---
27	0.2966	15	41	48.5	9.70	60.00	0.6085	3	---
28	0.0140	12	29	35	7.00	---	---	---	---
29	0.4011	16	13	21	4.20	---	---	---	---
30	0.7544	17	0	6.5	1.30	---	---	---	80.00
31	0.1074	13	77	83.5	16.70	---	---	---	---
32	0.0927	13	64	70.5	14.10	---	---	---	---
33	0.7016	17	47	55.5	11.10	60.00	0.7005	3	---
34	0.4141	16	31	39	7.80	---	---	---	---
35	0.4020	16	15	23	4.60	---	---	---	---
36	0.3768	15	0	7.5	1.50	---	---	---	---
37	0.2195	15	75	82.5	16.50	---	---	---	---
38	0.3828	16	59	67	13.40	---	---	---	---

Tiempo, semanas	Número aleatorio	Demanda, estufas	Inventario final, estufas	Inventario promedio, estufas	Costo de Conservación, $	Costo de Pedido, $	Número aleatorio	Tiempo de entrega, semanas	Costo por Faltantes, $
39	0.1475	14	45	52	10.40	60.00	0.9846	5	---
40	0.3216	15	30	37.5	7.50	---	---	---	---
41	0.6002	16	14	22	4.40	---	---	---	---
42	0.3188	15	0	7	1.40	---	---	---	20.00
43	0.1513	14	0	0	0	---	---	---	280.00
44	0.6474	16	0	0	0	---	---	---	320.00
45	0.8907	18	72	81	16.20	---	---	---	---
46	0.7463	17	55	63.5	12.70	---	---	---	---
47	0.9956	19	36	45.5	9.10	60.00	0.0625	2	---
48	0.6363	16	20	28	5.60	---	---	---	---
49	0.5897	16	4	12	2.40	---	---	---	---
50	0.8300	18	76	85	17.00	---	---	---	---
51	0.5582	16	60	68	13.60	---	---	---	---
52	0.4959	16	44	52	10.40	60.00	0.5457	3	---
Totales	---	---	---	---	486.20	540.00	---	---	840.00

En esta tabla vemos que al final de la semana 17 la existencia es de 7 estufas y que el nuevo pedido llegará al final de la semana siguiente, por lo que al ser la demanda de 13 unidades, habrá faltantes por 6 estufas, lo cual ocasiona un costo por este concepto de 6 x 20 = 120 pesos, tal y como se indica en la tabla.

Si se repite el procedimiento para los otros 2 valores del punto de renovación de pedidos, es decir 60 y 72 estufas, se generan los resultados que se resumen en la tabla XX.13, los cuales incluyen la solución analítica del caso, la cual ocurre para un punto de renovación del pedido de 57 unidades.

Tabla XX.13.- Resultados de las corridas de simulación y de la solución analítica

	Punto de Renovación del Pedido			
Concepto	48	60	72	Solución Analítica (PRP=57 estufas)
Costo de Conservación $	486.20	559.30	582.80	514.80
Costo de Pedidos $	540.00	540.00	540.00	548.08
Costo de Faltantes $	840.00	120.00	560.00	0
Costo Total $	1866.20	1219.30	1682.80	1062.88

En esta simulación el mejor resultado es para un punto de renovación del pedido de 60 estufas, el cual es además el que más se parece a la solución analítica, siendo la diferencia más notoria en lo que concierne al costo por faltantes, ya que en el caso de la solución analítica éstos no suceden, mientras que en las corridas de simulación aparecen debido a que los tiempos de entrega son probabilísticos.

CASO DE TOMA DE DECISIONES.

Ejemplo XX.11.- Para el caso del expendio de tortas "El Tigre" se desea simular su operación para calcular la ganancia esperada que puede lograrse si la demanda se comporta probabilísticamente según los datos de la tabla XX.5.

La ganancia marginal es de $0.20, la pérdida marginal de $0.10 y por cada torta que se deja de vender por falta de existencias se estima un costo de oportunidad de 0.05 $/torta.

El Sr. José Sánchez propietario del negocio piensa preparar una cantidad de tortas igual a su venta del día anterior. ¿Cómo se comportaría la demanda y cuál sería su ganancia promedio en 30 días de operación?

Solución:

Para este problema generaremos la demanda con números aleatorios que tomaremos de la octava columna de la tabla del apéndice conforme al rango de probabilidad acumulada al que corresponda el número leído, los cuales también están incluidos en la tabla XX.5, luego tomaremos para cada día la venta del día anterior como la cantidad de tortas que se van a preparar y calcularemos la ganancia esperada por medio de la siguiente relación:

Si la cantidad preparada $\geq$ la demanda,

Ganancia esperada = Demanda x Ganancia marginal - Sobrantes x Pérdida marginal

Si la cantidad preparada < la demanda,

Ganancia esperada = Cantidad preparada x Ganancia marginal - Faltantes x Costo de oportunidad

Para iniciar con la simulación tomaremos la cantidad de tortas a preparar para el primer día igual a 1020, mientras que para obtener la demanda leemos el primer número aleatorio de la columna 8 de la tabla respectiva, el cual es el 0.0892, que corresponde a una demanda de 930 tortas, ya que queda comprendido en su rango de probabilidad acumulada, por lo que la ganancia esperada de este día será:

$$\text{Ganancia esperada} = (930)\,(0.20) - (90)\,(0.10) = 186.00 - 9.00 = 177.00$$

Luego para el segundo día la cantidad de tortas preparadas será la demanda del día anterior, es decir de 930 tortas, mientras que la demanda será de 960 tortas, ya que el siguiente número aleatorio es el 0.1652 y corresponde a este valor, ahora como la demanda es mayor que la cantidad preparada, habrá faltantes, siendo entonces la ganancia esperada:

$$\text{Ganancia esperada} = (930)\,(0.20) - (30)\,(0.05) = 186.00 - 1.50 = 184.50$$

Si se continúa con esta metodología, se generan los resultados que se presentan en la tabla XX.14, los cuales muestran una ganancia esperada promedio para los 30 días de la corrida de 5815.50/30 = 193.85 pesos y la demanda promedio es de 30610/30 = 1020 tortas diarias.

Tabla XX.14.- Simulación del expendio de tortas "El Tigre".

Día	Cantidad de tortas preparadas	Número aleatorio	Demanda	Ganancia esperada, $
1	1020	0.0892	930	177.00
2	930	0.1652	960	184.50
3	960	0.2963	1000	190.00
4	1000	0.2913	1000	200.00
5	1000	0.3181	1000	200.00
6	1000	0.9348	1100	195.00
7	1100	0.5459	1020	196.00
8	1020	0.7695	1050	202.50
9	1050	0.7712	1050	210.00
10	1050	0.8136	1080	208.50
11	1080	0.9659	1130	213.50
12	1130	0.2526	960	175.00
13	960	0.6988	1050	187.50
14	1050	0.1781	960	183.00
15	960	0.7652	1050	187.50
16	1050	0.8559	1080	208.50
17	1080	0.2204	960	180.00

Día	Cantidad de tortas preparadas	Número aleatorio	Demanda	Ganancia esperada, $
18	960	0.4339	1020	189.00
19	1020	0.6299	1020	204.00
20	1020	0.3397	1000	198.00
21	1000	0.1194	930	179.00
22	930	0.7070	1050	180.00
23	1050	0.9662	1130	206.00
24	1130	0.4168	1000	187.00
25	1000	0.7786	1050	197.50
26	1050	0.6289	1020	201.00
27	1020	0.7768	1050	202.50
28	1050	0.2043	960	183.00
29	960	0.2723	1000	190.00
30	1000	0.2791	1000	200.00
Totales	---	---	30610	5815.50

Por su parte si este caso se soluciona con alguno de los métodos vistos en el capítulo 13 de este texto, hallamos que la mejor decisión es preparar 1050 tortas con lo que la ganancia esperada sería de 195.56 pesos diarios.

Esto nos da una clara idea del grado de aproximación entre los resultados analíticos y los de la corrida de simulación.

PROBLEMAS PROPUESTOS

XX.1.- Generar 20 números aleatorios de 4 dígitos mediante el método del Cuadrado Medio, usando como semilla al 7326

XX.2.- De la serie del ejemplo anterior, ¿en cuál valor ocurrirá repetición?

XX.3.- Por medio del método Congruencial con $a = 13$, $b = 7$ y $M = 1024$, ¿en cuál valor habrá repetición? si la semilla es: (a)0473; (b)8432; (c) 4728

XX.4.- Si ahora $a = 25$, $b = 13$ y $M = 2048$, ¿en cuál valor de la serie habrá un número repetido? si la semilla es: (a)2537; b(4694); (c)6598

XX.5.- Mediante el método Congruencial hallar los primeros 20 números aleatorios y determinar en cuál habrá un valor repetido si $a = 45$, $b = 23$ y $M = 512$ utilizando como semilla 9825

XX.6.- La Superferretería Tobi tiene una estadística de sus ingresos mensuales por venta de artículos de tlapalería durante los 2 años pasados

Volumen de ventas, M$	Frecuencia
10	2
12	3
14	4
16	6
18	5
20	3
22	1
Total	24

Elabore la tabla de probabilidades acumuladas de Montecarlo y determine para el valor aleatorio 0.6500, cuál será el volumen de ventas correspondiente.

XX.7.- Si para el caso anterior se generan 24 valores mediante el método de Montecarlo: (a) ¿Cuáles serían su media y su desviación estándar?; (b) ¿cómo se comparan estos valores con los datos reales?

XX.8.- Para una distribución de probabilidad uniforme entre 50 y 180, genérense 10 valores utilizando números aleatorios de la segunda columna de la tabla respectiva del apéndice.

XX.9.- Obtenga 10 valores de tiempos de servicio, los cuales se distribuyen exponencialmente con $\mu=8$ usando números aleatorios de la tercera columna de la tabla del apéndice y compare su media con el valor real.

XX.10.- Verifique si los siguientes datos se ajustan a una distribución normal de probabilidad

Clase de datos	Rango	Frecuencia
1	10 - 12	9
2	12 - 14	9
3	14 - 16	18
4	16 - 18	30
5	18 - 20	12
6	20 - 22	6
7	22 - 24	6
Total	---	90

XX.11.- Checar si los siguientes datos representan una función exponencial para los tiempos de servicio de un establecimiento comercial

Tiempo de servicio, min	Frecuencia
1	30
2	30
3	20
4	10
5 o más	10
Total	100

XX.12.- Los datos siguientes se obtuvieron de registrar los tiempos de llegadas de clientes a una oficina contable

Tiempo entre llegadas minutos	Frecuencia
1	12
2	41
3	30
4	10
5 o más	7
Total	100

¿Se aceptará el ajuste por medio de la función de Poisson?

XX.13.- Un escarabajo hace un recorrido en su búsqueda de alimento, el cual se distribuye probabilísticamente de la siguiente manera:

Dirección	Probabilidad
Norte	0.18
Sur	0.17
Oeste	0.42
Este	0.23
Total	1.00

¿Qué posición tendrá?: (a) Después de 100 pasos; (b) de 200 pasos; (c) de 500 pasos; (d) de 1000 pasos; (e) de 5000 pasos.

XX.14.- Si para el caso anterior la distribución de probabilidad fuese de 0.25 en cada dirección, ¿cuál sería la posición?: (a) Luego de 100 pasos; (b) 1000 pasos; (c) 5000 pasos.

XX.15.- Blocks de Rioverde fabrica blocks de un peso promedio de 20 kilogramos cada uno. Los registros de producción tienen la siguiente distribución de probabilidad de sus pesos

Peso, Kgs	Probabilidad
18	0.10
19	0.16
20	0.48
21	0.18
22	0.08
Total	1.00

(a) Simule una producción de 500 blocks y obtenga la distribución de probabilidad de sus pesos; (b) calcúlese lo mismo del inciso anterior para 1000 blocks; (c) para 5000 blocks.

XX.16.- La empresa Rototanques Splash fabrica tanques para almacenamiento doméstico de agua, los cuales distribuye en una camioneta que tiene capacidad volumétrica para 10 tanques, o bien para una tonelada de peso. El peso de cada tanque se distribuye uniformemente entre 85 y 115 kilogramos. ¿Cuál será la probabilidad de sobrecargar la camioneta si se lleva 10 tanques?, resuelva (a) para una corrida de 10 unidades; (b) para 100; (c) para 500; (d) para 1000.

XX.17.- El Club Social Bar cuenta con algunas estadísticas sobre sus actividades pasadas, una de ellas es acerca del número de clientes que acuden diariamente, la cual es la siguiente

Clientes diarios	4	5	6	7	8	9	10	11	Total
Probabilidad	0.10	0.12	0.18	0.26	0.14	0.10	0.06	0.04	1.00

El bar clasifica sus bebidas en 3 categorías que son: cuba, cerveza y bebidas preparadas, las cuales vende a 6.00, 4.00 y 10.00 pesos cada una respectivamente. De meses anteriores se sabe que la cuba tiene el 40% de ventas del total de bebidas, la cerveza el 45% y las bebidas preparadas el 15% restante. Por otra parte el número promedio de bebidas que un cliente pide tiene la siguiente distribución de probabilidad

Número de Bebidas	2	3	4	5	6	Total
Probabilidad	0.15	0.25	0.30	0.20	0.10	1.00

Se supone que el cliente que pide una bebida determinada, no cambia luego de tipo de bebida, es decir que el cliente que bebe cerveza, sólo pide cerveza.

Los costos fijos del bar se estiman en 115.00 pesos diarios.

Simule la operación del bar y calcule la ganancia esperada para (a) 30 días de operación; (b) 100 días; (c) 365 días; (d) 1000 días.

XX.18.- El señor John Taylor ha estado estudiando la forma de jugar a la ruleta, pues piensa ir a Las Vegas el mes próximo, llevará la cantidad de 1000 dólares para apostar, jugando 3 en cada tirada y ha pensado retirarse ya sea porque pierda todo, o bien si llega a juntar 2500 dólares. Tiene 3 opciones de juego que son: (a) Apostar 3 dólares en cada jugada; (b) doblar la apuesta después de que pierda una tirada; (c) doblar la apuesta después de ganar cada tirada. El señor Taylor normalmente prefiere el color rojo y es el que piensa elegir para todas sus jugadas.

Simule el juego de la ruleta y obtenga cuál es la opción más conveniente para el señor Taylor. Debe aclararse que la ruleta cuenta con 38 números de los cuales 18 son rojos, 18 son negros y los otros dos son comodines, lo cual significa que si se ha elegido el color que salga en la tirada se gana, caso contrario se pierde y si sale uno de los comodines, ni se gana ni se pierde.

(a) Resuelva para una corrida de 500 tiradas; (b) para 1000 tiradas; (c) para 5000; (d) para 10000.

XX.19.- La Arrendadora de Autos América cobra 300 pesos diarios por la renta de cualquiera de sus vehículos, su costo anual por mantenimiento es de 14,600.00 pesos, mientras que cada auto que tiene ocioso le ocasiona un costo de 40 pesos diarios y por cada auto que le solicitan y no tiene disponible estima que su costo es de 75 pesos. De estadísticas de renta dispone de la siguiente información sobre el número de autos rentados cada día:

No. autos diarios	0	1	2	3	4	5	6	Total
Probabilidad	0.10	0.12	0.18	0.24	0.16	0.12	0.08	1.00

Por otra parte los días de renta cada que se ocupa un auto han sido los siguientes:

Días de renta	1	2	3	4	5	Total
Probabilidad	0.14	0.18	0.26	0.24	0.18	1.00

¿Cuál será el número óptimo de autos a manejar para maximizar la ganancia anual y cuál será el monto de ésta?

XX.20.- En el problema anterior, ¿Cuáles serían ahora las respuestas? si: (a) la renta diaria fuera $250.00, el costo de tener un auto ocioso de $70 diarios, el costo de no tener un auto disponible cuando se solicita de $100 y el costo anual de mantenimiento de $20,000; (b) la renta fuera de $200 diarios, costo de un auto ocioso de $85, costo de un auto faltante de $120 y el costo de mantenimiento de $23,500.

XX.21.- La refaccionaria Geyasa está buscando optimizar su costo del inventario de medios motores, para los cuales la demanda tiene la siguiente distribución de probabilidad

Demanda semanal	1	2	3	4	5	6	7	Total
Pobabilidad	0.12	0.16	0.21	0.16	0.14	0.12	0.09	1.00

Por su parte los tiempos de entrega de su proveedor han sido los siguientes

Tiempo entrega, semanas	1	2	3	4	Total
Probabilidad	0.10	0.30	0.40	0.20	1.00

Su costo de conservar un medio motor en inventario es de $25 semanales, cada faltante le ocasiona un costo de oportunidad de $350 y colocar cada pedido le cuesta $125

Calcule su costo total anual de manejo del inventario para los siguientes casos: (a) El punto de renovación del pedido (PRP) es de 10 y la cantidad de pedido (Q) es de 10; (b) si PRP=10 y Q=15; (c) PRP=10 y Q=20; (d) PRP=15 y Q=15.

XX.22.- Para el caso anterior obtenga los valores de PRP y Q que minimicen el costo total anual y el monto de éste.

XX.23.- La Constructora de la Zona Media desea minimizar su costo por concepto de manejo del inventario de cemento, cuya demanda ha tenido la siguiente distribución de probabilidad.

Demanda, ton/sem	10	11	12	13	14	15	Total
Probabilidad	0.10	0.10	0.30	0.20	0.18	0.12	1.00

Por su parte la distribución respectiva para los tiempos de entrega es

Tiempo entrega, sem	1	2	3	Total
Probabilidad	0.40	0.40	0.20	1.00

Por su parte el costo de conservación es de $8.50 semanales por cada tonelada, el de colocar cada pedido es de $100 y el de faltantes de $24 por tonelada. ¿Qué punto de renovación de pedidos y cantidad deberá manejar a fin de minimizar el costo total anual y cual será su monto?

XX.24.- Si los costos del problema anterior son ahora de $5.00 semanales por tonelada por concepto de conservación, de $30 por faltantes y de $150 por colocación de cada pedido, ¿cuáles serán ahora las respuestas a las mismas preguntas?

XX.25.- Simule la línea de espera tipo M/M/1 del Banco Local Rioverdense del problema propuesto XVI.6 y compare los resultados obtenidos con los valores analíticos. Use una corrida con 2000 clientes.

XX.26.- Para el caso del Banco simule y compare con los resultados analíticos para un sistema del tipo M/M/S con los 3 servidores, tal y como se planteó el problema propuesto XVI.7

XX.27.- Para el caso de "Tortillas Hamasa" del problema propuesto XVI.8, simule con 2000 clientes y compare con los valores analíticos.

XX.28.- Para el caso del ejemplo resuelto XVI.8 de la peluquería con el sistema M/D/1 simule y compare con los resultados analíticos utilizando 6000 clientes.

XX.29.- Fundidora Metalsa cuenta con 6 hornos de fundición, los cuales tienen una vida útil que sigue una distribución normal de probabilidad con media de 2 años y desviación estándar de un mes y medio. Si el costo de cada horno es de $150,000 y si cada reemplazo individual le cuesta a la empresa por mano de obra y tiempos perdidos un total de $8,500, mientras que si cambia los 6 hornos al mismo tiempo el costo total es de $30,000. ¿Qué le convendrá más: efectuar los reemplazos individualmente, o hacerlo en grupo? Utilice un lapso de tiempo para el análisis de 10 años.

XX.30.- Para el caso anterior: (a) ¿Cuál debería ser el costo de efectuar los reemplazos en grupo para que ambas opciones se igualen en su costo total en 10 años?; (b) si la desviación estándar de la vida útil de los equipos fuera cero, ¿cuál sería ahora la mejor opción?

APENDICE

Areas bajo la curva normal de probabilidad para una desviación estándar dada

	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73536	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97784	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

Números Aleatorios

4764	6279	4446	5582	1634	2396	7984	0892	6049	7488
8416	8234	6427	4959	7344	5582	8579	1652	8767	2934
9434	5273	5902	1824	2809	7556	2486	2963	2006	7914
3420	1820	0318	7041	0746	7468	0788	2913	5730	1305
6827	6383	5901	3555	3049	0858	8872	3181	0495	5501
8521	1471	3044	9717	6203	4840	8645	9348	3101	7983
1129	3208	1699	5571	2923	0382	0032	5459	4610	5684
5806	8224	5783	4674	6696	1011	6599	7695	4470	1598
9285	6331	8764	8461	4031	8934	7259	7712	8980	6963
6955	5482	2161	1838	2875	9525	9769	8136	9966	6852
5937	3445	3694	1834	3496	4466	4629	9659	5169	3131
8044	4611	6072	1084	8306	6117	8550	2526	3276	4537
2219	3193	8224	6791	4229	0579	8448	6988	7886	3739
5570	6273	1455	3007	9751	8758	8610	1781	8456	4518
5496	4841	1443	6085	8950	5867	1830	7652	3884	1657
5054	7303	6255	7005	2068	3442	8084	8559	1254	2478
0661	8875	6251	9846	7295	4338	5145	2204	3691	8096
7321	7051	1108	0625	3440	6284	4179	4339	3666	1786
1799	1989	5595	5457	5435	1938	4324	6299	9208	3997
4934	4071	1456	4076	3090	4586	2596	3397	3189	3251
8262	8374	4637	1581	2275	7185	8938	1194	1403	1840
9586	7055	6472	0928	4832	5912	2768	7070	3751	1718
1882	0684	0933	4112	7413	2027	4233	9662	6926	2445
9670	1291	4890	7457	7666	3246	4877	4168	1609	3896
2039	5973	9776	0099	0272	5058	7182	7786	5649	8697
8416	4676	2229	7245	0700	4369	0390	6289	2870	7244
5670	5432	2966	6749	6488	8453	1751	7768	4356	3516
1198	0414	0140	5503	9564	1048	8107	2043	0830	5920
5263	5133	4011	7164	2389	0693	8934	2723	1078	2653
0385	9999	7544	3593	9120	1661	7054	2791	1173	8148
5169	8408	1074	4192	4800	5589	8279	9855	7618	5088
4031	8123	0927	9697	5585	7698	1450	6706	3222	3469
3457	1531	7016	2007	9172	9358	0468	4212	2238	7065
3859	3643	4141	4584	4035	2295	9716	7871	1234	1723
7228	1267	4020	3840	9324	4281	9163	4899	2737	2626
1165	5407	3768	0190	0135	5534	7293	7472	0754	1557
5089	9780	2195	6766	8383	4123	3447	7244	1091	3490
5544	0016	3828	6315	6349	2892	6764	4509	0942	1833
0840	4942	1475	3908	4765	8715	0892	5274	9646	7686
1186	4425	3216	5570	5255	8678	8967	7269	4330	4904
7678	1351	6002	2999	4725	2305	6893	2079	0195	5658
1892	2323	3188	7864	3646	7732	7501	9132	3081	2445
3382	4579	1513	7065	5765	7341	3386	9137	4236	9718
8149	5468	6474	0654	0441	9946	2749	7297	5046	0704
3519	2481	8907	7830	7936	0624	6938	9750	7356	7141
9641	5049	7463	7626	5535	1056	2071	0890	7953	1190
8436	2928	9956	4785	1056	3446	6692	4251	7201	3454
8762	6185	6363	4627	1333	7703	4694	6380	1062	4247
8749	2282	5897	9376	5726	3922	9574	1451	4290	8413
9527	4711	8300	1127	0903	6653	6528	2003	774	7629

Valores de $\chi 2$

Grados de Libertad	α=0.995	α=0.99	α=0.975	α=0.95	α=0.05	α=0.025	α=0.01	α=0.005
1	0.0000393	0.000157	0.000982	0.00393	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.832	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672

RESPUESTAS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

CAPITULO XIII

XIII.1.- (a)300; (b)340; (c)320; (d)320; (e) todas las opciones empatadas.
XIII.2.- (a)100; (b)130; (c)120; (d)120; (e)130.
XIII.3.- D1 , rentar a Agrol, Ganancia esperada=$72,000.00.
XIII.4.- $88,600.00.
XIII.5.- D1 , rentar, Ganancia esperada=$212,000.00.
XIII.6.- $241,830.50.
XIII.7.- 150 toneladas para una ganancia de $52,500.00.
XIII.8.- $84,500.00.
XIII.9.- 3.5 toneladas para una ganancia de $120,800.00.
XIII.10.- $138,000.00.
XIII.11.- Comprar dólares.
XIII.12.- 42 costales para una ganancia de $289.17.
XIII.13.- 150 litros para una ganancia de $69.11.
XIII.14.- 140 litros para una ganancia de $39.67.
XIII.15.- 65000 botellas para una ganancia de $32,783.33.
XIII.16.- (a) 75 comidas, Ganancia =$228.06,
(b) 70 comidas, Ganancia de $227.22,
(c) Las ventas no siguen la distribución normal de probabilidad, por esto es más confiable el Análisis Marginal.

CAPITULO XIV

XIV.1.- (a) 1627 cajas; (b) 14.75 pedidos; (c) 25 días; (d) Costo=$3539.49/año.
XIV.2.- (a) 247 tapices; (b) 16.3 pedidos; (c) 22 días; (d) Costo=$2768.70/año.
XIV.3.- (a) 801 mts; (b) 1.5 pedidos; (c) 244 días; (d) Costo =$20,416.70/año.
XIV.4.- (a) 3001; (b) 2.4 pedidos; (c) 152 días; (d) Costo =$28,821.15/año.
XIV.5.- (a) 521 lts; (b) 242 lts; (c)279 lts; (d) Costo=$521.14/año.
XIV.6.- (a) 242 bolsas; (b) 395 bolsas; (c) 2.29 pedidos; (d) 160 días;
(e) Costo=$535.31/año.
XIV.7.- PRP= 730 loderas, Ex. de seguridad =104 loderas.
XIV.8.- (a) PRP =70 unidades, Ex. de seg.=16 unidades, (b) Costo=$208.00/año.
XIV.9.- 23 unidades.
XIV.10.- PRP=134 unidades, Ex. de seg.=24 unidades.
XIV.11.- PRP=742 unidades, Ex. de seg. =24 unidades.
XIV.12.- Chocolate fino: Q=6360, N=3.53, t=103 y Costo=$7060.07/año.
Chocolate normal: Q=13765, N=3.19, t=115 y Costo=$6371.65/año.
XIV.13.- (a) 3166 u/corr; (b) 11.03 corr/año; (c)33 días; (d) Costo=$22,497.82/año.
XIV.14.- Tipo A libretas, Tipo B Lapiceros y Tipo C los restantes.

CAPITULO XV

XV.1.- Primer juego sí tiene, el -2 del primer renglón y tercera columna, segundo juego no tiene y el tercer juego sí tiene el -3 del segundo renglón y segunda columna.
XV.2.- Primer juego sí tiene, el 0 del primer renglón y segunda columna, segundo juego no tiene y el tercer juego sí tiene el 3 del primer renglón y segunda columna.
*XV.3.- Valor del juego=4.8, Estrategias: p1 =0.6, p3 =0.4, c1 =0.6, c2 =0.4, las restantes son cero.

*XV.4.- Valor del juego= -0.6, Estrategias: p1 =0.5, p3 =0.5, c1 =0.5, c3 =0.5, las restantes son cero.
*XV.5.- Valor del juego=0, Estrategias: p1 =1/6, p2 =0, p3 =5/6, c1 =2/3, c2 =1/3
*XV.6.- Valor del juego=1.2, Estrategias: p1 =0, p2 =0.7, p3 =0.3, c1 =0.2, c2 =0.8 y c3 =0.
*XV.7.- Valor del juego=20, Estrategias: p1 =0.6, p2 =0.4, p3 =0, c1 =0.5, c2 =0.1 y c3 =0.4.
*XV.8.- Valor del juego= 8.696, Estrategias: p1 =0.1304 , p2 =0.6087, p3 =0.2609, p4 =0, c1 =0.0978, c2 =0.0544 y c3 =0.8478.
*XV.9.- Valor del juego= 2.5, Estrategias: p1 =0.5, p2 =0.5, p3 =0, c1 =0.625 y c2 =0.375.
*XV.10.- Valor del juego=0.296, Estrategias. p1 =0.2115, p2 =0.1654, p3 =0.2269, p4 =0.3962, c1 =0.1722, c2 =0.3744, c3 =0.3607 y c4 =0.0927.
*XV.11.- Valor del juego= 1.924, Estretegias: p1 =0.1173, p2 =0 4340, p3 =0.4487, p4 =0, p5 =0, c1 =0, c2 =0.0557, c3 =0.3695 y c4 =0.5748.
*XV.12.- Valor del juego= 1.1667, Estrategias: p1 =0.3333, p2 =0.5, p3 =0.1667, c1 =0.04, c2 =0 c3 =0.5533 y c4 =0.4067.

* En todos estos juegos para las estrategias las **p** representan renglones y las **c** columnas.

CAPITULO XVI

XVI.1.- (a) 10:50 horas; (b) 12:05 hrs; (c)1.456 pacientes.
XVI.2.- (a)1:24 hrs; (b) 2:06 hrs; (c) En espera 1.958 y en la oficina 3.25.
XVI.3.- (a) 0.833; (b) 11 con el que está en ese momento; (c) 8 con el que está en ese momento.
XVI.4.- (a) 2.90; (b) 6 clientes con el que llega en ese momento.
XVI.5.- (a) 5 para el primero (incluyendo al que llega en ese momento) y cero para el segundo; (b) 15 por el primero y 14 por el segundo.
XVI.6.- (a) 32 minutos; (b) 7.111; (c) 38.63% .
XVI.7.- (a) 10.766 minutos; (b) 7.1776; (c) 6.55%.
XVI.8.- (a) En espera 2.519 y en el negocio 3.286; (b) En espera 5.038 minutos y en el negocio 6.571 minutos; (c) En espera 16.74% y en el negocio 21.83%.
XVI.9.- (a) 1.922; (b) 9.61 minutos; (c) 1.02%.
XVI.10.- (a) En espera 1.6 y en el negocio 2.4; (b) En espera 24 minutos y en el negocio 36 minutos.
XVI.11.- (a) En espera 0.901 y en el negocio 1.643; (b) En espera 18.01 minutos y en el negocio 32.86 minutos.
XVI.12.- 6 mecánicos para un costo total de $ 1020.00 diarios.

CAPITULO XVII

XVII.1.- (a)

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E & B & R & M \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.10 & 0.20 & 0.30 & 0.40 \\ 0.17 & 0.23 & 0.32 & 0.28 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.33 & 0.38 & 0.29 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(b)$25,000.00

(c) Cosecha excelente=21.52%, buena =26.41%, regular=28.85% y mala=23.22%.
(d) De mala a excelente =3.86 años, de regular a excelente=4.09 años y de buena a excelente=4.40 años.

XVII.2.- (a)

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.20 & 0.43 & 0.20 & 0.17 \\ 0.07 & 0.25 & 0.43 & 0.25 \\ 0 & 0.03 & 0.52 & 0.45 \\ 0 & 0 & 0.18 & 0.82 \end{pmatrix} \end{array}$$

(b) Para los 2 años siguientes las probabilidades de que se halle en cada nivel son:

	Nivel			
Año	I	II	III	IV
Uno después	7.00	25.00	43.00	25.00
Dos después	3.15	10.55	39.01	47.29

(c) Para nivel I=0.10%, nivel II=1.17%, nivel III=27.72% y nivel IV=71.01%.
(d) Del I al IV =3.4 años, del II al IV=2.95 años y del III al IV =2.27 años.

XVII.3.- (a)

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} V & 1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 & LL \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.10 & 0.75 & 0.15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.65 & 0.30 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.35 & 0.50 & 0.10 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0.10 & 0.55 & 0.20 & 0.10 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0.35 & 0.30 & 0.20 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0.10 & 0.25 & 0.30 & 0.35 \end{pmatrix} \end{array}$$

(b) Q1 = (0, 0.35, 0.50, 0.10, 0.05, 0).
Q2 = (0, 0.4125, 0.4275, 0.1025, 0.045, 0.0125).
(c) En el estado estable: ev =0, e1/5 =0.4331, e2/5 =0.4045, e3/5 =0.0999, e4/5 =0.0445 y
eLL =0.0180.
(d) Nunca estará la presa vacía,
(e) Para ir de vacía a llena= 98.35 años, de 1/5 a llena =97.55 años, de 2/5 a llena=95.68 años, de 3/5 a llena =88.78 años y de 4/5 a llena =76.4 años

XVII.4.- (a)

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B & R & I \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.90 & 0.08 & 0.02 \\ 0.67 & 0 & 0.33 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(b) Después del primer año: Buenas=90%, en reparación =8% , inservibles =2%
Después del segundo año: Buenas=86.36% en reparación=7.2%, inservibles=6.44%
(c) Todas llegarán a inservibles.
(d) De buena a inservible=23.28 temp. y de reparación a inservibles=16.59 temp.

(e)

$$R=\begin{array}{cc} B & R \\ \end{array}$$
$$R=\begin{pmatrix} 21.55 & 1.72 \\ 14.44 & 21.55 \end{pmatrix}$$

XVII.5.- (a)

$$P=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} S & O & H & T & M \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.92 & 0.08 & 0 & 0 & 0 \\ 0.20 & 0.40 & 0.28 & 0.12 & 0 \\ 0.06 & 0.20 & 0.23 & 0.32 & 0.19 \\ 0 & 0.15 & 0.32 & 0.26 & 0.27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(b) Q1 =(0.92, 0.08, 0, 0, 0)
Q2 =(0.8624, 0.1056, 0.0224, 0.0096, 0)
Q3 =(0.8159, 0.1172, 0.0378, 0.0223, 0.0068)

(c)

$$R=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S & O & H & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 26.62 & 4.88 & 2.56 & 1.90 \\ 14.12 & 4.88 & 2.56 & 1.90 \\ 8.45 & 2.51 & 2.90 & 1.66 \\ 6.52 & 2.07 & 1.77 & 2.46 \end{pmatrix} \end{array}$$

(d) De observados a sanos= 4.39 periodos, de hospitalizados a sanos=4.11 periodos, de terapia a sanos=4.02 periodos.
(e) De sanos a muertos=35.96 per., de observados a muertos=23.46 per., de hospitalizados a muertos=15.52 per. y de terapia a muertos=12.82 per.

XVII.6.- (a)

$$P=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} N & S & CV & I \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.49 & 0.51 & 0 & 0 \\ 0.03 & 0.69 & 0.28 & 0 \\ 0.18 & 0.21 & 0.35 & 0.26 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(b) Q1 =(0.49, 0.51, 0, 0).
Q2 =(0.2554, 0.6018, 0.1428, 0).
Q3 =(0.1689, 0.5755, 0.2185, 0.0371).
(c) De clientes con saldo a incobrables=14.66 periodos y de cartera vencida a incobrables=10.88 periodos.

XVII.7.- (a)

$$P = \begin{array}{cccc} B & Mn & My & R \\ \end{array}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0.78 & 0.15 & 0.07 & 0 \\ 0.65 & 0.18 & 0.17 & 0 \\ 0.38 & 0.40 & 0.07 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) En un mes habrá 29 buenos, 6 en reparación menor y 3 en mayor.
En 2 meses habrá 28 buenos, 7 en reparación menor y 3 en mayor.
En 3 meses serán 27 buenos, 7 en reparación menor, 3 en mayor y uno para reemplazo.

(c)

$$\begin{array}{ccc} B & Mn & My \end{array}$$

$$R = \begin{pmatrix} 55.86 & 13.47 & 6.67 \\ 53.81 & 14.31 & 6.67 \\ 45.97 & 11.66 & 6.67 \end{pmatrix}$$

(d) De buenos a reemplazo=76.0 meses, de reparación menor a reemplazo=74.79 meses y de reparación mayor a reemplazo=64.29 meses.

CAPITULO XVIII

XVIII.1.- (a) 46.9 ton; (b) 45.74 ton; (c) 46.42 ton.
XVIII.2.- (a) 45.33 ton; (b) 46.08 ton; (c) 46.5 ton.
XVIII.3.- (a) 499; (b) 514; (c) 502.
XVIII.4.- (a) 519; (b) 510.
XVIII.5.- Para el año siguiente desglosado por meses el pronóstico de ventas es:

Mes	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
Venta	1570	1723	2400	2817	3133	3000	2867	2833	2557	2493	2093	1797

Para un total anual de 29,283 cajas

XVIII.6.- El pronóstico es

Periodo	Trimestre 1	Trimestre 2	Trimestre 3	Trimestre 4	Total Anual
Venta, lts	1525	3137	3491	2230	10383

XVIII.7.- Para los próximos 5 años el pronóstico es:

Año	1	2	3	4	5
Venta, M ton	8.337	8.813	9.29	9.767	10.243

XVIII.8.- (a) En un año habrá 9052 alumnos, en 2 años 8471 y en 3 años 7890.
(b) Se terminarán los alumnos en 17 años más.

XVIII.9.- Los pronósticos de los 3 próximos años son:

Año	Tipo M	Tipo N
1	136.4	204.2
2	143.2	212.6
3	149.9	221.1

XVIII.10.- (a) 5.87; (b) 3.42; (c) 8.42 millones.
XVIII.11.- (a)2.12%; (b) 3.19%;
XVIII.12.- (a) 696; (b)1209 acciones.

CAPITULO XIX

XIX.1.- Rápidas, con un costo de $29,611.61 anuales.
XIX.2.- Rápidas, con un costo de$ 29,688.76 anuales.
XIX.3.- Pesonic, con un costo de $ 939.82 anuales.
XIX.4.- Pesonic, con un costo de $ 948.62 anuales.
XIX.5.- Al final del año 8, con un costo de $ 9,477.95 anuales.
XIX.6.- Al final del año 8, con un costo de $ 9,986.57 anuales.
XIX.7.- Para los diferentes tiempos se tiene.

Semana	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F. de Superviv.	1.00	0.98	0.92	0.82	0.69	0.53	0.33	0.18	0.10	0.04	0
F. de Duración	0	0.02	0.06	0.10	0.13	0.16	0.20	0.15	0.08	0.06	0.04
Prob. de Avería	0	0.02	0.061	0.109	0.159	0.232	0.377	0.455	0.444	0.600	1.0

XIX.8.- (a) Tiempo= 5.59, desv. estándar=2.13 semanas; (b) tiempo=4.65, desv. estándar =2.30 semanas.

XIX.9.- Para los distintos tiempos se tiene

Tiempo, meses	Función de Supervivencia	Función de Duración	Probabilidad de Avería
0	1.000	0	0
1	0.960	0.040	0.0400
2	0.870	0.090	0.0938
3	0.750	0.120	0.1379
4	0.600	0.150	0.2000
5	0.435	0.165	0.2750
6	0.285	0.150	0.3448
7	0.210	0.075	0.2632
8	0.160	0.050	0.2381
9	0.120	0.040	0.2500
10	0.085	0.035	0.2917
11	0.055	0.030	0.3529
12	0.030	0.025	0.4545
13	0.015	0.015	0.5000
14	0.005	0.010	0.6667
15	0	0.005	1.0000

XIX.10.- (a) Tiempo = 5.58, desv. estándar= 2.96 meses; (b) tiempo=4.54, desv. estándar=2.53 meses.
XIX.11.- Las probabilidades son: (a) 0.7072; (b) 0.5859; (c) 0.1085; (d) 0.3707; (e) 0.0043; (f) 0.0416.
XIX.12.- Las probabilidades son: (a) 0.5049; (b) 0.4221; (c) 0.1590; (d) 0.0581; (e) 0.3965; (f) 0.3963; (g) 0.0020; (h) 0.0882; (i)0.3285.
XIX.13.- La sumatoria es 1.0000.
XIX.14.- a sumatoria es 0.9918.
XIX.15.- (a) 0.9371 focos; (b) 1.4593 focos; (c) probabilidad=0.5409; (d) probabilidad=0.1479.
XIX.16.- (a) 0.6271 piezas; (b) 1.5129 piezas; (c)2.4188 piezas; (d) probabilidad=0.2858; (e) probabilidad=0.0482.
XIX.17.- (a) Para cada periodo de tiempo se tiene

Tiempo, años	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tasa de Aprovisionamiento	24	37.9	53.9	60.7	75.2	68.3	60.5	65.5	68.3	69.9
No. de eq. reemplazados	24	61.9	115.8	176.5	251.7	320.0	380.5	446.0	514.3	584.2

(b) tiempo= 4.54 y desv. estándar= 2.27 años;
(c) tasa de mantenimiento=66.1 equipos.

XIX.18.- (a) Para cada lapso de tiempo se tiene

Tiempo, años	1	2	3	4	5	6
Tasa de Aprovis.	-6.0	21.0	39.2	37.7	33.2	36.5
No. de eq. reemplazados	-6.0	15.0	54.2	91.9	125.1	161.6

(b) Tiempo=2.89 y desv. estándar=1.36 años;
(c) Tasa de mantenimiento= 51.9 equipos.
XIX.19.- Al final del quinto año, con un costo de $17,473,920.00 anuales.
XIX.20.- Al final del tercer año, con un costo de $87,032.00 anuales.

CAPITULO XX

XX.1.-

6702	4201	1684	4506	0569
9168	6484	8358	3040	3237
0522	0422	8561	2416	4781
2724	1780	2907	8370	8579

XX.2.- El 54avo valor será 0000, que se repetirá indefinidamente.
XX.3.- (a) Al 1025avo (b) al 1026 (c) al 1026.
XX.4.- (a) Al 2050 (b) al 2050 (c) al 2050.
XX.5.- Los números son

292	120	268	224	500
363	303	307	375	507
486	346	014	002	310
389	233	141	113	149

Habrá repetición en el 514avo valor.

XX.6.- La tabla es

Volumen de ventas M$	Frecuencia Acumulada	Probabilidad Probabilidad	Probabilidad	Rango de
10	2	0.0833	0.0833	0 - 0.0833
12	3	0.1250	0.2083	0.0834 - 0.2083
14	4	0.1667	0.3750	0.2084 - 0.3750
16	6	0.2500	0.6250	0.3751 - 0.6250
18	5	0.2083	0.8333	0.6251 - 0.8333
20	3	0.1250	0.9583	0.8334 - 0.9583
22	1	0.0417	1.0000	0.9584 - 1.0000
Total	24	1.0000	---	---

El número 0.6500 corresponde a una venta de $18,000.

XX.7.- (a) $x = 16{,}667.67$ y $\sigma = 3145$ (b) las de los datos reales son $x = 15{,}833.33$ y $\sigma = 3158$.

XX.8.- Los números son:

131.627	69.123
157.042	91.704
118.549	156.912
73.660	132.303
132.979	121.266

XX.9.- Los valores son:

0.1013	0.1487
0.0553	0.2216
0.0659	0.0685
0.4310	0.0165
0.0659	0.1915

Su media es 0.1366, mientras que la teórica es 0.125.

XX.10.- Sí la representan.
XX.11.- No la representan.
XX.12.- No se acepta.
XX.13.- (a) 15 pasos al Oeste y 3 al Norte, (b) 26 al Oeste y 6 al Norte, (c)97 al Oeste y 3 al Norte, (d) 185 al Oeste y 11 al Norte, (e) 906 al Oeste y 48 al Sur.
XX.14.- (a) 11 al Este y 1 al Sur, (b) 9 al Este y 7 al Sur; (c) 46 al Oeste y 90 al Sur.
XX.15.-

Peso, Kgs	Probabilidad Inciso (a)	Probabilidad Inciso (b)	Probabilidad Inciso (c)	Probabilidad real
18	0.074	0.085	0.0894	0.10
19	0.152	0.159	0.1590	0.16
20	0.516	0.495	0.4862	0.48
21	0.186	0.185	0.1886	0.18
22	0.072	0.076	0.0768	0.08
Total	1.000	1.000	1.0000	1.00

XX.16.- (a) 50%; (b) 48%, (c) 49.2%, (d) 49.2%.
XX.17.- (a) Gana $1390, (b) Gana $3750, (c) Gana $14,641, (d) Gana $38,658.
XX.18.- (a) La opción 1, perdiendo 138 dólares, (b) la 1 perdiendo 108, (c) la 1 perdiendo 270, (d) la 2 ganando 30 dólares.

XX.19.- 12 autos para ganar $735,385.00.
XX.20.- (a) 11 autos ganando $484,450.00, (b) 10 autos ganando $284,290.00.
XX.21.- (a) $32,675.00, (b) $24,587.50, (c) $27,275.00, (d)$20,950.00.
XX.22.- Q=15 y PRP de 18 a 21, con un costo de $19,650.00.
XX.23.- Q= 27 y PRP de 17 en adelante, con un costo de $10,481.75.
XX.24.- Q=32 y PRP de 33 en adelante, con un costo de $9,375.00.

XX.25.- Los resultados son

Parámetro	Sol. analítica	Simulación
Tiempo en el sistema	36	33.97
Tiempo en espera	32	30.02
No. de clientes en el sistema	8	7.71
No. de clientes en espera	7.11	6.82
Probabilidad en el sistema	0.4346	0.4541
Probabilidad en espera	0.3863	0.4021

XX.26.- Los resultados son:

Parámetro	Sol. analítica	Simulación
Tiempo en el sistema	14.77	13.76
Tiempo en espera	10.77	9.81
No. de clientes en el sistema	9.84	9.36
No. de clientes en espera	7.18	6.68
Probabilidad en el sistema	0.0981	0.1183
Probabilidad en espera	0.0655	0.0617

XX.27.- Los resultados son

Parámetro	Sol. analítica	Simulación
Tiempo en el sistema	6.571	6.108
Tiempo en espera	5.038	4.588
No. de clientes en el sistema	3.286	3.139
No. de clientes en espera	2.519	2.358
Probabilidad en el sistema	0.2183	0.2033
Probabilidad en espera	0.1674	0.1491

XX.28.- Los resultados son

Parámetro	Sol. analítica	Simulación
Tiempo en el sistema	36	36.51
Tiempo en espera	24	24.51
No. de clientes en el sistema	2.4	2.48
No. de clientes en espera	1.6	1.67

XX.29.- Conviene reemplazar en forma individual, ya que el costo sería de $4,279,500.00, mientras que en grupo sería $5,580,000.00.
XX.30.- (a) Aunque el costo de reemplazo en grupo fuese cero, es mejor reemplazar en forma individual, (b) en forma individual.

BIBLIOGRAFIA

1.- Ackoff R.L., Sasieni M.W., ***Fundamentos de Investigación de Operaciones,*** Limusa, 1979.

2.- Bronson R., ***Investigación de Operaciones,*** McGraw-Hill, 1993.

3.- Davis K.R., McKeown P.G., ***Modelos Cuantitativos para Administración,*** Grupo Editorial Iberoamérica, 1984.

4.- Fishman G.S., ***Conceptos y Métodos en la Simulación Digital de Eventos Discretos,*** Limusa, 1978.

5.- Gallagher C.A., Watson H.J., ***Métodos Cuantitativos para la Toma de Decisiones en Administración,*** McGraw-Hill, 1982.

6.- Hillier F.S., Lieberman G.J., ***Introducción a la Investigación de Operaciones,*** McGraw-Hill, 1991.

7.- Izar Landeta J. M., ***Elementos de Métodos Númericos para Ingeniería,*** U.A.S.L.P., Unidad Zona Media, 1994.

8.- Kaufmann A., ***Métodos y Modelos de la Investigación de Operaciones,*** C.E.C.S.A., 1970.

9.- Kreyszig E., ***Matemáticas avanzadas para Ingeniería, Limusa, 1975.***

10.- Meier R.C., Newell W.T., Pazer H.L., ***Técnicas de Simulación en Administración y Economía,*** Trillas, 1975.

11.- Miller I., Freund J.E., ***Probabilidad y Estadística para Ingenieros,*** Reverté 1973.

12.- Spiegel M.R., ***Estadística,*** McGraw-Hill, 1970.

13.- Thierauf R.J., Grosse R.A., ***Toma de decisiones por medio de Investigación de Operaciones,*** Limusa, 1990.

El Sr. Ing. Jaime Valle Méndez, Rector de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, dispuso la impresión de este libro en los Talleres Gráficos de la Editorial Universitaria Potosina. La edición estuvo al cuidado del autor y de José de Jesús Rivera Espinosa. Fue concluida el 3 de abril de 1998 y consta de 1000 ejemplares.

75

ANIVERSARIO
SIEMPRE AUTÓMOMA

"1998, 75 Aniversario de la Autonomía Universitaria"

Editorial Universitaria Potosina