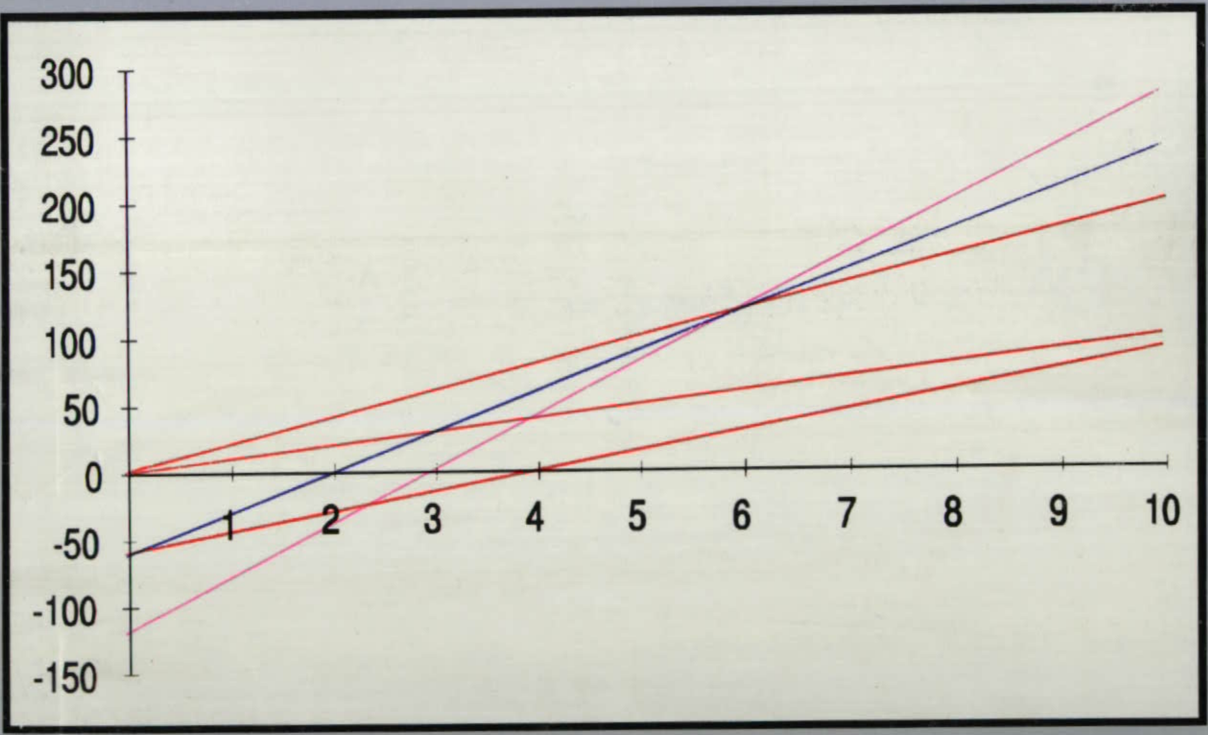
Fundamentos de

INVESTIGACION DE OPERACIONES

para Administración



Juan Manuel Izar Landeta

Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Unidad Zona Media

San Luis Potosí, S.L.P., México, 1996

Fundamentos de

INVESTIGACION DE OPERACIONES

para Administración

Fundamentos de

INVESTIGACION DE OPERACIONES

para Administración

Juan Manuel Izar Landeta

Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Unidad Zona Media

San Luis Potosí, S.L.P., México, 1996.

ISBN-968-7674-01-6
0485-96022-A0101

Editorial Universitaria Potosina

CONTENIDO

VOLUMEN I

TEMA — Página

Capítulo I
INTRODUCCION A LA INVESTIGACION DE OPERACIONES
Breve reseña histórica de la Investigación de Operaciones 11
Definición de la Investigación de Operaciones 11
Resolución de problemas 11
Toma de decisiones 12
Otras definiciones 12
Algoritmo. Modelo. Modelos probabilisticos y determinísticos. Modelos estáticos y dinámicos. Modelos descriptivos y normativos. Sistema.

Capítulo II
REPASO DE ALGEBRA
Introducción 14
Determinantes 14
Definición. Propiedades de los determinantes. Regla de Cramer.
Matrices 21
Definición. Matriz cuadrada. Matriz identidad. Matriz nula. Matriz regular. Matriz singular. Rango de una matriz. Matriz escalar. Matriz transpuesta. Matriz simétrica. Matriz antisimétrica. Operaciones matriciales. Suma. Multiplicación. Multiplicación de una matriz por un escalar. Multiplicación de matrices. Transformación de matrices. Matriz adjunta. Matriz inversa. Inversión de matrices. Método de la Adjunta. Método de Gauss Jordan. Solución de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales.
Problemas propuestos 42

Capítulo III
PROGRAMACION LINEAL. PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS
Introducción 46
Definiciones 46
Función objetivo. Variables del problema. Coeficientes de la función objetivo. Restricciones. Restricciones no explícitas.
Metodología 46
Problemas propuestos 51

Capítulo IV
PROGRAMACION LINEAL. EL METODO GRAFICO
Introducción 53
Metodología 53
Problemas propuestos 62

Capítulo V
PROGRAMACION LINEAL. EL METODO SIMPLEX
Introducción 63
Etapas del método Simplex 63
Propiedades de las soluciones factibles 63
Metodología Simplex 63
Caso de maximización. Caso de minimización.
Casos especiales del método Simplex 86
Desempates. No hay variable básica de salida. Términos negativos en el lado derecho de las restricciones. Precios sombra.
Problemas propuestos. 88

Capítulo VI
DUALIDAD
Definición 90
Importancia 90
El problema dual 90
Otros tipos de restricciones 93
Teoría de dualidad 95
Principio de dualidad fuerte. Principio de dualidad débil. Clasificación de los problemas duales. Propiedad de simetría. Propiedad de soluciones complementarias. Propiedad de soluciones complementarias óptimas. Propiedad de holgura complementaria.
Interpretación económica del dual 96
Problemas propuestos 97

Capítulo VII
ANALISIS DE SENSIBILIDAD
Introducción 98
Clasificación de casos para el análisis de sensibilidad 98
Cambios en las constantes de las restricciones. Cambios en las contribuciones de las variables en la función objetivo. Cambios en los coeficientes de las variables en las ecuaciones de las restricciones. Adición de nuevas variables. Adición de nuevas restricciones. Cambios en el sentido

de las desigualdades.
Problemas propuestos 111

Capítulo VIII
PROGRAMACION ENTERA
Introducción 113
Caso base 113
Método Gráfico 113
Método de Redondeo de la solución óptima de Programación Lineal 114
Método de Enumeración Completa 115
Método de Bifurcación y Acotación 116
Método de Corte de Gomory 119
Problemas propuestos 121

Capítulo IX
EL METODO DE TRANSPORTE
Introducción 123
Planteamiento del problema 123
Métodos de Inicialización 125
Método de la Esquina Noroeste. Método del Costo Menor. Método Mutuamente Preferido. Método de Vogel. Método de Russell.
Métodos de Optimización 141
Método del Cruce del Arroyo. Método Modi.
Variantes en los problemas de transporte 148
Oferta diferente de demanda. Problemas de maximización. Degeneración. Rutas prohibidas.
Casos especiales de transporte 163
Programación de producción. Problemas de asignación. Método Húngaro. Problemas de transbordo.
Problemas propuestos 172

Capítulo X
PROGRAMACION DINAMICA
Introducción 179
Características y metodología 179
Terminología 179
Problemas propuestos 192

Capítulo XI
ADMINISTRACION DE PROYECTOS
Introducción 195
El Gráfico de Gantt 195
Método PERT/CPM 197
Generalidades. Metodología. Construcción de la red del proyecto.
Determinación del camino crítico. Estimación de tiempos en PERT/CPM.
Relaciones entre tiempo y costo para los proyectos en PERT/CPM.
Problemas propuestos 218

Capítulo XII
ANALISIS DE REDES
Introducción 222
Terminología de redes 222
Método de Recorrido Mínimo 223
Método de la Ruta más Corta 226
Método de Flujo Máximo 229
Otros problemas planteados como modelos de redes 233
Problemas de transbordo. Problemas de transporte. Problemas de asignación.
Problemas propuestos 236

Apéndice I 239

Respuestas de los problemas propuestos 241

Bibliografía 255

Agradecimientos

Quiero dedicar este trabajo a mi esposa Ina y a mis hijos Ana, Jorge y Juan, pues son ellos el motivo de mi esfuerzo para haber hecho realidad este libro.

Aprovecho también para agradecer a mis padres por su aliento constante y su comprensión. Asimismo les agradezco a las siguientes personas: Al alumno Margarito Alvarado Medina, por su paciente colaboración en haber tecleado el manuscrito del texto; a los ingenieros Salvador Gallegos Huerta y Fernando Cervantes Rivera, por sus valiosos comentarios y sugerencias.

Con la esperanza de que este trabajo sea de utilidad para la enseñanza de las materias relacionadas con la Investigación de Operaciones que se imparten en nuestra escuela, me honro en ponerlo a la disposición de las generaciones presentes y venideras.

El autor.

CAPITULO I

INTRODUCCION A LA INVESTIGACION DE OPERACIONES

Breve reseña histórica de la Investigación de Operaciones.

El hombre desde que apareció en la tierra ha buscado mejorar su forma de vida, esto lo ha hecho preguntarse sobre cómo lograr más satisfactores con menores esfuerzos.

Este espíritu fue el que movió a Frederick W. Taylor "El padre de la Administración Científica" a observar cómo desarrollaban los obreros sus diversas tareas y lo llevó a plantearse varias opciones para mejorar la eficiencia de los mismos.

De igual forma al inicio de la segunda guerra mundial, los ingleses se vieron obligados a agrupar gentes que dominaban diferentes disciplinas para estudiar los problemas militares, tácticas de abastecimiento y demás inherentes a la guerra para el aprovechamiento óptimo de los recursos escasos, tanto materiales como humanos. Aquí es donde se considera que nació *La Investigación de Operaciones*. De igual forma y casi al mismo tiempo en Estados Unidos de Norteamérica, se integraron exitosos grupos de trabajo cuyo objetivo era el desarrollo de estrategias para las operaciones militares, tales como problemas logísticos, planeación de maniobras navales y establecimiento de patrones de vuelo para aviones.

Al finalizar la guerra, ese personal que había aplicado los métodos de Investigación de Operaciones a acciones militares, pronto se dio cuenta que las técnicas empleadas podían utilizarse para problemas industriales.

Fue en la década de los 50 cuando la Investigación de Operaciones comenzó a tener auge a nivel industrial, lo cual impulsó su avance y evolución.

En 1947, en Estados Unidos de Norteamérica, George B. Dantzig desarrolló el *Método Simplex de Programación Lineal*, el cual ha tenido amplias aplicaciones y ha servido de base para otros modelos de programación, como la entera y la programación por metas.

En la década de los 60, la Investigación de Operaciones fue implantada en la formación académica de las escuelas de niveles superiores como una nueva parte de los planes y programas de estudios en los Estados Unidos.

Hoy en día, la Investigación de Operaciones es un tema muy popular, el cual está incluido casi en la totalidad de las currículas de las carreras ingenieriles y administrativas que se imparten en las instituciones de educación superior en nuestro país.

Todo esto se debe a que se ha reconocido su importancia para mejorar el proceso de toma de decisiones en los problemas técnicos, económicos y administrativos de las empresas e instituciones de servicios.

Definición de la Investigación de Operaciones.

La Investigación de Operaciones puede definirse como un *grupo de métodos y técnicas aplicables a la solución de problemas operativos de los sistemas.*

Esta definición no es completa, pero sí nos da una idea de lo que trata la materia.

También suele conocérsele como Ciencias de la Administración o como Métodos y Modelos Cuantitativos para la toma de decisiones.

Un rasgo que debemos señalar de la Investigación de Operaciones es su carácter interdisciplinario, es decir, se aplica a situaciones de diversa índole en las empresas e instituciones, como pueden ser las áreas de Ventas, Producción, Finanzas, Personal, Mantenimiento y otras.

Resolución de problemas.

El administrador suele frecuentemente encontrarse con numerosos problemas en su trabajo diario, para los cuales deberá llevar a cabo una serie de acciones racionales que le permitan enfrentarlos exitosamente, de tal manera que aquellos no le afecten al logro de los objetivos que se ha propuesto.

Lo primero será establecer qué es un problema, el cual puede definirse como un *conjunto de hechos no deseados en la operación de un sistema*, los cuales deberán ser corregidos para lograr el desarrollo óptimo del mismo.

Para la resolución de problemas, numerosos autores están de acuerdo en seguir un procedimiento lógico que debe constar de las siguientes etapas:

1.- Definir el Problema. Esto significa identificar todas las características que describen el problema.

2.- Examinar todas las causas posibles. Esto es, listar y analizar todas las posibles causas que dieron lugar al problema.

3.- Obtener los hechos. Tratar de conseguir la mayor cantidad de información concerniente al problema.

4.- Confrontar las posibles causas con la información obtenida. Esto es, analizar cada una de las causas para ver su factibilidad de haber sido la responsable del problema, de esta forma quedará identificada la(s) causa(s) más probable(s).

5.- Efectuar acción correctiva. Una vez identificada la(s) causa(s) que originó el problema, se procederá a resolver éste, eliminando dicha causa y ejecutando las acciones pertinentes para su solución.

6.- Implementar acciones preventivas para el caso de reincidencia. Es decir, prever la repetición del problema y prepararse para ello.

Toma de decisiones.

En toda empresa o institución, el administrador debe tomar numerosas decisiones sobre diferentes situaciones en las que se halla involucrado. Al igual que en el inciso anterior, podríamos señalar una serie de pasos racionales para lograr una buena decisión, los cuales pueden ser los siguientes:

1.- Establecer los objetivos de la decisión.

Definir los objetivos que se pretenden alcanzar con la decisión, de esta etapa quedará en claro la importancia de tomar una decisión.

2.- Clasificar los objetivos.

Esto será jerarquizar los objetivos de acuerdo a su importancia respecto a la decisión.

3.- Desarrollar alternativas de decisión.

Esto será listar todas las posibles opciones de decisión que puedan ser tomadas.

4.- Evaluar las alternativas.

Aquí cada alternativa deberá sopesarse respecto a los objetivos para ver con cuáles de ellos y en qué medida los cumple. Al final de esta etapa deberá elegirse la mejor opción de todas.

5.- Implementar la alternativa elegida.

Es decir, ejecutar las acciones que involucren la opción seleccionada en el paso anterior.

6.- Controlar efectos no deseados de la decisión.

Esto será el análisis y prevención de los posibles problemas a los que puede dar lugar la implementación de la alternativa de decisión escogida.

7.- Seguimiento.

Una vez llevada a cabo la opción de decisión elegida en el paso 5, deberá darse un seguimiento del desarrollo de la misma, pues en muchas ocasiones ésta constará de una serie de pasos a realizar.

Es muy importante señalar que la bondad de la decisión puede algunas veces ser distinta al resultado que se obtenga con la misma.

Otras definiciones.

En este inciso daremos algunas definiciones adicionales que consideramos útiles para la mejor comprensión del texto.

Algoritmo.- Es un procedimiento que consiste en una serie de pasos ejecutables y de decisión ordenados en una secuencia lógica para hallar la solución de un problema.

Modelo.- Es una representación de una situación real. En el caso de la Investigación de Operaciones los modelos que se manejan son matemáticos, los cuales consisten en una ecuación que describe el comportamiento de un fenómeno que sucede en un sistema dado.

Existen varias clasificaciones de los modelos de acuerdo a sus funciones, propósitos, temas o tipo de información que utilizan. Algunos de los más usuales son los siguientes:

Modelos Probabilísticos y Determinísticos.

Los primeros son aquellos que se basan en probabilidades en cuanto a la información que usan como datos.

Los segundos serán los que emplean información que se conoce exactamente, o bien que puede ser obtenida.

A los modelos probabilísticos también suele conocérseles como estocásticos.

Modelos Estáticos y Dinámicos.

Los primeros son aquellos que se ocupan de una situación que tiene condiciones que no cambian respecto al tiempo, es decir, son constantes.

Los Dinámicos en cambio, son aquellos en los cuales sí existen variaciones en las condiciones con el tiempo.

Modelos Descriptivos y Normativos.

Los descriptivos son los modelos que no indican ninguna acción a ser tomada, simplemente presentan una relación que nos dice lo que sucede en el mundo real.

Los normativos por el contrario, sí señalan un curso de acción a ser tomado. A estos últimos también suele denominárseles modelos de optimización.

Sistema.- Es una parte del universo que se toma aparte para ser estudiada, pudiendo estar unida con el exterior o con otros sistemas por medio de flujos de materiales, tal y como se muestra en la figura I.1

Figura I.1 Representación de un sistema

CAPITULO II

REPASO DE ALGEBRA

Introducción

En este capítulo presentaremos un breve repaso de álgebra, tratando los temas de matrices y determinantes.

El álgebra de matrices se aplica para la solución de ecuaciones algebraicas lineales como las que aparecen en la Programación Lineal y en especial en el método Simplex, el cual utiliza la inversión de matrices para llegar a la solución.

Los determinantes por su parte, son aplicados para resolver ecuaciones algebraicas simultáneas, este tipo de sistemas aparecen en los problemas de *Análisis de Markov*, los cuales se verán posteriormente.

Determinantes

Definición: *Se le llama determinante a un arreglo tabular de elementos en forma cuadrada, es decir con igual número de renglones que de columnas, el cual tiene un valor numérico dado.* Sus elementos pueden ser variables o constantes, siendo la mayoría de las veces valores numéricos.

Los determinantes hallan amplias aplicaciones para la solución de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, como veremos más adelante.

El orden de un determinante es el número de renglones y/o de columnas que posee. De esta forma el determinante más sencillo es el de segundo orden con 4 elementos, como por ejemplo el siguiente:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \text{Ec.(II.1)}$$

Donde los subíndices significan la posición del elemento en el arreglo, representando el primer subíndice el renglón en el cual se halla situado el elemento y el segundo a la columna, así por ejemplo el elemento a_{12} será el correspondiente al primer renglón y a la segunda columna.

El valor de un determinante de segundo orden se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad \text{Ec.(II.2)}$$

Como puede observarse, es la diferencia de los productos formados con los elementos de las diagonales.

A continuación presentaremos un ejercicio.

Ejemplo II.1.- Hallar el valor de los siguientes determinantes de segundo orden

$$(a)\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \qquad (b)\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} \qquad (c)\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}$$

Solución:

De acuerdo a la Ec.(II.2) tendremos

$$(a)\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (6)(0) - (-1)(3) = 0 + 3 = 3$$

$$(b)\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = (5)(4) - (8)(7) = 20 - 56 = -36$$

$$(c)\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = (a)(b) - (b)(a) = ab - ba = 0$$

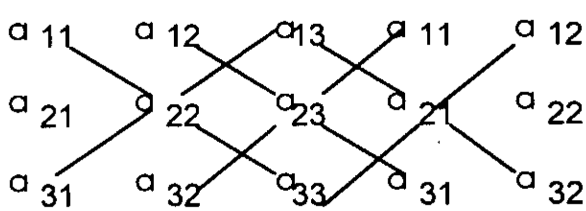
Existen determinantes de órdenes mayores, como los de tercer orden, de los cuales el siguiente es un ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \text{Ec.(II.3)}$$

Por su parte para encontrar el valor de éste, deberemos realizar un poco más de trabajo, sin embargo, una manera simple de hacerlo es agregando las dos primeras columnas del determinante como cuarta y quinta columnas respectivamente, con lo cual tendremos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad \text{Ec.(II.4)}$$

Ahora formaremos 3 diagonales en un sentido y 3 en el sentido opuesto, del modo siguiente:



Ec.(II.5)

Estas representan los productos de los elementos que las forman, de manera que el valor del determinante es:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \qquad \text{Ec.(II.6)}$$

Enseguida presentamos un ejercicio:

Ejemplo II.2.- Hallar el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 \\ -2 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución:

De acuerdo a la metodología explicada, aplicaremos la Ec.(II.6) a los elementos del determinante para obtener

$$(4)(5)(2) + (6)(0)(3) + (3)(-2)(-1) - (3)(5)(3) - (4)(0)(-1) - (6)(-2)(2)$$
$$= 40 + 0 + 6 - 45 - 0 + 24 = 25$$

Propiedades de los determinantes.

Propiedad número 1.- Un determinante puede descomponerse en otros determinantes de órdenes menores conforme a la siguiente fórmula:

$$D = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in} \qquad i = 1,2,\ldots,n \qquad \text{Ec.(II.7)}$$

De esta forma descompondremos un determinante de orden **n**, en **n** determinantes de orden **n-1**

En esta fórmula a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in} son los elementos del renglón i ésimo del determinante, mientras que C_{i1}, C_{i2}, ..., C_{in} son los cofactores de cada elemento, los cuales se obtienen con la ecuación siguiente:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \qquad \text{Ec.(II.8)}$$

Donde M_{ij} es el menor del elemento a_{ij} el cual será el determinante de orden inmediato inferior que resulta de eliminar el renglón i y la columna j del determinante original, así por ejemplo para el caso de un determinante de 3x3 definido por la Ec.(II.3), el menor M_{12} será el determinante de segundo orden que resultará al eliminar el primer renglón y la segunda columna del determinante original, es decir:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \qquad \text{Ec.(II.9)}$$

Quedando de este modo

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \text{Ec.(II.10)}$$

Ahora presentaremos un ejemplo para ilustrar lo antes señalado.

Ejemplo II.3.- Resolver el determinante del ejemplo II.2 utilizando la metodología de los cofactores.

Solución:

El determinante de tercer orden es

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 \\ -2 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Si aplicamos la Ec.(II.7) al primer renglón, tendremos:

$$D = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

Donde cada cofactor se obtendrá por la aplicación de la Ec.(II.8) a nuestro caso, de esta forma tendremos:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$$

Donde M_{11} será el determinante de segundo orden resultante de eliminar en D el primer renglón y la primera columna,

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (5)(2) - (0)(-1) = 10 - 0 = 10$$

Resultando entonces para C_{11}:

$$C_{11} = (-1)^2 (10) = 10$$

Ahora para C_{12}:

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12}$$

Donde M_{12} será:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-2)(2) - (0)(3) = -4 - 0 = -4$$

Resultando entonces el cofactor:

$$C_{12} = (-1)^3 (-4) = 4$$

Finalmente para C_{13} :

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13}$$

Donde M_{13} es:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-2)(-1) - (5)(3) = 2 - 15 = -13$$

Dando para C_{13}:

$$C_{13} = (-1)^4 (-13) = -13$$

Finalmente sustituiremos los cofactores para calcular D conforme a la Ec.(II.7):

$$D = (4)(10) + (6)(4) + (3)(-13) = 40 + 24 - 39 = 25$$

El cual es el mismo valor del ejemplo anterior.

Esta propiedad de los determinantes es muy utilizada cuando aparecen casos de órdenes cuartos o mayores.

Propiedad número 2.- El valor de un determinante no se altera si sus renglones se escriben como columnas en el mismo orden.

Esto lo comprobaremos con un ejercicio.

Ejemplo II.4.- Comprobar la segunda propiedad con el determinante

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$$

Solución:

Este determinante vale

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = (6)(8) - (-4)(3) = 48 + 12 = 60$$

Ahora de acuerdo a lo enunciado en la segunda propiedad, pondremos los dos renglones como columnas en el mismo orden, entonces tendremos:

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = (6)(8) - (3)(-4) = 48 + 12 = 60$$

Con lo cual ha quedado comprobado.

Propiedad número 3.- Si los elementos de un renglón (o de una columna) cualquiera se multiplican por un valor dado S, el valor del determinante quedará multiplicado por S.

Esto lo ilustraremos con el siguiente ejemplo:

Ejemplo II.5.- Comprobar la tercera propiedad para el determinante del ejemplo anterior para el caso de que S=1/2.

Solución:

Elegiremos arbitrariamente a la primera columna para efectuar la comprobación, entonces al multiplicar los elementos de ella por S, tendremos:

$$D' = DS = \begin{vmatrix} 6/2 & -4 \\ 3/2 & 8 \end{vmatrix} = (6/2)(8) - (-4)(3/2) = 24 + 6 = 30$$

El cual es igual al valor del determinante D′ que será D (60) multiplicado por S, con lo que ha quedado comprobado.

Propiedad número 4.- Si todos los elementos de un renglón o una columna son cero, el valor del determinante será también de cero.

Propiedad número 5.- Si se intercambian de posición 2 líneas cualquiera de un determinante, que pueden ser renglones o columnas, el valor del determinante será el mismo con el signo cambiado.

A continuación presentaremos un ejemplo:

Ejemplo II.6.- Comprobar la quinta propiedad para el determinante del ejemplo anterior.

Solución:
El determinante original es:

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 60$$

Escogeremos cambiar de posición los renglones, con lo cual tendremos:

$$D' = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = (3)(-4) - (8)(6) = -12 - 48 = -60$$

Con lo que ha quedado comprobado.

Propiedad número 6.- Si los elementos de dos líneas cualquiera, sean renglones o columnas son proporcionales, el determinante valdrá cero.

Esto lo ilustraremos con el siguiente caso:

Ejemplo II.7.- Comprobar la sexta propiedad.

Para el siguiente determinante

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 5 \\ 7 & 14 & -1 \\ -3 & -6 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución:

Vemos que los elementos de la segunda columna son el doble de los de la primera, por lo que conforme a la sexta propiedad este determinante debe valer cero, lo cual estimaremos ahora mediante la aplicación de la Ec.(II.6):

$$D = (4)(14)(2) + (8)(-1)(-3) + (5)(7)(-6) - (5)(14)(-3) - (4)(-1)(-6) - (8)(7)(2)$$
$$= 112 + 24 - 210 + 210 - 24 - 112 = 0$$

Con lo cual se ha comprobado.

Propiedad número 7.- El valor de un determinante no se altera si a los elementos de una línea cualquiera, ya sea renglón o columna, se le agregan o restan un múltiplo constante de los elementos respectivos de otra línea cualquiera.

Esto lo comprobaremos enseguida.

Ejemplo II.8.- Para el determinante

$$D = \begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Comprobar la séptima propiedad.

Solución:

El determinante vale

$$D = \begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (9)(2) - (7)(5) = 18 - 35 = -17$$

Ahora conforme a la propiedad número 7, al primer renglón le agregaremos el doble del segundo renglón, con lo cual tendremos:

$$D = \begin{vmatrix} 19 & 11 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (19)(2) - (11)(5) = 38 - 55 = -17$$

Por lo que su valor no ha cambiado y ha sido válido el enunciado de la propiedad.

Es conveniente señalar que en las transformaciones de líneas de un determinante no deberán mezclarse elementos de renglones con aquellos de columnas, esto significa que no podremos agregar o restar elementos de un renglón a los de una columna.

Propiedad número 8.- Si cada uno de los elementos de un renglón o una columna cualquiera de un determinante pueden expresarse como un binomio, entonces el determinante podrá descomponerse en dos, de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$D=\begin{vmatrix} a_1+k_1 & b_1+k_2 & c_1+k_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \text{Ec.(II.11)}$$

La cual demostraremos con un ejercicio.

Ejemplo II.9.- Demostrar la propiedad número 8 para el determinante

$$D=\begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 7 & 4 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

Solución:

El determinante D vale:

$$D=(6)(4)(-4) + (5)(1)(-2) + (2)(7)(-3) - (2)(4)(-2) - (6)(1)(-3) - (5)(7)(-4)$$
$$= -96 - 10 - 42 + 16 + 18 + 140 = 26$$

Conforme a la propiedad número 8, lo descompondremos en la forma siguiente:

$$D=\begin{vmatrix} 4+2 & 4+1 & 1+1 \\ 7 & 4 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{vmatrix}}_{D_1} + \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{vmatrix}}_{D_2}$$

Deberemos evaluar estos determinantes, los cuales serán:

$$D_1 = (4)(4)(-4) + (4)(1)(-2) + (1)(7)(-3) - (1)(4)(-2) - (4)(1)(-3) - (4)(7)(-4)$$
$$= -64 - 8 - 21 + 8 + 12 + 112 = 39$$

y para D_2:

$$D_2 = (2)(4)(-4) + (1)(1)(-2) + (1)(7)(-3) - (1)(4)(-2) - (2)(1)(-3) - (1)(7)(-4)$$
$$= -32 - 2 - 21 + 8 + 6 + 28 = -13$$

Por lo que $D = D_1 + D_2 = 39 - 13 = 26$, con lo cual ha quedado demostrado.

Propiedad número 9.- Para la multiplicación de determinantes se tiene que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} x \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \qquad \text{Ec.(II.12)}$$

Donde cada elemento c_{ij} vendrá dado por

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots\dots + a_{in}b_{nj}$$

para $i=1, 2, \dots\dots, n$ Ec.(II.13)

$j=1, 2, \dots\dots, n$

Aquí los determinantes multiplicados deberán ser necesariamente del mismo orden.

A continuación presentaremos un ejercicio.

Ejemplo II.10.- Comprobar la propiedad número 9 con los siguientes determinantes de segundo orden

$$A=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

Solución:

En base a la fórmula dada por la Ec.(II.13), deberemos obtener los elementos del determinante C, los cuales serán:

Para i=1, j=1: $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = (4)(5) + (3)(4) = 20 + 12 = 32$

Para i=1, j=2: $c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = (4)(-2) + (3)(-1) = -8 - 3 = -11$

Para i=2, j=1: $c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = (-1)(5) + (2)(4) = -5 + 8 = 3$

Para i=2, j=2: $c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = (-1)(-2) + (2)(-1) = 2 - 2 = 0$

Entonces el determinante C es:

$$C = \begin{vmatrix} 32 & -11 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Cuyo valor es:

$C = (32)(0) - (-11)(3) = 0 + 33 = 33$

El cual deberá de ser igual al producto de los valores de los determinantes A y B, los cuales valdrán:

$A = (4)(2) - (3)(-1) = 8 + 3 = 11$ y $B = (5)(-1) - (-2)(4) = -5 + 8 = 3$

Por lo que el producto de ambos será:

$A \times B = (11)(3) = 33$

Con lo cual ha quedado demostrado.

Es pertinente comentar que la multiplicación de determinantes es exactamente igual a la de matrices, la cual se verá más adelante en este mismo capítulo.

Ahora presentaremos la *Regla de Cramer*, la cual es muy conocida pues se aplica a la solución de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales.

Regla de Cramer.- Para el sistema de ecuaciones algebraicas lineales

$$\begin{array}{l} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = c_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n = c_2 \\ \quad \ldots + \ldots + \ldots + \ldots = .. \\ \quad \ldots + \ldots + \ldots + \ldots = .. \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \ldots + a_{nn}X_n = c_n \end{array} \qquad \text{Ec.(II.14)}$$

Cada incógnita puede calcularse por medio de la siguiente fórmula:

$$x_i = D_i / D \qquad \text{para } i=1, 2, \ldots\ldots\ldots, n \qquad \text{Ec.(II.15)}$$

Donde D será un determinante de orden n dado por:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \text{Ec.(II.16)}$$

Mientras que D_i será aquel determinante que resulta de reemplazar en el D la columna i por los términos independientes c_1, c_2, ..., c_n. Esto significa que para el caso de D_2 tendríamos:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & c_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & c_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Enseguida presentaremos un ejemplo de la aplicación de esta regla.

Ejemplo II.11.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas lineales utilizando la regla de Cramer

$$X_1 - X_2 = 3$$
$$X_1 + X_2 = 17$$

Solución:

De acuerdo a lo establecido por la Ec.(II.16), D será:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (-1)(1) = 1 + 1 = 2$$

Mientras que D_1 y D_2 serán:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 17 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (-1)(17) = 3 + 17 = 20$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 17 \end{vmatrix} = (1)(17) - (3)(1) = 17 - 3 = 14$$

Por lo tanto al aplicar la Ec.(II.15) a nuestro caso, tendremos:

$X_1 = D_1 / D = 20/2 = 10, \quad X_2 = D_2 / D = 14/2 = 7$

Matrices

Definición: *La matriz es un arreglo de elementos en forma rectangular dispuestos en, renglones y columnas.* Estos elementos pueden ser numéricos, variables, constantes, funciones, etc.

La siguiente es una matriz de **m** renglones y **n** columnas:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{Ec.(II.17)}$$

Siendo el orden de la matriz m x n, el cual indica el tamaño del arreglo.

Cada a_{ij} es un elemento de la matriz y la notación de los subíndices, significa la posición del mismo, de esta forma la i se refiere al renglón en el cual está colocado el elemento, mientras que la j representa la columna, al igual que la notación vista anteriormente para los determinantes.

Las matrices a diferencia de los determinantes no poseen ningún valor numérico para todo el arreglo.

La diagonal principal de una matriz es el grupo de elementos a_{ij} para los cuales se cumpla que i sea igual a j, o sea que estará integrada por elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots\ldots, a_{nn}$.

A continuación presentaremos algunos tipos de matrices, los cuales es conveniente recordar.

Matriz Cuadrada.- Es aquella matriz que tiene el mismo número de renglones y de columnas. De esta manera habrá matrices cuadradas de 2x2, de 3x3, de 4x4, de las cuales presentamos ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{Matriz cuadrada de } 2 \times 2$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{Matriz cuadrada de } 3 \times 3$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & -6 \\ 6 & -2 & -1 & -3 \\ -2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{Matriz cuadrada de 4 x 4}$$

Matriz Identidad.- Es aquella matriz en la cual los elementos de la diagonal principal son la unidad y el resto de los elementos son cero.

Esto es:

$$aij \quad \text{si } i=j, \quad aij=1$$
$$\text{si } i \neq j, \quad aij=0$$
$$\text{E c.(II.18)}$$

La matriz identidad siempre es cuadrada, así por ejemplo, la matriz identidad de 3 x 3 será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Nula.- Es aquella matriz en la cual todos sus elementos son cero.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Matriz nula de 2 x 3}$$

Matriz Regular.- Es aquella matriz cuyo determinante formado con sus elementos es diferente de cero.

$$|A| \neq 0 \qquad \text{Ec.(II.19)}$$

Matriz Singular.- Es aquella cuyo determinante vale cero.

$$|A| = 0 \qquad \text{Ec.(II.20)}$$

Rango de una Matriz.- Es el orden máximo del determinante que puede formarse con los elementos de la matriz cuyo valor sea diferente de cero.

Para aclarar esta definición presentaremos un ejemplo:

Ejemplo II.12.- Determinar el rango de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 10 \\ -1 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución: Deberemos calcular los determinantes formados con los elementos de cada matriz. Entonces para la A tendremos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (6)(8)(3) + (7)(4)(3) + (-1)(5)(1) - (3)(8)(-1) - (1)(4)(6) - (3)(5)(7)$$

$$= 144 + 84 - 5 + 24 - 24 - 105 = 118$$

El cual por ser diferente de cero y de tercer orden, nos indica que la matriz es de rango 3.

Por su parte para la matriz B, calcularemos su determinante,

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 10 \\ -1 & 8 & -5 \end{vmatrix} = (1)(3)(-5) + (2)(8)(5) + (-1)(2)(10) - (5)(3)(-1) - (10)(8)(1) - (-5)(2)(2)$$

$$= -15 + 80 - 20 + 15 - 80 + 20 = 0$$

Por lo tanto |B|=0 y la matriz B no es de rango 3, por lo que deberemos buscar un determinante cualquiera de orden 2 que pueda formarse con los elementos de la matriz y que sea diferente de cero. Si tomamos los 2 primeros elementos de los dos primeros renglones, tendremos:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (1)(3) - (2)(2) = 3 - 4 = -1$$

El cual ya es diferente de cero, por lo que el rango de la matriz es 2.
La única matriz de rango cero es la nula.

Matriz Escalar.- Es aquella matriz en la cual los elementos de la diagonal principal valen un escalar dado k diferente de cero y el resto de sus elementos son cero, por ejemplo:

$$R = \begin{pmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{pmatrix} \quad \text{es Matriz escalar} \qquad \text{Ec.(II.21)}$$

Matriz Transpuesta.- Es aquella matriz denotada como A^T que se obtiene a partir de la matriz original A, en la cual los elementos de cada renglón de ésta pasan a ser los elementos de cada columna de aquella. Esto quedará claro con el siguiente ejemplo:

Ejemplo II.13.- Obtener la matriz transpuesta de A, si

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -3 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución.- Colocaremos los elementos del primer renglón como primera columna y los del segundo renglón como segunda columna en la matriz transpuesta, de esta forma obtendremos:

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Observamos que la transpuesta no es del mismo orden que la matriz original a menos que ésta sea cuadrada.

Una propiedad de las matrices transpuestas es que la transpuesta del producto de 2 matrices A y B es igual al producto de las transpuestas colocadas en sentido inverso, es decir:

$$(A \times B)^T = B^T \times A^T \qquad \text{Ec.(II.22)}$$

Esto puede demostrarse con un ejemplo numérico, tal es el caso del problema propuesto número II.30.

Matriz Simétrica.- Es toda matriz que es igual a su transpuesta, por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 7 & 3 & 5 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

La cual implica que

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{para toda i y para toda j} \qquad \text{Ec.(II.23)}$$

Matriz Antisimétrica.- Es aquella matriz para la cual se cumple que

$$A^T = -A \qquad \text{Ec.(II.24)}$$

La cual implica que

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad \text{si i es diferente de j}$$
$$a_{ij} = 0 \quad \text{si i=j} \qquad \text{Ec.(II.25)}$$

Presentaremos ahora un ejemplo de este tipo de matriz:

Ejemplo II.14.- Demostrar que la siguiente matriz es antisimétrica.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 5 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: La matriz A será antisimétrica si se cumple lo señalado en la Ec.(II.24). Entonces obtendremos A^T y luego -A para ver si se satisface la igualdad.

La transpuesta implicará poner cada renglón de la matriz original como columna para obtener:

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz -A será la matriz original con el signo de cada elemento cambiado, entonces tendremos:

$$-A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

La cual es exactamente igual a la transpuesta, con lo cual se ha comprobado.

Operaciones matriciales.

Suma.- La suma de matrices sólo puede llevarse a cabo si las matrices sumando son del mismo orden. Entonces se suman los elementos de la misma posición de las matrices sumando para obtener el elemento de la matriz suma para esa posición. Esto es, dadas las matrices A y B

$$C = A + B \qquad \text{Ec. (II.26)}$$

Donde cada elemento $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para toda i y para toda j

Esto lo ilustraremos con un par de ejemplos

Ejemplo II.15.- Obtener C = A + B si

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -7 \\ -6 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 6 & -1 & 6 \\ 3 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución: Cada elemento c_{ij} de la matriz suma se obtendrá de sumar los correspondientes elementos de las matrices sumando. Así para el caso del elemento del primer renglón y la primera columna tendremos:

$$c_{11} = a_{11} + b_{11}$$
$$= 5 + 4 = 9$$

para i = 1, j = 2:

$$c_{12} = a_{12} + b_{12}$$
$$= 8 + (-2) = 6$$

para i = 1, j = 3:

$$c_{13} = a_{13} + b_{13}$$
$$= -7 + 7 = 0$$

Procediendo del mismo modo para el segundo y tercer renglón, obtendremos:

para i = 2, j = 1:

$$c_{21} = a_{21} + b_{21}$$
$$= -6 + 6 = 0$$

para i=2, j=2:

$$c_{22} = a_{22} + b_{22}$$
$$= 1 + (-1) = 0$$

para i=2, j=3:

$c_{23} = a_{23} + b_{23}$
$= 0 + 6 = 6$

para i=3, j=1:

$c_{31} = a_{31} + b_{31}$
$= 4 + 3 = 7$

para i=3, j=2:

$c_{32} = a_{32} + b_{32}$
$= -2 + 8 = 6$

para i=3, j=3:

$c_{33} = a_{33} + b_{33}$
$= 3 + (-2) = 1$

De esta forma la matriz C será:

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo II.16.- Obtener la matriz resta D = A - B para las matrices A y B dadas en el ejemplo anterior.

Solución: De hecho la operación de restar matrices puede considerarse un caso especial de la suma, pues la matriz que va a ser restada (la B en este ejemplo) se suma con el signo cambiado, es decir:

D = A-B = A + (-B)

Entonces tendremos que

$$-B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -7 \\ -6 & 1 & -6 \\ -3 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

La cual sumada a A nos dará D,

$$D = A + (-B) = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -7 \\ -6 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 & -7 \\ -6 & 1 & -6 \\ -3 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

Efectuando operaciones tendremos:

$$D = \begin{pmatrix} 5-4 & 8+2 & -7-7 \\ -6-6 & 1+1 & 0-6 \\ 4-3 & -2-8 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -14 \\ -12 & 2 & -6 \\ 1 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

En la suma de matrices se cumplen las siguientes leyes:

Conmutativa: A + B = B + A Ec. (II.27)

Asociativa: A + (B+C) = (A+B) + C Ec. (II.28)

Estas leyes son obvias si consideramos que el orden en que se agregan los sumandos no afecta al resultado de la suma.

Multiplicación:

Multiplicación de una matriz por un escalar.- En la multiplicación de una matriz A por un escalar k se tendrá lo siguiente.

A k = k A Ec.(II.29)

$$\text{si A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ de orden } m \times n$$

Entonces

$$Ak = kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix} \text{ de orden } m \times n \qquad \text{Ec. (II.30)}$$

Nótese que el resultado es también una matriz del mismo orden que la matriz original.
A continuación presentaremos un ejemplo.

Ejemplo II.17.- Resolver la multiplicación de la matriz A por el escalar k=1/2, si A es

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:
De acuerdo a lo señalado por la Ec. (II.30), tendremos:

$$Ak = \begin{pmatrix} 1/2(6) & 1/2(8) \\ 1/2(-2) & 1/2(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = kA$$

Nótese que la división de una matriz por un escalar es un caso especial de la multiplicación, pues este ejemplo podría haberse planteado como la división de la matriz A entre el escalar 2, que es lo mismo que multiplicar por el inverso, es decir 1/2.

Algunas propiedades de las multiplicación de matrices por un escalar son las siguientes:
Propiedad Distributiva respecto a la suma de matrices: k (A+B) = k A + k B Ec. (II.31)
Propiedad Distributiva respecto a la suma de escalares: (k+ l) A = k A + l A Ec. (II.32)
Propiedad Asociativa del producto de escalares por una matriz: k (l A) = (k l) A Ec. (II.33)
Siendo k y l escalares; A y B matrices.

Ahora presentaremòs 2 ejemplos que comprueban parte de lo anterior.

Ejemplo II.18.- Comprobar la propiedad distributiva respecto a la suma de matrices, si k=2 y A y B son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Solución: De acuerdo a la Ec.(II.31) tenemos que k (A+B) = kA + kB

Obtendremos primeramente el lado izquierdo de la igualdad, para ello debemos recordar que los paréntesis afectan el orden en que se deben efectuar las operaciones, por tanto iniciaremos ejecutando la suma de matrices A+B que es lo que está dentro del paréntesis:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Ahora procederemos a multiplicar el escalar k = 2 por esta matriz suma:

$$k(A + B) = \begin{pmatrix} 2(7) & 2(11) \\ 2(8) & 2(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 22 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

y este es el resultado del lado izquierdo de la igualdad.

Por su parte, para el lado derecho tendremos que obtener el producto kA, luego el producto kB y finalmente la suma de ambos.

El producto k A será:

$$kA=\begin{pmatrix}2(3) & 2(5)\\ 2(7) & 2(9)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 10\\ 14 & 18\end{pmatrix}$$

Por su parte k B será:

$$kB=\begin{pmatrix}2(4) & 2(6)\\ 2(-3) & 2(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 12\\ -6 & -10\end{pmatrix}$$

Finalmente, la suma de kA + kB será:

$$kA+kB=\begin{pmatrix}6 & 10\\ 14 & 18\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & 12\\ -6 & -10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 22\\ 8 & 8\end{pmatrix}$$

La cual es exactamente igual al resultado del lado izquierdo.

Ejemplo II.19.- Comprobar la Ec.(II.32), si k= 4 y l = 1/2,

$$\text{si } A=\begin{pmatrix}5 & 11\\ -3 & 7\end{pmatrix}.$$

Solución: Conforme a la Ec.(II.32), procederemos a obtener el primer miembro, para lo cual lo primero será efectuar la suma de escalares k+l y luego este resultado que también es un escalar, multiplicarlo por la matriz A, entonces:

(k+l) = 4 + 1/2 = 8/2 + 1/2 = 9/2

entonces la multiplicación es:

$$(k+l)A=\begin{pmatrix}9/2(5) & 9/2(11)\\ 9/2(-3) & 9/2(7)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}45/2 & 99/2\\ -27/2 & 63/2\end{pmatrix}$$

Por su parte, para el segundo miembro de la Ec.(II.32), debemos obtener el producto kA, luego el producto lA y finalmente la suma de ambos, entonces:

$$kA=\begin{pmatrix}4(5) & 4(11)\\ 4(-3) & 4(7)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20 & 44\\ -12 & 28\end{pmatrix}$$

$$lA=\begin{pmatrix}1/2(5) & 1/2(11)\\ 1/2(-3) & 1/2(7)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/2 & 11/2\\ -3/2 & 7/2\end{pmatrix}$$

por su parte, la suma será

$$kA+lA=\begin{pmatrix}20 & 44\\ -12 & 28\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5/2 & 11/2\\ -3/2 & 7/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}45/2 & 99/2\\ -27/2 & 63/2\end{pmatrix}$$

que es exactamente igual al resultado obtenido para el primer miembro, por lo cual ha quedado demostrado.

Multiplicación de matrices.

Para poder efectuar la multiplicación de 2 matrices cualesquiera A x B, será necesario que el número de columnas de la primera de ellas sea igual al número de renglones de la segunda, de lo contrario el producto no estará definido.

Si por ejemplo, la matriz A es de orden m x n y la matriz B de orden n x p, la matriz producto A x B = C será de orden m x p, es decir, del número de renglones de la primera matriz y del número de columnas de la segunda, esto es:

$$\underset{(m \times n)}{A} \times \underset{(n \times p)}{B} = \underset{(m \times p)}{C} \qquad \text{Ec.(II.34)}$$

donde cada elemento c_{ij} de la matriz C se calcula por medio de la siguiente fórmula:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \qquad \text{Ec.(II.35)}$$

siendo c_{ij}, a_{ij}, b_{ij} los elementos de las matrices C, A y B respectivamente.

A continuación presentaremos 2 ejemplos para ilustrar lo anterior:

Ejemplo II.20.- Obtener C = A x B si

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

La matriz A es de orden 3 x 2 y la B de 2 x 2, debiendo resultar C de 3 x 2.

Para obtener cada elemento de la matriz C, aplicaremos la Ec.(II.35), siendo n=2 en nuestro caso.

Entonces para i=1, j=1:

$$c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}$$
$$= (4)(4) + (-1)(-2) = 16 + 2 = 18$$

Ahora para i=1, j=2:

$$c_{12} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22}$$
$$= (4)(8) + (-1)(-3) = 32 + 3 = 35$$

Para i=2, j=1:

$$c_{21} = a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21}$$
$$= (7)(4) + (5)(-2) = 28 - 10 = 18$$

Para i=2, j=2:

$$c_{22} = a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22}$$
$$= (7)(8) + (5)(-3) = 56 - 15 = 41$$

Para i=3, j=1:

$$c_{31} = a_{31} b_{11} + a_{32} b_{21}$$
$$= (1)(4) + (2)(-2) = 4 - 4 = 0$$

Para i=3, j=2:

$$c_{32} = a_{31} b_{12} + a_{32} b_{22}$$
$$= (1)(8) + (2)(-3) = 8 - 6 = 2$$

Con lo que la matriz producto C es:

$$C = \begin{pmatrix} 18 & 35 \\ 18 & 41 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo II.21.- Obtener C=A x B si

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

A es de orden 1 x 2 y B es de 2 x 1, por lo que la matriz producto C será de 1 x 1, es decir solamente de un elemento, el cual obtendremos mediante la aplicación de la Ec.(II.35) a nuestro caso para obtener:

Para i=1, j=1:

$$c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}$$
$$= (4)(5) + (8)(-2) = 20 - 16 = 4$$

El cual es el único elemento de la matriz C.

La multiplicación de matrices tiene las siguientes propiedades:

No es conmutativa	$AxB \neq BxA$	Ec.(II.36)
Propiedad asociativa	(AxB) x C = A x (BxC)	Ec.(II.37)
Propiedades distributivas	(A+B) x C = AxC + BxC	Ec.(II.38)
	C x (A+B) = CxA + CxB	Ec.(II.39)

A continuación demostraremos con ejercicios numéricos algunas de estas propiedades:

Ejemplo II.22.- Demostrar la propiedad asociativa de la multiplicación de matrices para

$$A=\begin{pmatrix}6 & 5\\ 3 & 0\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Solución:

Conforme a la Ec.(II.37), el primer miembro deberá obtenerse efectuando primeramente AxB y el resultado se multiplicará por D, entonces procederemos a llevar a cabo esto:

$$AxB=\begin{pmatrix}6 & 5\\ 3 & 0\end{pmatrix}x\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=C$$

Al aplicar la fórmula dada por la Ec.(II.35), para k de 1 a 2, tendremos:

Para i=1, j=1:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$$
$$= (6)(4) + (5)(1) = 24 + 5 = 29$$

Para i=1, j=2:

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$$
$$= (6)(3) + (5)(2) = 18 + 10 = 28$$

Para i=2, j=1:

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}$$
$$= (3)(4) + (0)(1) = 12 + 0 = 12$$

Para i=2, j=2:

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$
$$= (3)(3) + (0)(2) = 9 + 0 = 9$$

Por lo cual C que es la matriz producto AxB es

$$C=\begin{pmatrix}29 & 28\\ 12 & 9\end{pmatrix} \text{ de orden } 2 \times 2$$

Ahora procederemos a calcular C x D, para lo cual también aplicaremos la Ec.(II.35),

$$CxD=\begin{pmatrix}29 & 28\\ 12 & 9\end{pmatrix}x\begin{pmatrix}5 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=P$$

Donde denominamos como P a la matriz producto. Entonces cada elemento de P será:

Para i=1, j=1:

$$p_{11} = c_{11}d_{11} + c_{12}d_{21}$$
$$= (29)(5) + (28)(0) = 145 + 0 = 145$$

Para i=1, j=2:

$$p_{12} = c_{11}d_{12} + c_{12}d_{22}$$
$$= (29)(2) + (28)(-1) = 58 - 28 = 30$$

Para i=2, j=1:

$$p_{21} = c_{21}d_{11} + c_{22}d_{21}$$
$$= (12)(5) + (9)(0) = 60 + 0 = 60$$

Para i=2, j=2:

$$p_{22} = c_{21}d_{12} + c_{22}d_{22}$$
$$= (12)(2) + (9)(-1) = 24 - 9 = 15$$

$= (12)(2) + (9)(-1) = 24 - 9 = 15$

Por lo tanto la matriz producto P es:

$$P = \begin{pmatrix} 145 & 30 \\ 60 & 15 \end{pmatrix}$$

Ahora vamos a calcular el segundo miembro de la igualdad dada por la Ec.(II.37), para lo cual primeramente obtendremos BxD y este producto que llamaremos E será el segundo factor que luego será multiplicado por A, entonces tendremos:

Para i=1, j=1:

$$e_{11} = b_{11}d_{11} + b_{12}d_{21}$$
$$= (4)(5) + (3)(0) = 20 + 0 = 20$$

Para i=1, j=2:

$$e_{12} = b_{11}d_{12} + b_{12}d_{22}$$
$$= (4)(2) + (3)(-1) = 8 - 3 = 5$$

Para i=2, j=1:

$$e_{21} = b_{21}d_{11} + b_{22}d_{21}$$
$$= (1)(5) + (2)(0) = 5 + 0 = 5$$

Para i=2, j=2:

$$e_{22} = b_{21}d_{12} + b_{22}d_{22}$$
$$= (1)(2) + (2)(-1) = 2 - 2 = 0$$

Por lo que la matriz E será:

$$E = \begin{pmatrix} 20 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora procederemos a obtener el producto final AxE el cual deberá ser igual a P, entonces:

Para i=1, j=1:

$$p_{11} = a_{11}e_{11} + a_{12}e_{21}$$
$$= (6)(20) + (5)(5) = 120 + 25 = 145$$

Para i=1, j=2:

$$p_{12} = a_{11}e_{12} + a_{12}e_{22}$$
$$= (6)(5) + (5)(0) = 30 + 0 = 30$$

Para i=2, j=1:

$$p_{21} = a_{21}e_{11} + a_{22}e_{21}$$
$$= (3)(20) + (0)(5) = 60 + 0 = 60$$

Para i=2, j=2:

$$p_{22} = a_{21}e_{12} + a_{22}e_{22}$$
$$= (3)(5) + (0)(0) = 15 + 0 = 15$$

Siendo la matriz P exactamente igual a la obtenida para el primer miembro, por lo que ha quedado demostrado.

Ejemplo II.23.- Demostrar para las mismas matrices del problema anterior la propiedad distributiva dada por la Ec. (II.39).

Solución:

Lo primero será obtener el primer miembro, es decir D x (A+B), para lo cual haremos la suma, a la que llamaremos S, entonces:

$$S = A + B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora efectuaremos el producto D x S, al que llamaremos P, entonces:

$$P = DxS = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Utilizando nuevamente la Ec.(II.35), tendremos:
Para i=1, j=1:

$$p_{11} = d_{11}s_{11} + d_{12}s_{21}$$
$$= (5)(10) + (2)(4) = 50 + 8 = 58$$

Para i=1, j=2:

$$p_{12} = d_{11}s_{12} + d_{12}s_{22}$$
$$= (5)(8) + (2)(2) = 40 + 4 = 44$$

Para i=2, j=1:

$$p_{21} = d_{21}s_{11} + d_{22}s_{21}$$
$$= (0)(10) + (-1)(4) = 0 - 4 = -4$$

Para i=2, j=2:

$$p_{22} = d_{21}s_{12} + d_{22}s_{22}$$
$$= (0)(8) + (-1)(2) = 0 - 2 = -2$$

Por lo que la matriz P será

$$P = \begin{pmatrix} 58 & 44 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Ahora procederemos a calcular el segundo miembro, los productos DxA al que denominaremos U, y el DxB al que llamaremos V. Entonces hallaremos primeramente U:

$$U = DxA = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando la Ec.(II.35), tendremos
Para i=1, j=1:

$$u_{11} = d_{11}a_{11} + d_{12}a_{21}$$
$$= (5)(6) + (2)(3) = 30 + 6 = 36$$

Para i=1, j=2:

$$u_{12} = d_{11}a_{12} + d_{12}a_{22}$$
$$= (5)(5) + (2)(0) = 25 + 0 = 25$$

Para i=2, j=1:

$$u_{21} = d_{21}a_{11} + d_{22}a_{21}$$
$$= (0)(6) + (-1)(3) = 0 - 3 = -3$$

Para i=2, j=2:

$$u_{22} = d_{21}a_{12} + d_{22}a_{22}$$
$$= (0)(5) + (-1)(0) = 0 + 0 = 0$$

Por lo que la matriz U será:

$$U = \begin{pmatrix} 36 & 25 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Por su parte para la matriz V tendremos:

$$= DxB = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

donde cada elemento de ella se obtiene mediante la Ec.(II.35), entonces
Para i=1, j=1:

$$v_{11} = d_{11}b_{11} + d_{12}b_{21}$$
$$= (5)(4) + (2)(1) = 20 + 2 = 22$$

Para i=1, j=2:

$$v_{12} = d_{11}b_{12} + d_{12}b_{22}$$
$$= (5)(3) + (2)(2) = 15 + 4 = 19$$

Para i=2, j=1:

$$v_{21} = d_{21}b_{11} + d_{22}b_{21}$$
$$= (0)(4) + (-1)(1) = 0 - 1 = -1$$

Para i=2, j=2:

$$v_{22} = d_{21}b_{12} + d_{22}b_{22}$$
$$= (0)(3) + (-1)(2) = 0 - 2 = -2$$

Quedando la matriz V como

$$= \begin{pmatrix} 22 & 19 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Finalmente sumaremos U y V para obtener:

$$U + V = \begin{pmatrix} 36 & 25 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 22 & 19 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 44 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

La cual es exactamente igual al resultado del primer miembro, con lo que ha quedado demostrado.

Transformaciones de matrices.

Es posible hacer transformaciones elementales de matrices, las cuales no alteran ni el orden ni el rango de las mismas.

Las más usuales son las siguientes:

1.- Intercambio de posición entre dos renglones o entre dos columnas.

Ejemplo: Si tenemos la matriz de 3x3

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Si cambiamos el primero y tercer renglones, tendremos:

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ -1 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

O bien si a la matriz original le cambiamos la primera y segunda columnas de posición, tendremos:

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

2.- Multiplicar un renglón o una columna por una constante.

Ejemplo: Si en la matriz del ejemplo anterior, multiplicamos los elementos del segundo renglón por 2, tendremos:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ -2 & 4 & 10 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

3.- Sumarle o restarle a un renglón o a una columna k veces otro renglón u otra columna.

Ejemplo: Si a la matriz original de los casos anteriores a los elementos del primer renglón le sumamos los del segundo renglón multiplicados por 3, tendremos:

$$\begin{matrix} 1 & 12 & 18 \\ -1 & 2 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}\right)$$

O bien, si para esta última matriz a la primera columna le restamos la segunda, nos dará:

$$\begin{matrix} -11 & 12 & 18 \\ -3 & 2 & 5 \\ -1 & 8 & 9 \end{matrix}\right)$$

Matriz Adjunta.

Para una matriz A dada, su matriz adjunta se obtiene de la siguiente forma: Primeramente habrá que tener la matriz transpuesta de A, es decir A^T y luego obtener los cofactores de los elementos de ésta, conforme a lo visto en determinantes. La adjunta estará entonces integrada por los cofactores ubicados en la misma posición de los respectivos elementos para los cuales fueron calculados.

La matriz adjunta se denota como A^+.

Para ilustrar la obtención de la matriz adjunta, presentaremos un caso:

Ejemplo II.24.- Obtener la adjunta de la matriz A la cual es:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 5 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Lo primero será obtener la transpuesta de A, es decir A^T, la cual será:

$$A^T = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -2 \\ 8 & 4 & 3 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora habrá que obtener los cofactores de cada elemento de A^T, para lo cual aplicaremos la técnica vista en el tema de determinantes.

Para $a^T{}_{11}$: el menor será el determinante

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (4)(2) - (3)(-1) = 8 + 3 = 1$$

El cofactor será $(-1)^2\ (11) = 11$

Para $a^T{}_{12}$ el menor será

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = (8)(2) - (3)(6) = 16 - 18 = -2$$

y el cofactor será $(-1)^3\ (-2) = 2$

Para $a^T{}_{13}$ el menor es

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = (8)(-1) - (4)(6) = -8 - 24 = -32$$

y el cofactor será $(-1)^4\ (-32) = -32$

Para a^T_{21} el menor es

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (5)(2) - (-2)(-1) = 10 - 2 = 8$$

y el cofactor es $(-1)^3$ (8) = -8

Para a^T_{22} el menor es

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = (7)(2) - (-2)(6) = 14 + 12 = 26$$

y el cofactor es $(-1)^4$ (26) = 26

Para a^T_{23} el menor es

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = (7)(-1) - (5)(6) = -7 - 30 = -37$$

y el cofactor es $(-1)^5$ (-37) = 37

Para a^T_{31} el menor es

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (5)(3) - (-2)(4) = 15 + 8 = 23$$

y el cofactor es $(-1)^4$ (23) = 23

Para a^T_{32} el menor es

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = (7)(3) - (-2)(8) = 21 + 16 = 37$$

y el cofactor es $(-1)^5$ (37)= -37

Para a^T_{33} el menor es

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = (7)(4) - (5)(8) = 28 - 40 = -12$$

y el cofactor es $(-1)^6$ (-12)= -12

Por lo tanto la matriz adjunta será:

$$A^+ = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -32 \\ -8 & 26 & 37 \\ 23 & -37 & -12 \end{pmatrix}$$

La obtención de la adjunta tiene importantes aplicaciones en la inversión de matrices y también en la resolución de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales.

Matriz inversa.

La matriz inversa A^{-1} de una matriz A dada, deberá cumplir con la siguiente condición:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I \qquad \text{Ec.(II.40)}$$

Donde I es la matriz identidad

Solamente las matrices regulares tienen inversa, no así las singulares. Además la inversa cuando existe es única, es decir, que ninguna matriz podrá tener dos inversas. Otra característica de la inversa es que siempre es cuadrada.

Inversión de matrices.

Para obtener la inversa de una matriz se pueden seguir varios métodos. En este texto presentaremos dos: El método de la Adjunta y el método *Gauss Jordan.*

Método de la Adjunta.

Este consiste en obtener la matriz adjunta de A, denominada A^+ tal y como se ha estudiado en este capítulo y por su parte la inversa se obtendrá por medio de la fórmula siguiente:

$$A^{-1} = A^+/|A| \qquad \text{Ec.(II.41)}$$

Ilustraremos esto con un ejercicio:

Ejemplo II.25.- Obtener la inversa de A por el método de la Adjunta, si A es:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Lo primero será obtener la adjunta A^+, para lo cual obtendremos antes la transpuesta A^T,

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Por su parte los cofactores serán:

$$a^T{}_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (4)(2) - (-1)(2) = 8 + 2 = 10$$

$$a^T{}_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -[(2)(2) - (-1)(1)] = -(4 + 1) = -5$$

$$a^T{}_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (2)(2) - (4)(1) = 4 - 4 = 0$$

$$a^T{}_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -[(3)(2) - (1)(2)] = -(6 - 2) = -4$$

$$a^T{}_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (5)(2) - (1)(1) = 10 - 1 = 9$$

$$a^T{}_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -[(5)(2) - (3)(1)] = -(10 - 3) = -7$$

$$a^T{}_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (3)(-1) - (1)(4) = -3 - 4 = -7$$

$$a^T{}_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -[(5)(-1) - (1)(2)] = -(-5 - 2) = 7$$

$$a^T{}_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (5)(4) - (3)(2) = 20 - 6 = 14$$

Entonces la adjunta es:

$$A^{+} = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -4 & 9 & -7 \\ -7 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$

Por su parte el determinante de los elementos de la matriz será:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (5)(4)(2) + (3)(-1)(1) + (1)(2)(2) - (1)(4)(1) - (2)(-1)(5) - (2)(2)(3)$$

$$= 40 - 3 + 4 - 4 + 10 - 12 = 35$$

Entonces al aplicar la Ec.(II.41) tendremos:

$$A^{-1} = \frac{A^{+}}{|A|} = (1/35)\begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -4 & 9 & -7 \\ -7 & 7 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 & -1/7 & 0 \\ -4/35 & 9/35 & -1/5 \\ -1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

La cual podría comprobarse al multiplicarla por la matriz original A debiendo resultar la matriz identidad conforme a la Ec.(II.40).

Método de Gauss Jordan.

Este método es muy utilizado para la resolución de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas, así como para obtener la matriz inversa. Consta de las siguientes etapas:

1.- Dada la matriz cuadrada A de orden n, se agrega a ésta la matriz identidad, quedando de esta forma el arreglo de n renglones y 2n columnas.

2.- En la matriz original A se tratará de generar la matriz identidad mediante transformaciones elementales que son de dos tipos y las cuales se llevan a cabo ordenadamente de la siguiente manera:

a). Normalización del renglón. Este paso consiste en generar un uno en el elemento del renglón correspondiente a la diagonal principal, lo cual se logra simplemente mediante la división de los elementos del renglón por el valor del elemento citado.

b). Reducción de la columna. Este paso consiste en generar ceros en la columna donde se halla el elemento normalizado en el paso anterior, con excepción de éste. Esto se efectúa mediante transformaciones matriciales de sumarle o restarle a los elementos de un renglón dado x número de veces los respectivos elementos del renglón normalizado, el cual de esta manera será el renglón pivote para realizar estos cambios.

De tal forma se llevan a cabo estos pasos comenzando por el primer renglón y primera columna hasta llegar a los últimos, lo que dará al final del procedimiento la matriz identidad ubicada del lado izquierdo, justo donde estaba A y la inversa de ésta del lado derecho donde se encontraba la matriz identidad al principio.

Enseguida presentaremos un ejemplo de esta metodología:

Ejemplo II.26.- Obtener la inversa de la matriz A del problema anterior por el método de Gauss Jordan.

Solución:

Lo primero será agregar la matriz identidad a la A, con lo cual tendremos:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora procederemos a los pasos de normalización y reducción para esta matriz aumentada, iniciando por el primer renglón, cuyo elemento correspondiente a la diagonal principal es el 5 ubicado en la primera columna, por lo cual para hacerlo la unidad dividiremos todo el renglón entre 5, con este cambio nuestra matriz quedará en la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora procederemos a la reducción de los elementos de la primera columna, es decir, hacerlos cero, con excepción del elemento normalizado en la etapa anterior, lo cual haremos mediante transformaciones matriciales, para lo cual vemos que si al segundo renglón le restamos el triple del primero, se generará un cero en el elemento respectivo de la primera columna:

$$\begin{array}{cccccccccc} & & & 3 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & \\ - & 3 & (& 1 & 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 &) \\ \hline & & & 0 & 2.8 & 1.4 & -0.6 & 1 & 0 & \end{array}$$

Por su parte para hacer cero el elemento de la primera columna y tercer renglón, simplemente hay que restarle al tercer renglón los valores del primero, es decir:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & \\ - & (& 1 & 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 &) \\ \hline & & 0 & -1.4 & 1.8 & -0.2 & 0 & 0 & \end{array}$$

Con estos cambios nuestra matriz quedará de la manera siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 2.8 & 1.4 & -0.6 & 1 & 0 \\ 0 & -1.4 & 1.8 & -0.2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora pasaremos a la normalización del segundo renglón, para lo cual vemos que el elemento correspondiente a la diagonal principal es el 2.80, por lo que dividiremos todo el renglón entre este valor, quedándonos entonces:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0.50 & -0.2143 & 0.3571 & 0 \end{array}$$

De aquí proseguiremos con la reducción, la cual implica hacer ceros los elementos de la segunda columna excepto el del renglón pivote, por lo que vemos de nuestra matriz que si al primer renglón le restamos el segundo renglón multiplicado por 0.40, nos generará un cero en el elemento del primer renglón y segunda columna, es decir:

$$\begin{array}{cccccccccc} & & & 1 & 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 & \\ - & 0.40 & (& 0 & 1 & 0.5 & -0.2143 & 0.3571 & 0 &) \\ \hline & & & \boxed{1} & 0 & 0 & 0.2857 & -0.1428 & 0 & \end{array}$$

Por su parte para hacer cero el elemento del la segunda columna y tercer renglón, a éste le sumaremos el segundo renglón multiplicado por 1.40, con lo cual tendremos:

$$\begin{array}{cccccccccc} & & & 0 & -1.4 & 1.8 & -0.2 & 0 & 1 & \\ + & 1.40 & (& 0 & 1 & 0.5 & -0.2143 & 0.3571 & 0 &) \\ \hline & & & 0 & 0 & 2.5 & -0.5 & 0.5 & 1 & \end{array}$$

Con estos cambios nuestra matriz será ahora:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.2857 & -0.1428 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & -0.2143 & 0.3571 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 & -0.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente iremos a la última normalización, que será la del tercer renglón, para lo cual dividiremos a éste entre 2.50, para que se nos haga la unidad el elemento correspondiente a la diagonal principal, con lo cual tendremos:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & -0.20 & 0.20 & 0.40 \end{array}$$

Ahora procederemos a la reducción, por lo que si vemos nuestra matriz, nos daremos cuenta que el elemento que corresponde a la tercera columna y al primer renglón ya es un cero, por lo cual pasamos al segundo renglón, donde vemos que el elemento de él y de la tercera columna es 0.50, por lo que para hacerlo cero deberemos restarle a este renglón el pivote multiplicado por 0.50, es decir:

$$\begin{array}{cccccccccc} & & & 0 & 1 & 0.5 & -0.2143 & 0.3571 & 0 & \\ - & 0.50 & (& 0 & 0 & 1 & -0.2 & 0.2 & 0.40 &) \\ \hline & & & 0 & 1 & 0 & -0.1143 & 0.2571 & -0.20 & \end{array}$$

Con estos cambios nuestra matriz será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.2857 & -0.1428 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.1143 & 0.2571 & -0.20 \\ 0 & 0 & 1 & -0.2 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Quedándonos la matriz identidad del lado izquierdo (3 primeras columnas) y la inversa del lado derecho (3 últimas columnas).

Si comparamos la inversa con la obtenida en el ejemplo anterior, nos daremos cuenta que son exactamente iguales.

La matriz inversa de un producto tiene la siguiente propiedad:

$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1} \qquad \text{Ec.(II.42)}$$

la cual demostraremos con un ejercicio.

Ejemplo II.27.- Demostrar la Ec.(II.42) para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

Lo primero será obtener el primer miembro, para lo cual obtendremos el producto A x B, el cual será:

$$AxB = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Por lo que el elemento del primer renglón y primera columna de la matriz producto será:

$$(8)(6) + (-3)(-4) = 48 + 12 = 60$$

El elemento del primer renglón y segunda columna será:

$$(8)(-2) + (-3)(3) = -16 - 9 = -25$$

El del segundo renglón y primera columna será:

$$(5)(6) + (1)(-4) = 30 - 4 = 26$$

El del segundo renglón y segunda columna:

$$(5)(-2) + (1)(3) = -10 + 3 = -7$$

Por lo que la matriz producto, que denominaremos P es:

$$P = \begin{pmatrix} 60 & -25 \\ 26 & -7 \end{pmatrix}$$

A ésta tendremos que sacarle la matriz inversa, lo cual efectuaremos por el método de la adjunta, entonces lo primero será obtener la transpuesta de P, la cual es:

$$P^T = \begin{pmatrix} 60 & 26 \\ 25 & -7 \end{pmatrix}$$

Para la cual los cofactores son:

Para $p^T{}_{11} = (-1)^2\ (-7) = -7$

Para $p^T{}_{12} = (-1)^3\ (-25) = 25$

Para $p^T{}_{21} = (-1)^3\ (26) = -26$

Para $p^T{}_{22} = (-1)^4\ (60) = 60$

Entonces la adjunta es:

$$P^+ = \begin{pmatrix} -7 & 25 \\ -26 & 60 \end{pmatrix}$$

Por su parte el determinante de P será:

$$|P| = \begin{vmatrix} 60 & -25 \\ 26 & -7 \end{vmatrix} = (60)(-7) - (-25)(26) = -420 + 650 = 230$$

Entonces la inversa de P será:

$$P^{-1} = \frac{P^{+}}{|P|} = \begin{pmatrix} -7/230 & 5/46 \\ -13/115 & 6/23 \end{pmatrix}.$$

La cual es el primer miembro.

Por su parte, para obtener el segundo miembro debemos hallar las inversas de B y A y luego multiplicarlas, entonces primeramente hallaremos la inversa de B, para la cual la transpuesta es:

$$B^{T} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Mientras que los cofactores serán:

$$b^{T}_{11} = (-1)^{2}(3) = 3$$

$$b^{T}_{12} = (-1)^{3}(-2) = 2$$

$$b^{T}_{21} = (-1)^{3}(-4) = 4$$

$$b^{T}_{22} = (-1)^{4}(6) = 6$$

Siendo la adjunta:

$$B^{+} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

y el determinante

$$|B| = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = (6)(3) - (-2)(-4) = 18 - 8 = 10$$

Quedando entonces la inversa:

$$B^{-1} = \frac{B^{+}}{|B|} = \begin{pmatrix} 3/10 & 1/5 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Por su parte para la matriz A tendremos primero su transpuesta, la cual es:

$$A^{T} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Para la cual los cofactores serán:

$$a^{T}_{11} = (-1)^{2}(1) = 1$$

$$a^{T}_{12} = (-1)^{3}(-3) = 3$$

$$a^{T}_{21} = (-1)^{3}(5) = -5$$

$$a^{T}_{22} = (-1)^{4}(8) = 8$$

Siendo la adjunta:

$$A^{+} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$$

y el determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = (8)(1) - (-3)(5) = 8 + 15 = 23$$

Quedando entonces la inversa:

$$A^{-1} = \frac{A^{+}}{|A|} = \begin{pmatrix} 1/23 & 3/23 \\ -5/23 & 8/23 \end{pmatrix}$$

Finalmente obtendremos el producto B^{-1} x A^{-1}

$$B^{-1}x\,A^{-1}=\begin{pmatrix}3/10 & 1/5\\ 2/5 & 3/5\end{pmatrix}x\begin{pmatrix}1/23 & 3/23\\ -5/23 & 8/23\end{pmatrix}$$

Para esta matriz producto el elemento del primer renglón y la primera columna será:

(3/10)(1/23) + (1/5)(-5/23) = 3/230 - 5/115 = -7/230

El del primer renglón y segunda columna será:

(3/10)(3/23) + (1/5)(8/23) = 9/230 + 8/115 = 25/230 = 5/46

El del segundo renglón y primera columna:

(2/5)(1/23) + (3/5)(-5/23) = 2/115 - 15/115 = -13/115

El del segundo renglón y segunda columna:

(2/5)(3/23) + (3/5)(8/23) = 6/115 + 24/115 = 30/115 = 6/23

Quedando entonces el producto:

$$B^{-1}x\,A^{-1}=\begin{pmatrix}-7/230 & 5/46\\ -13/115 & 6/23\end{pmatrix}$$

que es exactamente igual a P^{-1} por lo cual queda demostrado.

Solución de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales

La matriz inversa es muy útil para solucionar un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, tal como el indicado en la ecuación (II.14), el cual puede representarse en forma matricial de la manera siguiente:

$$A\,X = C \qquad \text{Ec.(II.43)}$$

Donde

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \dots\\ c_n\end{pmatrix} \qquad \text{Ec.(II.44)}$$

Si en la Ec.(II.43) multiplicamos por la matriz inversa de A, es decir A^{-1} a ambos lados, tendremos:

$$A^{-1}\,A\,X = A^{-1}\,C \qquad \text{Ec.(II.45)}$$

y dado que $A^{-1}\,A = I$, la matriz identidad que es la unidad, por lo tanto:

$$X = A^{-1}\,C \qquad \text{Ec.(II.46)}$$

De donde concluimos que la matriz solución X se obtiene del producto de la matriz inversa de aquella formada con los coeficientes de las ecuaciones, A^{-1} y la matriz de los términos independientes, C. Las matrices X y C son de una sola columna, por lo que en realidad son vectores. Para ilustrar lo anterior presentaremos un ejemplo sencillo.

Ejemplo II. 28.- Solucionar por medio de la inversión de matrices el sistema de ecuaciones

$$4X_1 - X_2 = 2$$

$$X_1 + 2X_2 = 5$$

Solución:

Identificando las matrices A y C, de acuerdo a la notación anterior, éstas serán:

$$A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C=\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}$$

Entonces obtendremos la inversa de A, para lo cual la transpuesta A^T es:

$$A^T=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

y los cofactores son

$a^T_{11} = (-1)^2 (2) = 2$

$a^T_{12} = (-1)^3 (-1) = 1$

$a^T_{21} = (-1)^3 (1) = -1$

$a^T_{22} = (-1)^4 (4) = 4$

Quedando entonces la adjunta

$$A^+ = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

y el determinante de A:

$$|A| = \left| \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right| = (4)(2) - (-1)(1) = 8 + 1 = 9$$

Siendo la inversa

$$A^{-1} = \frac{A^+}{|A|} = \begin{pmatrix} 2/9 & 1/9 \\ -1/9 & 4/9 \end{pmatrix}$$

Ahora ya podemos aplicar la Ec.(II.46), para obtener:

$$X = A^{-1} x\, C = \begin{pmatrix} 2/9 & 1/9 \\ -1/9 & 4/9 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Cuyo producto será la matriz solución X, la cual estará formada por 2 renglones y una columna, calculándose sus elementos en la forma siguiente:

Elemento para el primer renglón y primera columna:

$(2/9)(2) + (1/9)(5) = 4/9 + 5/9 = 9/9 = 1$

Elemento del segundo renglón y primera columna:

$(-1/9)(2) + (4/9)(5) = -2/9 + 20/9 = 18/9 = 2$

Siendo la matriz solución entonces:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La cual significa que $X_1 = 1$, $X_2 = 2$ para el sistema de ecuaciones.

PROBLEMAS PROPUESTOS

II.1.- Calcular el valor de los siguientes determinantes

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}$

II.2.- Calcular los determinantes

(a) $\begin{vmatrix} 28 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 40 & -10 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$

II.3.- Hallar el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & -2 \\ 5 & 4 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

II.4.- Calcular el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

II.5.- Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & -4 & 2 \\ 12 & 10 & -8 & 4 \\ 6 & -2 & 8 & 1 \\ 7 & 6 & -5 & -3 \end{vmatrix}$$

II.6.- Evaluar el determinante

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

II.7.- Evaluar el determinante

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

II.8.- Hallar el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

II.9.- Evaluar el determinante

$$\begin{vmatrix} 8 & -7 & 4 \\ 6 & -14 & 8 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

II.10.- Hallar el valor del determinante C = A x B, siendo

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 8 & -2 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \\ 7 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

II.11.- Por la regla de Cramer resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 4X_1 + X_2 - X_3 &= 15 \\ 6X_1 - X_2 - X_3 &= 13 \\ X_1 - X_2 + X_3 &= 0 \end{aligned}$$

II.12.- Resolver usando la regla de Cramer el sistema

$$\begin{aligned} 2X_1 + 8X_2 &= 36 \\ 4X_1 - 9X_2 &= -3 \end{aligned}$$

II.13.- Por la regla de Cramer solucionar el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2X_1 - X_2 + X_3 &= 7 \\ - X_2 + X_3 &= -3 \\ 4X_1 - X_2 - X_3 &= 17 \end{aligned}$$

II.14.- Determinar el rango de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

II.15.- Hallar el rango de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 \\ 8 & 16 & -3 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

II.16.- Obtener la matriz transpuesta de A y de B si

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

II.17.- Determinar si la matriz A es antisimétrica.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 3 \\ 7 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

II.18.- Determinar si la matriz B es simétrica.

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

II.19.- Hallar la suma de las siguientes tres matrices A, B y C, si

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

II.20.- Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}6 & 5 & 4\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}$$

Hallar: (a) A + B; (b) A - B; (c) A x B; (d) B x A

II.21.- Hallar A x B si

$$A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 5 & 8 & -2\end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 3 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

II.22.- Con las mismas matrices del problema anterior, hallar B x A.

II.23.- Demostrar la propiedad distributiva dada por la Ec.(II.38) para las siguientes matrices

$$A=\begin{pmatrix}4 & 7\\ -2 & 5\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}9 & 6\\ 3 & -1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -6 & 3\end{pmatrix}$$

II.24.- Obtener la matriz adjunta de A

$$A=\begin{pmatrix}9 & 6 & 2\\ -1 & 7 & -2\\ 4 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

II.25.- Obtener la inversa de A del problema anterior.

II.26.- Por el método de Gauss Jordan obtener la inversa de B

$$B=\begin{pmatrix}4 & 7 & 3\\ -2 & 5 & 0\\ 6 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

II.27.- Resolver por el método de la adjunta el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 4X_1 - 3X_2 &= -1\\ 7X_1 + X_2 &= 17 \end{aligned}$$

II.28.- Por el método de Gauss Jordan resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 6X_1 + X_2 \phantom{{}+X_3} &= 15\\ 4X_1 - X_2 + X_3 &= 6\\ 5X_1 + X_2 - X_3 &= 12 \end{aligned}$$

II.29.- Por el método de la adjunta resolver el sistema

$$\begin{aligned} 4X_1 - X_2 - X_3 &= 13\\ X_1 + X_2 + X_3 &= 17\\ 2X_1 - X_2 + X_3 &= 15 \end{aligned}$$

II.30.- Comprobar la igualdad $(A \times B)^T = B^T \times A^T$ para

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

CAPITULO III

PROGRAMACION LINEAL

PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS

Introducción.

La programación lineal es una parte de la programación matemática que tal y como su nombre lo indica, maneja ecuaciones lineales, es decir, aquellas donde todas las variables que intervienen tienen como exponente la unidad en todos sus términos.

En este capítulo vamos a ver la manera de plantear un problema dado, expresándolo en forma matemática.

No se procederá a su resolución, únicamente a su planteamiento, el cual consistirá en convertir una serie de datos e información concerniente al problema en ecuaciones matemáticas.

Definiciones.

Para facilitar la comprensión de la terminología usada, a continuación daremos algunas definiciones útiles:

Función Objetivo.- Esta es una variable, normalmente simbolizada por la letra Z, la cual representa aquello que se desea optimizar, por ejemplo, un costo que se pretende minimizar, o bien, una utilidad que se busca maximizar.

Variables del Problema.- Son aquellas variables que no se conocen y que al momento de resolver el problema, deberán quedar definidas de tal manera que logren la optimización de la función objetivo. A estas variables también se les conoce como variables de decisión.

Coeficientes de la función objetivo.- Son cantidades constantes que aparecen en la ecuación de la función objetivo multiplicando a las variables del problema.

Restricciones.- Son las limitaciones físicas o condiciones que debe cumplir el problema, por ejemplo, cantidad disponible de materiales, tiempo, mano de obra, etc. También suele llamárseles restricciones funcionales.

Restricciones no explícitas.- Son aquellas condiciones ocultas en el problema, las cuales no aparecen en la información disponible, pero que deben de ser tomadas en cuenta tanto en el planteamiento como en la resolución del mismo. Los ejemplos más frecuentes de este tipo de restricciones es la no negatividad de las variables del problema o el que éstas deban ser números enteros.

Metodología.

Para plantear un problema pueden aplicarse los siguientes pasos:

Paso 1.- Definir las variables del problema. Este paso consiste en identificar dichas variables y denotarlas por letras.

Paso 2.- Definir la función objetivo. Esto será identificar aquella variable a ser optimizada, la cual representaremos como Z y expresar su ecuación matemática en función de las variables del problema y sus coeficientes. En este paso deberá además establecerse si la optimización es una maximización o una minimización.

Paso 3.- Definir las restricciones. Esto será el establecer una ecuación para cada restricción en función de las variables del problema. Es frecuente que las ecuaciones de las restricciones sean desigualdades del tipo mayor o igual que ($\geq$) y/o menor o igual que($\leq$).

Es conveniente señalar aquí que no todas las variables del problema pueden aparecer en cada restricción, esto dependerá del tipo particular de problema del que se trate.

Paso 4.- Definir las restricciones no explícitas. Consiste en identificar y expresar dichas restricciones en el planteamiento del problema.

A continuación presentaremos varios ejemplos resueltos:

Ejemplo III.1.- Un expendio naturista prepara sus alimentos que vende al público basándose en 3 materias primas cuyos contenidos se presentan en la siguiente tabla:

Materia prima	Costo, N$/kg	% Azúcares	% Grasas	% Proteínas	% Inertes
A	2.35	12	10	60	18
B	2.00	10	10	50	30
C	1.70	8	6	44	42

¿Cuánto deberán mezclar de cada una de las 3, si se desea minimizar el costo de preparar un kg de alimento cuyo contenido de azúcar no sea menor al 10%, su contenido de grasa no mayor del 9.5% y su contenido de proteínas no menor de 52%?

Solución: De acuerdo a la metodología descrita anteriormente, iremos al primer paso, es decir definir las variables del problema.

Estas variables serán los contenidos necesarios de cada una de las 3 materias primas, las cuales definiremos de la siguiente manera:

X_1 = Fracción de kilogramo de la materia prima A
X_2 = Fracción de kilogramo de la materia prima B
X_3 = Fracción de kilogramo de la materia prima C

Con esto queda satisfecho el paso 1.

Prosiguiendo con el paso 2, definiremos la función objetivo Z que será el costo de un kg de alimento, el cual deberá minimizarse y cuya ecuación en función de las variables X_1, X_2, X_3 será:

$$\text{Min } Z = 2.35\,X_1 + 2.00\,X_2 + 1.70\,X_3$$

Aquí los coeficientes de las variables son los costos unitarios de cada materia prima.

Al continuar con la metodología y de acuerdo al paso 3, hay limitaciones en cuanto al contenido de azúcares, grasas y proteínas, por lo que habrá una restricción por cada limitante, éstas serán:

Contenido de Azúcares: $12\,X_1 + 10\,X_2 + 8\,X_3 \geq 10.0$
Contenido de Grasas: $10\,X_1 + 10\,X_2 + 6\,X_3 \leq 9.5$
Contenido de Proteínas: $60\,X_1 + 50\,X_2 + 44\,X_3 \geq 52.0$

Además habrá una condición adicional, en cuanto a la sumatoria de las 3 variables X_1, X_2 y X_3 la cual deberá ser la unidad, es decir:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

Finalmente al ir al paso 4, la única restricción no explícita será que las variables X_1, X_2 y X_3 deberán ser no negativas, pues no tendría ningún sentido físico hablar de alguna X negativa, esto es:

X_1, X_2, X_3, No negativas

Al agrupar las ecuaciones, dejaremos planteado el problema, el cual será:

$$\text{Min } Z = 2.35\,X_1 + 2.00\,X_2 + 1.70\,X_3$$

sujeta a las restricciones:

$$\begin{aligned} 12\,X_1 + 10\,X_2 + 8\,X_3 &\geq 10.0 \\ 10\,X_1 + 10\,X_2 + 6\,X_3 &\leq 9.5 \\ 60\,X_1 + 50\,X_2 + 44X_3 &\geq 52.0 \\ X_1 + X_2 + X_3 &= 1 \end{aligned}$$

Con X_1, X_2, X_3, No negativas

Presentaremos otro ejemplo:

Ejemplo III.2.- Una fábrica de calzado dispone de 45 unidades de piel y 20 horas de tiempo para producir 2 tipos de bota, de las cuales el primer tipo requiere 6 unidades de piel y 2.5 hrs., vendiéndose a N$ 140/par; mientras que el segundo tipo necesita 5 unidades de piel y 2 hrs., vendiéndose a N$ 115/par. ¿Cuántos pares de botas de cada tipo deberán fabricarse de forma que se maximicen los ingresos?.

Solución: Lo primero será definir las variables del problema, las cuales serán las cantidades a producir de cada tipo de bota, es decir:

X_1 = Cantidad a producir del primer tipo de bota, número de pares.

X_2 = Cantidad a producir del segundo tipo de bota, número de pares.

Lo siguiente es definir la función objetivo Z, la cual será el ingreso por la venta de los 2 tipos de botas, el que deberá maximizarse y cuya ecuación en función de las variables vendrá dada por:

$$\text{Max} \quad Z = 140\,X_1 + 115\,X_2$$

Donde los coeficientes de las variables son los precios de venta de cada tipo de bota.

Ahora procederemos a definir las restricciones, las cuales serán dos en este caso, una para la cantidad de piel y otra para el tiempo disponible, entonces tendremos:

$$\text{Unidades de Piel:} \quad 6\,X_1 + 5\,X_2 \leq 45$$
$$\text{Tiempo disponible hrs:} \quad 2.5\,X_1 + 2\,X_2 \leq 20$$

Aquí las 2 restricciones son del tipo menor o igual que ($\leq$) debido a que tanto las unidades de piel como el tiempo disponible en horas tienen un máximo posible en 45 unidades y 20 horas respectivamente.

Finalmente definiremos las restricciones no explícitas las cuales son:

X_1, X_2, Enteras y No negativas

Las variables deben ser enteras ya que no tendría sentido hablar de una fracción de un par de botas, por decir 0.33 pares de botas. La no negatividad de las variables es también obvia dado que tampoco habría sentido al hablar de un número negativo de pares de botas.

Por lo tanto el planteamiento completo del problema quedará de la siguiente forma:

$$\text{Max} \quad Z = 140\,X_1 + 115\,X_2$$

sujeta a las restricciones:

$$6\,X_1 + 5\,X_2 \leq 45$$
$$2.5\,X_1 + 2\,X_2 \leq 20$$

Con X_1 y X_2, Enteras y No negativas.

A continuación presentaremos otro ejemplo:

Ejemplo III.3.- La empresa Agropec está buscando producir un alimento para ganado a un costo mínimo. Para esto cuenta con 3 productos como materias primas los cuales tienen las siguientes características:

Materia prima	Costo, N$/kg	% Vitaminas	% Minerales	% Proteínas
A_1	4.50	12	30	18
A_2	3.70	10	30	15
A_3	3.00	8	25	15

¿Cómo deberá mezclar estas 3 materias primas para preparar 1 kilogramo del producto si éste deberá contener por lo menos 11% de vitaminas, 28% de minerales y 17% de proteínas?

Solución: Primeramente definiremos las variables del problema, las cuales son para este caso las cantidades de las materias primas A_1, A_2 y A_3 a mezclar para preparar 1 kilogramo del producto, es decir:

X_1 = Cantidad de la materia prima A_1

X_2 = Cantidad de la materia prima A_2

X_3 = Cantidad de la materia prima A_3

Ahora definiremos la función objetivo Z, la cual será el costo de 1 kilogramo del producto, el cual deberá ser minimizado, entonces:

$$\text{Min} \quad Z = 4.50\,X_1 + 3.70\,X_2 + 3.00\,X_3$$

Siendo los costos unitarios de las materias primas los coeficientes de las variables.

El siguiente paso es definir las restricciones, de las cuales se tendrá una para el contenido mínimo de vitaminas, otra para el de minerales y otra para el de proteínas, además de que la suma de las variables debe ser la unidad (1 kilogramo), entonces tendremos:

$$\text{Contenido de Vitaminas:} \quad 12\,X_1 + 10\,X_2 + 8\,X_3 \geq 11$$
$$\text{Contenido de Minerales:} \quad 30\,X_1 + 30\,X_2 + 25\,X_3 \geq 28$$
$$\text{Contenido de Proteínas:} \quad 18\,X_1 + 15\,X_2 + 15\,X_3 \geq 17$$
$$\text{Sumatoria de las Variables:} \quad X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

Finalmente las restricciones no explícitas; las cuales en este caso únicamente son la no negatividad de las variables.

Entonces al planteamiento completo del problema es:

$$\text{Min } Z = 4.50\,X_1 + 3.70\,X_2 + 3.00\,X_3$$

Sujeta a las restricciones:

$$12\,X_1 + 10\,X_2 + 8\,X_3 \geq 11$$
$$30\,X_1 + 30\,X_2 + 25\,X_3 \geq 28$$
$$18\,X_1 + 15\,X_2 + 15\,X_3 \geq 17$$
$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

Siendo X_1, X_2, X_3, No negativas.

Ejemplo III.4.- Una fábrica de jabones está buscando un programa de producción que maximice sus ingresos.

Tiene la opción de elaborar 3 diferentes tipos de jabones, los cuales requieren de horas-máquina, ácido graso y sosa cáustica en las siguientes cantidades:

Tipo de jabón	Precio, N$/u	Horas-Máquina	Acido Graso, grs	Sosa Cáustica, grs
1	5.18	18	418	32
2	4.37	14	350	24
3	3.29	10	310	20

Si la fábrica dispone de 5000 horas-máquina, de 120 kilogramos de ácido graso y de 10 kilogramos de sosa cáustica. ¿Cuántos jabones deberá producir de cada tipo?

Solución: En este caso las variables serán las unidades de cada tipo de jabón a ser producidas, o sea:

X_1 = Unidades a producir del primer tipo de jabón.
X_2 = Unidades a producir del segundo tipo de jabón.
X_3 = Unidades a producir del tercer tipo de jabón.

Por su parte la función objetivo Z será el ingreso, el cual vendrá dado por:

$$\text{Max } Z = 5.18\,X_1 + 4.37\,X_2 + 3.29\,X_3$$

Siendo los precios unitarios los coeficientes de las variables.

Las restricciones serán las disponibilidades de Horas-Máquina, Acido Graso y Sosa Cáustica, es decir:

Horas Máquina: $18\,X_1 + 14\,X_2 + 10\,X_3 \leq 5{,}000$
Acido Graso, grs: $418\,X_1 + 350\,X_2 + 310\,X_3 \leq 120{,}000$
Sosa Cáustica, grs: $32\,X_1 + 24\,X_2 + 20\,X_3 \leq 10{,}000$

Siendo X_1, X_2, X_3, Enteras y No negativas.

Ejemplo III.5.- El dueño de un camión de 10 toneladas de capacidad de carga está planteándose la pregunta de cómo cargar el camión de tal forma que se obtenga el máximo ingreso. En la siguiente tabla se presentan las diferentes cargas posibles y el ingreso por concepto de flete que generarían:

Material	Peso, kgs	Ingreso, N$
Naranjas	2500	220
Pepinos	1800	170
Melones	2100	210
Sandías	1850	170
Nueces	1650	210
Zanahorias	2100	200

¿Cuál sería la manera de cargar el camión? Cabe aclarar que no puede llevarse algún material en fracciones, es decir que se acarrea todo el material o nada del mismo.

Solución: Aquí las variables del problema serán una para cada tipo de material, entonces:

X_1 = Variable de probabilidad de acarrear naranjas

$X_2 =$ Variable de probabilidad de acarrear pepinos
$X_3 =$ Variable de probabilidad de acarrear melones
$X_4 =$ Variable de probabilidad de acarrear sandías
$X_5 =$ Variable de probabilidad de acarrear nueces
$X_6 =$ Variable de probabilidad de acarrear zanahorias

La función objetivo Z la cual deberá maximizarse, será el ingreso total por el flete, el cual vendrá dado por:

$$\text{Max } Z = 220 X_1 + 170 X_2 + 210 X_3 + 170 X_4 + 210 X_5 + 200 X_6$$

Las restricciones serán una para el peso total cargado al camión, es decir:

$$2500 X_1 + 1800 X_2 + 2100 X_3 + 1850 X_4 + 1650 X_5 + 2100 X_6 \leq 10{,}000$$

la cual es del tipo menor o igual que ($\leq$), dado que el camión no puede ser sobrecargado arriba de su capacidad.

Además cada variable podrá tener un par de valores posibles: Ser cero o la unidad si se transporta de ese tipo de material o no, esto lo ponemos para las restricciones en la forma siguiente:

$$X_1 \leq 1$$
$$X_2 \leq 1$$
$$X_3 \leq 1$$
$$X_4 \leq 1$$
$$X_5 \leq 1$$
$$X_6 \leq 1$$

con $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$, Enteras

En cuanto a las restricciones no explícitas, éstas implican la no negatividad de las variables y que éstas deberán ser cero o la unidad.

De esta manera el planteamiento completo del problema quedará en la siguiente forma:

$$\text{Max } Z = 220 X_1 + 170 X_2 + 210 X_3 + 170 X_4 + 210 X_5 + 200 X_6$$

Sujeta a las restricciones:

$$2500 X_1 + 1800 X_2 + 2100 X_3 + 1850 X_4 + 1650 X_5 + 2100 X_6 \leq 10{,}000$$
$$X_1 \leq 1$$
$$X_2 \leq 1$$
$$X_3 \leq 1$$
$$X_4 \leq 1$$
$$X_5 \leq 1$$
$$X_6 \leq 1$$

Con las variables $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$, Enteras y No negativas.

PROBLEMAS PROPUESTOS.

III.1.- Un restaurante busca optimizar sus ingresos por la venta de postres, puede disponer de 4 diferentes tipos: natillas, gelatina, budín y dulce, los cuales requieren de azúcar y leche condensada en las cantidades que se señalan en la siguiente tabla:

Postre	Azúcar, grs	Leche, mls	Precio, N$/u
Natilla	60	120	3.50
Gelatina	70	135	3.60
Budín	90	170	4.00
Dulce	120	200	4.60

Si el restaurante dispone de una entrega de 10 kgs. de azúcar y 18 litros de leche condensada, ¿Cuánto deberá preparar de cada tipo de postre?

III.2.- Una clínica de dietas busca minimizar sus costos al preparar un alimento balanceado. Para esto cuenta con 3 productos como materias primas, los cuales tienen las siguientes especificaciones:

Materia Prima	% Grasas	% Azúcares	Costo, N$/kg
1	20	17	3.00
2	18	15	3.30
3	15	15	3.50

Si el alimento balanceado debe contener como máximo 18.5 % de grasas y 16 % de azúcares. ¿Cómo deberá mezclar la clínica sus materias primas para satisfacer esas condiciones a un costo mínimo?

III.3.- Un taller de herrería busca mejorar sus utilidades fabricando 2 tipos diferentes de puertas. El taller cuenta con 150 kilogramos de fierro y 70 horas de tiempo disponible. La puerta tipo número 1 requiere de 10 kilogramos de fierro y 6 horas de tiempo dando una utilidad de N$ 180, mientras que el segundo tipo necesita de 12 kilogramos de fierro y 7 horas de tiempo, con una utilidad de N$ 200. ¿Cuántas puertas de cada tipo deberá fabricar el taller de manera que maximice sus utilidades?

III.4.- La fábrica Química de Rioverde busca satisfacer las leyes ecológicas, para lo cual le han ofrecido 2 diferentes tipos de equipo anticontaminante. El primer equipo le proporciona un 70% de control y su costo es de N$ 7,500.00, mientras que el segundo equipo le proporciona 80% de control y cuesta N$ 8,500.00.

Si la empresa necesita instalar un total de 4 equipos anticontaminantes con un 75% de control global, ¿Cuántos equipos de cada tipo deberá adquirir, de modo que el costo de compra sea mínimo?

III.5.- Una carpintería cuenta con 100 metros cúbicos de madera y 40 horas de tiempo libre. Busca fabricar 3 tipos diferentes de sillas, las cuales pueden venderse aceptablemente en el mercado, cada tipo tiene los siguientes requerimientos y precios de venta:

Tipo de Silla	Madera, m^3	Tiempo, horas	Precio, N$/u
1	2.5	1.20	15.20
2	2.0	1.00	13.00
3	2.2	1.05	13.50

¿Cuántas sillas de cada tipo deberá fabricar, de modo que pueda maximizar sus ingresos?

III.6.- Una fábrica de quesos debe elaborar éstos con un contenido de grasas no mayor del 20%, para lo cual puede adquirir 2 tipos diferentes de leche: El primer tipo tiene un 25% de grasas y cuesta N$ 1.20/litro, mientras que el segundo tipo contiene 16% de grasas y su costo es de N$ 1.70/litro. ¿Cómo deberá mezclar estas leches para preparar queso a un costo mínimo?

III.7.- Un supermercado puede poner en sus estantes 3 nuevos productos, los cuales le ocuparían 3, 4 y 5 estantes respectivamente, y le proporcionarían 6, 7 y 8.5 N$ de ingresos adicionales respectivamente. Si el supermercado cuenta con 80 estantes para colocar estos productos, ¿Cuántos productos de cada tipo deberá colocar de tal modo que maximice sus ingresos adicionales?

III.8.- Un proveedor de materiales de construcción desea preparar grava que contenga por lo menos el 65% de material de 1/2", para esto cuenta con 3 tipos de materias primas, las cuales contienen 80, 60 y 58% de material de 1/2", con un costo de 10, 7 y 6.50 N$/tonelada respectivamente.
¿Cómo deberá mezclar estas 3 materias primas para preparar una tonelada de grava a un costo mínimo?

III.9.- Un constructor cuenta con 3 tipos diferentes de albañiles: MB, R y P los cuales pueden colocar 400, 300 y 250 ladrillos diarios devengando salarios de 35, 28 y 20 N$/día, respectivamente. Si el constructor necesita colocar 3000 ladrillos diarios y cuenta con 4 albañiles tipo MB, 6 del tipo R y 8 del P. ¿Cómo asignaría 10 albañiles para colocar los 3000 ladrillos a un costo salarial mínimo?

III.10.- Una radiodifusora cuenta con 2 horas de tiempo libre para poder programar comerciales. Hay 3 tipos diferentes de comerciales, los cuales tomarían 2, 1.7 y 1.5 minutos cada uno, generando un ingreso de 18, 15 y 13 N$ respectivamente. ¿Cuántos comerciales de cada tipo deberá programar de manera que sus ingresos por este concepto se maximicen?

CAPITULO IV

PROGRAMACION LINEAL

EL METODO GRAFICO.

Introducción.

El método gráfico es la forma más simple para resolver problemas de programación lineal, el cual consiste en graficar las ecuaciones correspondientes a las restricciones en coordenadas cartesianas, siendo cada variable representada en uno de los ejes, de tal forma que quede perfectamente delimitada la zona factible de solución, procediéndose entonces a tratar de localizar en ella al punto que optimice la función objetivo.

En este método como cada variable se representa en un eje, sólo podrán manejarse problemas que tengan como máximo 3 variables, puesto que no podemos graficar más de 3 dimensiones.

En este texto nos ocuparemos únicamente de casos de 2 variables, pues son los ejemplos que usualmente se manejan en el método gráfico para ser representados en un plano, ya que aún cuando son más sencillos, ilustran de una manera adecuada el procedimiento de solución de los problemas.

Metodología.

Un procedimiento dividido en pasos del presente método puede ser el siguiente:

Paso 1.- Plantear el problema. Esto es, convertir los datos e información que se tiene del problema en un sistema de ecuaciones debidamente planteadas como programación lineal. Este paso ya no se desarrollará aquí puesto que se trató en el capitulo precedente.

Paso 2.- Representar una variable del problema en cada eje cartesiano, procediendo luego a graficar las ecuaciones de las restricciones en el plano formado.

Cada intersección de un par de restricciones formará un vértice de la zona de solución, siendo el primero de éstos el origen, ya que es el punto de intersección de las restricciones de no negatividad.

Entonces habrá tantos vértices como intersecciones posibles haya entre un par dado de restricciones, ya sean éstas funcionales o de no negatividad.

Con esto se delimita la zona factible de solución de acuerdo al tipo de restricciones del problema.

Paso 3.- Trazar ecuaciones de la función objetivo, dándole diferentes valores a Z, viendo cuáles de ellas quedan dentro de la zona factible de solución.

Debemos señalar que este paso puede omitirse, pues el objetivo es hallar el punto que corresponde a la solución del problema el cual será aquel que optimice la Z, lo cual se llevará a cabo en el paso siguiente.

Paso 4.- Hallar la solución del problema, es decir, aquella recta de las trazadas en el paso anterior que optimice la función objetivo. Aquí debemos comentar que pueden existir varias soluciones óptimas de un problema, si alguna de las rectas correspondientes a las restricciones es paralela a la recta de la función objetivo; en caso contrario, existirá una solución óptima única, que será aquella que maximice o minimice la Z, según sea el caso.

Este paso también puede llevarse a cabo hallando el valor de Z de cada uno de los vértices de la región factible de solución, aquella Z que sea máxima o mínima según el tipo de problema en cuestión, será la solución del mismo.

Para ilustrar este procedimiento, presentaremos 4 ejemplos resueltos, los cuales ya han sido planteados.

Ejemplo IV.1.- Resolver por el método gráfico el problema.

Max $Z = 0.5\ A + 0.4\ B$

Sujeta a las siguientes restricciones:

$2\ A + B \leq 20$ (1)

$A + B \leq 16$ (2)

Siendo A, B no negativas.

Solución:

Aquí iniciaremos la metodología, a partir del paso 2, puesto que el 1 ya se ha efectuado, entonces representaremos a A en el eje de las abcisas y a B en el de las ordenadas.

Luego graficaremos las ecuaciones de las restricciones tomando las desigualdades como igualdades, es decir:

$$2A + B = 20 \quad (1)$$
$$A + B = 16 \quad (2)$$

Si vemos el tipo de ecuaciones de cada restricción, nos daremos cuenta que se trata de líneas rectas, las cuales podrán trazarse con localizar 2 puntos, esto se hace de la siguiente manera:

Para la ecuación (1):

$2A + B = 20$

Si $A = 0, B = 20$

Si $B = 0, A = 10$

Entonces los puntos son P_1 ($A = 0, B = 20$) y P_2 ($A = 10, B = 0$)

Para la ecuación (2):

$A + B = 16$

Si $A = 0, B = 16$

Si $B = 0, A = 16$

Siendo los puntos Q_1 ($A = 0, B = 16$) y Q_2 ($A = 16, B = 0$).

Una representación gráfica de estas ecuaciones se muestra en la figura IV.1.

Un comentario adicional es el hecho de que como A y B deben ser no negativas, esto delimita la zona factible de solución al primer cuadrante.

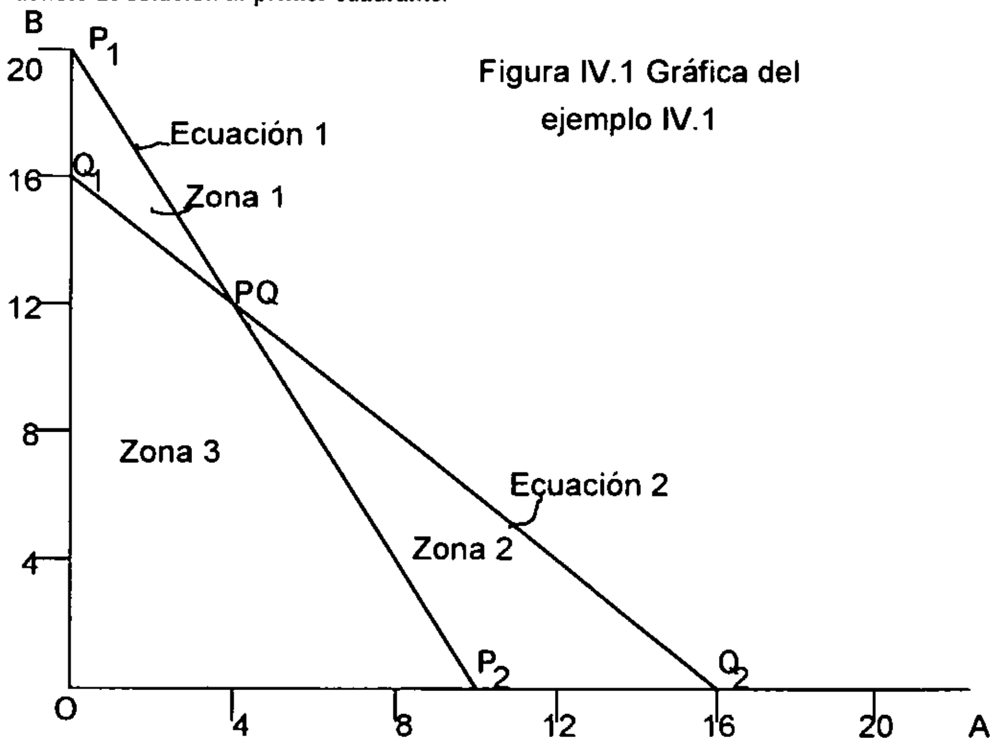


Figura IV.1 Gráfica del ejemplo IV.1

En la figura hemos señalado 3 zonas numeradas del 1 al 3 de las cuales comentaremos lo siguiente:

La zona 1 queda debajo de la recta correspondiente a la ecuación 1 y arriba de la recta de la ecuación 2, esto significa que como las restricciones son del tipo menor o igual que ($\leq$), la zona cumple con la primera restricción y no cumple con la segunda, por lo tanto no es región factible de la solución, pues para lograr esto deberá cumplir con ambas.

La zona 2 queda debajo de la recta de la ecuación 2 y arriba de la recta de la ecuación 1, por lo que cumple con la segunda restricción, pero no con la primera, por lo que tampoco es región factible de solución.

Por su parte, la zona 3 queda debajo de las rectas de las ecuaciones 1 y 2, cumpliendo por lo tanto con ambas restricciones, siendo la región factible para la solución, por lo cual se representa marcada con líneas diagonales punteadas, quedando comprendida entre los puntos O-Q_1-PQ-P_2.

En este caso hay 4 vértices del problema que son los puntos O, Q_1, PQ y P_2.

Ahora procederemos con el paso 3, trazando algunas rectas de la función objetivo, dándole diferentes valores a Z. En este caso particular tomaremos 2 rectas, primeramente la que pasa por el punto Q_1 donde A=0, B = 16, por lo tanto Z será igual a 0.5 x A + 0.4 x B = 0.5 x 0 + 0.4 x 16 = 6.4

Para graficar esta línea recta necesitamos 2 puntos, uno es el Q_1 de donde se ha tomado el valor de 6.4, el otro puede ser cuando B = 0, entonces.

Z = 6.4 = 0.5 A + 0.4 (0)
de donde
A = 6.4/ 0.5= 12.8

Siendo el otro punto (A = 12.8, B = 0), el cual llamaremos R.

Para la otra línea recta, tomaremos la que pasa por el punto P_2 donde A = 10, B = 0, siendo Z = 0.5 x A + 0.4 x B = 0.5x10 + 0.4x0 = 5.

Para graficar esta recta necesitamos un segundo punto, el cual tomaremos cuando A = 0, entonces

Z = 5 = 0.5 A + 0.4 B = 0.5 (0) + 0.4 B
de donde
B.= 5 / 0.4 = 12.5

Siendo este segundo punto (A = 0, B= 12.5), el cual denominaremos S.

Estas 2 líneas rectas se presentan junto con la región factible de solución en la figura IV.2

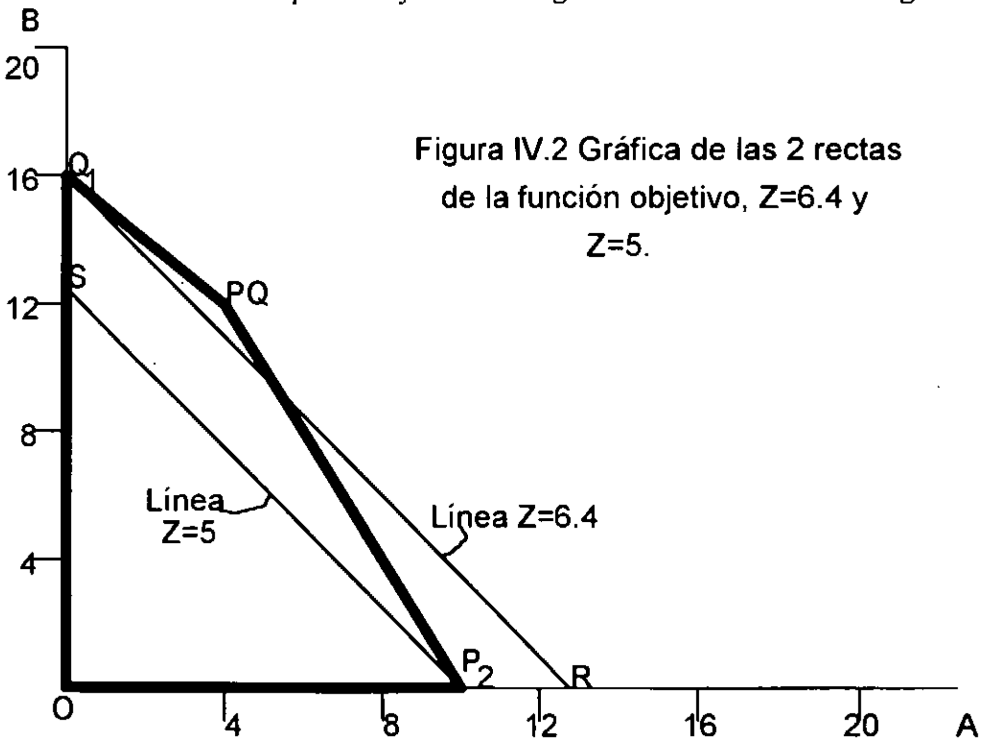


Figura IV.2 Gráfica de las 2 rectas de la función objetivo, Z=6.4 y Z=5.

Como puede observarse en la figura, la línea Z = 5 queda toda dentro de la zona de solución, mientras que la recta Z = 6.4 tiene algunos puntos dentro de dicha zona, pero otros fuera de la misma.

Una observación importante es que estas 2 rectas son paralelas, lo cual es lógico, pues los coeficientes 0.5 y 0.4 que multiplican a las variables A y B respectivamente son constantes, sólo varía el valor de Z, al ser estos coeficientes constantes, la pendiente de la recta también será constante, por lo que al tener la misma pendiente, las líneas serán paralelas.

Finalmente vamos al paso 4, el cual consiste en hallar aquella recta paralela a las 2 de la figura IV.2 que quede dentro de la zona de la solución y que maximice a Z.

De la figura IV.2 vemos que la línea de Z = 6.4 es mejor en este sentido que la de Z= 5, pero todavía podrían trazarse rectas paralelas que logren quedar dentro de la zona de solución. De acuerdo a la metodología señalada para el paso 4, una manera simple de verificar esto es obtener la Z de los 4 vértices que forman la zona de solución. Lo cual efectuaremos enseguida:

Punto O ($A = 0$, $B = 0$)

Entonces

$$Z = 0.5\,A + 0.4\,B$$
$$= 0.5\,(0) + 0.4\,(0) = 0$$

Punto Q_1 ($A = 0$, $B = 16$)

Entonces

$$Z = 0.5\,A + 0.4\,B$$
$$= 0.5\,(0) + 0.4\,(16) = 6.4$$

Punto PQ (no se conocen las coordenadas).

Por lo tanto, lo primero será obtener su localización, para esto sabemos que dicho punto es la intersección de la recta de la restricción número 1 con la recta de la restricción número 2, por lo tanto si resolvemos las ecuaciones de esas 2 restricciones simultáneamente, obtendremos los valores de A y B que corresponden al punto PQ, entonces:

$$2A + B = 20 \qquad (1)$$
$$A + B = 16 \qquad (2)$$

Si restamos la ecuación (2) de la (1), tendremos:

$$2A - A + B - B = 20 - 16$$
$$A = 4$$

Con este valor de A, lo sustituiremos en la ecuación (2) para obtener:

$$4 + B = 16$$

de donde $B = 16 - 4 = 12$

Por lo tanto las coordenadas del punto PQ son ($A = 4$, $B = 12$), por su parte para Z tendremos:

$$Z = 0.5\,A + 0.4\,B$$
$$= 0.5\,(4) + 0.4\,(12)$$
$$= 2 + 4.8 = 6.8$$

Finalmente el punto P_2 ($A = 10$, $B = 0$)

Entonces $Z = 0.5\,A + 0.4\,B$

$$= 0.5\,(10) + 0.4\,(0)$$
$$= 5$$

De aquí vemos que la solución del problema es el punto de intersección de las rectas de las restricciones, PQ, donde

$$A = 4$$
$$B = 12$$
$$\text{con} \quad Z = 6.8$$

Ejemplo IV.2.- Resolver el problema

$$\text{Min} \quad Z = 10A + 9B$$

Sujeto a las restricciones:

$$A + 2B \geq 12 \quad (1)$$
$$2A + B \geq 10 \quad (2)$$

Siendo A y B no negativas

Solución:

Iniciamos la resolución del problema a partir del paso 2 representando a A en el eje de las abcisas y a B en las ordenadas.

Enseguida graficaremos las ecuaciones de las restricciones tomando las desigualdades como igualdades, entonces:

$$A + 2B = 12 \quad (1)$$
$$2A + B = 10 \quad (2)$$

Para poder trazar estas 2 rectas necesitamos de 2 puntos conocidos en cada una de ellas, entonces para la primera tendremos:

Ec. (1) : $A + 2B = 12$

Si $A = 0$, $B = 12 / 2 = 6$, punto P_1 ($A= 0$, $B=6$)

Si $B = 0$, $A = 12$, punto P_2 ($A = 12$, $B = 0$)

Por su parte para la segunda ecuación tendremos:

Ec (2): $2A + B = 10$

Si $A = 0$, $B = 10$, punto Q_1 ($A= 0$, $B = 10$)

Si $B = 0$, $A = 10 / 2 = 5$, punto Q_2 ($A = 5$, $B= 0$)

Estas rectas se muestran gráficamente en la figura IV.3

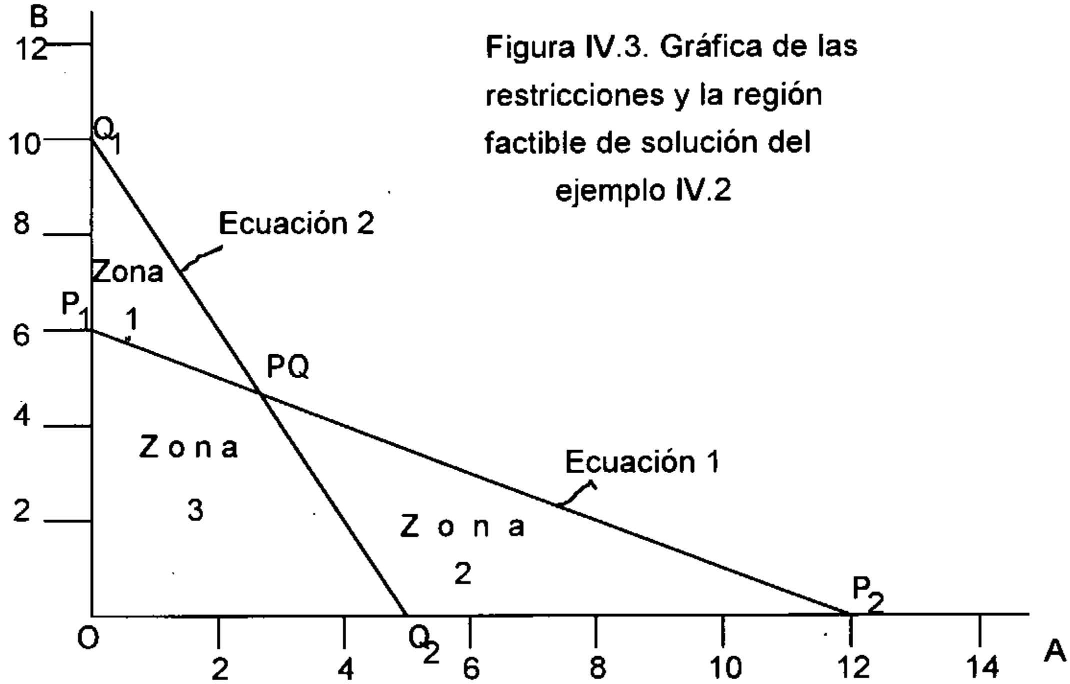


Figura IV.3. Gráfica de las restricciones y la región factible de solución del ejemplo IV.2

También presentamos 3 zonas, de las cuales explicaremos lo siguiente:

La zona 1 queda debajo de la línea de la ecuación 2 y arriba de la línea de la ecuación 1. Como las restricciones son en este caso del tipo mayor o igual que ($\geq$), esta zona cumple con la primera restricción, pero no con la segunda.

Por su parte la zona 2, cumple con la segunda restricción, pues queda por arriba de la línea de su ecuación, pero no con la primera, pues queda por debajo de la línea correspondiente a su ecuación.

Finalmente la zona 3 no cumple con ninguna de las 2 restricciones, pues queda por debajo de las 2 líneas correspondientes a sus ecuaciones.

Por lo tanto la zona factible de solución será aquella del primer cuadrante (puesto que A y B deben ser no negativas), que quede por encima de ambas líneas de las ecuaciones de las restricciones, es decir la línea formada por los puntos P_2-PQ- Q_1 en la figura IV.3.

En este caso omitiremos el paso 3 e iremos directamente al 4, en el cual el punto de solución será aquel que nos minimice a Z de la región factible, este punto debe de estar localizado en alguno de los vértices de dicha zona. En este caso tendremos 3 vértices que son los puntos Q_1, PQ y P_2.

Para el punto Q_1 ($A= 0$, $B= 10$), tendremos:

$Z = 10A + 9B$
$= 10(0) + 9(10) = 90$

Para el punto P_2 ($A = 12$, $B = 0$), tendremos:
$Z = 10A + 9B$
$= 10(12) + 9(0) = 120$

Para el punto PQ, que es la intersección de las rectas correspondientes a las restricciones, debemos primeramente encontrar su localización, para esto resolveremos el sistema de ecuaciones simultáneas:

$A + 2B = 12 \quad (1)$
$2A + B = 10 \quad (2)$

Si a la ecuación 1 le restamos 2 veces la ecuación 2, tendremos:

$A - 2(2A) + 2B - 2(B) = 12 - 2(10)$
$A - 4A + 2B - 2B = 12 - 20$
$-3A = -8$
$A = 8/3$

Y si sustituimos este valor en la ecuación (1), nos dará:

$8/3 + 2B = 12$
$2B = 12 - 8/3 = 36/3 - 8/3 = 28/3$
$B = 28/3/2 = 28/6 = 14/3$

Por lo tanto el punto PQ está situado en ($A = 8/3$, $B = 14/3$), esto nos dará para Z:

$Z = 10A + 9B$
$= 10(8/3) + 9(14/3)$
$= 80/3 + 126/3 = 206/3$

De aqui vemos que la solución está situada en este punto PQ, que es el que proporciona la Z mínima y cumple con las restricciones, por lo tanto la solución es:

$A = 8/3$
$B = 14/3$
$Z = 206/3$

Ejemplo IV.3.- Resolver el problema de programación lineal:

Max $\quad Z = 2A + 1.5B$

Sujeto a las restricciones:

$A + B = 1 \quad (1)$
$0.4A + 0.3B \leq 0.36 \quad (2)$

Siendo A y B no negativas.

Solución:

Al igual que en los ejemplos anteriores, iniciaremos con el segundo paso, colocando a A en el eje de las abcisas y a B en el de las ordenadas.

También graficaremos las restricciones en el plano cartesiano, la segunda con el signo de igualdad, es decir:

$A + B = 1 \quad (1)$
$0.4A + 0.3B = 0.36 \quad (2)$

Para la primera ecuación tomaremos los puntos:

Q_1 ($A = 0$, $B = 1$) y Q_2 ($A = 1$, $B = 0$)

Mientras que para la segunda tendremos:

Si $A = 0$, $\quad 0.3B = 0.36$
$B = 0.36/30 = 1.2$

Y si $B = 0$, $0.4A = 0.36$

A = 0.36/0.40 = 0.9

Siendo los puntos P_1 (A = 0, B = 1.2) y P_2 (A = 0.9, B = 0)

Una representación gráfica de estas ecuaciones se muestra en la figura IV.4, donde se presentan las rectas correspondientes a las restricciones, los puntos base a partir de los cuales se han dibujado y el punto PQ que es la intersección de las líneas.

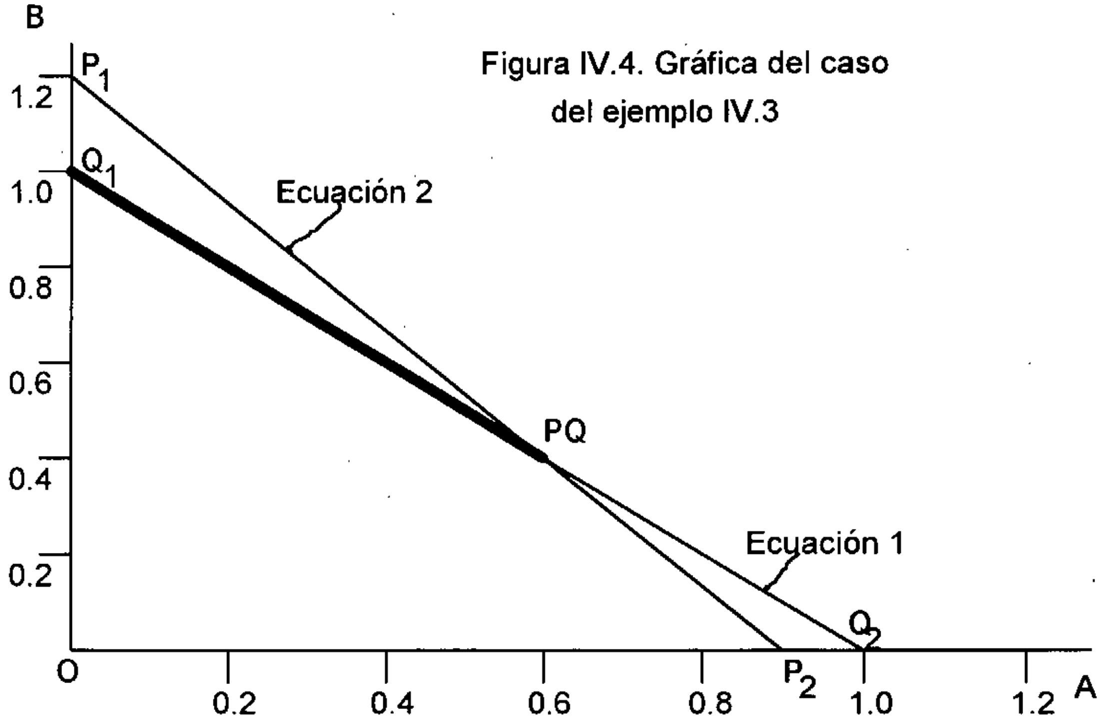


Figura IV.4. Gráfica del caso del ejemplo IV.3

Aquí es pertinente comentar que la segunda restricción es del tipo menor o igual que ($\leq$), por lo tanto esto delimita la zona factible de solución al área debajo de esta línea y dentro del primer cuadrante, es decir el triángulo O - P_1 - P_2. Pero la primera restricción es del tipo igual que (=), esto significa que la solución debe quedar en un punto sobre la recta de la ecuación 1, por lo tanto la región factible de solución es el tramo de esta recta que queda dentro del triángulo O - P_1 - P_2 y la cual se muestra en la figura con un trazo más grueso, pues es la única parte que cumple con ambas restricciones, esto significa que la solución quedará comprendida entre Q_1 y PQ.

Ahora de acuerdo al paso 4, el cual nos dice que la solución se localiza en un vértice de la zona factible, esto significa que aquella estará situada en cualquiera de los 2 puntos extremos Q_1 y PQ.

Esto lo sabremos calculando la Z de cada uno de estos puntos:

Para el punto Q_1 (A= 0,B = 1.0)

$$Z = 2A + 1.5B$$
$$= 2 (0) + 1.5 (1) = 1.5$$

Para el punto PQ, no conocemos su localización, por lo tanto obtendremos ésta al resolver simultáneamente el sistema de ecuaciones formado por las 2 restricciones:

$$A + B = 1 \qquad (1)$$
$$0.4A + 0.3B = 0.6 \qquad (2)$$

Aquí podemos despejar una variable de la ecuación (1), por decir A y sustituir esta expresión en la ecuación (2), con esto tendremos:

De la Ec (1) :

$$A = 1 - B \qquad (1)$$

Al sustituir en la Ec.(2):

$$0.4\ A + 0.3\ B = 0.36(2)$$

$$0.4\,(1 - B) + 0.3\,B = 0.36$$

La cual al quitar los paréntesis:

$$0.4 - 0.4B + 0.3B = 0.36$$

Al agrupar términos,

$$-0.4B + 0.3B = 0.36 - 0.40$$
$$-0.1B = -0.04$$

Finalmente despejamos a B

$$B = -0.04/(-0.1) = 0.4$$

Y como de la Ec. (1), $A = 1 - B$

$$A = 1 - 0.4 = 0.6$$

Por lo tanto el punto PQ se sitúa en ($A = 0.6$, $B = 0.4$)

Y la Z respectiva será:

$$Z = 2A + 1.5\,B$$
$$= 2(0.6) + 1.5\,(0.4)$$
$$= 1.2 + 0.6 = 1.8$$

La Z mayor es esta última, por lo tanto la solución es:

$A = 0.6$
$B = 0.4$
Con $Z = 1.8$

Ejemplo IV.4.- Maximizar la función objetivo

Max $Z = 80\,A + 75\,B$

Sujeta a las restricciones:

$2A + B \leq 1.3$ (1)
$A + 2B \leq 1.5$ (2)
$A + B = 1$ (3)

Siendo A y B no negativas y además enteras.

Solución:

Como el problema ya está planteado, vamos al paso 2, colocando a la A en el eje de las abcisas y la B en el de las ordenadas y procedemos a graficar las restricciones, tomando como igualdades sus ecuaciones, entonces:

$2A + B = 1.3$ (1)
$A + 2B = 1.5$ (2)
$A + B = 1$ (3)

Ahora tomaremos 2 puntos de cada ecuación para poder trazar la recta correspondiente, así tendremos:

Para la ecuación (1):

Si $A = 0$, $B = 1.3$
Si $B = 0$, $2A = 1.3$
$A = 1.3/2 = 0.65$

Los puntos serán P_1 ($A = 0$, $B = 1.3$) y P_2 ($A= 0.65$, $B = 0$)

Para la ecuación (2):

Si $A = 0$, $2B = 1.5$
$B = 1.5/2 = 0.75$
Si $B = 0$, $A = 1.5$

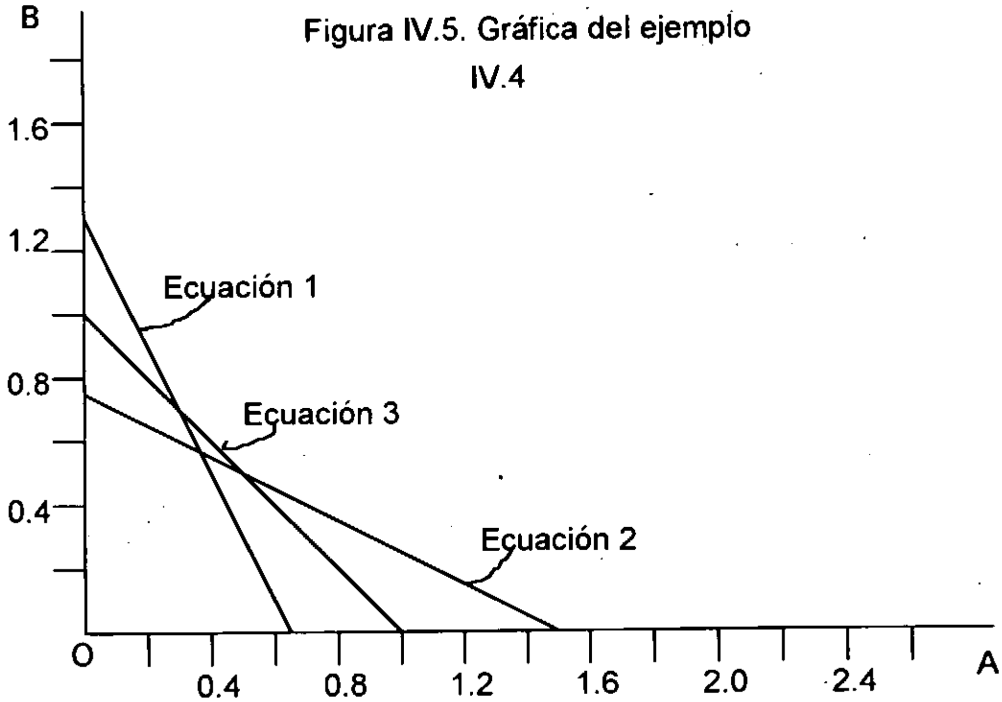
Los puntos serán Q_1 ($A = 0$,$B = 0.75$) y Q_2 ($A = 1.5$, $B = 0$)

Y para la ecuación (3):

Si $A= 0$, $B = 1$
Si $B = 0$, $A = 1$

Sus puntos serán R_1 ($A = 0$, $B = 1$) y R_2 ($A = 1$, $B =0$)

En la figura IV.5 se presenta la gráfica que contiene a estas ecuaciones.



Las primeras 2 restricciones son del tipo menor o igual que ($\leq$), siendo el área marcada con diagonales la que satisface a ambas restricciones; sin embargo la tercera restricción por ser del tipo igual que (=), implica que la solución debe quedar en la recta de dicha ecuación, si observamos la figura vemos que esta recta no entra en ningún momento en el área señalada con diagonales, esto significa que no existe región factible de solución que satisfaga a las 3 restricciones, por lo cual podemos decir que este problema no tiene solución.

Una situación que es conveniente indicar aquí es el hecho de que la solución de este problema desde su planteamiento indicaba que las variables A y B deberían de ser enteras, esto habría implicado buscar combinaciones enteras de las 2 variables que quedasen dentro de la zona factible de solución, siendo ésta, aquella combinación entera que hubiese maximizado a Z.

PROBLEMAS PROPUESTOS.

IV.1.- Maximizar $Z = 4A + 3B$
Sujeta a las restricciones

$$A + B \leq 6$$
$$A \leq 4$$
$$B \leq 5$$

Siendo A y B no negativas y enteras.

IV.2.- Minimizar $Z = 6A + 8B$
Sujeta a las restricciones

$$2A + B \geq 18$$
$$A \geq 6$$
$$B \geq 5$$

Siendo A y B no negativas.

IV.3.- Minimizar $Z = 7X + 9Y$
Sujeta a las restricciones

$$2X + 3Y \geq 36$$
$$X + Y \geq 14$$

Siendo A y B no negativas.

IV.4.- Maximizar $Z = 4X + 6Y$
Sujeta a las restricciones

$$X + Y \leq 10$$
$$X \leq 7$$
$$Y \leq 5$$

Con X, Y enteras y no negativas.

IV.5.- Minimizar $Z = 6A + 5B$
Sujeta a las restricciones

$$A + B \geq 16$$
$$A \geq 4$$
$$A \leq 6$$

Con A y B enteras y no negativas.

IV.6.- Maximizar $Z = 6X + 9Y$
Sujeta a las restricciones

$$X + 2Y \leq 20$$
$$2X + Y \leq 24$$

Con X, Y no negativas.

IV.7.- Maximizar $Z = 40C + 38D$
Sujeta a las restricciones

$$C + D \leq 30$$
$$C \leq 15$$
$$D \leq 18$$

Con C y D enteras y no negativas.

CAPITULO V

PROGRAMACION LINEAL

METODO SIMPLEX

Introducción.

Este método fue desarrollado por George B, Dantzig, en los Estados Unidos en 1947 y hoy en día es muy popular debido a su amplio uso y versatilidad en la resolución de problemas de programación lineal.

Es un procedimiento matricial iterativo para manejar variables no negativas, de fácil implementación en computadora, lo cual nos permite solucionar problemas de un número elevado de variables y de restricciones de una manera ágil y eficiente.

Al igual que el método gráfico, este método parte del problema de programación lineal debidamente planteado, es decir con las ecuaciones de la función objetivo y las restricciones definidas matemáticamente.

El método simplex toma siempre como posible solución un punto correspondiente a uno de los vértices de la región factible de solución, siendo la primera aproximación el origen. De aquí, en las siguientes iteraciones, el simplex se moverá hacia otros vértices, hasta que alguno de ellos sea el óptimo, lo cual sucede cuando un vértice tiene mejor valor de la función objetivo que los 2 vértices adyacentes a él, es decir el anterior y el posterior, siendo entonces cuando se ha logrado la solución.

Etapas del método Simplex.

El método Simplex puede dividirse en tres etapas, las cuales son las siguientes:

1. Etapa inicial. Consiste en dar la primera solución factible en el vértice correspondiente al origen. Esta etapa abarca los tres primeros pasos del procedimiento simplex el cual se explicará más adelante.
2. Etapa iterativa. La cual implica que el método busque una mejor solución a la anterior en otro vértice. Esta etapa corresponde al paso 4 del procedimiento simplex.
3. Etapa de prueba de optimalidad. La cual se logrará cuando la solución de un vértice es mejor que la de los vértices adyacentes a él. Esta etapa es el 5° paso de la metodología simplex.

Para la explicación del procedimiento Simplex, resolveremos un primer ejemplo señalando en él las situaciones de carácter particular del caso, así como también las de tipo general.

Propiedades de las soluciones factibles.

Este método se basa en algunas propiedades de las soluciones factibles de la programación lineal, las cuales son las siguientes:

1. En caso de haber alguna solución óptima, ésta se localizará en uno de los vértices de la zona factible de solución.
2. Si existen soluciones múltiples, éstas se situarán en vértices adyacentes de la región factible de solución.
3. Habrá siempre un número finito de soluciones factibles en los vértices.
4. La solución óptima en un vértice será aquella que sea mejor que las soluciones de vértices adyacentes a aquel.

Metodología Simplex.

Ahora presentaremos un ejemplo para ilustrar la metodología Simplex, aplicada a un caso de maximización.

Caso de maximización.

Ejemplo V.1.- Resolver el problema de programación lineal

$$\text{Max} \quad Z = 10X_1 + 12X_2$$

Sujeto a las restricciones

$$4X_1 + 3X_2 \leq 3.6 \quad (1)$$
$$X_1 + X_2 = 1 \quad (2)$$
$$2X_1 + 3X_2 \geq 2.4 \quad (3)$$

Solución:

Aplicaremos la metodología Simplex, explicando cada paso debidamente:

Paso 1. Convertir las desigualdades de las restricciones en igualdades mediante la incorporación de variables de holgura (también llamadas variables de excedente) y/o variables artificiales (también conocidas como ficticias), las cuales se agregarán a las restricciones con un coeficiente cuyo valor podemos determinar en la siguiente tabla:

Tabla V.1.- Coeficientes de las variables de holgura y artificiales según el tipo de restricción.

Tipo de restricción	Coeficiente de la variable de holgura	Coeficiente de la variable artificial
Menor o igual que ($\leq$)	+1	0
Mayor o igual que ($\geq$)	-1	+1
Igualdad (=)	0	+1
Aproximadamente igual	+1 y -1	0

En esta tabla las restricciones de tipo menor o igual que ($\leq$) agregan una variable de holgura porque se supone que les falta algo para lograr la igualdad, siendo eso que les falta precisamente esta variable.

Las restricciones de igualdad no llevan variable de holgura, porque ya existe una igualdad entre el lado izquierdo y el lado derecho de la ecuación. Sin embargo, requieren entonces de una variable artificial con coeficiente +1, para poder integrar la parte identidad de la tabla simplex, tal y como se verá más adelante.

Por su parte las restricciones del tipo mayor o igual que ($\geq$) restan una variable de holgura, dado que al lado izquierdo le sobra algo para igualarse al lado derecho y agregan una variable artificial pues la variable de holgura tiene coeficiente -1, siendo necesario entonces incorporar una variable artificial con coeficiente +1 para que la parte identidad de la tabla simplex quede debidamente formada.

Si observamos el ejemplo, tenemos 3 restricciones, una de cada tipo. La primera es del tipo menor o igual que ($\leq$), de acuerdo a la tabla agregaremos una variable de holgura con coeficiente +1 y no agregaremos variables artificiales, pues sus coeficientes serán cero, entonces :

$$4X_1 + 3X_2 + H_1 = 3.6 \qquad (1)$$

Siendo H_1 la variable de holgura.

La segunda restricción es de igualdad, por lo que no habrá variables de holgura (sus coeficientes para este tipo de restricción son cero), pero si habrá una variable artificial con coeficiente +1, entonces:

$$X_1 + X_2 + F_1 = 1 \qquad (2)$$

Donde F_1 es la variable artificial.

Para la tercera restricción, la cual es del tipo mayor o igual que ($\geq$), por lo que conforme a la tabla, llevará una variable de holgura con coeficiente -1 y una variable artificial con coeficiente +1, con esto tendremos:

$$2X_1 + 3X_2 - H_2 + F_2 = 2.4 \qquad (3)$$

Donde H_2 es la variable de holgura y F_2 la variable artificial.

Paso 2. Incluir las variables de holgura y artificiales en la ecuación de la función objetivo con un coeficiente que será cero en el caso de las variables de holgura y M para las artificiales, donde M se supone que es un valor muy grande, el cual no necesariamente debe ser conocido, pues el método más adelante tenderá a eliminarla de la zona de solución del problema.

Entonces con esto, la función objetivo será:

$$\text{Max} \quad Z = 10X_1 + 12X_2 + 0H_1 + 0H_2 - MF_1 - MF_2$$

Aquí debemos señalar que la M se ha agregado con signo negativo por tratarse de un problema de maximización, pues para el caso de minimización la M será positiva.

A ùna solución se le llama aumentada cuando incluye las variables de holgura además de las de decisión.

Paso 3. Formar la primera tabla, para esto:

a).- Expresar las ecuaciones de las restricciones en función de sus coeficientes, del modo siguiente:

	X_1	X_2	H_1	H_2	F_1	F_2
3.6	4	3	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0
2.4	2	3	0	-1	0	1

columna de cuerpo parte identidad
constantes

b).- Agregar el renglón objetivo arriba del renglón de variables, el cual incluirá los coeficientes de las variables en la función objetivo, con esto tendremos:

	10	12	0	0	-M	-M
	X_1	X_2	H_1	H_2	F_1	F_2
3.6	4	3	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0
2.4	2	3	0	-1	0	1

A estos coeficientes de las variables en la función objetivo también se les denomina contribuciones.

c).- Buscar la primera solución (conocida también como solución básica inicial), en función de las variables cuyos coeficientes son +1 en la parte identidad, con esto tendremos:

			10	12	0	0	-M	-M
			X_1	X_2	H_1	H_2	F_1	F_2
0	H_1	3.6	4	3	1	0	0	0
-M	F_1	1	1	1	0	0	1	0
-M	F_2	2.4	2	3	0	-1	0	1
columna objetivo	zona de solución							

Como podemos observar en la tabla se agregó a la zona de solución en cada renglón, aquella variable cuyo coeficiente es +1 en la parte identidad.

También en la columna objetivo se han incluido los coeficientes que tienen éstas en la función objetivo.

A las variables que forman la zona de solución se les llama variables básicas.

De esta forma la primera solución será:

$$H_1 = 3.6$$
$$F_1 = 1$$
$$F_2 = 2.4$$
$$Z = 0$$

Aquí Z es cero porque no aparece en la zona de solución, de igual forma H_2, X_1 y X_2 son cero por esta misma razón. A estas variables se les denomina no básicas.

d).- Generar el renglón índice o renglón de la utilidad por medio de la siguiente fórmula:

$$\text{Número índice} = \left[\begin{array}{c}\text{Sumatoria de los productos de}\\ \text{los elementos de la columna}\\ \text{por el respectivo elemento de}\\ \text{la columna objetivo}\end{array}\right] - \left[\begin{array}{c}\text{El elemento correspondiente}\\ \text{a la columna en el}\\ \text{renglón objetivo}\end{array}\right]$$

Ec. (V.1)

Aquí es pertinente señalar que esta fórmula es aplicable para problemas de maximización. Para casos de minimización los términos del lado derecho del signo igual cambian de signo, es decir, que la sumatoria irá con signo menos y el elemento del renglón objetivo con signo más.

Ahora procederemos a calcular con la fórmula (V.1) los elementos del renglón índice:

Para la columna que encabeza la variable X_1, tendremos:

Sumatoria = 0x4 + (-M)x1 + (- M)x2
= 0 - M - 2M = 0 - 3M

Por tanto el elemento índice será:

Elemento índice : 0 - 3M - 10 = -10 - 3M

Para la columna de X_2 será:

Sumatoria = 0x3 + (- M)x1 + (-M)x3
= 0 - M - 3M = 0 - 4M

Elemento índice = 0 - 4M - 12 = -12 - 4M

Para la columna de H_1:

Sumatoria = 0x1 + (-M)x0 + (-M)x0
= 0 + 0 + 0 = 0

Elemento índice = 0 - 0 = 0

Para la columna de H_2:

Sumatoria = 0x0 + (-M)x0 + (-M)(-1)
= 0 + 0 + M = 0 + M

Elemento índice = 0 + M - 0 = 0 + M

Para la columna de F_1:

Sumatoria = 0x0 + (-M)x1 + (-M)x0
= 0 - M + 0 = 0 - M

Elemento índice = 0 - M - (-M) = 0

Para la columna de F_2:

Sumatoria =0x0 + (-M)x0 + (-M)x1
= 0 + 0 - M = 0 - M

Elemento índice = 0 - M - (-M) = 0

La utilidad será el elemento índice correspondiente a la columna de constantes, el cual será:

Sumatoria = 0x3.6 + (-M)x1 + (-M)x2.4
=0 - M - 2 4M = 0 - 3.4 M

Elemento índice = 0 - 3 4M - 0 = 0 - 3.4M
(utilidad)

Como podemos observar todos los números índice tienen en este caso 2 términos: uno numérico y uno en M, por lo tanto en estos casos se descompone el renglón en 2 partes, una con la parte numérica y otra con los términos que contienen a M.

Con esto, la tabla Simplex nos quedará:

			10	12	0	0	-M	-M	
			X_1	X_2	H_1	H_2	F_1	F_2	
0	H_1	3.6	4	3	1	0	0	0	
-M	F_1	1	1	1	0	0	1	0	
-M	F_2	2.4	2	3	0	-1	0	1	
	Utilidad	0	-10	-12	0	0	0	0	Numérica
		-3.4	-3	-4	0	1	0	0	Parte M

El valor de -3.4 que corresponde a la parte M del renglón índice puede omitirse.

Con esto ha quedado completa nuestra primera tabla simplex la cual muestra la primera aproximación de solución al problema.

Primera solución:

Variables básicas	Variables no básicas
$H_1 = 3.6$	$H_2 = 0$
$F_1 = 1$	$X_1 = 0$
$F_2 = 2.4$	$X_2 = 0$

Esta aproximación será el óptimo (solución del problema) cuando no haya números negativos en el renglón índice considerando sus 2 partes (prueba de optimalidad).

Como en este caso sí existen elementos negativos, significa que nuestra aproximación deberá mejorar en las iteraciones subsecuentes.

En el método Simplex, el número de variables básicas es igual al número de restricciones funcionales (3 en este ejemplo); mientras que el número de variables no básicas es el número de grados de libertad que tiene el problema (también 3 en este caso).

Paso 4. Mejorar la aproximación anterior mediante el siguiente procedimiento:

a).- Determinar la columna clave o columna de trabajo. La cual será aquella que posea el número índice más negativo. (en caso de empate se selecciona al azar).

En los casos que la tabla Simplex tenga 2 partes del renglón índice , se considera primeramente la parte con términos en M y luego la numérica.

En base a lo antes descrito, el número índice de la parte M más negativo es el -4, por lo que la columna a la que pertenece (la que encabeza la variable X_2), será la columna clave.

			10	12	0	0	-M	-M
			X_1	X_2	H_1	H_2	F_1	F_2
0	H_1	3.6	4	3	1	0	0	0
-M	F_1	1	1	1	0	0	1	0
-M	F_2	2.4	2	3	0	-1	0	1
		0	-10	-12	0	0	0	0
			-3	-4	0	1	0	0

Esto se ha representado en la tabla enmarcando a la columna clave.

b).- Determinar el renglón clave.

El renglón clave será aquel que tenga el menor cociente de los obtenidos al dividir los elementos de la columna de constantes entre el correspondiente elemento de la columna clave, (en caso de empate también se selecciona al azar). Aquí no se incluye el renglón índice como candidato a ser clave.

Además, no se tomarán como denominadores aquellos elementos de la columna clave que sean menores o iguales que cero.

Por lo tanto hay 3 renglones que pueden ser clave.

Para el primer renglón, tendremos:

$$\text{Cociente} = 3.6/3 = 1.2$$

Para el segundo renglón,

Cociente = 1/1 =1.0

Para el tercer renglón,

Cociente = 2.4/3 = 0.8

De aquí vemos que el menor cociente es este último, por lo que el renglón clave será el tercero, el cual se enmarca en la tabla.

			10	12	0	0	-M	-M
			X_1	X_2	H_1	H_2	F_1	F_2
0	H_1	3.6	4	3	1	0	0	0
-M	F_1	1	1	1	0	0	1	0
-M	F_2	2.4	2	3	0	-1	0	1
		0	-10	-12	0	0	0	0
			-3	-4	0	1	0	0

c).- Determinar el número clave o elemento pivote, el cual será aquel elemento que pertenece a la vez al renglón y a la columna clave.

En este ejemplo vemos que el número clave es el 3, el cual ha quedado encerrado en un cuadro.

d).- Hacer el número clave la unidad, lo cual se consigue al dividir el renglón clave entre el número clave.

Al llevar a cabo lo anterior, el renglón clave quedará de la siguiente manera:

0.8	0.667	1	0	-0.333	0	0.333

e).- Sustituir la variable y su contribución que encabeza el renglon clave (variable que sale) por la variable y su contribución que encabeza la columna clave (variable que entra).

Con este cambio el renglón clave quedará:

12	X_2	0.8	0.667	1	0	-0.333	0	0.333

Ahora la variable X_2 se ha convertido en básica al entrar a la zona de solución.

Aqui debemos mencionar que la metodología simplex de 2 fases indica que es posible eliminar las variables artificiales de la tabla Simplex en cuanto éstas dejen de ser básicas, como en este caso la variable F_2, que con la modificación del presente inciso ha salido de la zona de solución, por lo que puede eliminarse de la tabla la columna correspondiente a dicha variable.

f).- Hacer ceros los elementos restantes de la columna clave, con excepción del número clave.

Esto se logra mediante modificaciones matriciales consistentes en sumarle o restarle a cada renglón un determinado número de veces el renglon clave, procedimiento conocido como *Reducción de Gauss*.

Procediendo entonces con el primer renglón, si observamos la tabla última, nos daremos cuenta que si le restamos el renglón clave multiplicado por 3 , se nos generará un cero en el elemento correspondiente a la columna clave, con lo cual tendremos:

	3.6	4	3	1	0	0	0
-3	(0.8	0.667	1	0	-0.333	0	0.333)
	1.2	2	0	1	1	0	-1

Ahora para el segundo renglón, si le restamos el renglón clave nos dará un cero en el respectivo elemento de la columna clave, esto es:

	1	1	1	0	0	1	0
-	(0.8	0.667	1	0	-0.333	0	0.333)
	0.2	0.333	0	0	0.333	1	-0.333

Ahora pasamos al renglón índice, primero en su parte numérica, donde vemos que si a éste le sumamos 12 veces el renglón clave, no hará un cero en el elemento correspondiente a la columna clave, con esto tendremos:

	0	-10	-12	0	0	0	0
+12	(0.8	0.667	1	0	-0.333	0	0.333)
	9.6	-2	$\boxed{0}$	0	-4	0	4

Finalmente vamos a la parte M del renglón índice, a la cual le sumaremos el renglón clave multiplicado por 4,con esto tendremos:

	-3	-4	0	1	0	0
+4	(0.667	1	0	-0.333	0	0.333)
	-0.333	$\boxed{0}$	0	-0.333	0	1.333

Con estos cambios, la tabla Simplex completa para esta iteración es:

			10	12	0	0	-M
			X_1	X_2	H_1	H_2	F_1
0	H_1	1.2	2	0	1	1	0
-M	F_1	0.2	0.333	0	0	0.333	1
12	X_2	0.8	0.667	1	0	-0.333	0
		9.6	-2	0	0	-4	0
			-0.333	0	0	-0.333	0

Aquí ya hemos eliminado de la tabla a F_2 tal y como lo indicamos en el inciso (e) anterior.

Esta nueva aproximación es:

Variables básicas	Variables no básicas
$H_1 = 1.2$	$H_2 = 0$
$F_1 = 0.2$	$X_1 = 0$
$X_2 = 0.8$	$F_2 = 0$
$Z = 9.6$	

Si comparamos esta solución con la anterior en lo concerniente a las variables no básicas, nos daremos cuenta que H_2 y X_1 permanecen sin cambio y solamente X_2 ha pasado a ser básica en lugar de F_2. Cuando solamente una de las variables no básicas cambie de una iteración a la siguiente, como en el caso presente, se dice que las 2 soluciones son adyacentes.

Esta solución es mejor que la anterior, pero todavía no es lo óptimo, puesto que sigue habiendo números negativos en el renglón índice, por lo que proseguiremos con la metodología.

Paso 5. Repetir el paso 4 hasta encontrar el óptimo, el cual se logrará cuando ya no existan números negativos en ninguna de las partes del renglón índice; o bien detener el procedimiento si el problema es cíclico (caso de degeneración) o no tiene solución, lo cual comentaremos más adelante.

Entonces de acuerdo al paso 4, pasaremos al inciso

a).- Determinar la columna clave, que en este caso si observamos la parte de M del renglón índice, nos daremos cuenta que hay un empate entre la columna que encabeza X_1 y la que encabeza H_2, por lo que debemos elegir al azar una de ellas. En este caso tomaremos a la primera, para que X_1 entre a la zona de solución, con esto nuestra tabla Simplex quedará de la manera siguiente:

			10	12	0	0	-M
			X_1	X_2	H_1	H_2	F_1
0	H_1	1.2	2	0	1	1	0
-M	F_1	0.2	0.333	0	0	0.333	1
12	X_2	0.8	0.667	1	0	-0.333	0
		9.6	-2	0	0	-4	0
			-0.333	0	0	-0.333	0

b).- Determinar el renglón clave, para esto obtendremos los cocientes de los 3 primeros renglones:
Primer renglón, Cociente = 1.2/2 = 0.6
Segundo renglón, Cociente = 0.2/0.333 = 0.6
Tercer renglón, Cociente = 0.8/0.667 = 1.2

Aquí existe un empate entre el primero y el segundo renglón para ser nominados como renglón clave, por lo que se debe seleccionar al azar. En este caso tomaremos al segundo renglón como clave, esto para que la variable F_1 que encabeza este renglón deje de ser básica, con esto nuestra tabla quedará:

			10	12	0	0	-M
			X_1	X_2	H_1	H_2	F_1
0	H_1	1.2	2	0	1	1	0
-M	F_1	0.2	0.333	0	0	0.333	1
12	X_2	0.8	0.667	1	0	-0.333	0
		9.6	-2	0	0	-4	0
			-0.333	0	0	-0.333	0

c).- El número clave en este caso es 0.333 que queda encuadrado por el renglón y la columna clave.
d).- Para hacer el número clave la unidad, multiplicaremos el renglón clave por 3, con esto sus elementos serán:

0.6 1 0 0 1 3

e).- Al hacer el cambio de variable, entrará X_1 a la zona de solución y saldrá F_1, con lo que al salir ésta, podremos eliminarla de la tabla, con lo cual tendremos:

			10	12	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2
0	H_1	1.2	2	0	1	1
10	X_1	0.6	1	0	0	1
12	X_2	0.8	0.667	1	0	-0.333
		9.6	-2	0	0	-4
			-0.333	0	0	-0.333

f).- Generar ceros en el resto de los elementos de la columna clave, para esto:
Al primer renglón le restaremos el renglón clave multiplicado por 2, entonces:

	1.2	2	0	1	1
-2	(0.6	1	0	0	1)
	0	$\boxed{0}$	0	1	-1

Al tercer renglón le restaremos el segundo renglón multiplicado por 0.667, entonces:

	0.8	0.667	1	0	-0.333
-0.667	(0.6	1	0	0	1)
	0.4	$\boxed{0}$	1	0	-1

Para la parte numérica del renglón índice, a ésta le sumaremos el renglón clave multiplicado por 2, con lo cual tendremos:

	9.6	-2	0	0	-4
+2	(0.6	1	0	0	1)
	10.8	$\boxed{0}$	0	0	-2

Finalmente, para la parte M del renglón índice, le sumaremos a ésta el renglón clave multiplicado por 0.333 para obtener:

		-0.333	0	0	-0.333	
+0.333	(	1	0	0	1	)
		$\boxed{0}$	0	0	0	

Aquí nos damos cuenta que la parte M de renglón índice desaparece de la tabla Simplex al ser cero todos sus elementos, esto se debe al hecho de que han desaparecido de la zona de solución las variables artificiales.

Con estos cambios la tabla Simplex será ahora:

			10	12	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2
0	H_1	0	0	0	1	-1
10	X_1	0.6	1	0	0	1
12	X_2	0.4	0	1	0	-1
		10.8	0	0	0	-2

Esta aproximación es:

Variables básicas	Variables no básicas
$H_1 = 0$	$H_2 = 0$
$X_1 = 0.6$	
$X_2 = 0.4$	
$Z = 10.8$	

La cual es mejor que la anterior.

Ahora la cuestión es: ¿ya es el óptimo?, aquí ha desaparecido la parte M del renglón índice, pero queda la parte numérica de éste, en la cual vemos que todavía hay un número negativo, con lo cual la respuesta a la pregunta anteriormente planteada es negativa, por lo que iremos a otra iteración repitiendo el paso 4.

a).- Determinar la columna clave, en este caso será la que está encabezada por H_2 pues es la única que tiene un número negativo en el renglón índice.

b).- El renglón clave será el segundo (encabezado por X_1) pues es el único que tiene denominador positivo y diferente de cero, con esto nuestra tabla será:

			10	12	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2
0	H_1	0	0	0	1	-1
10	X_1	0.6	1	0	0	1
12	X_2	0.4	0	1	0	-1
		10.8	0	0	0	-2

c).- Aquí el renglón clave quedará tal y como está, pues el número clave ya es la unidad, por esto iremos directamente al inciso (e).

e).- Al hacer el cambio de variables, saldrá X_1 de la zona de solución y entrará H_2, con esto el renglón clave completo será:

0	H_2	0.6	1	0	0	1

f).- Ahora generaremos ceros en los elementos restantes de la columna clave.

Al primer renglón le sumaremos directamente el renglón clave

0	0	0	1	-1
+(0.6	1	0	0	1)
0.6	1	0	1	$\boxed{0}$

Al tercer renglón le sumaremos el renglón clave

	0.4	0	1	0	-1
	+(0.6	1	0	0	1)
0	1	1	1	0	$\boxed{0}$

Al renglón índice le sumaremos el renglón clave multiplicado por 2

	10.8	0	0	0	-2
+2	(0.6	1	0	0	1)
	12	2	0	0	$\boxed{0}$

Con estos cambios nuestra tabla Simplex quedará de la siguiente manera:

			10	12	0	0
			X_1	X_2	H_1	H2
0	H_1	0.6	1	0	1	0
0	H2	0.6	1	0	0	1
12	X_2	1	1	1	0	0
		12	2	0	0	0

Esta opción ya es la óptima al no haber números negativos en el renglón índice, por lo que la solución es:

Variables básicas	Variables no básicas
$H_1 = 0.6$	$X_1 = 0$
$H_2 = 0.6$	
$X_2 = 1$	
$Z = 12$	

Una representación gráfica del ejemplo se muestra en la figura V.1

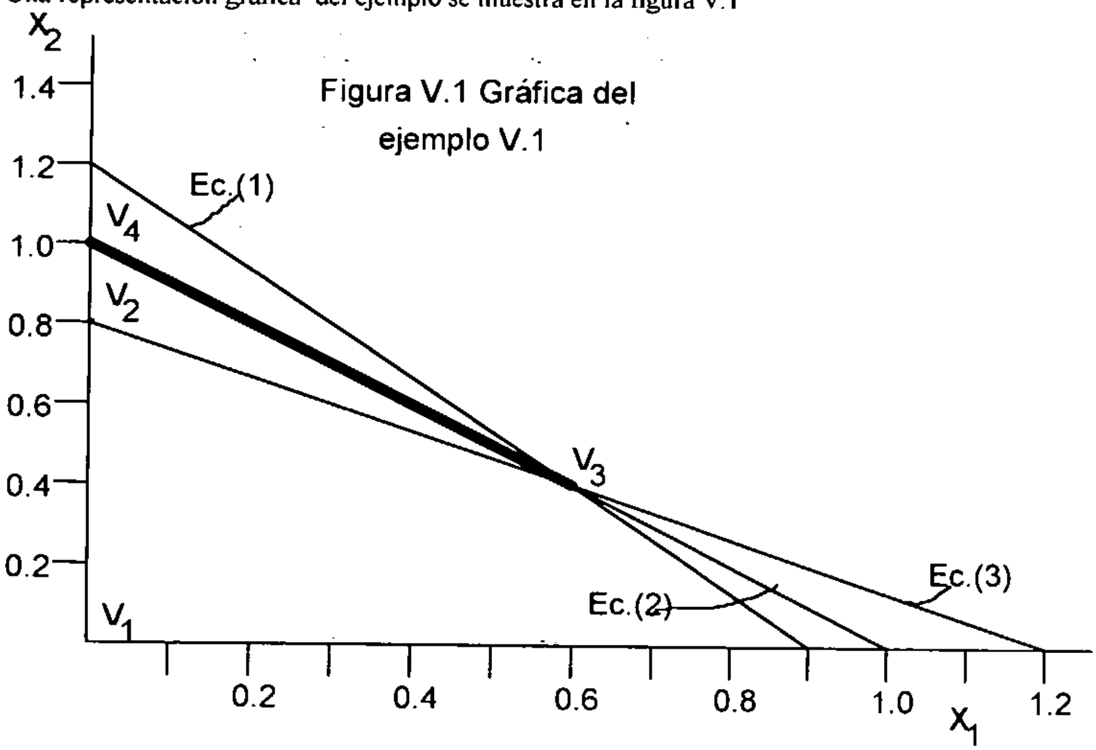


Figura V.1 Gráfica del ejemplo V.1

En la figura vemos las rectas correspondientes a las restricciones, así como también los puntos que fue tomando el método, como aproximaciones a la solución llamados vértices y simbolizados por la letra V en la figura.

La zona factible de solución es la línea recta de la ecuación 2 en el tramo comprendido entre V_4 y V_3 justo donde se ha trazado una línea más gruesa, pues es la única parte que cumple con las 3 restricciones.

De este problema el Simplex inicia en el origen, punto V_1 ($X_1 = 0$, $X_2 = 0$), el cual como puede observarse en la figura queda fuera de la zona de solución, siendo por tanto una solución no factible, lo cual se puede señalar desde la tabla simplex para esta aproximación, por el hecho de haber variables artificiales que son básicas, en este caso $F_1 = 1$ y $F_2 = 2.4$.

En la siguiente aproximación el Simplex va al punto V_2 ($X_1 = 0$, $X_2 = 0.8$) el cual tampoco es solución factible, lo cual hubiésemos notado en la tabla simplex por el hecho de que $F_1 = 0.2$, la cual sigue siendo variable básica.

Para la siguiente iteración el Simplex va al punto V_3 ($X_1 = 0.6$, $X_2 = 0.4$) que ya está en la región factible de solución, lo cual en la tabla Simplex se muestra por el hecho de no haber variables artificiales básicas.

En la última iteración el método llega al punto V_4 ($X_1 = 0$, $X_2 = 1$) el cual es la solución óptima del problema.

Ahora presentaremos un ejemplo de minimización:

Caso de minimización:

Ejemplo V.2.- Resolver el problema

$$\text{Min} \quad Z = 8X_1 + 7X_2 + 9X_3$$

Sujeto a:

$$2X_1 + X_2 + X_3 \geq 5 \quad (1)$$
$$X_1 + 2X_2 + 2X_3 \geq 6 \quad (2)$$

Siendo X_1, X_2, X_3, no negativas.

Solución:

Aplicaremos la metodología Simplex, adaptándola al caso de minimización, entonces:

Paso 1. Convertiremos las desigualdades de las restricciones en igualdades, conforme a la tabla V.1. En este problema las 2 restricciones son del tipo mayor o igual que ($\geq$), por lo que en cada una de ellas incorporaremos una variable de holgura con coeficiente -1 y una variable artificial con coeficiente +1, con estas modificaciones las restricciones serán:

$$2X_1 + X_2 + X_3 - H_1 + F_1 = 5 \quad (1)$$
$$X_1 + 2X_2 + 2X_3 - H_2 + F_2 = 6 \quad (2)$$

Paso 2. Incluiremos las variables de holgura y artificiales en la ecuación de la función objetivo con coeficiente cero para H_1 y H_2, mientras que por su parte F_1 y F_2 tendrán +M por tratarse de un problema de minimización, con esto la función objetivo vendrá dada por :

$$\text{Min} \quad Z = 8X_1 + 7X_2 + 9X_3 + 0H_1 + 0H_2 + MF_1 + MF_2$$

Paso 3. Formaremos la primera tabla.

a) .- Expresaremos las ecuaciones de las restricciones en función de sus coeficientes, así como el renglón de variables, para obtener:

	8	7	9	0	0	M	M
	X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	F_1	F_2
5	2	1	1	-1	0	1	0
6	1	2	2	0	-1	0	1

b) .- El renglón objetivo ya está presente en la tabla anterior con los valores de los coeficientes de las variables en la función objetivo.

c) .- La primera solución la daremos con F_1 y F_2, pues son las variables que tienen coeficiente +1 en la parte identidad de la tabla, con esto tendremos:

			8	7	9	0	0	M	M
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	F_1	F_2
M	F_1	5	2	1	1	-1	0	1	0
M	F_2	6	1	2	2	0	-1	0	1

d) .- Ahora generaremos el renglón índice, para este caso de minimización la fórmula (V.1) se modifica y queda con los signos cambiados en el segundo miembro, es decir:

Número Indice = [El elemento correspondiente a la columna en el renglón objetivo] — [Sumatoria de los productos de los elementos de la columna por el respectivo elemento en la columna objetivo]

Ec. (V.2)

Al aplicar esta fórmula a cada elemento tendremos:
Columna que encabeza X1: Número indice = 8 - (Mx2 + Mx1) = 8 - 3M
Columna que encabeza X2: Número indice = 7 - (Mx1 + Mx2) = 7 - 3M
Columna que encabeza X_3: Número indice = 9 - (Mx1 + Mx2) = 9 - 3M
Columna que encabeza H_1: Número indice = 0 -[Mx(-1) + Mx0] = M
Columna que encabeza H_2: Número indice = 0 -[Mx0 + Mx(-1)] = M
Columna que encabeza F_1: Número indice = M- (Mx1 + Mx0) = 0
Columna que encabeza F_2: Número indice = M - (Mx0 + Mx1) = 0
Columna de constantes: Número indice (utilidad) = 0 - (Mx5 + Mx6) = -11M

Al descomponer los números indice en su parte numérica y de M e incluirlos en la tabla Simplex, tendremos:

			8	7	9	0	0	M	M
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	F_1	F_2
M	F_1	5	2	1	1	-1	0	1	0
M	F_2	6	1	2	2	0	-1	0	1
		0	8	7	9	0	0	0	0
			-3	-3	-3	1	1	0	0

Aquí hemos omitido el -11M del elemento correspondiente a la columna de constantes.

Esta es nuestra primera solución, la cual indica:

Variables básicas	Variables no básicas
$F_1 = 5$	$X_1 = 0$
$F_2 = 6$	$X_2 = 0$
$Z = 0$	$H_1 = 0$
	$H_2 = 0$

Como vemos en la tabla Simplex, esta primera aproximación no es el óptimo, pues aparecen números negativos en el renglón índice, por tanto iremos al

Paso 4. Iremos a la siguiente iteración para mejorar nuestra aproximación.

a).- Para determinar la columna clave, vemos que hay un triple empate, por lo que seleccionaremos arbitrariamente a la que está encabezada por X_2:

			8	7	9	0	0	M	M
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	F_1	F_2
M	F_1	5	2	1	1	-1	0	1	0
M	F_2	6	1	2	2	0	-1	0	1
		0	8	7	9	0	0	0	0
			-3	-3	-3	1	1	0	0

b) .- Calcularemos los cocientes de los 2 renglones de restricciones:

Para el primer renglón:

$$Cociente = \frac{5}{1} = 5$$

Para el segundo renglón:

$$Cociente = \frac{6}{2} = 3$$

Por lo que este último es el renglón clave, lo cual ya aparece señalado en la tabla anterior.

c) .- El número clave es el 2 que aparece encuadrado en la tabla.

d) .- Para hacer el número clave igual a la unidad, dividiremos el renglón clave entre 2, con esto quedará de la manera siguiente:

3	0.5	1	1	0	-0.5	0	0.5

e) .- Cambiaremos de variable sacando a F_2 y su contribución de la zona de solución, e introduciendo a X_2 y su contribución. Además de acuerdo a la metodología Simplex de 2 fases, eliminaremos la columna de F_2 de la tabla.

			8	7	9	0	0	M
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	F_1
M	F_1	5	2	1	1	-1	0	1
7	X_2	3	0.5	1	1	0	-0.5	0
		0	8	7	9	0	0	0
			-3	-3	-3	1	1	0

f) .- Haremos ceros los elementos de la columna clave con excepción del número clave, entonces tendremos:

Al primer renglón le restaremos el renglón clave:

	5	2	1	1	-1	0	1
-	(3	0.5	1	1	0	-0.5	0)
	2	1.5	0	0	-1	0.5	1

A la parte numérica del renglón índice, le restaremos el renglón clave multiplicado por 7:

	0	8	7	9	0	0	0
-7	(3	0.5	1	1	0	-0.5	0)
	-21	4.5	0	2	0	3.5	0

A la parte M del renglón índice le sumaremos el renglón clave multiplicado por 3:

	-3	-3	-3	1	1	0
+3	(0.5	1	1	0	-0.5	0)
	-1.5	0	0	1	-0.5	0

Con estos cambios la tabla Simplex será ahora:

			8	7	9	0	0	M
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	F_1
M	F_1	2	1.5	0	0	-1	0.5	1
7	X_2	3	0.5	1	1	0	-0.5	0
		-21	4.5	0	2	0	3.5	0
			-1.5	0	0	1	-0.5	0

La cual es nuestra nueva aproximación:

Variables básicas	Variables no básicas
$F_1 = 2$	$X_1 = 0$
$X_2 = 3$	$X_3 = 0$
$Z = 21$	$H_1 = 0$
	$H_2 = 0$

Aquí debemos aclarar que Z no es -21 como aparece en la tabla Simplex, sino +21 puesto que la metodología Simplex nos presenta Z con el signo invertido cuando se trata de problemas de minimización.

De esta aproximación, vemos que no es el óptimo, puesto que aún hay números negativos en el renglón índice, por lo cual iremos a repetir el paso 4, reiniciando con el inciso (a).

a) .- La columna clave será ahora la que está encabezada por X_1, puesto que contiene al número índice más negativo.

b) .- Calculando los cocientes tendremos:

Primer renglón,

$$Cociente = \frac{2}{1.5} = 1.333$$

Segundo renglón,

$$Cociente = \frac{3}{0.5} = 6$$

Por lo que el renglón clave será el primero

			8	7	9	0	0	M
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	F_1
M	F_1	2	1.5	0	0	-1	0.5	1
7	X_2	3	0.5	1	1	0	-0.5	0
		-21	4.5	0	2	0	3.5	0
			-1.5	0	0	1	-0.5	0

c) .- El número clave es el 1.5, pues pertenece al renglón y a la columna clave.

d) .- Si dividimos el renglón clave entre 1.5, éste nos quedará:

1.333	1	0	0	-0.667	0.333	0.667

e) .- Con el cambio de variable, sale F_1 y entra X_1, con esto y eliminando de una vez a F_1 de la tabla, ésta quedará en la siguiente forma:

			8	7	9	0	0
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2
8	X_1	1.333	1	0	0	-0.667	0.333
7	X_2	3	0.5	1	1	0	-0.5
		-21	4.5	0	2	0	3.5
			-1.5	0	0	1	-0.5

f) .- Ahora generaremos ceros en los restantes elementos de la columna clave, de la siguiente manera:

Al segundo renglón le restaremos el renglón clave multiplicado por 0.5:

	3	0.5	1	1	0	-0.5
-0.5	(1.333	1	0	0	-0.667	0.333)
	2.333	0	1	1	0.333	-0.667

A la parte numérica del renglón índice le restaremos el renglón clave multiplicado por 4.5:

	-21	4.5	0	2	0	3.5
-4.5	(1.333	1	0	0	-0.667	0.333)
	-27	0	0	2	3	2

Finalmente a la parte M del renglón índice le sumaremos el renglón clave multiplicado por 1.5:

	-1.5	0	0	1	-0.5
+1.5	(1	0	0	-0.667	0.333)
	$\boxed{0}$	0	0	0	0

Con estas modificaciones nuestra tabla es:

			8	7	9	0	0
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2
8	X_1	1.333	1	0	0	-0.667	0.333
7	X_2	2.333	0	1	1	0.333	-0.667
		-27	0	0	2	3	2
			0	0	0	0	0

Aquí vemos que la parte M del renglón índice desaparece al hacerse cero todos sus elementos, pues ya no hay ninguna variable artificial en la zona de solución.

Además en la parte numérica de este mismo renglón ya no hay números negativos, por lo que esta aproximación ha resultado ser el óptimo, con la siguiente solución:

Variables básicas	Variables no básicas
$X_1 = 1.333$	$X_3 = 0$
$X_2 = 2.333$	$H_1 = 0$
$Z = 27$	$H_2 = 0$

Una representación gráfica del ejemplo se muestra en la figura V.2 la cual se presenta ahora en 3 dimensiones, puesto que hay 3 variables de decisión. Cada ecuación de las restricciones es un plano en forma de triángulo que corta el espacio tridimensional.

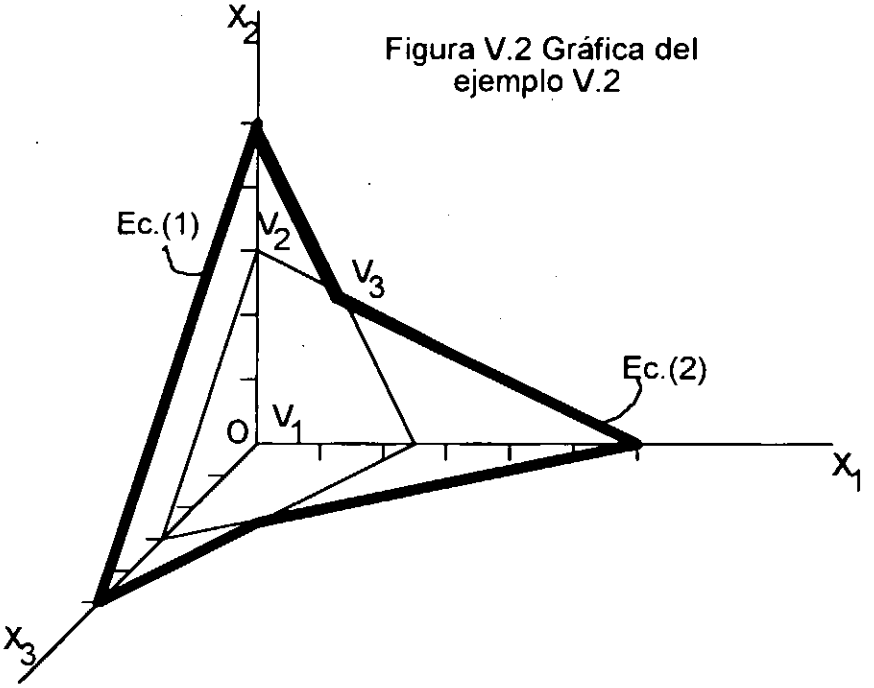


Figura V.2 Gráfica del ejemplo V.2

Como en el presente caso las restricciones son del tipo mayor o igual que ($\geq$), la región factible de solución será la exterior a los 2 planos. La línea más externa de éstos se muestra en la figura con un trazo más grueso, de esta manera todo el espacio que quede de dicha línea hacia afuera será la zona de solución factible.

El método inicia en el origen, señalado como el punto V_1 en la figura donde $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$. Este punto queda dentro de los planos, por lo tanto no está en la región factible de solución, lo que era notorio desde la tabla Simplex por el hecho de tener a $F_1 = 5$ y $F_2 = 6$ como variables básicas.

En la siguiente iteración el método va al punto V_2 ($X_1 = 0$, $X_2 = 3$, $X_3 = 0$), el cual tampoco está en la zona factible de solución, pues tiene a $F_1 = 2$ como variable básica.

Finalmente en la siguiente iteración el método pasa a V_3 ($X_1 = 1.333$, $X_2 = 2.333$, $X_3 = 0$), el cual si está ubicado en la región factible de solución y satisface la prueba de optimalidad, siendo la solución del problema.

A continuación presentaremos otro caso:

Ejemplo V.3.- Resolver

$$\text{Max} \quad Z = 8X_1 + 6X_2$$
sujeto a
$$4X_1 + 3X_2 \leq 3 \quad (1)$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 1.5 \quad (2)$$
$$X_1 + X_2 = 1 \quad (3)$$

Solución: Aplicaremos la metodología Simplex:

Paso 1. Convertir las desigualdades en igualdades. Las dos primeras restricciones son del tipo menor o igual que, por lo que conforme a la tabla V.1, agregaremos una variable de holgura en cada una de ellas, mientras que en la tercera restricción, que es de igualdad, añadiremos una variable artificial.

$$4X_1 + 3X_2 + H_1 = 3 \quad (1)$$
$$X_1 + 2X_2 + H_2 = 1.5 \quad (2)$$
$$X_1 + X_2 + F_1 = 1 \quad (3)$$

Paso 2. Incorporamos las variables agregadas en el paso anterior a la función objetivo con sus contribuciones respectivas:

$$\text{Max} \quad Z = 8X_1 + 6X_2 + 0H_1 + 0H_2 - M\,F_1$$

Aquí el signo de M es negativo por tratarse de un problema de maximización.

Paso 3. Formaremos la primera tabla

a) .- Poner el renglón de variables y las ecuaciones de las restricciones

	8	6	0	0	-M
	X_1	X_2	H_1	H_2	F_1
3	4	3	1	0	0
1.5	1	2	0	1	0
1	1	1	0	0	1

b) .- Ya hemos agregado el renglón objetivo a la tabla.

c) .- Daremos la primera solución en función de las variables con coeficiente uno en la parte identidad, es decir, H_1, H_2 y F_1, con esto tendremos:

			8	6	0	0	-M
			X_1	X_2	H_1	H_2	F_1
0	H_1	3	4	3	1	0	0
0	H_2	1.5	1	2	0	1	0
-M	F_1	1	1	1	0	0	1

d) .- Formar el renglón índice, aplicando la ecuación (V.1).
Columna encabezada por X_1: Número índice = [0x4 + 0x1 + (-M)x1] -8 = -M - 8
Columna encabezada por X_2: Número índice = [0x3 + 0x2 + (-M)x1] - 6 = -M - 6
Columna encabezada por H_1: Número índice = [0x1 + 0x0 + (-M)x0] - 0 = 0
Columna encabezada por H_2: Número índice = [0x0 + 0x1 + (-M)x0] -0 = 0
Columna encabezada por F_1: Número índice = [0x0 + 0x0 + (-M)x1] - (-M) = 0
Columna de constantes: Número índice = [0x3 +0x1.5 + (-M)x1] -0 = -M

Al incorporar estos elementos con sus 2 partes, numérica y de M a la tabla, tendremos:

			8	6	0	0	-M
			X_1	X_2	H_1	H_2	F_1
0	H_1	3	4	3	1	0	0
0	H_2	1.5	1	2	0	1	0
-M	F_1	1	1	1	0	0	1
		0	-8	-6	0	0	0
			-1	-1	0	0	0

Sin incluir la parte M de la columna de constantes, ésta es nuestra primera solución,

Variables básicas	Variables no básicas
$H_1 = 3$	$X_1 = 0$
$H_2 = 1.5$	$X_2 = 0$
$F_1 = 1$	
$Z = 0$	

Paso 4. Como hay números negativos en el renglón índice, vamos a otra iteración.
a).- Determinar la columna clave. En la parte M del renglón índice vemos que hay un empate entre las columnas encabezadas por X_1 y X_2, por lo que al azar escogeremos la primera de ellas.
b) .- Determinar el renglón clave. Para esto calcularemos los cocientes de los 3 renglones de restricciones:
Para el primer renglón,

$$Cociente = \frac{3}{4} = 0.75$$

Para el segundo renglón,

$$Cociente = \frac{1.5}{1} = 1.50$$

Para el tercer renglón,

$$Cociente = \frac{1}{1} = 1.0$$

Por lo cual el primer renglón es el clave

			8	6	0	0	-M
			X_1	X_2	H_1	H_2	F_1
0	H_1	3	4	3	1	0	0
0	H_2	1.5	1	2	0	1	0
-M	F_1	1	1	1	0	0	1
		0	-8	-6	0	0	0
			-1	-1	0	0	0

c) .- Por lo anterior el número clave es el 4 que pertenece a la vez al renglón y a la columna clave.
d) .- Dividimos el renglón clave entre 4, con esto quedará de la siguiente manera:

0.75	1	0.75	0.25	0	0

e) .- Cambiamos de variable sacando a H_1 y reemplazándola por X_1, con esto la tabla quedará:

			8	6	0	0	-M
			X_1	X_2	H_1	H_2	F_1
8	X_1	0.75	1	0.75	0.25	0	0
0	H_2	1.5	1	2	0	1	0
-M	F_1	1	1	1	0	0	1
		0	-8	-6	0	0	0
			-1	-1	0	0	0

f) .- Haremos ceros los elementos restantes de la columna clave:
Al segundo renglón le restamos el clave,

	1.5	1	2	0	1	0
-	(0.75	1	0.75	0.25	0	0)
	0.75	$\boxed{0}$	1.25	-0.25	1	0

Al tercer renglón le restamos el clave:

	1	1	1	0	0	1
-	(0.75	1	0.75	0.25	0	0)
	0.25	$\boxed{0}$	0.25	-0.25	0	1

A la parte numérica del renglón índice le sumaremos el renglón clave multiplicado por 8:

	0	-8	-6	0	0	0
+8	(0.75	1	0.75	0.25	0	0)
	6.0	$\boxed{0}$	0	2	0	0

A la parte M del renglón índice le sumamos el renglón clave:

	-1	-1	0	0	0
+	(1	0.75	0.25	0	0)
	$\boxed{0}$	-0.25	0.25	0	0

Con esto la tabla Simplex de esta nueva aproximación es:

			8	9	0	0	-M
			X_1	X_2	H_1	H_2	F_1
8	X_1	0.75	1	0.75	0.25	0	0
0	H_2	0.75	0	1.25	-0.25	1	0
-M	F_1	0.25	0	0.25	-0.25	0	1
		6.0	0	0	2	0	0
			0	-0.25	0.25	0	0

La cual es la nueva iteración

Variables básicas

$X_1 = 0.75$
$H_2 = 0.75$
$F_1 = 0.25$
$Z = 6.0$

Variables no básicas

$X_2 = 0$
$H_1 = 0$

En vista de que esta nueva aproximación no es el óptimo, repetiremos el paso 4, entonces:

a).- La columna clave será la que está encabezada por X_2, pues es la única que posee un elemento negativo del renglón índice en su parte M.

b) .- Obtendremos los cocientes para hallar el renglón clave,

Para el primer renglón,

$$Cociente = \frac{0.75}{0.75} = 1.0$$

Para el segundo renglón,

$$Cociente = \frac{0.75}{1.25} = 0.6$$

Para el tercer renglón,

$$Cociente = \frac{0.25}{0.25} = 1.0$$

Por lo tanto el segundo renglón es el clave.

			8	6	0	0	-M
			X_1	X_2	H_1	H_2	F_1
8	X_1	0.75	1	0.75	0.25	0	0
0	H_2	0.75	0	1.25	-0.25	1	0
-M	F_1	0.25	0	0.25	-0.25	0	1
		6.0	0	0	2	0	0
			0	-0.25	0.25	0	0

c) .- El número clave es el 1.25.

d) .- Si dividimos el renglón clave entre 1.25, obtendremos:

0.6	0	1	-0.2	0.8	0

e) .- El cambio de variable será sacando a H_2 de la zona de solución e introduciendo a X_2, con lo cual tendremos,

			8	6	0	0	-M
			X_1	X_2	H_1	H_2	F_1
8	X_1	0.75	1	0.75	0.25	0	0
6	X_2	0.6	0	1	-0.2	0.8	0
-M	F_1	0.25	0	0.25	-0.25	0	1
		6.0	0	0	2	0	0
			0	-0.25	0.25	0	0

f) .- Generaremos ceros en los elementos restantes de la columna clave.

Al primer renglón le restaremos el clave multiplicado por 0.75:

	0.75	1	0.75	0.25	0	0
-0.75	(0.6	0	1	-0.2	0.8	0)
	0.3	1	0	0.4	-0.6	0

Al tercer renglón le restaremos el clave multiplicado por 0.25:

	0.25	0	0.25	-0.25	0	1
-0.25	(0.6	0	1	-0.2	0.8	0)
	0.1	0	0	-0.2	-0.2	1

A la parte numérica del renglón índice no se le hará ninguna modificación, dado que el elemento correspondiente a la columna clave ya es un cero.

A la parte M del renglón índice le sumaremos el renglón clave multiplicado por 0.25:

	0	-0.25	0.25	0	0
+0.25	(0	1	-0.20	0.8	0)
	0	$\boxed{0}$	0.20	0.20	0

Con estos cambios la tabla Simplex será:

			8	6	0	0	-M
			X_1	X_2	H_1	H_2	F_1
8	X_1	0.3	1	0	0.4	-0.6	0
6	X_2	0.6	0	1	-0.2	0.8	0
-M	F_1	0.1	0	0	-0.2	-0.2	1
		6.0	0	0	2	0	0
			0	0	0.2	0.2	0

En esta tabla vemos que ya no hay números negativos en el renglón índice, por lo que esta solución será lo óptimo, pero hay un problema: La variable artificial F_1 aún permanece en la zona de solución, es decir continúa como variable básica, esto significa que este problema no tiene solución factible debido al tipo de restricciones y esto lo podemos comprobar de una manera simple: Con la aparente solución de esta tabla,

$$X_1 = 0.3$$
$$X_2 = 0.6$$
$$Z = 6.0$$

Checaremos si se respetan las restricciones:

$$(1) \qquad 4X_1 + 3X_2 \leq 3$$
$$4(0.3) + 3(0.6) \leq 3$$
$$1.2 + 1.8 \leq 3$$
$$3 \leq 3, \text{ sí se cumple}$$
$$(2) \qquad X_1 + 2X_2 \leq 1.5$$
$$0.3 + 2(0.6) \leq 1.5$$
$$0.3 + 1.2 \leq 1.5$$
$$1.5 \leq 1.5, \text{ sí se cumple}$$
$$(3) \qquad X_1 + X_2 = 1$$
$$0.3 + 0.6 = 1$$
$$0.9 = 1, \text{ NO SE CUMPLE}$$

Por lo cual la aparente solución del problema no cumple con las restricciones, siendo entonces una solución no factible.

En la figura V.3 presentamos una gráfica del ejemplo para ilustrar esta situación.

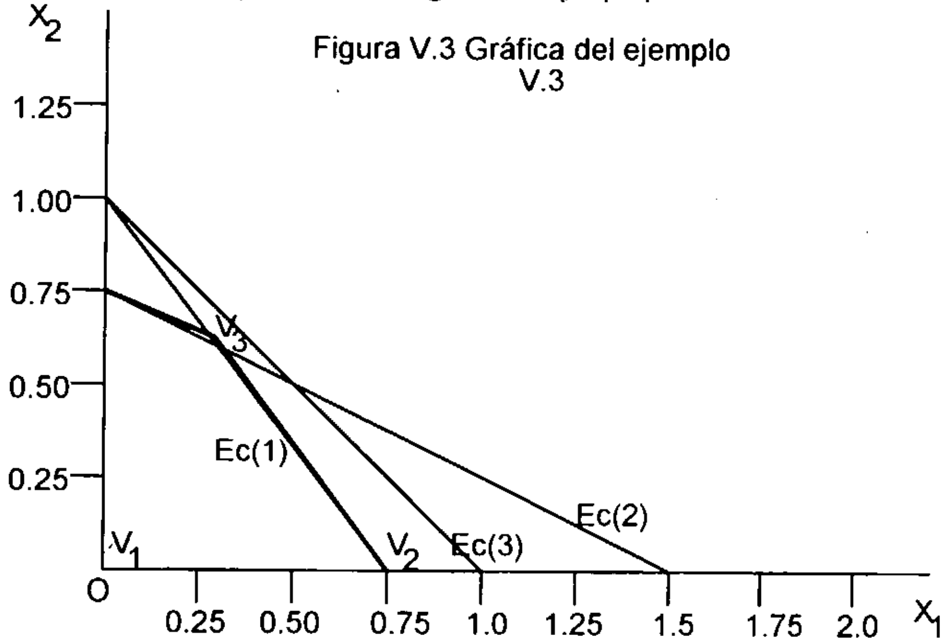


Figura V.3 Gráfica del ejemplo V.3

El área sombreada representa la zona de solución que satisface a las 2 primeras restricciones. Pero la tercera restricción indica que la solución debe quedar sobre la recta correspondiente a su ecuación, en la figura es la línea Ec. (3).

Aquí nos damos cuenta que dicha línea no toca en ningún momento el área sombreada, por lo que no existe ningún punto que satisfaga a todas las restricciones.

Por su parte la secuencia del método Simplex fue la siguiente:

Inicia en el origen, punto V_1 ($X_1 = 0$, $X_2 = 0$), luego pasa al punto V_2 ($X_1 = 0.75$, $X_2 = 0$) y finalmente va al punto V_3 ($X_1 = 0.3$, $X_2 = 0.6$) donde aparentemente termina con la solución óptima.

Ejemplo V.4.- Resolver

$$\text{Max} \quad Z = 6X_1 + 4X_2$$

sujeto a

$$X_1 + 2X_2 \leq 4 \qquad (1)$$
$$3X_1 + 2X_2 \leq 8 \qquad (2)$$

con X_1 y X_2 no negativas

Solución: Iremos al

Paso 1. Convertiremos las desigualdades en igualdades agregando variables de holgura, dado el tipo de restricciones, con esto tendremos:

$$X_1 + 2X_2 + H_1 = 4 \quad (1)$$
$$3X_1 + 2X_2 + H_2 = 8 \quad (2)$$

Paso 2. Incorporaremos las variables de holgura en la función objetivo, con sus contribuciones,

$$\text{Max} \quad Z = 6X_1 + 4X_2 + 0H_1 + 0H_2$$

Paso 3. Formaremos la primera tabla

a) .- Pondremos el renglón de variables y las ecuaciones de las restricciones, para obtener:

			6	4	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2
0	H_1	4	1	2	1	0
0	H_2	8	3	2	0	1

b) .- El renglón objetivo ya fue incluido en la tabla.

c) .- La primera solución la damos en función de las variables H_1 y H_2 como aparece en la tabla anterior.

d) .- Formaremos el renglón índice al aplicar la ecuación (V.1) a nuestro caso de maximización:

Columna encabezada por X_1 Número índice = (0x1 + 0x3) -6 = -6
Columna encabezada por X_2 Número índice = (0x2 + 0x2) -4 = -4
Columna encabezada por H_1 Número índice = (0x1 + 0x0)-0 = 0
Columna encabezada por H_2 Número índice = (0x0 + 0x1) - 0= 0
Columna de constantes Número índice = (0x4 + 0x8) - 0 = 0

Por lo tanto, al incluir estos elementos en la tabla Simplex, tendremos:

			6	4	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2
0	H_1	4	1	2	1	0
0	H_2	8	3	2	0	1
		0	-6	-4	0	0

Aquí debemos notar que no hubo parte M del renglón índice, esto debido a que no existen variables artificiales.

Nuestra primera solución es:

Variables básicas	Variables no básicas
$H_1 = 4$	$X_1 = 0$
$H_2 = 8$	$X_2 = 0$
$Z = 0$	

Como vemos en la tabla, esta aproximación no es la óptima, por tanto iremos a una nueva iteración con el paso 4.

a) .- La columna clave será la encabezada por X_1 al poseer el número índice más negativo.

b) .- Obtendremos los cocientes de los dos renglones para determinar el renglón clave,

Primer renglón,

$$Cociente = \frac{4}{1} = 4$$

Segundo renglón,

$$Cociente = \frac{8}{3} = 2.667$$

Por tanto el renglón clave es el segundo, tal como se muestra en la tabla.

			6	4	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2
0	H_1	4	1	2	1	0
0	H_2	8	3	2	0	1
		0	-6	-4	0	0

c) .- el número clave es el 3.

d) .- Si dividimos el renglón clave entre 3, obtendremos:

2.667	1	0.667	0	0.333

e) .- Cambiamos de variable sacando a H_2 e introduciendo a X_1:

			6	4	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2
0	H_1	4	1	2	1	0
6	X_1	2.667	1	0.667	0	0.333
		0	-6	-4	0	0

f) .- Generaremos ceros en los restantes elementos de la columna clave.

Al primer renglón le restamos el renglón clave:

	4	1	2	1	0
-	(2.667	1	0.667	0	0.333)
	1.333	0	1.333	1	-0.333

Al renglón índice le sumamos el clave multiplicado por 6:

	0	-6	-4	0	0
+6	(2.667	1	0.667	0	0.333)
	16	0	0	0	2

Con estos cambios nuestra tabla Simplex será:

			6	4	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2
0	H_1	1.333	0	1.333	1	-0.333
6	X_1	2.667	1	0.667	0	0.333
		16	0	0	0	2

Esta aproximación es el óptimo siendo:

Variables básicas	Variables no básicas
$H_1 = 1.333$	$H_2 = 0$
$X_1 = 2.667$	$X_2 = 0$
$Z = 16.0$	

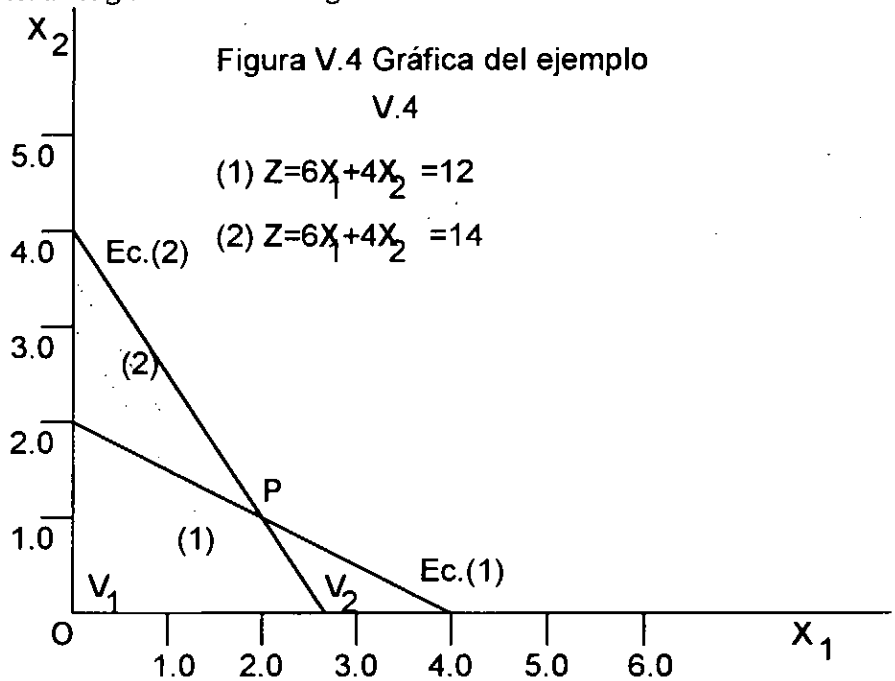
Aquí es conveniente comentar lo siguiente:

Siempre que una variable no básica tenga en la tabla Simplex final como coeficiente del renglón índice un cero, significa que habrá una o varias soluciones óptimas alternas.

En nuestro ejemplo, si observamos la tabla Simplex, vemos que X_2 no es variable básica y su coeficiente en el renglón índice es cero, por tanto, este ejemplo tiene otras soluciones óptimas.

Esto se debe a que una de las restricciones, en este caso la (2) es paralela a la función objetivo, lo cual hace que existan varias soluciones óptimas donde la recta de la función objetivo intersecta con dicha restricción.

Esto lo mostramos gráficamente en la figura V.4



En dicha gráfica las líneas continuas representan a las restricciones y las punteadas son dos valores de la función objetivo, en Z = 12 la (1) y en Z = 14 la (2).

Como vemos, estas rectas son paralelas a la línea correspondiente a la restricción número 2, de tal forma que la recta de la función objetivo para Z=16, coincide con la segunda restricción siendo el máximo valor posible dentro de la zona factible de solución, por eso el resultado nos ha dado Z = 16.

Sin embargo, habrá varias soluciones óptimas a lo largo de la recta de la segunda restricción desde el punto P hasta el punto V_2. Arriba del punto P ya no se cumple con la primera restricción, por eso se excluye esta porción de la recta como zona factible de solución.

Este ejemplo es una clara muestra del caso de la existencia de soluciones óptimas alternas.

En cuanto a las iteraciones del método Simplex, éste inicia en el origen, punto V_1 ($X_1 = 0$, $X_2 = 0$) como primera solución, pasando luego al punto V_2 ($X_1 = 2.667$, $X_2 = 0$), donde se ha encontrado la solución óptima rápidamente.

Casos especiales del método Simplex.

1.- Desempates.

a) .- Empate en la columna clave (variable que entra). En este caso se seleccionará cualquier columna que se desee, esto en lo único que podrá afectar al desarrollo del método Simplex, será en el número de iteraciones necesarias para alcanzar la solución óptima.

b) .- Empate en el renglón clave (variable que sale). En este caso existen reglas para determinar cuál renglón de los que están empatados debe elegirse como clave. Sin embargo, para fines prácticos se recomienda seleccionar al azar. El problema en que puede incurrirse cuando se elige el renglón indebido es que el método vaya de un primero a un segundo vértice sin cambio en la función objetivo y luego regrese del segundo al primero en la iteración siguiente, haciéndose esto un ciclo indefinido que nunca llegará a la solución. En este caso se dice que existe degeneración del Simplex. No obstante, este caso es muy poco usual en los problemas prácticos y se resuelve simplemente por cambiar el renglón que se eligió como clave por otro que haya resultado empatado con él.

2.- No hay variable básica de salida (Z no acotada).

Esto sucede cuando todos los elementos de la columna clave son menores o iguales que cero en alguna tabla intermedia del desarrollo de la metodología Simplex, no pudiendo de esta manera ser seleccionados para determinar el renglón clave. Se dice que en este caso la Z podría ser infinita o bien negativa, de aquí el porqué suele llamársele a este tipo de casos como problemas de Z no acotada. Estas situaciones se presentan por cometer algún error en el planteamiento del problema o en los cálculos efectuados durante la resolución del mismo, debiendo entonces revisarse cuidadosamente el caso para encontrar la falla y corregirla. Cuando se da la situación de una Z negativa, el problema puede volver a ser planteado, debiendo entonces cambiarse todos los signos de los coeficientes de las variables de decisión en las ecuaciones de las restricciones, lo que nos dará como resultado obtener la función objetivo con signo positivo.

3 .- Términos negativos en el segundo miembro de las ecuaciones de las restricciones.

Hasta ahora hemos visto únicamente valores positivos en el segundo miembro de las restricciones. Si hubiera números negativos, como por ejemplo los siguientes:

$$X_1 - 2X_2 = -2 \quad (1)$$
$$-2X_1 + X_2 \geq -1 \quad (2)$$
$$-X_1 - X_2 \leq -3 \quad (3)$$

lo que debemos hacer es multiplicar ambos lados de las restricciones por (-1) y en el caso de las desigualdades invertir el sentido de las mismas, con estos cambios tendremos:

$$-X_1 + 2X_2 = 2 \quad (1)$$
$$2X_1 - X_2 \leq 1 \quad (2)$$
$$X_1 + X_2 \geq 3 \quad (3)$$

las cuales ya pueden ser manejadas por el método simplex en la manera usual.

4.- Precios sombra.

Estos representan la relación de aumento que tendría la función objetivo por el hecho de aumentar en una unidad la constante de una restricción dada (incremento en el recurso correspondiente para esa restricción). Así en el caso del ejemplo V.4, cuyo planteamiento fue:

$$\text{Max} \quad Z = 6X_1 + 4X_2$$
$$\text{sujeto a:}$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 4 \quad (1)$$
$$3X_1 + 2X_2 \leq 8 \quad (2)$$
$$\text{con } X_1, X_2 \text{ no negativas}$$

La tabla final fue:

			6	4	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2
0	H_1	1.333	0	1.333	1	-0.333
6	X_1	2.667	1	0.667	0	0.333
		16	0	0	0	2

Los precios sombra aparecen en la tabla final con los coeficientes de las variables de holgura en el renglón índice, así para H_1 dicho coeficiente es cero y para H_2 es 2, es decir que el precio sombra para la primera restricción es cero y para la segunda es 2.

Esto significa para el primer caso que la función objetivo Z no aumentará si aumentamos la constante de la ecuación de la primera restricción en una unidad, o sea que fuese 5 en lugar de 4, pues si ésta fuera la situación, la solución óptima sería:

$$X_1 = 2.667,\ X_2 = 0,\ H_1 = 2.333,\ H_2 = 0,\ Z = 16$$

Donde vemos que la Z no cambia (incremento cero).

Por otra parte, para la segunda restricción, el precio sombra de 2 nos indica que Z aumentará en 2 unidades por cada unidad de incremento en el coeficiente de la restricción , o sea, que si éste fuese 9 en lugar de 8, la nueva solución óptima sería:

$$X_1 = 3,\ X_2 = 0,\ H_1 = 1,\ H_2 = 0,\ Z = 18$$

donde observamos que Z ha aumentado en 2 unidades respecto al problema original.

Los precios sombra por tanto, indican un valor marginal de incremento en la función objetivo con respecto a un recurso dado.

PROBLEMAS PROPUESTOS

V.1.- Resolver

Max $Z = 8X_1 + 12X_2 + 10X_3$

sujeto a:

$X_1 + X_2 + X_3 = 1$ (1)

$6X_1 + 4X_2 + 3X_3 \leq 4.5$ (2)

$X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 1.8$ (3)

Con X_1, X_2, X_3 no negativas.

V.2.- Resolver

Min $Z = 4X_1 + 6X_2$

sujeto a:

$X_1 + X_2 = .1$ (1)

$4X_1 + 3X_2 \geq 3.4$ (2)

$5X_1 + 7X_2 \geq 6.5$ (3)

Con X_1, X_2, no negativas.

V.3.- Resolver

Max $Z = 0.4X_1 + 0.3X_2$

sujeto a:

$X_1 + 2X_2 \leq 4$ (1)

$2X_1 + X_2 \leq 5$ (2)

$X_1 \geq 2$ (3)

$X_2 \geq 1$ (4)

Con X_1, X_2, no negativas.

V.4.- Solucionar

Min $Z = 100X_1 + 90X_2 + 85X_3$

con las condiciones:

$X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 4$ (1)

$2X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 4.8$ (2)

$X_1 \leq 1$ (3)

$X_2 \leq 1$ (4)

Siendo X_1, X_2, X_3, no negativas.

V.5 - Solucionar

Max $Z = 100X_1 + 120X_2 + 200X_3$

con las restricciones:

$X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 5$ (1)

$X_1 \geq 2$ (2)

$2X_1 + X_3 \geq 3$ (3)

$X_3 \leq 2$ (4)

Con X_1, X_2, X_3, no negativas.

V.6.- Solucionar

Max $Z = 8X_1 + 9X_2$

sujeto a:

$X_1 + X_2 = 1$ (1)

$2X_1 + X_2 \leq 1.4$ (2)

$X_1 + 2X_2 \leq 1.5$ (3)

Con X_1, X_2, no negativas.

V.7.- Resolver

$$\text{Min} \quad Z = 0.9X_1 + 0.8X_2 + 0.6X_3$$

sujeto a:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1 \quad (1)$$
$$2X_1 + X_2 \geq 1.6 \quad (2)$$
$$X_1 + X_2 + 2X_3 \geq 2.8 \quad (3)$$

Con X_1, X_2, X_3 no negativas.

V.8.- Solucionar

$$\text{Max} \quad Z = X_1 + X_2 + X_3$$

con las restricciones:

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 5 \quad (1)$$
$$2X_1 + X_2 + X_3 \leq 4.8 \quad (2)$$
$$X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 5.3 \quad (3)$$

Con X_1, X_2, X_3 no negativas.

V.9.- Solucionar .

$$\text{Min} \quad Z = X_1 + X_2 + 0.8X_3$$

sujeto a las condiciones

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1 \quad (1)$$
$$2X_1 + X_2 + 2X_3 \geq 3 \quad (2)$$
$$X_1 \leq 0.4 \quad (3)$$
$$X_2 \leq 0.2 \quad (4)$$

Con X_1, X_2, X_3 no negativas.

CAPITULO VI

DUALIDAD

Definición.

La dualidad puede definirse con el siguiente enunciado: *Para todo problema de maximización de programación lineal, habrá otro problema asociado de minimización y por otra parte, para todo problema de minimización, habrá otro problema asociado de maximización.*

Al primer problema se le llama primario y al problema asociado correspondiente se le conoce como dual.

En este capítulo veremos cómo plantear un problema dual, dado un problema primario cualquiera.

Importancia.

La dualidad es importante por las siguientes razones:

1.- El problema dual puede ahorrar un número considerable de cálculos, en particular cuando el problema primario tiene muchas restricciones y pocas variables lo cual implicará un número elevado de cálculos para su resolución por el método Simplex.

2.- La dualidad tiene una relación importante con el análisis de sensibilidad que se verá en el siguiente capítulo. Esto es muy útil para analizar cómo puede cambiar la función objetivo ante variaciones en las diferentes condiciones del problema de programación lineal.

3.- El problema dual proporciona información importante sobre la manera óptima de aplicar recursos que son escasos a fin de obtener beneficios económicos.

El problema Dual.

El planteamiento del problema dual para un problema primario cualquiera puede hacerse basado en los siguientes puntos:

1.- Se invierte el sentido de la función objetivo. Si el problema primario es de maximización, el problema dual será de minimización y viceversa.

2.- Se invierte el sentido de las desigualdades de las restricciones. Esto es, si las restricciones del problema primario son del tipo menor o igual que ($\leq$), en el problema dual las restricciones serán del tipo mayor o igual que ($\geq$) y viceversa.

3.- Los coeficientes de la función objetivo del problema primario pasan a ser las constantes de las restricciones del problema dual.

Esto implica que el problema dual tendrá tantas restricciones como variables tenga el primario.

4.- Las constantes de las restricciones del problema primario pasan a ser los coeficientes de la función objetivo del problema dual.

Esto significa que el dual tendrá tantas variables como restricciones tenga el primario.

5.- Los coeficientes de las restricciones del problema primario se colocan de tal forma que los renglones del primario pasarán a ser las columnas del problema dual y con este cambio las columnas del primario serán los renglones del dual.

6.- Las variables del problema primario se denominarán como X, mientras que las del problema dual serán Y, debiendo ser no negativas.

A continuación ilustraremos estos puntos con un ejemplo:

Ejemplo VI.1 .-

Una panadería prepara 2 tipos de pan, uno con mermelada y el otro con cajeta.

Hay mermelada para preparar hasta 5 kgs. del primer tipo de pan y cajeta para 8 kgs. del segundo tipo.

El primer tipo requiere de 2 unidades de harina, mientras que el segundo tipo sólo de una. El expendio cuenta con un total de 15 unidades de harina.

El primer tipo de pan deja una utilidad de \$ 3.00 /kg y el segundo tipo \$ 4.00 / kg.

¿ Cuántos kilogramos de cada tipo debe preparar el expendio a fin de maximizar sus utilidades?
Plantear el problema primario y luego el dual para este caso.
Solución:
Para el problema primario habrá 2 variables, X_1 y X_2, siendo

X_1 = Kgs de pan del primer tipo
X_2 = Kgs de pan del segundo tipo
Z_P = Utilidad en \$

Entonces la función objetivo será

$$\text{Max } Z_P = 3X_1 + 4X_2$$

Aquí 3 y 4 son los coeficientes de la función objetivo, los cuales representan la utilidad de cada tipo de pan en \$/kilogramo.

Las restricciones son:

(1) $X_1 \leq 5$ Cantidad disponible de mermelada
(2) $X_2 \leq 8$ Cantidad disponible de cajeta
(3) $2X_1 + X_2 \leq 15$ Cantidad disponible de harina
Siendo X_1, X_2 No negativas

Para el problema dual aplicaremos la metodología descrita antes. De acuerdo al primer punto, el problema dual será de minimización, dado que el primario fue de maximización. Conforme al segundo punto, para el problema dual se tendrán restricciones del tipo mayor o igual que ($\geq$), dado que las del primario son del tipo menor o igual que ($\leq$).

Ahora pasaremos al punto 3, los coeficientes de la función objetivo del primario, que son 3 y 4 serán ahora las constantes de las restricciones del dual, teniendo éste por lo tanto 2 restricciones.

De acuerdo al punto 4, las constantes de las restricciones del primario son 5, 8 y 15 por lo que éstos serán los coeficientes de la función objetivo del problema dual, el cual tendrá 3 variables.

Ahora conforme al punto 5, los coeficientes de las restricciones para el primario son:

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

Los cuales deben transponerse para el dual, es decir colocar los renglones como columnas, con esto tendremos:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Los cuales serán ahora los coeficientes de las 2 restricciones del dual.
Finalmente de acuerdo al paso 6, habrá 3 variables para el problema dual, las cuales serán Y_1, Y_2 y Y_3.
Con esto el planteamiento del dual será:

$$\text{Min } Z_D = 5Y_1 + 8Y_2 + 15Y_3$$

Con las restricciones:

(1) $Y_1 + 2Y_3 \geq 3$
(2) $Y_2 + Y_3 \geq 4$
Siendo Y_1, Y_2 y Y_3 No negativas

Aquí es importante señalar que las variables duales son costos marginales de los recursos utilizados, para el caso del ejemplo anterior tendremos:

Y_1 = Costo marginal de la mermelada, \$/unidad de mermelada
Y_2 = Costo marginal de la cajeta , \$/unidad de cajeta
Y_3 = Costo marginal de la harina, \$/unidad de harina

Por eso el objetivo del problema dual es ahora el de minimizar el consumo de los recursos disponibles, es decir la Z_D que es el costo por este concepto.

A continuación presentaremos en el ejemplo VI.2 la resolución de los problemas primario y dual del ejemplo VI.1:

Ejemplo VI.2 .- Resolver los problemas primario y dual del ejemplo anterior.

Solución:

Para ambos problemas utilizaremos la metodología Simplex.

Para el primario tendremos que agregar variables de holgura, una por cada restricción, con una contribución a la función objetivo de cero, es decir:

Max $Zp = 3 X_1 + 4 X_2 + 0 H_1 + 0 H_2 + 0 H_3$

Sujeto a:

$X_1 + H_1 = 5$

$X_2 + H_2 = 8$

$2 X_1 + X_2 + H_3 = 15$

Con $X_1, X_2 \geq 0$

Con esto la primera tabla Simplex será:

			3	4	0	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
0	H_1	5	1	0	1	0	0
0	H_2	8	0	1	0	1	0
0	H_3	15	2	1	0	0	1
		0	-3	-4	0	0	0

La cual al aplicarle el Simplex dará para la siguiente iteración:

			3	4	0	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
0	H_1	5	1	0	1	0	0
4	X_2	8	0	1	0	1	0
0	H_3	7	2	0	0	-1	1
		32	-3	0	0	4	0

De aquí al proseguir con la metodología Simplex, se llega a la solución óptima en la siguiente iteración, siendo la tabla respectiva la siguiente:

			3	4	0	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
0	H_1	1.5	0	0	1	0.5	-0.5
4	X_2	8	0	1	0	1	0
3	X_1	3.5	1	0	0	-0.5	0.5
		42.5	0	0	0	2.5	1.5

Así la solución es:

$$H_1 = 1.5$$
$$X_2 = 8$$
$$X_1 = 3.5$$
$$Zp = 42.5$$
$$(H_2 = H_3 = 0)$$

Para el problema dual, las restricciones necesitan una variable de holgura y otra artificial por cada restricción, con esto tendremos:

Min $Z_D = 5Y_1 + 8Y_2 + 15Y_3 + 0H_1 + 0H_2 + MF_1 + MF_2$

Sujeta a las restricciones:

$Y_1 + 2Y_3 - H_1 + F_1 = 3$

$Y_2 + Y_3 - H_2 + F_2 = 4$

Con $Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$

Con esto al aplicar la metodología Simplex, nuestra primera tabla será:

			5	8	15	0	0	M	M	
			Y_1	Y_2	Y_3	H_1	H_2	F_1	F_2	
M	F_1	3	1	0	2	-1	0	1	0	
M	F_2	4	0	1	1	0	-1	0	1	
		0	5	8	15	0	0	0	0	Parte #
			-1	-1	-3	1	1	0	0	Parte M

Si seguimos aplicando la metodología Simplex, nuestra tabla correspondiente para la siguiente iteración es:

			5	8	15	0	0	M
			Y_1	Y_2	Y_3	H_1	H_2	F_2
15	Y_3	1.5	0.5	0	1	-0.5	0	0
M	F_2	2.5	-0.5	1	0	0.5	-1	1
		-22.5	-2.5	8	0	7.5	0	0
			0.5	-1	0	-0.5	1	0

Al pasar a la siguiente iteración se llega al óptimo, cuya tabla será:

			5	8	15	0	0
			Y_1	Y_2	Y_3	H_1	H_2
15	Y_3	1.5	0.5	0	1	-0.5	0
8	Y_2	2.5	-0.5	1	0	0.5	-1
		-42.5	1.5	0	0	3.5	8
			0	0	0	0	0

Cuya solución es:

$$Y_3 = 1.5$$
$$Y_2 = 2.5$$
$$Z_D = 42.5$$
$$(Y_1 = H_1 = H_2 = 0)$$

Aquí es significativo que en el punto óptimo ambos problemas dan el mismo valor para la función objetivo, es decir $Zp = Z_D = 42.5$.

Esta es una de las razones de la importancia del problema dual, el cual al resolverse nos proporciona la solución del primario.

Esta igualdad de las funciones objetivo tiene una explicación pues Zp es la utilidad que se obtiene por los diferentes tipos de pan y Z_D es el costo incurrido por aplicar los recursos disponibles, de tal forma que en el punto óptimo ambas Z coinciden dando la situación más adecuada para el negocio.

Otra situación importante que podemos señalar en este problema es que la solución dual puede obtenerse desde la tabla final del primario, pues los coeficientes índices de las variables de holgura en esta tabla son los valores de las variables duales en la solución óptima dual, esto es

$$H_{1P} = 0 = Y_1$$
$$H_{2P} = 2.5 = Y_2$$
$$H_{3P} = 1.5 = Y_3$$

Asimismo de la tabla óptima dual podemos obtener la solución primaria al coincidir los coeficientes índices de las variables de holgura duales con los valores óptimos para los variables primarias, esto es:

$$H_{1D} = 3.5 = X_1$$
$$H_{2D} = 8 = X_2$$

Otros tipos de restricciones.

Pueden existir otros tipos de restricciones para un problema primario dado. En el ejemplo VI.1 hemos planteado un problema primario de maximización con restricciones del tipo menor o igual que ($\leq$), ¿Cómo se hubiera manejado el problema si conteniese restricciones del tipo mayor o igual que ($\geq$), o del tipo igual que (=)? En principio todas las restricciones de un problema primario de maximización deberán ser del tipo menor o igual que ($\leq$), por consiguiente las restricciones distintas deberán convertirse a este tipo.

Para las restricciones del tipo mayor o igual que ($\geq$), lo que debe hacerse es multiplicar toda la desigualdad por (-1) e invertir su sentido, con esto la transformaremos al tipo menor o igual que ($\leq$).

Por su parte para las restricciones de igualdad (=), esta restricción se cambia por 2 nuevas restricciones: una del tipo menor o igual que ($\leq$) y la otra del tipo mayor o igual que ($\geq$), la cual debe convertirse a su vez al tipo menor o igual que ($\leq$) en la forma como se explicó anteriormente.

Ejemplo VI.3 .- Plantear el problema primario y su correspondiente dual.

Max $Z = 8X_1 + 13X_2$

Sujeto a:

(1) $4X_1 + 2X_2 \leq 20$

(2) $3X_1 + 2X_2 \geq 10$

(3) $2X_1 + 3X_2 = 12$

Con X_1, X_2, no negativas

Solución:

Este problema primario deberá modificarse en su segunda y tercera restricción para ser planteado. La segunda restricción es del tipo mayor o igual que ($\geq$) por lo que deberá multiplicarse por (-1) e invertir el sentido de la desigualdad, con esto tendremos:

(2) $-3X_1 - 2X_2 \leq -10$

La tercera restricción es de igualdad, por lo que la reemplazaremos por 2 nuevas restricciones, una del tipo menor o igual que ($\leq$) y la otra del tipo mayor o igual que ($\geq$), con esto tendremos:

(3A) $2X_1 + 3X_2 \leq 12$

(3B) $2X_1 + 3X_2 \geq 12$

Ahora la restricción 3B debe convertirse al tipo menor o igual que ($\leq$), lo cual se logra al multiplicar la desigualdad por (-1) e invertir su sentido. Al efectuar esto obtendremos:

(3B) $-2X_1 - 3X_2 \leq -12$

Con lo cual el problema primario ya queda debidamente planteado.

Max $Zp = 8X_1 + 13X_2$

Sujeto a:

(1) $4X_1 + 2X_2 \leq 20$

(2) $-3X_1 - 2X_2 \leq -10$

(3A) $2X_1 + 3X_2 \leq 12$

(3B) $-2X_1 - 3X_2 \leq -12$

Siendo $X_1, X_2 \geq 0$

Ahora plantearemos el problema dual, el cual será de minimización con restricciones del tipo mayor o igual que ($\geq$).

Los coeficientes de la función objetivo 8 y 13, pasarán a ser las constantes de las restricciones del dual, por lo que habrá 2 restricciones en éste.

Las constantes de las restricciones del primario 20, -10, 12 y -12, serán los coeficientes de la función objetivo del dual, por lo que éste tendrá 4 variables.

Ahora transpondremos la matriz de coeficientes de las restricciones del primario, la cual es:

$$\begin{matrix} 4 & 2 \\ -3 & -2 \\ 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{matrix}$$

Que para el dual será:

$$\begin{matrix} 4 & -3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \end{matrix}$$

Con esto el dual será:

$$\text{Min} \quad Z_D = 20Y_1 - 10Y_2 + 12Y_3 - 12Y_4$$
sujeto a:
(1) $4Y_1 - 3Y_2 + 2Y_3 - 2Y_4 \geq 8$
(2) $2Y_1 - 2Y_2 + 3Y_3 - 3Y_4 \geq 13$
siendo $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \geq 0$

Teoría de Dualidad.

En esta sección presentaremos algúnas propiedades de la dualidad.

Principio de dualidad fuerte. Si el problema primario tiene una solución óptima, entonces el problema dual también tendrá una solución óptima con idénticos valores para la función objetivo, es decir:

$$Zp = Z_D \qquad \text{Ec. (VI.1)}$$

Donde Zp = Valor de la función objetivo para el problema primario.
Z_D = Valor de la función objetivo para el problema dual.

Este teorema ya se ha comprobado al resolver el ejemplo VI.2, ya que en este ejercicio Zp fue igual a Z_D con un valor de 42.5 para la solución óptima.

Principio de dualidad débil . Para cualquier otra solución de un problema que no sea la óptima, se cumplirá que

$$Zp \leq Z_D \qquad \text{Ec. (VI.2)}$$

donde el signo de desigualdad de menor que ($\leq$) aplica para aquellos casos en los cuales ambas soluciones del primario y del dual son factibles.

Por su parte el signo de igualdad surtirá efecto cuando la solución del dual no sea factible por no cumplir con las restricciones.

Si aplicamos este principio al ejemplo VI.2, vemos que para la segunda tabla la solución primaria y dual son:

Solución primaria	Solución dual
$X_1 = 0$	$H_2\ (Y_2) = 4$
$X_2 = 8$	$H_1\ (Y_1) = 0$
$Zp = 32$	$H_3\ (Y_3) = 0$
	$Z_D = 32$

Aquí se observa la igualdad $Zp = Z_D$ para la ecuación (VI.2), por lo que conforme a lo establecido anteriormente, la solución dual no es factible, de esto nos damos cuenta al revisar que el problema dual no cumple con su primera restricción la cual indica que $Y_1+2Y_3 \geq 4$, siendo que tanto Y_1 como Y_3 son cero, por lo cual la solución dual no es factible

Clasificación de los problemas duales.

Los problemas duales se clasifican en 2 grandes grupos: Simétricos y Asimétricos.

Los primeros son aquellos casos en los cuales tanto el problema primario como el dual incluyen restricciones de desigualdad (un problema de un tipo y el otro del tipo contrario). En el caso del ejemplo VI.1 el problema primario y el dual son simétricos, ya que el primario incluye restricciones del tipo menor o igual que ($\leq$), mientras que el dual contiene restricciones del tipo mayor o igual que ($\geq$).

Los problemas asimétricos por su parte, son aquellos en los cuales el primario contiene restricciones de igualdad, como el caso del ejemplo VI.3.

Propiedad de Simetría. Para cualquier problema primario y su dual, las relaciones entre ellos son simétricas, ya que si el segundo problema es el dual del primero, entonces el primer problema será a su vez el dual del segundo.

Esto es claro si nos remitimos al ejemplo VI.1 donde el problema de minimización fue el dual del de maximización, pero también éste a su vez será el dual del primero.

Propiedades de Soluciones Complementarias. Para cada iteración el método Simplex halla una solución factible en un vértice para el problema primario y una solución complementaria para el dual, en donde

$$Zp = Z_D$$

Si dicha solución no es la óptima para el primario, entonces la solución dual no será factible.

Esta propiedad es equivalente al principio de dualidad débil.

Propiedad de Soluciones Complementarias Optimas. Al encontrar una solución óptima, el método Simplex lo hace simultáneamente para los problemas primario y dual, entonces

$$Zp = Z_D$$

Donde la solución dual es la solución óptima complementaria.

Debido a estas dos últimas propiedades, el método Simplex actúa sobre el problema primario como si lo hiciera sobre el dual al mismo tiempo.

Propiedad de Holgura Complementaria. Una variable de holgura cualquiera que sea básica en el problema primario, será no básica en el dual y viceversa, teniendo una relación simétrica entre ambas, de tal modo que las soluciones que las contienen son complementarias entre sí.

Esto lo podemos ilustrar si nos referimos al ejemplo VI.2, donde si observamos la segunda tabla, veremos que la solución básica del problema primario es:

$$H_1 = 5$$
$$X_2 = 8$$
$$H_3 = 7$$
$$Zp = 32$$

De esta misma tabla al revisar los coeficientes indice de las variables de holgura, vemos que son:

$$H_1 (Y_1) = 0$$
$$H_2 (Y_2) = 4$$
$$H_3 (Y_3) = 0$$

Si analizamos la situación de esta tabla respecto a esta propiedad, veremos que H_2 es la variable de holgura que no es básica en el problema primario y que sí lo es en el problema dual (valor diferente de cero); mientras que H_1 y H_3 son variables de holgura básicas en el primario y que corresponden a variables no básicas (valor cero) en el problema dual.

Interpretación económica del Dual.

La interpretación de la solución dual nos proporciona una visión sobre la manera óptima de utilizar los recursos de que disponemos.

Estaríamos dispuestos a pagar un costo mayor por un recurso hasta por el valor de su variable dual correspondiente a la solución óptima.

Para ilustrar esto retomaremos el caso del expendio de pan donde para el caso de la cajeta, Y_2 fue en la tabla dual final 2.5, lo que significa que podríamos pagar hasta \$ 2.5 adicionales como máximo por cada unidad extra de cajeta usada, dado que esta cantidad es la utilidad adicional que se obtendría por su empleo.

Este concepto es el mismo que se manejó en el apartado de los precios sombra del capítulo anterior, dado que los coeficientes del renglón índice de las variables de holgura de la tabla Simplex final del problema primario son los valores óptimos de las variables duales en el problema dual, lo que indica que la utilización óptima de los recursos disponibles, nos lleva al mismo tiempo a lograr una utilidad máxima.

PROBLEMAS PROPUESTOS.

VI.1 .- Dado el siguiente problema

Minimizar $Z = 4X_1 + 3X_2$

Sujeto a:

$$(1)\ 2X_1 + X_2 \geq 5$$
$$(2)\ 3X_1 + 2X_2 \geq 8$$
$$(3)\ X_1 \geq 2$$
$$(4)\ 2X_2 \geq 1.5$$

Siendo $X_1, X_2 \geq 0$

Plantear el correspondiente problema dual.

VI.2 Resolver el problema dual del caso anterior.

VI.3 Plantear y resolver el problema dual para el caso siguiente:

Maximizar $Z = 10X_1 + 9X_2$

Sujeto a:

$$(1)\ 3X_1 + X_2 \leq 3$$
$$(2)\ X_1 + X_2 = 1$$

Siendo $X_1, X_2 \geq 0$

VI.4 .- Plantear y resolver el problema dual de

Maximizar $Z = X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4$

Sujeto a:

$$X_1 + X_2 + X_4 \leq 4$$
$$X_1 \leq 1$$
$$X_2 \leq 1$$
$$X_3 \leq 2$$

Siendo $X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

VI.5.- Plantear y resolver el problema dual para el caso siguiente:

Minimizar $Z = 8X_1 + 6X_2$

Sujeto a:

$$2X_1 + X_2 \geq 4$$
$$X_1 + 2X_2 \geq 5$$
$$X_1 \geq 1$$

Siendo $X_1, X_2 \geq 0$

VI.6.- Para el problema propuesto VI.4 comprobar la propiedad de holgura complementaria.

CAPITULO VII

ANALISIS DE SENSIBILIDAD

Introducción.

El análisis de sensibilidad es muy útil en la programación lineal, consiste en estudiar los cambios que sufre la función objetivo ante modificaciones en cualquiera de los parámetros del problema, como pueden ser las constantes de las restricciones, los coeficientes de las variables en las ecuaciones de las restricciones, las contribuciones de las variables en la función objetivo, adición de nuevas restricciones, nuevas variables, etc.

Todo esto es muy importante, puesto que en los problemas reales las condiciones que se presentan suelen cambiar, debido a que muchas veces los datos que se manejan son sólo pronósticos futuros de la situación esperada, los cuales están sujetos a variaciones e imprevistos que siempre se presentan en alguna manera.

Por medio del análisis de sensibilidad es posible evaluar dichos cambios sin tener que resolver completamente el problema planteado, lo cual significa un ahorro considerable de cálculos en el procedimiento del método simplex.

Clasificación de casos para el análisis de sensibilidad.

Para el estudio del análisis de sensibilidad, dividiremos su presentación en las siguientes 6 partes:

1.- Cambios en las constantes de las restricciones.
2.- Cambios en las contribuciones de las variables en la función objetivo.
3.- Cambios en los coeficientes de las variables en las ecuaciones de las restricciones.
4.- Adición de nuevas variables.
5.- Adición de nuevas restricciones.
6.- Cambios en el sentido de las desigualdades.

Para el estudio de estos 6 puntos presentaremos un ejemplo de cada uno de ellos, el cual será resuelto y explicado en cada uno de sus pasos hasta encontrar la solución óptima del nuevo problema, la cual puede ser la misma que la del problema original (antes de haber efectuado la modificación de sus parámetros), o bien haber cambiado, dependiendo de la magnitud de variación en el parámetro correspondiente.

Tomaremos como problema base el caso de la panadería presentado en el capítulo VI, el cual fue:

$$\text{Max} \quad Z = 3X_1 + 4X_2$$

Sujeto a las restricciones:

$$X_1 \leq 5 \quad (1)$$
$$X_2 \leq 8 \quad (2)$$
$$2X_1 + X_2 \leq 15 \quad (3)$$

Cuya primera tabla Simplex fue:

			3	4	0	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
0	H_1	5	1	0	1	0	0
0	H_2	8	0	1	0	1	0
0	H_3	15	2	1	0	0	1
		0	-3	-4	0	0	0

Y su tabla final (solución óptima) fue:

			3	4	0	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
0	H_1	1.5	0	0	1	0.5	-0.5
4	X_2	8	0	1	0	1	0
3	X_1	3.5	1	0	0	-0.5	0.5
		42.5	0	0	0	2.5	1.5

Cambios en las constantes de las restricciones.

Esto lo ilustraremos con el siguiente ejercicio:

Ejemplo VII.1.- Resolver por medio del análisis de sensibilidad el siguiente problema:

$$\text{Max} \quad Z = 3X_1 + 4X_2$$

Sujeto a las restricciones:

$$X_1 \leq 5 \quad (1)$$
$$X_2 \leq 6 \quad (2)$$
$$2X_1 + X_2 \leq 15 \quad (3)$$

Solución:

El cambio respecto al problema original es en la segunda restricción, donde ahora $X_2 \leq 6$ y no 8, esto significa que el recurso cajeta ha disminuido, habiendo ahora solamente la necesaria para producir como máximo 6 kgs de pan de cajeta.

Para resolver el problema Simplex ante este cambio sin tener que aplicar toda la metodología desde el principio, es importante analizar la siguiente fórmula:

$$\begin{bmatrix}\text{Matriz de coeficientes}\\ \text{de las variables de hol-}\\ \text{gura en la tabla Simplex}\\ \text{final del caso base}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\text{Vector de}\\ \text{constantes}\\ \text{de las res-}\\ \text{tricciones}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Vector}\\ \text{solución del}\\ \text{problema}\end{bmatrix} \qquad \text{Ec.(VII.1)}$$

Así para nuestro caso base, si observamos la tabla final, la parte de la matriz correspondiente a los coeficientes de las variables de holgura es:

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & 0.5 & -0.5\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -0.5 & 0.5\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}H_1 & H_2 & H_3\end{matrix}\end{array}$$

El vector de constantes originales de las restricciones era:

$$\begin{pmatrix}5\\ 8\\ 15\end{pmatrix}$$

Por lo que al efectuar la multiplicación matricial, conforme a la Ec.(VII.1), tendremos:

$$\underset{(3\times 3)}{\begin{pmatrix}1 & 0.5 & -0.5\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -0.5 & 0.5\end{pmatrix}} x \underset{(3\text{x}1)}{\begin{pmatrix}5\\ 8\\ 15\end{pmatrix}} = \underset{(3\times 1)}{\begin{pmatrix}\textit{Vector}\\ \textit{Solución}\end{pmatrix}}$$

El primer elemento del vector solución será la sumatoria de los productos de los elementos del primer renglón de la primera matriz por los elementos de la primera (única) columna de la segunda matriz, de acuerdo a la metodología de la multiplicación matricial, con lo cual tendremos:

$$\begin{matrix}\text{Primer elemento}\\ \text{del}\\ \text{Vector solución}\end{matrix} = [(1)(5) + (0.5)(8) + (-0.5)(15)] = 5 + 4 - 7.5 = 1.5$$

De manera similar para el segundo elemento del vector solución, multiplicaremos el segundo renglón de la primera matriz por la columna de la segunda matriz:

$$\begin{matrix}\text{Segundo elemento}\\ \text{del}\\ \text{Vector solución}\end{matrix} = [(0)(5) + (1)(8) + (0)(15)] = 0 + 8 + 0 = 8$$

Y para el tercer elemento del vector solución, multiplicaremos el tercer renglón de la primera matriz por la columna de la segunda para obtener:

Tercer elemento del Vector solución $= [(0)(5) + (-0.5)(8) + (0.5)(15)] = 0 - 4 + 7.5 = 3.5$

Por lo que la solución es:

$$\begin{array}{c} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1.5 \\ 8 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

Tal y como podía haberse leído desde la tabla final.

Para obtener la nueva solución óptima ante el cambio en la constante de la segunda restricción, lo que debemos hacer es aplicar la fórmula de la Ec. (VII.1) con el nuevo vector de constantes de las restricciones, es decir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Vector \\ Solución \\ del\ problema \\ modificado \end{pmatrix}$$

Así al aplicar la multiplicación matricial, tendremos:

Primer elemento $= [(1)(5) + (0.5)(6) + (-0.5)(15)]$
$= 5 + 3 - 7.5 = 0.5$

Segundo elemento $= [(0)(5) + (1)(6) + (0)(15)]$
$= 0 + 6 + 0 = 6$

Tercer elemento $= [(0)(5) + (-0.5)(6) + (0.5)(15)]$
$= 0 - 3 + 7.5 = 4.5$

Con lo cual la nueva solución será:

$$H_1 = 0.5$$
$$X_2 = 6$$
$$X_1 = 4.5$$

Siendo entonces Z:

$$Z = 3X_1 + 4X_2$$
$$= 3(4.5) + 4(6)$$
$$= 13.5 + 24 = 37.5$$

Como esta solución es factible, representará la nueva solución óptima.

Si la nueva solución no hubiera sido factible (caso de que una variable básica resultara negativa), entonces tendríamos que haber aplicado la metodología Simplex hasta llegar a la tabla final que nos daría la nueva solución óptima.

Otra forma de obtener la misma solución es mediante el análisis incremental, el cual consiste en estimar los cambios en cada una de las variables básicas ante el cambio en la constante de la restricción, por medio de la siguiente fórmula para un cambio en la restricción j:

$$\begin{bmatrix} \text{Nuevo valor} \\ \text{de la varia-} \\ \text{ble básica i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Valor anterior} \\ \text{de la variable} \\ \text{básica i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Coeficiente} \\ \text{del renglón i} \\ \text{columna j en} \\ \text{la matriz de} \\ \text{las variables} \\ \text{de holgura de} \\ \text{la tabla final} \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} \text{Incremento en} \\ \text{la constante de} \\ \text{la restricción j} \end{bmatrix}$$

Ec.(VII.2)

Así para nuestro ejemplo, la constante de la segunda restricción (j=2), ha cambiado de 8 a 6, por lo que el incremento en la constante es de (-2), pues en realidad es un decremento.

Entonces al aplicar la Ec. (VII.2), tendremos:

$$\begin{matrix}\text{Nuevo valor} \\ \text{de } H_1 (i=1)\end{matrix} = \begin{matrix}\text{Valor anterior} \\ \text{de } H_1\end{matrix} + \left[\begin{matrix}\text{Coeficiente del primer} \\ \text{renglón y segunda} \\ \text{columna en la matriz} \\ \text{de las variables de} \\ \text{holgura}\end{matrix}\right] \times (-2)$$

$$\begin{matrix}\text{Nuevo valor} \\ \text{de } H_1\end{matrix} = 1.5 + (0.5)(-2) = 1.5 - 1 = 0.5$$

$$\begin{matrix}\text{Nuevo valor} \\ \text{de } X_2 \ (i=2)\end{matrix} = \begin{matrix}\text{Valor anterior} \\ \text{de } X_2\end{matrix} + \left[\begin{matrix}\text{Coeficiente del segundo} \\ \text{renglón y segunda} \\ \text{columna en la matriz} \\ \text{de las variables de} \\ \text{holgura}\end{matrix}\right] X (-2)$$

$$\begin{matrix}\text{Nuevo valor} \\ \text{de } X_2\end{matrix} = 8 + (1)(-2) = 8 - 2 = 6$$

$$\begin{matrix}\text{Nuevo valor} \\ \text{de } X_1 \ (i=3)\end{matrix} = \begin{matrix}\text{Valor anterior} \\ \text{de } X_1\end{matrix} + \left[\begin{matrix}\text{Coeficiente del tercer} \\ \text{renglón y segunda} \\ \text{columna en la matriz} \\ \text{de las variables de} \\ \text{holgura}\end{matrix}\right] \times (-2)$$

$$\begin{matrix}\text{Nuevo valor} \\ \text{de } X_1\end{matrix} = 3.5 + (-0.5)(-2) = 3.5 + 1 = 4.5$$

Incluso se puede aplicar la fórmula de la Ec. (VII.2) para estimar la nueva Z, para lo cual el coeficiente de la matriz de las variables de holgura deberá reemplazarse por el número índice de la tabla Simplex final de la variable de holgura que corresponde a la restricción que cambió.

Para nuestro ejemplo, la restricción que cambió fue la segunda que corresponde a la variable de holgura H_2, su número índice en la tabla final del caso base es 2.5, entonces para obtener Z, tendremos:

$$\text{Nueva } Z = Z \text{ anterior} + (\text{Número índice correspondiente}) \times (-2)$$
$$\text{Nueva } Z = 42.5 + (2.5)(-2)$$
$$= 42.5 - 5 = 37.5$$

Es importante señalar que con la fórmula de la Ec. (VII.2) es posible obtener el límite de factibilidad de la solución, es decir cuánto es posible modificar una constante de una restricción antes que alguna de las variables básicas de la solución original se haga negativa.

Así para nuestro ejemplo, vemos que H_1 será cero si el incremento de la segunda restricción es -3, pues en este caso al aplicar la Ec. (VII.2) tendremos:

$$\text{Nuevo valor de } H_1 = 1.5 + (0.5)(-3)$$
$$= 1.5 - 1.5 = 0$$

Por lo que el incremento límite para que la misma solución sea factible (tenga las mismas variables básicas) es -3, es decir que la constante de la segunda restricción podrá ser hasta 5, lo cual representa una disminución de 3 unidades respecto al valor original que era 8.

Cambios en las contribuciones de las variables en la función objetivo.

Estos cambios pueden agruparse en 2 categorías:

Cambios en la contribución de una variable básica y cambios en la contribución de una variable no básica.

Presentaremos un problema de cada caso, aunque ambos tipos se tratan de la misma manera.

La metodología general para este tipo de problemas es la siguiente:

En la tabla Simplex final del problema original, se cambian las contribuciones de las variables (básicas y no básicas) en el renglón objetivo, tal y como hayan cambiado de acuerdo a las nuevas condiciones del problema y con esto se recalculan los elementos del renglón índice, si ninguno de ellos se ha hecho negativo, la solución óptima seguirá siendo la misma, cambiando solamente la Z; por el contrario, si existen elementos negativos en el renglón índice, se aplica la metodología Simplex normal hasta llegar a la nueva solución óptima, este procedimiento lo ilustraremos con un ejemplo.

Ejemplo VII.2.- Si para el problema de la panadería, llega un incremento en la utilidad del pan, siendo ahora para el primer tipo \$.5.00/ kg y para el segundo \$ 4.50/ kg. ¿ Cuál será la cantidad óptima de cada pan a producir de modo que se maximicen las utilidades?

Solución:

Con estos cambios en los precios del pan, que son cambios en las contribuciones de variables básicas, la ecuación de la función objetivo será:

$$Z = 5.0X_1 + 4.5X_2$$

Sujeta a las mismas restricciones originales.

De acuerdo al procedimiento explicado anteriormente, nuestra última tabla Simplex del problema original era la siguiente:

			5	4.5	0	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
0	H_1	1.5	0	0	1	0.5	-0.5
4	X_2	8	0	1	0	1	0
3	X_1	3.5	1	0	0	-0.5	0.5

Donde vemos que ya se han cambiado las contribuciones de las variables en el renglón objetivo. Ahora procederemos a recalcular los números del renglón índice, utilizando para ello la fórmula apropiada para el caso de maximización dada por la Ec.(V.1), aplicándola a aquellos elementos que sufrieron cambios en el renglón objetivo:

Número índice de
la columna de X_1 = [(0)(0) + (4)(0) + (3)(1)] - 5 = 3 - 5 = -2

Número índice de
la columna de X_2 = [(0)(0) + (4)(1) + (3)(0)] - 4.5 = 4 - 4.5 = -0.5

Para los demás elementos del renglón índice no habrá cambios, de modo que sus valores índice serán los mismos, con esto nuestra nueva tabla será:

			5	4.5	0	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
0	H_1	1.5	0	0	1	0.5	-0.5
4	X_2	8	0	1	0	1	0
3	X_1	3.5	1	0	0	-0.5	0.5
		42.5	-2	-0.5	0	2.5	1.5

Y de aquí proseguimos con la metodología Simplex normal, determinar columna clave, renglón clave, número clave, etc. hasta llegar a la nueva solución óptima, que será aquella que ya no contenga números índice negativos, esta tabla final será:

			5	4.5	0	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
0	H_1	1.5	0	0	1	0.5	-0.5
4.5	X_2	8	0	1	0	1	0
5	X_1	3.5	1	0	0	-0.5	0.5
		53.5	0	0	0	2	2.5

Con lo cual vemos que la solución óptima no ha cambiado, sólo la función objetivo.

Para saber cuánto podemos modificar una variable básica sin que la solución óptima cambie se efectúa el siguiente análisis: En la última tabla Simplex del problema original, la cual es:

			3	4	0	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
0	H_1	1.5	0	0	1	0.5	-0.5
4	X_2	8	0	1	0	1	0
3	X_1	3.5	1	0	0	-0.5	0.5
		42.5	0	0	0	2.5	1.5

Para establecer el intervalo de valores que X_1 puede tener en su contribución sin que cambie la solución óptima, se determina para las variables no básicas el cociente de su número índice entre el valor del coeficiente que corresponde al renglón de la variable básica (X_1) y a la columna de la variable no básica, así para H_2 tendremos:

$$\text{Cociente} = 2.5/(-0.5) = -5$$

Por su parte para H_3:

$$\text{Cociente} = 1.5/0.5 = 3$$

Aquí un cociente negativo indica el aumento permitido para X_1 y un cociente positivo mostrará la disminución posible para X_1.

Con esto X_1 puede aumentar hasta en 5 unidades y disminuir hasta en 3 unidades en su contribución, con esto su intervalo de valores permitidos será:

$$0 \leq X_1 \leq 8$$

En caso de haber varios cocientes positivos y negativos, se manejarán los que marquen el intervalo más estrecho, es decir los menores cocientes en valor absoluto, tanto positivos como negativos.

Por su parte al realizar un análisis similar para la variable X_2, el cociente para H_2 será:

$$\text{Cociente} = 2.5/1 = 2.5$$

Y para H_3 tendremos:

$$\text{Cociente} = 1.5/0 = \infty$$

Esto significa que X_2 puede disminuir hasta 2.5 unidades y aumentar hasta el infinito en su contribución, con esto su intervalo de valores permitido es:

$$1.5 \leq X_2 \leq \infty$$

Enseguida presentaremos la situación de cambio en la contribución de una variable no básica, con un caso práctico.

Ejemplo VII.3.- Dado el problema original de la panadería, el único cambio que existe ahora es el de la opción de vender la materia prima requerida por el segundo tipo de pan a $ 3.00/kg.

¿Cuál será la solución óptima de modo que se maximicen las utilidades?

Solución:

El cambio en este problema es que la contribución de la variable de holgura H_2 ha cambiado de ser cero en el problema original a ser 3 en este caso.

La metodología para hallar la solución óptima es la misma que para el ejemplo anterior, con esto nuestra tabla modificada será:

			3	4	0	3	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
0	H_1	1.5	0	0	1	0.5	-0.5
4	X_2	8	0	1	0	1	0
3	X_1	3.5	1	0	0	-0.5	0.5
		42.5	0	0	0	-0.5	1.5

Pues en esta tabla el nuevo número índice para H_2 se obtuvo en la siguiente forma:

Número índice de
la columna de $H_2 = [\ (0)(0.5) + (4)(1) + (3)(-0.5)\ ] - 3 = 2.5 - 3 = -0.5$

Así, si aplicamos el método Simplex normal partiendo de esta tabla, llegamos a nuestra nueva solución óptima la cual es:

			3	4	0	3	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
3	H_2	3	0	0	2	1	-1
4	X_2	5	0	1	-2	0	1
3	X_1	5	1	0	1	0	0
		44	0	0	1	0	1

La cual ha cambiado respecto a la solución original pues H_2 es ahora básica en lugar de H_1.

Para este tipo de problemas, establecer el intervalo de valores permitidos para las variables no básicas en su contribución sin que cambie la solución óptima, es más sencillo que para las variables básicas, pues la contribución de las variables no básicas podrá aumentar hasta el valor de su correspondiente número índice y podrá disminuir indefinidamente.

Así, para nuestro problema de la panadería H_2 puede aumentar hasta un valor máximo de 2.5 y H_1 hasta 1.5 antes de que cambie la solución óptima.

En este ejemplo como H_2 ha aumentado de 0 a 3, su incremento ha sido mayor que el máximo permitido, por lo tanto la solución óptima ha cambiado.

Cambios en los coeficientes de las variables en las ecuaciones de las restricciones.

Estos suceden cuando existe una modificación en alguna de las restricciones, por ejemplo que la cantidad requerida de recursos para elaborar cada artículo ya no sea la misma. Esto significa un cambio en alguno(s) de los coeficientes de las variables en las ecuaciones de las restricciones.

Este tema suele dividirse en 2 categorías:

a) Cambios en coeficientes de una variable básica;

b) Cambios en coeficientes de una variable no básica.

La metodología que utiliza el análisis de sensibilidad en estos casos es la misma para ambos incisos, lo cual describiremos enseguida y luego ilustraremos con un ejemplo.

El planteamiento se basa en la siguiente ecuación:

[Matriz de coeficientes de las variables de holgura en la tabla simplex final del caso base]	X	[Vector de coeficientes de la variable Xi al inicio del problema.]	=	[Vector de coeficientes de la variable Xi al final del problema]	Ec.(VII.3)

De tal forma que al cambiar el vector de coeficientes de X_i al inicio del problema, cambiará también el vector de los coeficientes X_i en la tabla final, la cual por la metodología Simplex podrá resolverse hasta llegar a la solución óptima para el problema modificado.

Presentaremos un ejemplo para el cambio en los coeficientes de una variable básica.

Ejemplo VII.4.- Para el problema original de la panadería, existe un cambio debido a que la cajeta adquirida para elaborar el segundo tipo de pan es de menor calidad, por lo que alcanza solamente para la mitad del pan. En este caso, ¿Cuál será la solución óptima del problema?

Solución:

En este caso lo que cambia es la segunda restricción, la cual será ahora:

$$2X_2 \leq 8$$

Para este problema el vector de coeficientes de X_2 al inicio del problema era:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces si aplicamos la Ec. (VII.3) al caso presente, tendremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

Quedando la última tabla de la siguiente forma:

			3	4	0	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
0	H_1	1.5	0	0.5	1	0.5	-0.5
4	X_2	8	0	2	0	1	0
3	X_1	3.5	1	-0.5	0	-0.5	0.5
		42.5	0	2.5	0	2.5	1.5

En la cual se ha recalculado el número índice que corresponde a la columna de X_2 del modo siguiente:

Número índice de

la columna de X_2 = [(0)(0.5) + (4)(2) + (3)(-0.5)] - 4 = 6.5 - 4 = 2.5

Como podemos ver en esta tabla, el número índice de la columna de X_2 deberá ser cero, puesto que esta variable es básica; asimismo el número de esta columna y del renglón que encabeza X_2 debe ser la unidad y los restantes elementos de esta misma columna deberán ser cero. Si aplicamos la metodología Simplex, llegaremos a la siguiente tabla:

			3.	4	0	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
0	H_1	-0.5	0	0	1	0.25	-0.5
4	X_2	4	0	1	0	0.5	0
3	X_1	5.5	1	0	0	-0.25	0.5
		32.5	0	0	0	1.25	1.5

De esta tabla observamos que ya no hay números índice negativos, pero existe un problema: H_1 sigue siendo básica y es negativa, lo cual no puede ser una solución del caso. Para modificar la tabla y corregir esta situación, es preferible ir al problema dual equivalente, cuya tabla correspondiente a esta última situación es:

			5	8	15	0	0
			Y_1	Y_2	Y_3	H_1	H_2
8	Y_2	1.25	-0.25	1	0	0.25	-0.5
15	Y_3	1.5	0.5	0	1	-0.5	0
		-32.5	-0.5	0	0	5.5	4

Donde vemos que hay un número índice negativo que corresponde a la columna encabezada por Y_1, por lo que esta variable deberá ser incluida en la base conforme al método Simplex normal, el cual nos llevará a la solución óptima, cuya tabla final será:

			5	8	15	0	0
			Y_1	Y_2	Y_3	H_1	H_2
8	Y_2	2	0	1	0.5	0	-0.5
5	Y_1	3	1	0	2	-1	0
		-31	0	0	1	5	4

Cuya solución equivalente del primario es:

$$X_1 = 5$$
$$X_2 = 4$$
$$H_3 = 1$$
$$Z = 31$$

Aquí vemos que la solución óptima ha cambiado, pues se incluye a H_3 como variable básica en lugar de H_1 que era básica en el problema original.

Para el caso de cambios en los coeficientes de las restricciones de variables no básicas, el procedimiento de solución es el mismo.

Dado que en el ejemplo de la panadería solamente intervienen 2 variables de decisión las cuales son básicas, no presentaremos ningún caso para este tipo de modificaciones. Además, el procedimiento para hallar la nueva solución óptima ya ha sido ilustrado en el ejemplo VII.4.

Adición de nuevas variables.

Este caso se presenta cuando una empresa decide incorporar nuevos productos en su línea de ventas.

Cada nuevo producto representará una nueva variable, la cual deberá ser incluida en el problema en la función objetivo con su contribución, así como también en las restricciones con sus coeficientes según el planteamiento del caso.

La variable deberá incluirse en la última tabla Simplex del caso base con su contribución respectiva y sus coeficientes deberán calcularse por medio de la fórmula dada por la Ec. (VII.3), así como también su número índice.

Esto lo ilustraremos con el siguiente ejemplo:

Ejemplo VII.5.- Partiendo de nuestro mismo caso base, la panadería ha proyectado introducir al mercado un nuevo tipo de pan, el cual dará una utilidad de $ 3.50/kg. Este nuevo tipo de pan requiere de 1.5 kgs de harina para preparar un kilogramo del nuevo pan.

Ante esta nueva situación del mercado, ¿Cómo deberá la panadería producir ahora los 3 tipos de pan, de tal modo que sus utilidades sean máximas?.

Solución:

La nueva variable quedará incorporada en la función objetivo de la siguiente manera:

$$\text{Max} \quad Z = 3X_1 + 4X_2 + 3.5X_3$$

La cual estará sujeta a las restricciones

$$X_1 \leq 5 \qquad (1)$$
$$X_2 \leq 8 \qquad (2)$$
$$2X_1 + X_2 + 1.5X_3 \leq 15 \quad (3)$$

Como podemos observar de estas 3 ecuaciones, el vector de coeficientes iniciales para la nueva variable X_3 es :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

Si aplicamos la fórmula de la Ec. (VII.3), tendremos:

$$\begin{pmatrix} \textit{Vector de} \\ \textit{coeficientes} \\ \textit{de } X_3 \textit{ en la} \\ \textit{tabla final} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.75 \\ 0 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$

Y su número índice será:

Número índice en la columna de X_3 = [(0)(-0.75) + (4)(0) + (3)(0.75)] - 3.5 = 2.25 - 3.5 = -1.25

Estos valores se incluyen en la tabla final en la siguiente forma:

			3	4	3.5	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3
0	H_1	1.5	0	0	-0.75	1	0.5	-0.5
4	X_2	8	0	1	0	0	1	0
3	X_1	3.5	1	0	0.75	0	-0.5	0.5
		42.5	0	0	-1.25	0	2.5	1.5

De aquí el problema se continúa normalmente por el método Simplex. Del análisis de la tabla, vemos que el número índice de X_3 es negativo, por lo que esta variable deberá entrar a la base.

Nuestra nueva solución óptima será ahora la siguiente:

			3	4	3.5	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3
0	H_1	5	1	0	0	1	0	0
4	X_2	8	0	1	0	0	1	0
3.5	X_3	4.667	1.333	0	1	0	-0.667	0.667
		48.333	1.667	0	0	0	1.667	2.333

La cual ha cambiado respecto a la solución anterior, siendo ahora:

$$X_2 = 8$$
$$X_3 = 4.667$$
$$Z = 48.333$$

Por lo que la panadería no deberá producir ya el primer tipo de pan.

Adición de nuevas restricciones.

Esta situación puede llegar a presentarse debido a limitaciones lógicas que aparecen en el mundo real de los negocios tales como escasez de materias primas, poca disponibilidad de tiempo, mano de obra, etc.

Cuando aparece una nueva restricción, ésta deberá incluirse en la tabla óptima final con sus coeficientes y su variable de holgura correspondiente, la cual entrará a la base con la constante de la restricción como parte de la solución. De aquí se proseguirá normalmente hasta hallar la solución óptima, la cual no cambiará si se cumple con la nueva restricción; en caso opuesto, deberá hallarse la nueva solución óptima por medio de la metodología Simplex normal.

Este procedimiento lo mostraremos con nuestro caso base de la panadería.

Ejemplo VII.6.- Si al problema original de la panadería se le añade la condición de que no pueden producirse más de 10 Kgs. totales de pan, ¿ Cómo afecta esto a la solución óptima?

Solución:

Esta nueva condición significa una cuarta restricción, la cual será:

$$X_1 + X_2 \leq 10 \qquad (4)$$

Lo primero será comprobar si la solución anterior cumple con esta nueva restricción. Para el caso base, esta solución era $X_1 = 3.5$ y $X_2 = 8$, por lo tanto:

$$X_1 + X_2 = 3.5 + 8 = 11.5 > 10$$

Por lo que la restricción no se cumple.

Ante esto, conforme a la metodología descrita anteriormente, la nueva restricción debe incorporarse a la tabla final del caso base, con su variable de holgura, la que designaremos como H_4 la cual deberá estar en la base de la tabla junto con la constante de la nueva restricción, que es 10. Con esto la tabla será ahora:

			3	4	0	0	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	H_4
0	H_1	1.5	0	0	1	0.5	-0.5	0
4	X_2	8	0	1	0	1	0	0
3	X_1	3.5	1	0	0	-0.5	0.5	0
0	H_4	10	1	1	0	0	0	1
		42.5	0	0	0	2.5	1.5	0

Aunque esta tabla no tiene números índice negativos, no puede ser la solución óptima del problema debido a que X_1 y X_2 son variables básicas por lo que sus coeficientes de las columnas que encabezan estas variables deben ser cero, excepto en el elemento que corresponde al renglón de esas mismas variables, el cual debe ser la unidad.

Si observamos la tabla, veremos que en la columna de X_1 y X_2, los elementos del renglón que encabeza H_4 son unos, debiendo ser ceros, por lo cual éstos tendrán que generarse. Esto se logra si al renglón de H_4 le restamos el renglón de X_1 y también el de X_2. Con estas operaciones, nuestra tabla será:

			3	4	0	0	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	H_4
0	H_1	1.5	0	0	1	0.5	-0.5	0
4	X_2	8	0	1	0	1	0	0
3	X_1	3.5	1	0	0	-0.5	0.5	0
0	H_4	-1.5	0	0	0	-0.5	-0.5	1
		42.5	0	0	0	2.5	1.5	0

En esta tabla vemos que H_4 es básica y negativa, por lo cual esta solución no es factible, por lo que el problema debe continuarse; para esto, pasaremos al problema dual correspondiente, el cual será:

			5	8	15	10	0	0
			Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	H_1	H_2
8	Y_2	2.5	-0.5	1	0	0.5	0.5	-1
15	Y_3	1.5	0.5	0	1	0.5	-0.5	0
		-42.5	1.5	0	0	-1.5	3.5	8

De aquí seguimos la metodología Simplex normal para llegar a la nueva tabla óptima final, la cual será:

			5	8	15	10	0	0
			Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	H_1	H_2
8	Y_2	1	-1	1	-1	0	1	-1
10	Y_4	3	1	0	2	1	-1	0
		-38	3	0	3	0	2	8

De la cual vemos que la solución primaria es:

$$X_1 = 2$$
$$X_2 = 8$$
$$Z = 38$$

La cual ha cambiado respecto al caso base debido a que éste no cumplía con la nueva restricción.

Cambios en el sentido de las desigualdades.

Este caso puede presentarse en algunas ocasiones, aunque no es muy frecuente.

Lo explicaremos con el siguiente ejemplo:

Ejemplo VII.7.- Para el caso base de la panadería, ¿ Cuál será la solución óptima si cambia el sentido de la desigualdad de la tercera restricción?.

Solución:

El caso base fue:

$$\text{Max} \quad Z = 3X_1 + 4X_2$$

Sujeta a las restricciones:

$$X_1 \le 5 \quad (1)$$
$$X_2 \le 8 \quad (2)$$
$$2X_1 + X_2 \le 15 \quad (3)$$

Las cuales al agregar las variables de holgura quedaban del siguiente modo:

$$X_1 + H_1 = 5 \ (1)$$
$$X_2 + H_2 = 8 \ (2)$$
$$2X_1 + X_2 + H_3 = 15 \quad (3)$$

Si ahora en el presente problema la tercera restricción cambia en el sentido de la desigualdad, su ecuación será:

$$2X_1 + X_2 \geq 15 \quad (3)$$

La cual al agregar una variable de holgura y una artificial será:

$$2X_1 + X_2 - H_3 + F_1 = 15 \quad (3)$$

Esto implica 2 cambios, los cuales son: a) El coeficiente de la variable H_3 cambió de +1 a -1; b) Se introduce una nueva variable F_1 al problema.

Para su resolución se deberá efectuar el análisis de sensibilidad por partes, es decir, primero respecto al primer cambio y luego con la solución óptima obtenida en éste, respecto al segundo cambio, es decir, que un cambio del sentido de una desigualdad del tipo menor o igual que ($\leq$) ha generado 2 cambios de los vistos anteriormente.

Con esta explicación iremos al primer cambio: Ha cambiado el coeficiente de la variable de holgura H_3 en la tercera restricción. Esto implica que el nuevo vector de coeficientes iniciales de la variable será ahora:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que al aplicar la Ec. (VII.3) tendremos:

$$\begin{pmatrix} \textit{Vector de} \\ \textit{coeficientes} \\ \textit{de } H_3 \textit{ al final} \\ \textit{del problema} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

Con esto nuestra tabla será:

			3	4	0	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
0	H_1	1.5	0	0	1	0.5	0.5
4	X_2	8	0	1	0	1	0
3	X_1	3.5	1	0	0	-0.5	-0.5
		42.5	0	0	0	2.5	-1.5

En la cual se ha recalculado el número índice para H_3 debido al cambio de los coeficientes de su columna, como este número es negativo, procedemos a aplicar el método Simplex normal para llegar a la nueva solución óptima, cuya tabla es:

			3	4	0	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
0	H_3	3	0	0	2	1	1
4	X_2	8	0	1	0	1	0
3	X_1	5	1	0	1	0	0
		47	0	0	3	4	0

La cual ya cambió con respecto al caso base.

Iremos ahora con esta tabla al segundo cambio, la introducción de la nueva variable F_1 cuya contribución en la función objetivo será (-M) y su vector de coeficientes iniciales:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces su vector de coeficientes finales de acuerdo a la Ec.(VII.3), será:

$$\begin{pmatrix} \textit{Vector de} \\ \textit{coeficientes} \\ \textit{de } F_1 \textit{ en la} \\ \textit{tabla final} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Por su parte el número índice para F_1 será:

Número índice de
la columna de $F_1 = [\,(0)(-0.5) + (4)(0) + (3)(0.5)\,] - (-M) = 1.5 + M$

Con la inclusión de F_1 en la tabla, ésta quedará del modo siguiente:

			3	4	0	0	0	-M
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	F_1
0	H_3	3	0	0	2	1	1	-0.5
4	X_2	8	0	1	0	1	0	0
3	X_1	5	1	0	1	0	0	0.5
Parte #		47	0	0	3	4	0	1.5
Parte M			0	0	0	0	0	1

Existiendo ahora 2 partes del renglón índice, sin embargo, esto no cambia la solución óptima del problema, pues no hay números índice negativos en ninguna de las 2 partes y la tabla Simplex aparece normal, por lo cual la solución óptima es:

$X_1 = 5$
$X_2 = 8$
$H_3 = 3$
$Z = 47$

PROBLEMAS PROPUESTOS.

VII.1.- Dado el problema

$$\text{Max} \quad Z = 4X_1 + 2X_2 + 3X_3$$

Sujeto a las restricciones

$$X_1 + X_2 \leq 8$$
$$X_3 \leq 7$$
$$2X_1 + X_2 + X_3 \leq 14$$

¿Cómo cambiará la solución óptima, si:

a) La constante de la primera restricción es 12?

b) La constante de la segunda restricción es 10?

c) La constante de la tercera restricción es 20 ?

cada inciso comparado con el problema original.

VII.2.- Respecto al problema base anterior, ¿Cómo se verá afectada la solución óptima, si:

a) La contribución de X_1 es ahora 2 ?

b) La contribución de X_2 es ahora 4 ?

c) La contribución de X_3 es ahora 5 ?

Desarróllese cada inciso respecto al caso original.

VII.3.- Del problema VII.1, ¿Cómo cambia la solución óptima, si se verifican los siguientes cambios:

a) Los coeficientes de X_1 en las restricciones son 2, 0, 1 respectivamente?

b) Los coeficientes de X_3 en las restricciones son 1, 1, 1 respectivamente?

Responda cada inciso respecto al problema original.

VII.4.- Respecto al problema VII.1 ¿Cuál será la solución óptima ante el siguiente cambio:

a) Se introduce un nueva variable X_4 con contribución de 3.5 y coeficientes en las restricciones de 1, 0 y 1 respectivamente?

VII.5.- Si en el problema VII.1 se agrega la restricción:

$$X_2 + X_3 \leq 6 \qquad (4)$$

¿Cuál será en este caso la solución óptima?

VII.6.-Si en el problema VII.1 se invierte el sentido de la desigualdad en la segunda restricción. ¿Cuál será ahora la solución óptima?

VII.7.- En el problema

$$\text{Min} \quad Z = 2X_1 + 3X_2$$

Sujeto a las restricciones

$$X_1 + X_2 \geq 6$$
$$2X_1 + X_2 \geq 7$$

¿ Cómo cambiará la solución óptima, si:

a) La constante de la primera restricción es 9 ?

b) La contribución de X_2 es 1 ?

Resolver cada inciso respecto al caso original.

VII.8.- Respecto al problema anterior, ¿ Qué cambios tendrá la solución óptima, si:
a) Se cambia el coeficiente de X_1 en la primera restricción de 1 a 2?
b) Se cambia el coeficiente de X_2 en la segunda restricción de 1 a 2 ?
Ambos casos comparados con el original.

VII.9.- Si en el problema VII.7, se introduce una nueva variable X_3 con contribución de 2.5 y con coeficientes de las restricciones de 1 y 0 respectivamente. ¿Cuál será ahora la solución óptima?

VII.10.- Si en el problema VII.7 se agrega una tercera restricción

$X_1 \geq 5$ (3)

¿Cómo afectará a la solución?

VII.11.- Si en el problema VII.7 se invierte el sentido de la desigualdad de la primera restricción, ¿Cuál será ante este cambio la solución óptima?

CAPITULO VIII

PROGRAMACION ENTERA

Introducción.

En el mundo de la industria y los negocios hay numerosas situaciones en las cuales se presentan problemas de programación lineal para los cuales las variables de decisión sólo pueden tener valores de números enteros y no fraccionarios. Esto debido a alguna razón física, por ejemplo si las variables de decisión son números de personas, de artículos terminados, etc., será obvio que no podrán ser números fraccionarios, pues esto no tendría ningún sentido.

Es aquí donde se plantea el problema de programación lineal como un caso de programación entera.

Para solucionar este tipo de problemas, hay algunos métodos que resultan adecuados, de los cuales en este texto presentaremos los siguientes:

a) .- Método Gráfico.
b) .- Método de Redondeo de la solución óptima de programación lineal.
c) .- Método de Enumeración completa.
d) .- Método de Bifurcación y Acotación.
e) .- Método de Corte de Gomory.

A continuación presentaremos un caso de programación entera que nos servirá de base para ilustrar cada uno de los métodos.

Caso base:

La Carpintería Pérez.

La Carpintería Pérez desea saber cómo programar la producción de 2 tipos diferentes de recámaras: provenzal y americana.

La carpintería cuenta con 200 pies cúbicos de madera y con 50 horas de tiempo disponible, la recámara del tipo provenzal necesita para su fabricación de 42 pies cúbicos de madera y 12 horas de tiempo; mientras que el tipo americano requiere 35 pies cúbicos de madera y 9.5 horas de tiempo.

¿ Cuánto deberá de producirse de cada tipo, a fin de maximizar el ingreso, si el provenzal se vende a N$ 21,000.00 y el americano a N$ 18,500.00 ?

El planteamiento matemático será:

$$\text{Max} \quad Z = 21000\,X_1 + 18500\,X_2$$

Sujeto a las restricciones:

(1) $42X_1 + 35X_2 \leq 200$
(2) $12X_1 + 9.5X_2 \leq 50$
(3) $X_1, X_2 \geq 0$
(4) X_1, X_2 Enteras

Método Gráfico.

Este método es muy similar al presentado en el capítulo IV para la programación lineal, pues grafica las rectas correspondientes a las restricciones de tal modo que delimita la región factible de solución. Posteriormente se identifican los puntos enteros más próximos al límite de la zona de solución y se unen por medio de una línea de modo que habremos generado una nueva zona de solución formada por ésta y los ejes, estando la solución del problema de programación entera en uno de los vértices, que será aquel que optimice la función objetivo.

A continuación resolveremos con este método nuestro caso base.

Ejemplo VIII.1.- Aplicar el método gráfico para solucionar el caso de la carpintería Pérez.

Solución:

En la figura VIII.1 se presenta la gráfica del problema, en donde puede observarse que la segunda restricción es la que delimita la zona de solución factible para el caso de programación lineal, cuya solución es $X_1 = 0$, $X_2 = 5.263$, con $Z = 97{,}368.42$ (punto R en la figura VIII.1).

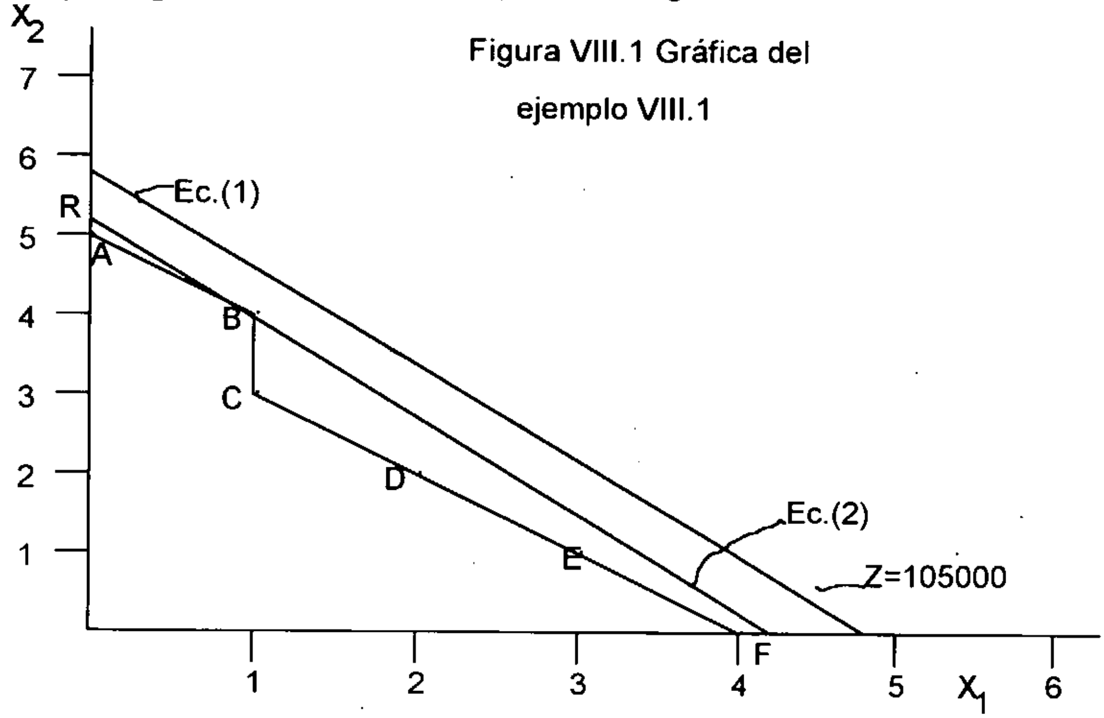


Figura VIII.1 Gráfica del ejemplo VIII.1

Esta solución es inadmisible para el caso, dado que no se van a producir recámaras por parte de la carpintería en números fraccionarios, puesto que nadie compraría una fracción de recámara.

Para hallar la solución entera del problema, se localizan los puntos de combinaciones enteras que quedan más próximos a la línea de la restricción (2), pues es la parte de la zona factible de solución hacia donde la función objetivo aumenta.

Estos puntos son el A(X_1=0,X_2=5), B(X_1=1,X_2= 4), C(X_1=1,X_2=3), D(X_1=2,X_2=2), E(X_1=3,X_2=1) y el F (X_1 = 4, X_2= 0).

La solución al problema de programación entera quedará necesariamente en uno de estos vértices y será aquel que maximice la función objetivo. Esto gráficamente se obtiene moviendo rectas paralelas a la función objetivo hacia el origen y ver cuál es el primer vértice que es tocado por una de ellas. En la figura VIII.1 se muestra con una línea punteada la recta que corresponde a Z = 105,000.00. Si movemos ésta hacia el origen, el primer vértice de los puntos enteros que será tocado es el B, que es la solución entera óptima, la cual es:

$$X_1 = 1$$
$$X_2 = 4$$
$$Z = 95{,}000.00$$

Otra manera posible de obtener el óptimo del problema hubiera sido calcular Z de los puntos enteros A, B, C, D, E y F.

Este método es aplicable para un máximo de 3 variables de decisión, al igual que en el caso de la programación lineal, puesto que no podríamos graficar más de 3 dimensiones.

Para casos de minimización la metodología es la misma, con la única diferencia de que el movimiento de las rectas de la función objetivo será del origen hacia arriba.

Método de Redondeo de la solución óptima de programación lineal.

Tal y como su nombre lo indica, este método se basa en resolver primeramente el problema como programación lineal y luego redondear la solución obtenida hacia los enteros inmediatos inferiores para casos de maximización y hacia los enteros inmediatos superiores para casos de minimización. Esto es muy simple, aunque no siempre da buenos resultados, pues suele suceder que la solución obtenida no sea el óptimo. Otras veces los valores que se obtienen con el presente método no son ni siquiera factibles.

A continuación aplicaremos este procedimiento al caso de la carpintería Pérez por medio de redondeo.

Ejemplo VIII.2.- Resolver el problema de la carpintería Pérez por medio del método de Redondeo.

Solución:

Ya vimos que la solución al problema lineal es:

$$X_1 = 0$$
$$X_2 = 5.263$$
$$Z = 97{,}368.42$$

Como este caso es de maximización, los valores de las variables de decisión deberán redondearse a los números enteros inmediatos inferiores.

En este caso X_1 no se redondea, puesto que ya es un número entero, cero. Con esto la solución obtenida con el presente método será:

$$X_1 = 0$$
$$X_2 = 5$$
$$Z = 92{,}500.00$$

Este valor sí es factible pero no es el óptimo del programa entero, el cual es $X_1 = 1$, $X_2 = 4$, con $Z = 95{,}000.00$.

Hay ocasiones en que la solución obtenida con este método queda muy lejos del valor óptimo.

Método de Enumeración completa.

Este método consiste en obtener todos los puntos posibles de combinaciones de valores enteros para las variables de decisión y evaluar la Z para cada uno de ellos, siendo la solución óptima aquel punto que optimice la Z y que sea factible.

Este método aunque halla la solución óptima, requiere de un gran esfuerzo, pues en problemas de un número elevado de variables y de un amplio rango de valores posibles de éstas, la resolución por este método es prácticamente imposible, dado el elevado número de puntos que deberán ser evaluados. Así por ejemplo, un problema de 10 variables de decisión donde cada una de éstas pudiera tener 4 diferentes valores enteros, habría que evaluar $4^{10} = 1{,}048{,}576$ diferentes puntos, lo cual nos da una clara idea de lo impráctico del presente método.

A continuación ilustraremos esta metodología con el caso base de la carpintería.

Ejemplo VIII.3.- Resolver el problema de la carpintería Pérez por el método de Enumeración Completa.

Solución:

Lo primero será obtener el rango de valores enteros posibles para X_1 y X_2 de acuerdo a las restricciones. En este caso lo haremos solamente respecto a la segunda restricción, puesto que es más limitante en todos los puntos factibles de solución que la primera. Por lo que si un punto cualquiera cumple con la segunda restricción, necesariamente también satisfará a la primera.

Así si X_1 se hace cero en la segunda restricción, X_2 será $50/9.5 = 5.263$, por lo que X_2 podrá tomar valores desde cero hasta 5 que es el entero inmediato inferior.

Si por su parte X_2 se hace cero en la segunda restricción, X_1 será $50/12 = 4.167$, por lo que X_1 podrá tomar valores desde cero hasta 4.

Como podemos ver, habrá seis valores posibles de X_2 y 5 de X_1, para un total de $6 \times 5 = 30$ puntos enteros a ser evaluados. La valorización de la función objetivo para cada uno de los puntos factibles se presenta en la tabla VIII.1, así como también la revisión del cumplimiento de la segunda restricción.

Tabla VIII.1-Valorización de los 30 puntos enteros para el caso de la carpintería Pérez.

X_1	X_2	$12X_1 + 9.5X_2$	Factibilidad	Z
0	0	0	Sí	0
0	1	9.5	Sí	18,500
0	2	19	Sí	37,000
0	3	28.5	Sí	55,500
0	4	38	Sí	74,000
0	5	47.5	Sí	92,500
1	0	12	Sí	21,000
1	1	21.5	Sí	39,500
1	2	31	Sí	58,000
1	3	40.5	Sí	76,500
1	4	50	Sí	95,000
1	5	59.5	No	
2	0	24	Sí	42,000
2	1	33.5	Sí	60,500
2	2	43	Sí	79,000
2	3	52.5	No	
2	4	62	No	
2	5	71.5	No	
3	0	36	Sí	63,000
3	1	45.5	Sí	81,500
3	2	55	No	
3	3	64.5	No	
3	4	74	No	
3	5	83.5	No	
4	0	48	Sí	84,000
4	1	57.5	No	
4	2	67	No	
4	3	76.5	No	
4	4	86	No	
4	5	95.5	No	

De la tabla vemos que de los 30 puntos, 17 son factibles, es decir, sí cumplen con las restricciones y 13 no lo son, por lo cual éstos no han sido evaluados en Z.

De los 17 puntos factibles , el que maximiza la función objetivo es $X_1 = 1$, $X_2 = 4$, con $Z = 95,000.00$, el cual es el mismo resultado que el obtenido con el método gráfico.

Existen casos de enumeración completa en los cuales las variables de decisión solo pueden tener como posibles valores enteros cero y uno, a estos casos se les conoce como binarios, en los cuales habrá que evaluar 2^n puntos, siendo n el número de variables.

Método de Bifurcación y Acotación.

Este método se creó en 1960 por A. H. Land y A. Doig, siendo el más popular para resolver los problemas de programación entera. Como su nombre lo indica, consiste en partir del problema original, el cual se irá dividiendo en ramas, cada una de las cuales va acortando la región factible de solución, conservando las soluciones enteras hasta que se encuentre la solución óptima.

El procedimiento del método consiste en los siguientes pasos:

1.- Se resuelve el problema original de programación lineal, sin limitarse a una solución entera. Si la solución obtenida es entera, ésta será la óptima para el problema, pero si es fraccionaria en alguna(s) de las variables de decisión, se continúa al paso siguiente.

2.- De las variables de decisión que hayan resultado fraccionarias en el paso anterior, se toma una de ellas, por decir X_i la cual quedará comprendida entre dos números enteros consecutivos, los cuales designaremos por k_1 y k_2, entonces:

$$k_1 \leq X_i \leq k_2 \qquad \text{Ec. (VIII.1)}$$

De aquí el problema tendrá su primera ramificación en 2 partes o nuevos subproblemas, los cuales serán idénticos al problema que les dio origen, añadiendo una restricción adicional cada uno de ellos, las cuales serán:

$$\begin{array}{ll} X_i \leq k_1 & \text{para la primera rama} \\ X_i \geq k_2 & \text{para la segunda rama} \end{array} \qquad \text{Ec. (VIII.2)}$$

Con esto cada rama abarcará una región factible de solución más limitada que la del problema original, lo cual implica haber dividido éste en 2 subproblemas más pequeños. En el caso de haber varias variables de decisión fraccionarias que sean candidatas para efectuar ramificaciones, deberá tomarse aquella que quede más próxima a la fracción intermedia entre dos enteros consecutivos, es decir, (0.5).

3.- Resolver cada rama del paso anterior por medio de programación lineal; de aquí podemos tener varias posibilidades, por decir:

a) .- Que la solución encontrada no sea factible. En este caso esta rama ya no se investiga más.

b) .- Que la solución hallada sea entera. En este caso esta solución se convierte en una COTA que será inferior para problemas de maximización y superior para los de minimización. Esto viene siendo el proceso de acotación. De esta rama ya no se prosigue la búsqueda de nuevas opciones.

c) .- Que la solución encontrada sea fraccionaria. De aquí, esta rama será candidata para seguir haciendo bifurcaciones, siempre y cuando el valor hallado para la función objetivo sea mejor que el de alguna cota fijada en una etapa anterior, pues de no suceder así, ya no se proseguiría la búsqueda y esa cota anterior sería la solución óptima. Si la búsqueda hubiese continuado y se encontrara una nueva solución entera cuya función objetivo fuese mejor que la de la cota anterior, dicha rama tomaría el lugar de la nueva cota en sustitución de la anterior.

Este procedimiento se continuará hasta que ya no haya posibilidades de ramificaciones posteriores. Con esto tendremos la certeza de que se encontrará la solución entera óptima en caso de haberla, siendo ésta, la última cota que haya prevalecido como tal hasta el final del problema.

A continuación presentaremos nuestro caso base para ilustrar el presente método.

Ejemplo VIII.4.- Resolver el caso de la carpintería Pérez por medio del método de Bifurcación y Acotación.

Solución:

El planteamiento del problema es:

$$\text{Max} \quad Z = 21000X_1 + 18500X_2$$

$$\text{Sujeto a:}$$

$$(1) \quad 42X_1 + 35X_2 \leq 200$$

$$(2) \quad 12X_1 + 9.5X_2 \leq 50$$

$$\text{Siendo } X_1, X_2 \geq 0 \text{ y enteras}$$

De acuerdo al procedimiento establecido para el método, el paso 1 consiste en resolver el problema por medio de la programación lineal, cuya solución es:

$$X_1 = 0$$

$$X_2 = 5.263$$

$$Z = 97368.42$$

De aquí, esta solución no es entera, por lo que conforme al paso 2, ramificaremos con nuestra variable fraccionaria X_2 en dos ramas, las cuales de acuerdo a la Ec. (VIII.2) serán:

Rama A	Rama B
Max $Z = 21000X_1 + 18500X_2$	Max $Z = 21000X_1 + 18500X_2$
(1) $42X_1 + 35X_2 \leq 200$	(1) $42X_1 + 35X_2 \leq 200$
(2) $12X_1 + 9.5X_2 \leq 50$	(2) $12X_1 + 9.5X_2 \leq 50$
(3) $X_2 \leq 5$	(3) $X_2 \geq 6$
Con $X_1, X_2 \geq 0$	Con $X_1, X_2 \geq 0$

De aquí vamos al paso 3 con la rama A, cuya solución por programación lineal es:

$$X_1 = 0.2083$$
$$X_2 = 5$$
$$Z = 96\,875.0$$

De esta solución, podemos ramificar todavía, pues X_1 es ahora fraccionaria, surgiendo entonces las ramas C y D a partir de la rama A, del modo siguiente:

Rama C	Rama D
Max $Z = 21000X_1 + 18500X_2$	Max $Z = 21000X_1 + 18500X_2$
(1) $42X_1 + 35X_2 \leq 200$	(1) $42X_1 + 35X_2 \leq 200$
(2) $12X_1 + 9.5X_2 \leq 50$	(2) $12X_1 + 9.5X_2 \leq 50$
(3) $X_2 \leq 5$	(3) $X_2 \leq 5$
(4) $X_1 \leq 0$	(4) $X_1 \geq 1$
Con $X_1, X_2 \geq 0$	Con $X_1, X_2 \geq 0$

De la rama C, encontramos la siguiente solución por programación lineal:

$$X_1 = 0$$
$$X_2 = 5$$
$$Z = 92500$$

Convirtiéndose esta rama en la cota inferior, ya no siguiendo las bifurcaciones después de ella.
Para la rama D por su parte, encontramos la solución:

$$X_1 = 1$$
$$X_2 = 4$$
$$Z = 95000$$

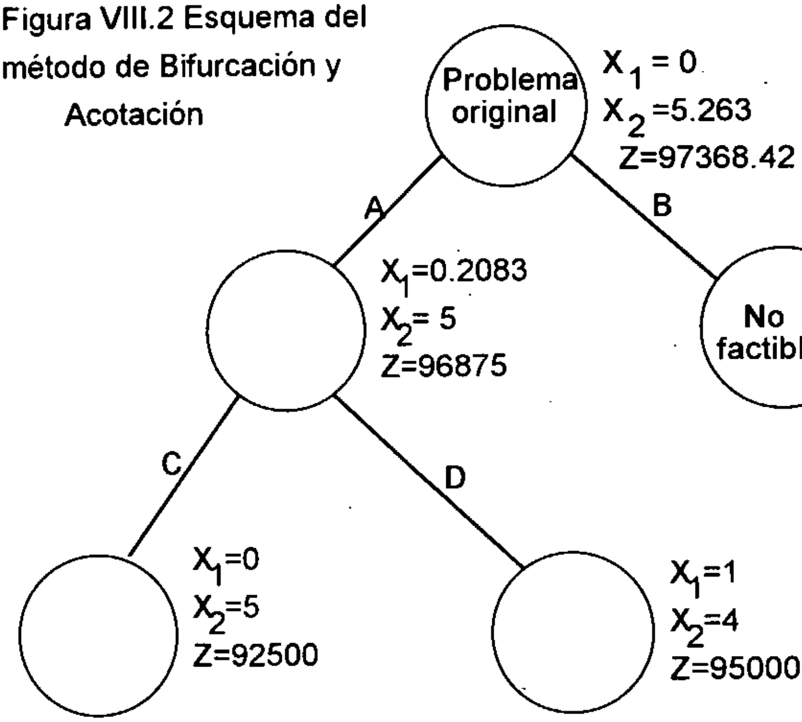
Que por tener un valor mayor de Z que el de la cota inferior, hará que esta rama se convierta en la nueva cota inferior, ya no buscando más ramificaciones posteriores a ella.

Finalmente la única rama que a estas alturas nos resta por investigar es la B, cuya solución no es factible dadas sus restricciones. Por esto el problema ya no es susceptible de más ramificaciones, por lo que nuestra solución entera óptima es nuestra última cota, es decir:

$$X_1 = 1$$
$$X_2 = 4$$
$$Z = 95000$$

Un esquema de las bifurcaciones se presenta en la figura VIII.2, donde vemos que cada solución fraccionaria da lugar a nuevas ramas y éstas terminan con una solución no factible, como en el caso de la rama B, o bien con una solución entera como sucedió con las ramas C y D.

Figura VIII.2 Esquema del método de Bifurcación y Acotación



Este método tiene el inconveniente de requerir un gran número de cálculos, pues aún en un problema pequeño como el presente, que es de 2 variables y 2 restricciones, tiene que aplicarse el método Simplex en 5 ocasiones, una por cada ramificación, más el problema inicial.

Esta es una desventaja aún en computadora, pues el tiempo de resolución será grande para problemas mayores.

Método de Corte de Gomory.

Este método fue creado por Gomory en 1958 y consiste en resolver el problema entero por programación lineal y en caso de que la solución no sea entera, se irá acortando la región factible de solución por la inclusión de nuevas restricciones lo cual excluirá a las soluciones no enteras y conservará las enteras. Esto es similar al método anterior, con la diferencia de que en el presente no habrá ramificaciones, solamente acortamiento de la zona de solución en cada paso hasta encontrar el óptimo.

El procedimiento consiste en los siguientes pasos:

1.- Se resuelve el problema planteado por programación lineal. Si la solución es entera, será la óptima; en caso contrario, se va al paso siguiente.

2.- De la solución fraccionaria obtenida en el paso anterior, se toma de la tabla Simplex final la ecuación del renglón de la variable de decisión que haya resultado fraccionaria.

En caso de haber varias variables fraccionarias, se aconseja tomar aquella que esté más próxima al valor intermedio, (0.5).

3.- La ecuación obtenida en el paso anterior se descompone en 2 partes: Una entera y la otra fraccionaria.

Esta última será nuestra nueva restricción, tomándose como desigualdad del tipo mayor o igual que cero.

4.- Volver a solucionar el problema original con la adición de la nueva restricción obtenida en el paso anterior. Esto puede hacerse por medio del análisis de sensibilidad tal y como se manejó la inclusión de nuevas restricciones en el inciso respectivo del capítulo anterior. Si la solución obtenida en este paso es entera, habremos resuelto el problema; si es fraccionaria, se repite el procedimiento a partir del paso número 2.

A continuación presentaremos el caso base, resolviéndolo por este método.

Ejemplo VIII.5.- Solucionar el caso de la carpintería Pérez por el método de Corte de Gomory.

Solución:

El problema original se resuelve por el método simplex, cuya tabla final es:

			21000	18500	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2
0	H_1	15790	-2.210	0	1	-3.684
18500	X_2	5.263	1.263	1	0	0.105
		97368.42	2368.13	0	0	1947.44

Como podemos ver, esta solución no es entera, por lo que de acuerdo con el paso 2 del método de Corte, tomamos de la tabla Simplex anterior la ecuación de la variable X_2 que fue la que resultó fraccionaria, la cual será:

$$5.263 = 1.263X_1 + X_2 + 0.105 H_2$$

Ahora conforme al tercer paso esta ecuación se descompondrá en 2 partes: una entera y una fraccionaria. Con esto tendremos:

$$(5 + 0.263) = (1 + 0.263)X_1 + X_2 + (0 + 0.105)H_2$$

De aquí tomaremos la parte fraccionaria y la convertiremos en desigualdad del tipo mayor o igual que cero.

Con esto tendremos:

$$0.263X_1 + 0.105H_2 - 0.263 \geq 0$$

La cual será nuestra nueva restricción, que al incluirse en la tabla Simplex y resolverse por medio del método conforme lo establece el análisis de sensibilidad, genera la solución óptima, la cual es:

$$X_1 = 1$$
$$X_2 = 4$$
$$Z = 95{,}000$$

Este método generalmente es rápido para encontrar la solución del problema y efectúa un menor número de cálculos que el de Bifurcación y Acotación, aunque puede haber ocasiones en que no converja a la solución, por lo cual se recomienda al usarlo fijar un número máximo de iteraciones permitido.

PROBLEMAS PROPUESTOS

VIII.1.- Resolver por el método gráfico

$$\text{Max} \quad Z = 2X_1 + 3X_2$$
Sujeto a:
$$X_1 + X_2 \leq 2$$
X_1, X_2 enteras y no negativas.

VIII.2.- Resolver por el método gráfico

$$\text{Min} \quad Z = 6X_1 + 5X_2$$
Sujeto a:
$$3X_1 + X_2 \geq 6$$
$$X_1 + 2X_2 \geq 4$$
X_1, X_2 enteras y no negativas.

VIII.3.- Resolver el problema VIII.1 por Redondeo.

VIII.4.- Solucionar el problema VIII.2 por Redondeo.

VIII.5.- Resolver el problema VIII.1 por el método de Enumeración.

VIII.6.- Resolver por Enumeración el problema

$$\text{Min} \quad Z = 2X_1 + X_2$$
Sujeto a:
$$X_1 + X_2 \geq 3$$
Con X_1, X_2 enteras y no negativas.

VIII.7.- Resolver el problema

$$\text{Max} \quad Z = 4X_1 + 3X_2$$
Sujeto a:
$$2X_1 + X_2 \leq 4$$
$$X_1 + X_2 \leq 3$$
Con X_1, X_2 enteras y no negativas.
Usando el método de Bifurcación y Acotación.

VIII.8.- Resolver por el método de Bifurcación y Acotación

$$\text{Min} \quad Z = 5X_1 + X_2$$
Sujeto a:
$$X_1 + X_2 \geq 4$$
$$X_1 + 3X_2 \geq 6$$
Con X_1, X_2 enteras y no negativas.

VIII.9.- Resolver por Bifurcación y Acotación el problema VIII.1.

VIII.10.- Resolver el problema VIII.1 por el método de Corte de Gomory.

VIII.11.- Usando el método de Gomory resolver

$$\text{Min} \quad Z = 5X_1 + 3X_2$$
Sujeto a:
$$X_1 + X_2 \geq 4$$
$$2X_1 + X_2 \geq 6$$
Con X_1, X_2 enteras y no negativas.

VIII.12.- Por el método de Gomory, resolver

$$\text{Max} \quad Z = 4X_1 + 3X_2 + 2X_3$$

Sujeto a:

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 5$$
$$2X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 7$$

Con X_1, X_2, X_3 enteras y no negativas.

VIII.13.- Resolver por el método de Gomory

$$\text{Min} \quad Z = X_1 + X_2 + X_3$$

Sujeto a:

$$2X_1 + X_2 + X_3 \geq 4$$
$$X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 5$$

Con X_1, X_2, X_3 enteras y no negativas.

VIII.14.- Resolver por Bifurcación y Acotación el problema

$$\text{Max} \quad Z = 3X_1 + 5X_2 + 2X_3$$

Sujeto a:

$$X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 6$$
$$2X_1 + X_2 + X_3 \leq 5$$

Con X_1, X_2, X_3 enteras y no negativas.

CAPITULO IX

EL METODO DE TRANSPORTE

Introducción.

El método de transporte también es conocido como método de distribución, de asignación y de transbordo debido a su aplicación a diferentes tipos de problemas, los cuales iremos comentando en su momento.

Es un caso particular de la programación lineal, el cual se resuelve por una metodología diferente, la cual es más sencilla que el Simplex.

Consiste en asignar o distribuir diferentes cantidades de objetos desde unos orígenes hacia unos destinos, buscando hacerlo de una manera óptima, es decir a un costo mínimo (o bien con una utilidad máxima). Los orígenes serán los centros de suministro u ofertas, mientras que los destinos serán los centros de consumo o demandas.

Al presente método suele denominársele de transporte debido a su similitud con el plantear un problema de fletar mercancías desde los lugares de producción hasta los lugares de consumo.

En este capítulo veremos cómo se plantea un problema dado de transporte, luego trataremos 5 métodos de inicialización los cuales se utilizan para dar una distribución o asignación inicial, enseguida se verán 2 métodos de optimización, luego se presentarán situaciones especiales del método de transporte y finalmente se tratarán diferentes casos como son problemas de producción, de asignación y de transbordo.

Planteamiento del problema.

Para plantear un problema típico de transporte tomaremos como ejemplo el caso de abastecer una mercancía desde 4 diferentes centros de suministro, A, B, C y E hacia 4 centros de consumo, W, U, Y y Z, buscando hacerlo a un costo total mínimo.

En la tabla IX.1 se presentan las diferentes ofertas de los centros de suministro, así como también las demandas de los centros de consumo.

Tabla IX.1.- Ofertas y demandas de los centros de suministro y consumo.

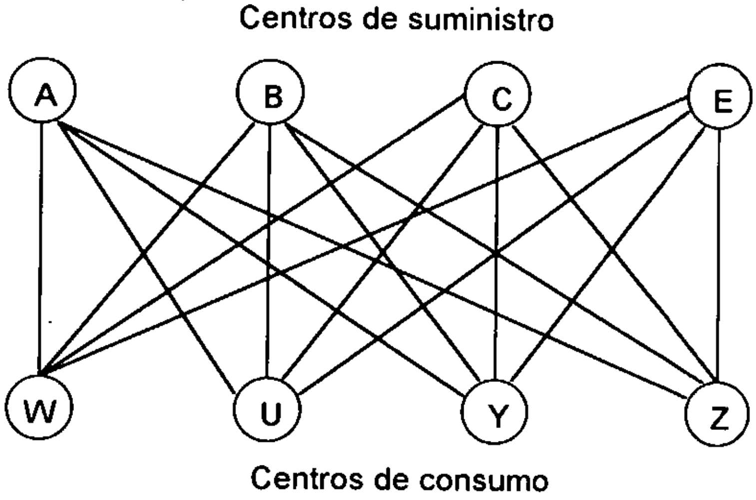
Centro de suministro	Capacidad de producción (oferta)	Centro de consumo	Demanda
A	p_A	W	d_W
B	p_B	U	d_U
C	p_C	Y	d_Y
E	p_E	Z	d_Z
TOTAL	P	TOTAL	D

Por su parte se tendrá que la oferta total P deberá ser igual a la demanda total D. Los casos donde $P \neq D$ se tratarán posteriormente.

La figura IX.1 nos muestra un diagrama del problema en donde vemos que habrá 4x4=16 diferentes caminos para transportar las mercancías desde los centros de suministro hasta los centros de consumo.

Cada costo de envío de un centro de suministro a un centro de consumo se representa por C_{ij} donde el subíndice i representa el punto de suministro y j el de consumo.

Figura IX.1.- Diagrama del problema de los centros de suministro A, B, C y E y de los centros de consumo W, U, Y y Z.



Así C_{BU} será el costo de enviar mercancía de B a U.

Entonces el problema será cómo satisfacer las demandas de los centros de consumo dadas las capacidades de producción u ofertas de los centros de suministro, logrando esto a un costo total mínimo.

Si se plantea este problema como un caso de programación lineal, la función objetivo Z sería el costo total de los envíos, tal y como lo define la ecuación IX.1

$$\text{Min } Z = \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\substack{j=n\\ i=m}} C_{ij} X_{ij} \qquad \text{Ec.(IX.1)}$$

Donde Cij = Costo de enviar una unidad de mercancía del centro de suministro i al centro de consumo j

Xij = Número de unidades de mercancía que se enviarán del centro de suministro i al centro de consumo j.

m = Número de centros de suministro

n = Número de centros de consumo

La cual deberá minimizarse y estará sujeta a las siguientes restricciones:

Para cada i:

$$\sum_{j=1}^{j=n} Xij = pi \qquad \text{Ec. (IX.2)}$$

Siendo p_i la oferta del centro de suministro i

Para cada j:

$$\sum_{i=1}^{i=m} Xij = dj \qquad \text{Ec (IX.3)}$$

Siendo d_j la demanda del centro de consumo j.

Con esto habrá un total de m+n restricciones de las cuales serán solamente m+n-1 ecuaciones independientes.

Además deberá satisfacerse la siguiente igualdad

$$P = D \qquad \text{Ec (IX.4)}$$

Es decir que la sumatoria de las ofertas P deberá ser igual a la sumatoria de las demandas D para que el problema tenga una solución factible.

Las variables de decisión serán las X_{ij} que deberán ser mayores o iguales que cero y cuyos coeficientes en las ecuaciones de las restricciones serán la unidad.

Este problema podría resolverse por el método Simplex, pero la metodología propia del algoritmo de transporte es más sencilla, por lo que la explicaremos ahora para plantear este caso conforme a ella.

Haremos una tabla o matriz de distribución colocando en cada renglón a los centros de suministro y en cada columna a los centros de consumo. Al final de cada renglón habrá una casilla para el total de las ofertas de los centros de suministro y al final de cada columna habrá una casilla para el total de las demandas de los centros de consumo.

En la figura IX.2 se muestra la matriz de distribución donde cada casilla estará disponible para el número de unidades que se enviarán del centro de suministro que corresponde a ese renglón hacia el centro de consumo de esa columna.

Figura IX.2.- Matriz de transporte para el problema planteado de 4 centros de suministro y 4 centros de consumo.

O \ D	W	U	Y	Z	Ofertas
A	C_{AW}	C_{AU}	C_{AY}	C_{AZ}	p_A
B	C_{BW}	C_{BU}	C_{BY}	C_{BZ}	p_B
C	C_{CW}	C_{CU}	C_{CY}	C_{CZ}	p_C
E	C_{EW}	C_{EU}	C_{EY}	C_{EZ}	p_E
Demandas	d_W	d_U	d_Y	d_Z	D \ P

El recuadro superior derecho que aparece en cada casilla es para anotar en él al costo de enviar una unidad del centro de suministro del renglón en el que está ubicada la casilla hacia el centro de consumo de la columna correspondiente a la casilla. Así por ejemplo, en la casilla CZ, se llenará con el número de unidades que se enviarán desde C hasta Z siendo C_{CZ} el costo unitario del envio.

Aqui el problema será cómo llenar la matriz de distribución de tal forma que se satisfagan las ofertas y demandas de cada renglón y columna respectivamente, logrando esto a un costo total que sea mínimo, es decir la suma de las asignaciones de cada renglón deberá ser igual a la oferta para ese renglón y la suma de las asignaciones de cada columna deberá ser la demanda de dicha columna, no pudiendo haber ninguna asignación negativa, es decir:

$$X_{ij} \geq 0 \qquad \text{Ec.(IX.5)}$$
$$\text{para } i=1, 2, \ldots, m$$
$$\text{para } j=1, 2, \ldots, n$$

Métodos de Inicialización.

Estos tienen por objeto dar una distribución o asignación inicial para la matriz del problema de transporte. En esta sección trataremos 5 métodos, los cuales de acuerdo al orden en el que se presentarán son: Esquina noroeste, Costo menor, Mutuamente preferido, Vogel y Russell.

A continuación plantearemos el problema propuesto en el inciso anterior numéricamente para ilustrar con él cada uno de los métodos que se verán en la presente sección.

Caso Base:

Dados los centros de suministro A, B, C y E y los centros de consumo W, U, Y y Z del problema planteado en el inciso anterior, se tiene la siguiente matriz de transporte.

D \ O	W	U	Y	Z	Ofertas
A	25	18	21	23	510
B	19	23	22	26	475
C	22	25	26	17	390
E	24	21	20	22	225
Demandas	600	500	300	200	1600

¿Cuál sería la manera óptima de asignar las casillas a fin de obtener el costo total mínimo?

Ahora veremos los métodos de inicialización y obtendremos la asignación inicial del caso base con cada uno de ellos.

Método de la Esquina noroeste.

Este es el método más sencillo para lograr la distribución inicial, pero también es el más malo, pues da el costo de la matriz inicial muy elevado. Consiste en los siguientes pasos:

1.- Se inicia la distribución por la casilla de la esquina noroeste de la tabla, asignándole a ésta lo máximo que sea posible, cuya cantidad será aquel número que sea el menor de la oferta o la demanda que corresponden a la casilla.

Con esto quedará satisfecho al menos uno de los 2 conceptos anteriores, aquel que haya sido agotado, hará que el resto de las casillas de ese renglón o columna tengan asignaciones cero.

Con esto habremos asignado en su totalidad ya sea el renglón y/o la columna correspondiente a la casilla, quedando una tabla nueva de menor tamaño por asignar.

2.- De la nueva tabla o matriz que nos ha quedado sin asignar del paso anterior, se localiza la nueva casilla que haya quedado ubicada en la esquina noroeste y se repite el procedimiento del paso 1.

3.- Repetir el paso 1 hasta terminar las asignaciones de la tabla completa.

A continuación presentaremos un ejemplo.

Ejemplo IX.1.- Asignar una distribución inicial para el caso base usando el método de la Esquina noroeste.

Solución:

De acuerdo al procedimiento explicado, la esquina noroeste de la tabla será la casilla AW, la cual tiene una oferta de 510 y una demanda de 600. Por lo cual le asignaremos a la casilla el número menor, es decir 510, con lo cual quedará satisfecha la oferta del renglón, por lo cual el resto de las casillas del primer renglón, tendrán asignaciones cero, con lo cual nuestra tabla quedará de la manera siguiente:

O \ D	W	U	Y	Z	Ofertas
A	25 510	18 X	21 X	23 X	510
B	19	23	22	26	475
C	22	25	26	17	390
E	24	21	20	22	225
Demandas	600	500	300	200	1600

Ahora nuestra nueva esquina noroeste será la casilla BW a la cual le podríamos asignar según su oferta hasta 475 unidades, pero según la demanda insatisfecha sólo pueden asignársele 90 unidades, con lo cual se agota la demanda de la primera columna, y entonces nuestra tabla será ahora:

O \ D	W	U	Y	Z	Ofertas
A	25 510	18 X	21 X	23 X	510
B	19 90	23	22	26	475
C	22 X	25	26	17	390
E	24 X	21	20	22	225
Demandas	600	500	300	200	1600

De nuestra nueva tabla, la nueva esquina noroeste es la casilla BU, a la cual le podríamos asignar según su oferta insatisfecha 385 unidades y según su demanda hasta 500 unidades, por lo que el número menor es 385 con lo cual quedará agotada la oferta del segundo renglón, es decir:

O \ D	W	U	Y	Z	Ofertas
A	25 / 510	18 / X	21 / X	23 / X	510
B	19 / 90	23 / 385	22 / X	26 / X	475
C	22 / X	25	26	17	390
E	24 / X	21	20	22	225
Demandas	600	500	300	200	1600

De esta tabla la nueva esquina noroeste es la casilla CU la cual deberá asignarse con 115 unidades agotándose la demanda de la segunda columna, con lo cual nuestra tabla quedará de la manera siguiente:

O \ D	W	U	Y	Z	Ofertas
A	25 / 510	18 / X	21 / X	23 / X	510
B	19 / 90	23 / 385	22 / X	26 / X	475
C	22 / X	25 / 115	26	17	390
E	24 / X	21 / X	20	22	225
Demandas	600	500	300	200	1600

De esta tabla la nueva esquina noroeste es la casilla CY la cual se asignará con 275 unidades, quedando con esto satisfecha la oferta del tercer renglón, con esto nuestra tabla quedará sólo con 2 casillas sin asignar: la EY y la EZ, las cuales simplemente por diferencia se llenan para satisfacer la oferta y la demanda correspondientes, con esto nuestra tabla final totalmente asignada, será:

O \ D	W	U	Y	Z	Ofertas
A	[25] 510	[18] X	[21] X	[23] X	510
B	[19] 90	[23] 385	[22] X	[26] X	475
C	[22] X	[25] 115	[26] 275	[17] X	390
E	[24] X	[21] X	[20] 25	[22] 200	225
Demandas	600	500	300	200	1600

Cuyo costo total será:

$$C_T = X_{AW}\ C_{AW} + X_{BW}\,C_{BW} + X_{BU}\,C_{BU} + X_{CU}\,C_{CU} + X_{CY}\,C_{CY} + X_{EY}\,C_{EY} + X_{EZ}\,C_{EZ}$$

$$C_T = (510)(25) + (90)(19) + (385)(23) + (115)(25) + (275)(26) + (25)(20) + (200)(22)$$

$$C_T = 38{,}240.0$$

Aquí podemos ver de la tabla final que la sumatoria de las asignaciones por renglón son iguales a las ofertas de los centros de suministro y las sumatorias por columna iguales a las demandas de los centros de consumo.

Método del Costo menor.

Este método es mejor que el anterior, pero tampoco da buenos resultados, ya que va buscando asignar aquellas casillas de menor costo, tal y como su nombre lo indica. pero por lo general no logra buenos resultados. Su procedimiento es el siguiente:

1.- Se analiza la primera columna y sobre ésta se localiza la casilla que tenga el menor costo, a la cual se le asignará el máximo posible de tal forma que quede satisfecha la oferta y/o la demanda correspondiente, al renglón y/o la columna a que pertenece. Aquella línea que haya quedado agotada tendrá el resto de sus casillas con asignaciones cero.
Si la primera columna no quedó satisfecha con la asignación, se busca en ella la siguiente casilla de menor costo y se procede de la misma manera que antes hasta que la columna quede totalmente asignada.

2.- Se continúa con la segunda columna repitiendo el procedimiento descrito en el paso anterior con las casillas que haya disponibles para asignaciones.

3.- Se prosigue con el resto de las columnas de la tabla hasta la última, con lo cual quedará la distribución inicial totalmente asignada.

Este método explicado aquí es el del costo menor por columnas; también existe el del Costo menor por renglones, el cual es similar sólo que ahora la búsqueda de las casillas de menor costo se realiza por renglones.

Para ilustrar el presente método, resolveremos el caso base:

Ejemplo IX.2.- Asignar la tabla del caso base usando el método del Costo menor.

Solución:

De acuerdo al paso 1, vemos que la casilla de menor costo en la primer columna es la BW, a la cual se le pueden asignar 475 unidades quedando con esto satisfecho el segundo renglón.

En la misma primera columna, la siguiente casilla de menor costo es la CW a la cual se le pueden asignar 125 unidades, quedando con esto agotada la primer columna. Con estas asignaciones nuestra tabla será:

O \ D	W	U	Y	Z	Ofertas
A	25 X	18	21	23	510
B	19 475	23 X	22 X	26 X	475
C	22 125	25	26	17	390
E	24 X	21	20	22	225
Demandas	600	500	300	200	1600

Ahora en la segunda columna tenemos 3 casillas disponibles, siendo la de menor costo la AU, la cual podemos asignar con 500 unidades, quedando de esta manera satisfecha la segunda columna. Con estos cambios nuestra tabla será ahora:

O \ D	W	U	Y	Z	Ofertas
A	25 X	18 500	21	23	510
B	19 475	23 X	22 X	26 X	475
C	22 125	25 X	26	17	390
E	24 X	21 X	20	22	225
Demandas	600	500	300	200	1600

Se prosigue ahora con la tercera columna, en la cual la casilla disponible de menor costo es la EY, la cual se puede asignar hasta con 225 unidades, agotándose el último renglón. La siguiente casilla de menor costo en la columna será entonces la AY, la cual se asignará solamente con 10 unidades, pues con esto se agota la oferta del primer renglón, quedando aún la tercera columna no satisfecha en cuanto a su demanda, por lo que se asignará la casilla CY, que es la única disponible con 65 unidades, quedando ahora sí agotada la demanda. Con estas asignaciones nuestra tabla será:

O \ D	W	U	Y	Z	Ofertas
A	25 X	18 500	21 10	23 X	510
B	19 475	23 X	22 X	26 X	475
C	22 125	25 X	26 65	17	390
E	24 X	21 X	20 225	22 X	225
Demandas	600	500	300	200	1600

De aquí, en la cuarta columna sólo hay una casilla disponible, la CZ, la cual al asignarse deberá satisfacer tanto la oferta de su renglón, así como también la demanda de su columna, lo cual sucede si se asigna la casilla con 200 unidades. Con esto nuestra tabla quedará totalmente asignada siendo:

O \ D	W	U	Y	Z	Ofertas
A	25 X	18 500	21 10	23 X	510
B	19 475	23 X	22 X	26 X	475
C	22 125	25 X	26 65	17 200	390
E	24 X	21 X	20 225	22 X	225
Demandas	600	500	300	200	1600

Cuyo costo total para la distribución será:

$C_T = X_{BW} C_{BW} + X_{CW} C_{CW} + X_{AU} C_{AU} + X_{AY} C_{AY} + X_{CY} C_{CY} + X_{EY} C_{EY} + X_{CZ} C_{CZ}$

$C_T = (475)(19) + (125)(22) + (500)(18) + (10)(21) + (65)(26) + (225)(20) + (200)(17)$

$C_T = 30{,}575.0$

El cual es menor que el obtenido con el método de la Esquina noroeste en un 20.04%, por lo cual esta distribución es preferible a la obtenida con el método anterior.

Método Mutuamente Preferido.

Este método es aún mejor que los anteriores, pues selecciona las casillas de menor costo bajo el criterio de que sean a la vez la más baja del renglón y de la columna a la que pertenecen, con esto la aproximación inicial que se obtiene es mejor. Consiste en los siguientes pasos:

1.- Identificar aquellas casillas que tengan el costo mínimo tanto del renglón como de la columna a la que pertenecen.
2.- Asignar en estas casillas la cantidad máxima posible, con lo cual se satisfará por lo menos una de las cantidades de la oferta y/o la demanda.

3.- El resto de la tabla que permanece sin asignar, se irá llenando repitiendo los pasos anteriores hasta terminar.

A continuación ilustraremos este método aplicándolo al caso base:

Ejemplo IX.3.- Hacer la distribución inicial para el problema del caso base, usando el método Mutuamente Preferido.

Solución:

Lo primero será ver si hay alguna casilla que sea la del costo mínimo del renglón y de la columna en la que esté ubicada la casilla. Para esto, listaremos para cada renglón y cada columna las casillas con el menor costo, éstas son:

Línea	Casilla de menor costo
Primer renglón	AU
Segundo renglón	BW
Tercer renglón	CZ
Cuarto renglón	EY
Primera columna	BW
Segunda columna	AU
Tercera columna	EY
Cuarta columna	CZ

De esta lista vemos que hay 4 casillas que cumplen el requisito de ser las de menor costo, tanto del renglón como de la columna donde están situadas, éstas son la AU, BW, CZ y EY.

Ahora, conforme al segundo paso del método, debemos asignar a dichas casillas la cantidad máxima posible. Así para AU serán 500 unidades con lo que se agota la demanda de la segunda columna; para la BW, se asignarán 475 unidades, lo cual agotará la oferta del segundo renglón; para la CZ, se asignan 200 unidades, quedando con esto satisfecha la demanda de la cuarta columna; y para la EY, se le asignan 225 unidades, lo cual llenará la oferta del cuarto renglón. Con estas asignaciones nuestra tabla nos quedará:

O \ D	W	U	Y	Z	Ofertas
A	25	18 500	21	23 X	510
B	19 475	23 X	22 X	26 X	475
C	22	25 X	26	17 200	390
E	24 X	21 X	20 225	22 X	225
Demandas	600	500	300	200	1600

De esta tabla, conforme al tercer paso, nos queda todavía por asignar en los renglones primero y tercero y en las columnas primera y tercera. Listaremos al igual que al principio del problema las casillas no asignadas de menor costo:

Línea	Casilla de menor costo
Primer renglón	AY
Tercer renglón	CW
Primera columna	CW
Tercera columna	AY

Aquí vemos que hay 2 casillas para ser asignadas: la AY y la CW.

Para la AY lo más que se le puede asignar son 10 unidades, con lo cual se llena la oferta del primer renglón. Por su parte para la CW, lo máximo por asignar son 125 unidades, lo que agota la demanda de la primera columna.

El resto de la tabla (en realidad sólo sería la casilla CY) se asigna por diferencia para satisfacer a la vez la oferta del tercer renglón y la demanda de la tercera columna. Con esto nuestra tabla final es:

O \ D	W	U	Y	Z	Ofertas
A	25 X	18 500	21 10	23 X	510
B	19 475	23 X	22 X	26 X	475
C	22 125	25 X	26 65	17 200	390
E	24 X	21 X	20 225	22 X	225
Demandas	600	500	300	200	1600

La cual si la observamos vemos que es exactamente igual que la obtenida por el método del Costo menor, cuyo costo total era $C_T = 30{,}575.0$.

Esto no siempre sucede así, por lo general este método suele dar distribuciones iniciales mejores que las del método anterior.

Método de Vogel.

Este método es el más utilizado para lograr una asignación inicial en los problemas de transporte, pues no es complicado y da muy buenas aproximaciones iniciales, las cuales muchas veces son las distribuciones óptimas, de aquí el porqué es tan popular.

Consiste en los siguientes pasos:

1.- Para cada renglón y cada columna, encontrar la diferencia de costo entre la casilla más barata y la que le sigue en costo.

2.- En aquel renglón o columna donde dicha diferencia sea la máxima, asignar lo máximo posible en la casilla de menor costo. En caso de empates en las diferencias buscadas, se selecciona al azar una de ellas.

3.- Se elimina aquella línea (renglón o columna) que haya quedado satisfecha con la asignación del paso anterior.

4.- Repetir los pasos anteriores hasta completar la tabla de transporte.

Enseguida aplicaremos esta metodología al caso base:

Ejemplo IX.4 .- Asignar el caso base por el método de Vogel.

Solución:

De acuerdo al primer paso, hallaremos para cada renglón y para cada columna la diferencia entre la casilla más barata y la que le sigue en costo. Esto lo listamos.

Línea	Diferencia
Primer renglón	21-18=3
Segundo renglón	22-19=3
Tercer renglón	22-17=5
Cuarto renglón	21-20=1
Primera columna	22-19=3
Segunda columna	22-18=3
Tercera columna	21-20=1
Cuarta columna	22-17=5

De aquí vemos que se empatan con la mayor diferencia el tercer renglón y la cuarta columna, por lo que se selecciona al azar el tercer renglón, cuya casilla de menor costo es la CZ (que también es la más barata de la cuarta columna), en ella se asignarán 200 unidades con lo cual quedará satisfecha la demanda de la cuarta columna.

Con esto, nuestra tabla quedará:

O \ D	W	U	Y	Z	Ofertas
A	25	18	21	23 X	510
B	19	23	22	26 X	475
C	22	25	26	17 200	390
E	24	21	20	22 X	225
Demandas	600	500	300	200	1600

De aquí, conforme al paso 4 se repite el procedimiento. Listaremos nuevamente las diferencias para cada renglón y columna entre las casillas más baratas.

Línea	Diferencia
Primer renglón	21-18=3
Segundo renglón	22-19=3
Tercer renglón	25-22=3
Cuarto renglón	21-20=1
Primera columna	22-19=3
Segunda columna	21-18=3
Tercera columna	21-20=1

En este caso hay 5 líneas empatadas con la máxima diferencia, por lo que seleccionaremos al azar al primer renglón, cuya casilla de menor costo es la AU en la cual lo más que podemos asignar son 500 unidades, lo que agota la demanda de la segunda columna. Con esta asignación nuestra tabla quedará de la manera siguiente:

O \ D	W	U	Y	Z	Ofertas
A	25	18 500	21	23 X	510
B	19	23 X	22	26 X	475
C	22	25 X	26	17 200	390
E	24	21 X	20	22 X	225
Demandas	600	500	300	200	1600

De aquí repetimos el procedimiento, es decir, hallaremos las diferencias entre las 2 casillas más bajas en costo para cada renglón y columna no satisfechas, cuya lista será ahora:

Línea	Diferencia
Primer renglón	25-21=4
Segundo renglón	22-19=3
Tercer renglón	26-22=4
Cuarto renglón	24-20=4
Primera columna	22-19=3
Tercera columna	21-20=1

Ahora hay un triple empate, por lo que seleccionaremos al azar el segundo renglón, cuya casilla de menor costo es la BW, la cual podemos asignar hasta con 475 unidades, lo cual llenará la oferta del renglón, con esto nuestra tabla quedará:

O \ D	W	U	Y	Z	Ofertas
A	25	18 500	21	23 X	510
B	19 475	23 X	22 X	26 X	475
C	22	25 X	26	17 200	390
E	24	21 X	20	22 X	225
Demandas	600	500	300	200	1600

Ahora volvemos a repetir los pasos del 1 al 3 con la porción de tabla no asignada, cuyas diferencias son:

Línea	Diferencia
Primer renglón	25-21=4
Tercer renglón	26-22=4
Cuarto renglón	24-20=4
Primera columna	24-22=2
Tercera columna	21-20=1

Vuelve a haber un empate, por lo que al azar escogeremos al tercer renglón, cuya casilla de menor costo es la CW la cual asignaremos con 125 unidades, lo cual agotará la demanda de la primera columna. Con esto nuestra nueva tabla será ahora:

O \ D	W	U	Y	Z	Ofertas
A	25 X	18 500	21	23 X	510
B	19 475	23 X	22 X	26 X	475
C	22 125	25 X	26	17 200	390
E	24 X	21 X	20	22 X	225
Demandas	600	500	300	200	1600

De aquí sólo nos queda la tercera columna como línea con varias casillas, por lo que deberemos asignar en ella en su casilla más barata, la EY, a la cual le podemos asignar 225 unidades, lo que satisface la oferta del cuarto renglón, pero no la demanda de la columna. Por esto la siguiente casilla de menor costo en la columna es la AY a la que solamente la podemos asignar con 10 unidades, lo cual agota la oferta del primer renglón y todavía no llena a la demanda de la columna, por lo que la última casilla no asignada es la CY, la cual tendrá 65 unidades, con esto se satisface simultáneamente la oferta del tercer renglón y la demanda de la tercera columna, quedando nuestra tabla totalmente asignada, siendo ésta:

O \ D	W	U	Y	Z	Ofertas
A	25 X	18 500	21 10	23 X	510
B	19 475	23 X	22 X	26 X	475
C	22 125	25 X	26 65	17 200	390
E	24 X	21 X	20 225	22 X	225
Demandas	600	500	300	200	1600

Esta distribución es exactamente igual a las obtenidas con los 2 métodos anteriores, cuyo costo es 30,575.0 y aunque no es la óptima, sí está muy próxima a ella.

El método Vogel es mejor a los vistos anteriormente, por lo general, da mejores distribuciones iniciales, sólo que en tablas como en la presente donde hay diferencias grandes entre los costos de las casillas, los diferentes métodos tienden a dar buenas aproximaciones al óptimo.

Método de Russell.

Este método es comparable al Vogel en cuanto a la aproximación respecto a la solución óptima que ambos tienen, sólo que este método es menos popular que el anterior debido a que requiere de una mayor cantidad de trabajo.

Consiste en calcular antes de cada asignación la cantidad Δ_{ij} para cada casilla libre disponible, conforme a la siguiente ecuación:

$$\Delta_{ij} = \alpha_i + \beta_j - C_{ij} \qquad \text{Ec. (IX.6)}$$

Donde :
Δ_{ij} = Coeficiente de la casilla del renglón i, columna j.
α_i = Costo mayor de las casillas del renglón i.
β_j = Costo mayor de las casillas de la columna j.
C_{ij} = Costo de la casilla del renglón i, columna j.

De aquí se irá asignando aquella casilla que tenga el valor más elevado de Δ_{ij} .
El procedimiento por pasos es el siguiente:

1.- Se calcula Δ_{ij} para el total de las casillas vacías de la tabla de transporte.
2.- En la casilla que haya tenido el mayor valor de Δ_{ij}, hacer la máxima asignación posible. Esto agotará la oferta del renglón y/o la demanda de la columna. En el caso de haber varias casillas empatadas con el máximo valor de Δ_{ij} , se selecciona arbitrariamente una de ellas.
3.- Se elimina de la tabla aquella línea que haya quedado satisfecha en el paso anterior.
4.- Repetir el procedimiento desde el paso 1 al 3 con las casillas que aún están vacías hasta terminar las asignaciones de la tabla completa.

A continuación ilustraremos la metodología con un ejercicio.

Ejemplo IX.5.- Asigne la distribución inicial para el problema del caso base usando el método de Russell.
Solución:
Conforme al primer paso, calcularemos las Δ_{ij} de cada una de las 16 casillas de la tabla de transporte, cuyos valores serán:

$$\Delta_{11} = \alpha_1 + \beta_1 - C_{11} = 25 + 25 - 25 = 25 \qquad \Delta_{12} = \alpha_1 + \beta_2 - C_{12} = 25 + 25 - 18 = 32$$

$$\Delta_{13} = \alpha_1 + \beta_3 - C_{13} = 25 + 26 - 21 = 30 \qquad \Delta_{14} = \alpha_1 + \beta_4 - C_{14} = 25 + 26 - 23 = 28$$

$$\Delta_{21} = \alpha_2 + \beta_1 - C_{21} = 26 + 25 - 19 = 32 \qquad \Delta_{22} = \alpha_2 + \beta_2 - C_{22} = 26 + 25 - 23 = 28$$

$$\Delta_{23} = \alpha_2 + \beta_3 - C_{23} = 26 + 26 - 22 = 30 \qquad \Delta_{24} = \alpha_2 + \beta_4 - C_{24} = 26 + 26 - 26 = 26$$

$$\Delta_{31} = \alpha_3 + \beta_1 - C_{31} = 26 + 25 - 22 = 29 \qquad \Delta_{32} = \alpha_3 + \beta_2 - C_{32} = 26 + 25 - 25 = 26$$

$$\Delta_{33} = \alpha_3 + \beta_3 - C_{33} = 26 + 26 - 26 = 26 \qquad \Delta_{34} = \alpha_3 + \beta_4 - C_{34} = 26 + 26 - 17 = 35$$

$$\Delta_{41} = \alpha_4 + \beta_1 - C_{41} = 24 + 25 - 24 = 25 \qquad \Delta_{42} = \alpha_4 + \beta_2 - C_{42} = 24 + 25 - 21 = 28$$

$$\Delta_{43} = \alpha_4 + \beta_3 - C_{43} = 24 + 26 - 20 = 30 \qquad \Delta_{44} = \alpha_4 + \beta_4 - C_{44} = 24 + 26 - 22 = 28$$

De aquí vemos que la casilla con mayor Δ_{ij} es la CZ (tercer renglón, cuarta columna), la cual podemos asignar con 200 unidades, lo que agota la demanda de la cuarta columna, con esto nuestra tabla quedará:

O \ D	W	U	Y	Z	Ofertas
A	25	18	21	23 X	510
B	19	23	22	26 X	475
C	22	25	26	17 200	390
E	24	21	20	22 X	225
Demandas	600	500	300	200	1600

De aquí, conforme al paso 4, repetimos el paso 1 calculando Δ_{ij} para las casillas vacías:

$$\Delta_{11} = \alpha_1 + \beta_1 - C_{11} = 25 + 25 - 25 = 25 \qquad \Delta_{12} = \alpha_1 + \beta_2 - C_{12} = 25 + 25 - 18 = 32$$

$$\Delta_{13} = \alpha_1 + \beta_3 - C_{13} = 25 + 26 - 21 = 30 \qquad \Delta_{21} = \alpha_2 + \beta_1 - C_{21} = 23 + 25 - 19 = 29$$

$$\Delta_{22} = \alpha_2 + \beta_2 - C_{22} = 23 + 25 - 23 = 25 \qquad \Delta_{23} = \alpha_2 + \beta_3 - C_{23} = 23 + 26 - 22 = 27$$

$$\Delta_{31} = \alpha_3 + \beta_1 - C_{31} = 26 + 25 - 22 = 29 \qquad \Delta_{32} = \alpha_3 + \beta_2 - C_{32} = 26 + 25 - 25 = 26$$

$$\Delta_{33} = \alpha_3 + \beta_3 - C_{33} = 26 + 26 - 26 = 26 \qquad \Delta_{41} = \alpha_4 + \beta_1 - C_{41} = 24 + 25 - 24 = 25$$

$$\Delta_{42} = \alpha_4 + \beta_2 - C_{42} = 24 + 25 - 21 = 28 \qquad \Delta_{43} = \alpha_4 + \beta_3 - C_{43} = 24 + 26 - 20 = 30$$

De donde la Δ_{ij} máxima es la Δ_{12} (casilla AU), a la cual podemos asignarle 500 unidades, lo que llena la demanda de la segunda columna, con esto nuestra nueva tabla será:

O \ D	W	U	Y	Z	Ofertas
A	25	18 500	21	23 X	510
B	19	23 X	22	26 X	475
C	22	25 X	26	17 200	390
E	24	21 X	20	22 X	225
Demandas	600	500	300	200	1600

De aquí volvemos a repetir el procedimiento para las casillas vacías, entonces:

$$\Delta_{11} = \alpha_1 + \beta_1 - C_{11} = 25 + 25 - 25 = 25 \qquad \Delta_{13} = \alpha_1 + \beta_3 - C_{13} = 25 + 26 - 21 = 30$$

$$\Delta_{21} = \alpha_2 + \beta_1 - C_{21} = 22 + 25 - 19 = 28 \qquad \Delta_{23} = \alpha_2 + \beta_3 - C_{23} = 22 + 26 - 22 = 26$$

$$\Delta_{31} = \alpha_3 + \beta_1 - C_{31} = 26 + 25 - 22 = 29 \qquad \Delta_{33} = \alpha_3 + \beta_3 - C_{33} = 26 + 26 - 26 = 26$$

$$\Delta_{41} = \alpha_4 + \beta_1 - C_{41} = 24 + 25 - 24 = 25 \qquad \Delta_{43} = \alpha_4 + \beta_3 - C_{43} = 24 + 26 - 20 = 30$$

En este caso hay un empate entre Δ_{13} y Δ_{43}, por lo que se escoge al azar esta última para la asignación, entonces la máxima cantidad posible por asignar en la casilla EY es de 225 unidades, lo cual agotará la oferta del cuarto renglón, con esto la tabla será ahora:

O \ D	W	U	Y	Z	Ofertas
A	25	18 500	21	23 X	510
B	19	23 X	22	26 X	475
C	22	25 X	26	17 200	390
E	24 X	21 X	20 225	22 X	225
Demandas	600	500	300	200	1600

De aquí repitiendo el paso 1, calcularemos Δ_{ij} de las casillas que permanecen vacías:

$$\Delta_{11} = \alpha_1 + \beta_1 - C_{11} \qquad \Delta_{13} = \alpha_1 + \beta_3 - C_{13}$$

$= 25 + 25 - 25 = 25$ $\qquad\qquad$ $= 25 + 26 - 21 = 30$

$\Delta_{21} = \alpha_2 + \beta_1 - C_{21}$ $\qquad\qquad$ $\Delta_{23} = \alpha_2 + \beta_3 - C_{23}$
$= 22 + 25 - 19 = 28$ $\qquad\qquad$ $= 22 + 26 - 22 = 26$

$\Delta_{31} = \alpha_3 + \beta_1 - C_{31}$ $\qquad\qquad$ $\Delta_{33} = \alpha_3 + \beta_3 - C_{33}$
$= 26 + 25 - 22 = 29$ $\qquad\qquad$ $= 26 + 26 - 26 = 26$

Donde la casilla con Δ_{ij} mayor es la AY ($\Delta_{13} = 30$), la cual sólo puede asignarse con 10 unidades, lo que llenará la oferta del primer renglón, con esta asignación nuestra tabla será ahora:

O \ D	W	U	Y	Z	Ofertas
A	25 X	18 500	21 10	23 X	510
B	19	23 X	22	26 X	475
C	22	25 X	26	17 200	390
E	24 X	21 X	20 225	22 X	225
Demandas	600	500	300	200	1600

Ahora volveremos al paso 1 para obtener Δ_{ij} de las casillas vacías:

$\Delta_{21} = \alpha_2 + \beta_1 - C_{21}$ $\qquad\qquad$ $\Delta_{23} = \alpha_2 + \beta_3 - C_{23}$
$= 22 + 22 - 19 = 25$ $\qquad\qquad$ $= 22 + 26 - 22 = 26$

$\Delta_{31} = \alpha_3 + \beta_1 - C_{31}$ $\qquad\qquad$ $\Delta_{33} = \alpha_3 + \beta_3 - C_{33}$
$= 26 + 22 - 22 = 26$ $\qquad\qquad$ $= 26 + 26 - 26 = 26$

Como podemos ver, ha resultado un triple empate, seleccionando al azar Δ_{23}, casilla BY, ésta la podemos asignar con 65 unidades, lo cual agotará la demanda de la tercera columna. De esta forma nuestra tabla quedará de la siguiente manera:

O \ D	W	U	Y	Z	Ofertas
A	25 X	18 500	21 10	23 X	510
B	19	23 X	22 65	26 X	475
C	22	25 X	26 X	17 200	390
E	24 X	21 X	20 225	22 X	225
Demandas	600	500	300	200	1600

Finalmente, sólo nos quedan 2 casillas vacías, las cuales pueden asignarse por diferencias para agotar las ofertas y las demandas nò satisfechas, es decir, la casilla BW se asignará con 410 unidades y la CW con 190 unidades. Con esto nuestra tabla final completamente asignada será:

O \ D	W	U	Y	Z	Ofertas
A	25 X	18 500	21 10	23 X	510
B	19 410	23 X	22 65	26 X	475
C	22 190	25 X	26 X	17 200	390
E	24 X	21 X	20 225	22 X	225
Demandas	600	500	300	200	1600

La cual es diferente a la distribución obtenida con los métodos anteriores, su costo total será:

$$C_T = X_{AU}\,C_{AU} + X_{AY}\,C_{AY} + X_{BW}\,C_{BW} + X_{BY}\,C_{BY} + X_{CW}\,C_{CW} + X_{CZ}\,C_{CZ} + X_{EY}\,C_{EY}$$
$$= (500)(18) + (10)(21) + (410)(19) + (65)(22) + (190)(22) + (200)(17) + (225)(20)$$
$$= 30{,}510.0$$

Como podemos ver, este método ha dado una mejor aproximación que los anteriores, la cual es la solución óptima del problema. Esto no significa que este método sea mejor que el Vogel, pues si en la designación arbitraria donde se escogió a la casilla BY para ser asignada, se hubiera elegido la CY (cuya Δ estaba empatada), la distribución obtenida con el método de Russell, hubiese sido exactamente igual a la de los métodos anteriores.

Lo que sí es notorio es que este método requiere de mayor cantidad de cálculos que el Vogel.

Métodos de Optimización.

Los métodos de optimización nos llevan a partir de una distribución inicial a encontrar la distribución de menor costo (o mayor utilidad en su caso), es decir la solución óptima del problema.

En este inciso presentaremos 2 métodos de optimización, los cuales son ampliamente conocidos: El método del Cruce del Arroyo y el método Modi.

Los 2 métodos para poder aplicarse a una distribución inicial dada, requieren que se cumpla la condición de NO DEGENERACION, establecida en la ecuación (IX.7):

$$m + n - 1 = NC \qquad \text{Ec. (IX.7)}$$

Donde :

NC = Número de casillas asignadas en la distribución inicial.
m = Número de renglones de la tabla de transporte.
n = Número de columnas de la tabla de transporte.

Esta condición implica que el número de variables básicas (casillas asignadas) debe ser igual en todo momento al número de ecuaciones de restricción que sean independientes. En caso de no satisfacerse la ecuación (IX.7), se dice que existe DEGENERACION, la cual puede resolverse como se verá más adelante.

Método del Cruce del Arroyo.

Este método consiste en que dada una distribución inicial que haya cumplido la condición de no degeneración, se podrá optimizar el problema de transporte evaluando para cada casilla vacía el recorrido cerrado correspondiente a ella. El recorrido cerrado consiste en asignar unidades a la casilla vacía en cuestión, trayéndolas de una casilla asignada que sea del mismo renglón o de la misma columna, de modo que se sigan cumpliendo las igualdades de la suma de asignaciones de las casillas por renglón con la oferta del mismo y la suma de asignaciones de las casillas por columna con la demanda de ésta.

Además, para hacer el recorrido cerrado completo, no deberá incluirse en él a ninguna casilla vacía excepto la que se está evaluando. Habrá un recorrido cerrado para cada casilla vacía, que podrá constar de un número de casillas variable.

El valor del recorrido cerrado será el cambio en costo de efectuar las reasignaciones, si resulta positivo implicará un incremento en los costos; por el contrario, un recorrido cerrado negativo significará una disminución en el costo de la distribución, por lo que si lo que estamos buscando es bajar el costo total de la tabla, elegiremos como el recorrido cerrado a efectuar a aquel que resulte con el valor más negativo. Por lo tanto, nuestra distribución será óptima si los recorridos cerrados para el total de las casillas vacías resultan mayores o iguales que cero.

Esta metodología la ilustraremos con un ejemplo:

Ejemplo IX.6.- Dada la siguiente tabla de transporte, obtenga la distribución de costo mínimo, empleando el método de la Esquina Noroeste para obtener la distribución inicial y el método de Cruce del Arroyo para la optimización.

destino / origen	Centro de ventas 1	Centro de ventas 2	Centro de ventas 3	Ofertas
Centro de prod. 1	24	18	21	7500
Centro de prod. 2	23	20	19	6500
Demandas	6000	4500	3500	14000

Solución:

De acuerdo a la metodología de la Esquina noroeste, la tabla de la distribución inicial será:

destino / origen	Centro de ventas 1	Centro de ventas 2	Centro de ventas 3	Ofertas
Centro de prod. 1	24 6000	18 1500	21	7500
Centro de prod. 2	23	20 3000	19 3500	6500
Demandas	6000	4500	3500	14000

Con un costo de:

$$\begin{aligned} Ct &= X_{11}\,C_{11} + X_{12}\,C_{12} + X_{22}\,C_{22} + X_{23}\,C_{23} \\ &= (6000)(24) + (1500)(18) + (3000)(20) + (3500)(19) \\ &= 297{,}500.0 \end{aligned}$$

También vemos que sí se cumple con la condición de no degeneración, pues el número de casillas asignadas es 4 , entonces evaluaremos los recorridos cerrados para las 2 casillas vacías:

Casilla 1-3:

Para enviar una unidad a esta casilla, podemos tomarla de la casilla 1-2, esto descompensará las columnas 2 y 3, lo cual se equilibra si enviamos una unidad de la casilla 2-3 a la 2-2. Esto lo mostramos en el siguiente esquema.

destino / origen	Centro de ventas 1	Centro de ventas 2	Centro de ventas 3	Ofertas
Centro de prod. 1	24 6000	18 1499	21 1	7500
Centro de prod. 2	23	20 3001	19 3499	6500
Demandas	6000	4500	3500	14000

De aquí vemos que los renglones y columnas están equilibrados en cuanto a las ofertas y las demandas.

El valor del recorrido se estima de la siguiente manera:

Puesto que hemos enviado una unidad a la casilla 1-3, nuestro costo se elevará en 21; como dicha unidad se ha tomado de la casilla 1-2, el costo por este movimiento disminuye en 18; a la casilla 2-2 se le ha aumentado en su asignación una unidad, lo cual aumenta el costo en 20; de la casilla 2-3 se tomó esta unidad, lo cual representa una disminución del costo en 19. Por tanto el resumen de estos cambios nos da el valor del recorrido cerrado para la casilla 1-3:

$$\text{Recorrido cerrado} = 21 - 18 + 20 - 19 = +4$$

Por lo que si efectuamos reasignaciones en base a este recorrido elevaremos el costo total en 4 unidades por cada unidad de mercancía reasignada.

Casilla 2-1:

Para asignar una unidad a esta casilla, podemos tomarla de la casilla 2-2, esto hará que se desequilibren la primera y segunda columnas; para compensar esto, enviaremos una unidad de la casilla 1-1 a la 1-2, con esto nuestra tabla será:

destino / origen	Centro de ventas 1	Centro de ventas 2	Centro de ventas 3	Ofertas
Centro de prod. 1	24 5999	18 1501	21	7500
Centro de prod. 2	23 1	20 2999	19 3500	6500
Demandas	6000	4500	3500	14000

El valor del recorrido lo podemos evaluar sumando los costos de las casillas que aumentaron su asignación y restando el costo de las casillas que disminuyeron:

$$\text{Recorrido cerrado} = 23 + 18 - 24 - 20 = -3$$

Por lo que reasignar una unidad conforme al recorrido cerrado, disminuirá el costo en 3.

Por lo tanto tomaremos la reasignación para el recorrido cerrado de la casilla 2-1. Además para determinar el número de unidades a reasignarse, convendrá mover tantas como sea posible, dado que cada unidad reasignada disminuirá el costo. Este número será el menor de aquellas casillas asignadas que forman parte del recorrido cerrado que son donadoras de unidades, es decir, aquellas que disminuyen su asignación. En este caso las casillas donadoras son las 1-1 y la 2-2, como X_{11} es 6000 y X_{22} es 3000, este número será la cantidad de unidades reasignadas, con este cambio nuestra tabla quedará en la siguiente forma:

destino / origen	Centro de ventas 1	Centro de ventas 2	Centro de ventas 3	Ofertas
Centro de prod. 1	24 3000	18 4500	21	7500
Centro de prod. 2	23 3000	20	19 3500	6500
Demandas	6000	4500	3500	14000

De la tabla observamos que con el intercambio de 3000 unidades, una casilla que era vacía es ahora asignada (la 2-1) y una casilla que era asignada es ahora vacía (la 2-2), lo cual hace que se siga cumpliendo la condición de no degeneración.

El costo de esta nueva distribución es:

$$Ct = X_{11}\,C_{11} + X_{12}\,C_{12} + X_{21}\,C_{21} + X_{23}\,C_{23}$$
$$= (3000)(24) + (4500)(18) + (3000)(23) + (3500)(19)$$
$$= 288{,}500.0$$

Con lo cual vemos que la distribución actual disminuye el costo en 9000 unidades monetarias respecto a la anterior.

Para saber si esta distribución es la mejor, debemos evaluar los recorridos cerrados de sus casillas vacías, si éstas son mayores o iguales que cero, nuestra distribución será la óptima; en caso contrario, se deberá cambiar conforme al recorrido cerrado más negativo que hubiese resultado.

Por lo tanto, procederemos a evaluar los recorridos cerrados para las casillas vacías 1-3 y 2-2:

Casilla 1-3:
Se envía una unidad a esta casilla tomándola de la casilla 2-3, lo cual desequilibra al primer y segundo renglón, lo que se compensa enviando una unidad de la casilla 1-1 a la 2-1, con esto tendremos:

$$\text{Recorrido cerrado} = 21 - 19 + 23 - 24 = +1$$

Casilla 2-2:
Se envía una unidad a esta casilla desde la 1-2, lo cual desequilibra los 2 renglones de la tabla, lo que se soluciona con enviar una unidad de la casilla 2-1 a la 1-1, su valor será:

$$\text{Recorrido cerrado} = 20 - 18 + 24 - 23 = +3$$

Por lo cual nuestra distribución es la óptima.

Método Modi.

Este método consiste en obtener primeramente los valores de los coeficientes para los renglones r_i y para las columnas k_j con la fórmula dada por la ecuación (IX.8) la cual se aplica exclusivamente para casillas asignadas:

$$r_i + C_{ij} + k_j = 0 \qquad \text{Ec. (IX.8)}$$

Donde :

r_i = Coeficiente r para el renglón i
C_{ij} = Costo de la casilla asignada ubicada en el renglón i y la columna j
k_j = Coeficiente k para la columna j

Por la condición de no degeneración habrá (m+n-1) casillas asignadas y habrá m coeficientes de renglones r_i y n coeficientes de columnas k_j, es decir, un total de (m+n) coeficientes desconocidos, por lo que habrá un grado de libertad, o sea que elegiremos arbitrariamente un coeficiente r_i o k_j y los restantes los calcularemos aplicando la ecuación (IX.8). Una vez definidos los coeficientes, calcularemos para cada casilla vacía en que haya el valor de $(r_i + C_{ij} + k_j)$. Si esta suma resulta negativa para una casilla vacía dada, esto significa que el asignar unidades de mercancía a esa casilla, hará disminuir el costo. Si la suma de $(r_i+C_{ij}+k_j)$ para la casilla vacía es positiva, significa por el contrario, que el asignar a esta casilla incrementará el costo. Por lo que una distribución dada será óptima, en el momento en que todas sus casillas vacías tengan una sumatoria de $(r_i+ C_{ij}+k_j)$ mayor o igual que cero. En caso contrario, se deberá reasignar en aquella casilla vacía para la cual su sumatoria sea más negativa. Esta reasignación se hará conforme al recorrido cerrado correspondiente para la casilla en cuestión, al igual que en el método anterior.

Este procedimiento lo ilustraremos resolviendo el mismo ejercicio del ejemplo anterior.

Ejemplo IX.7- Resolver la misma distribución inicial para el problema del ejemplo IX.6 por el método Modi.

Solución:
La distribución inicial es:

destino / origen	Centro de ventas 1	Centro de ventas 2	Centro de ventas 3	Ofertas
Centro de prod. 1	24 6000	18 1500	21	7500
Centro de prod. 2	23	20 3000	19 3500	6500
Demandas	6000	4500	3500	14000

Aquí tendremos como incógnitas a 5 coeficientes r_1, r_2, k_1, k_2 y k_3, de los cuales debemos seleccionar uno al azar para definirlo arbitrariamente.

En este caso elegiremos $r_1 = 0$.

Ahora aplicaremos la ecuación (IX.8) para las 4 casillas asignadas:

Casilla 1-1:

$$r_1 + C_{11} + k_1 = 0$$
$$0 + 24 + k_1 = 0,\ k_1 = -24$$

Casilla 1-2:

$$r_1 + C_{12} + k_2 = 0$$
$$0 + 18 + k_2 = 0,\ k_2 = -18$$

Casilla 2-2:

$$r_2 + C_{22} + k_2 = 0$$
$$r_2 + 20 - 18 = 0,\ r_2 = -2$$

Casilla 2-3:

$$r_2 + C_{23} + k_3 = 0$$
$$-2 + 19 + k_3 = 0, k_3 = -17$$

De aquí obtendremos el valor de $(r_i + C_{ij} + k_j)$ para las casillas vacías:

Casilla 1-3:

$$r_1 + C_{13} + k_3 = 0 + 21 - 17 = +4$$

Casilla 2-1:

$$r_2 + C_{21} + k_1 = -2 + 23 - 24 = -3$$

Por lo que debemos reasignar unidades en la casilla 2-1, que ha resultado negativa conforme al recorrido cerrado, el cual deberá efectuarse enviando una unidad desde la casilla 1-1 y compensando las ofertas de los renglones enviando una unidad de la casilla 2-2 a la 1-2, por lo que se deberán mover 3000 unidades. Con estos movimientos nuestra tabla será:

destino / origen	Centro de ventas 1	Centro de ventas 2	Centro de ventas 3	Ofertas
Centro de prod. 1	24 3000	18 4500	21	7500
Centro de prod. 2	23 3000	20	19 3500	6500
Demandas	6000	4500	3500	14000

Ahora debemos recalcular para esta tabla las r_i y k_j, definiendo arbitrariamente una de ellas, tomaremos ahora $k_1 = 0$, entonces al aplicar la Ec. (IX.8) a las casillas asignadas:

Casilla 1-1:

$$r_1 + C_{11} + k_1 = 0$$
$$r_1 + 24 + 0 = 0, \quad r_1 = -24$$

Casilla 1-2:

$$r_1 + C_{12} + k_2 = 0$$
$$-24 + 18 + k_2 = 0, \quad k_2 = 6$$

Casilla 2-1:

$$r_2 + C_{21} + k_1 = 0$$
$$r_2 + 23 + 0 = 0, \quad r_2 = -23$$

Casilla 2-3:

$$r_2 + C_{23} + k_3 = 0$$
$$-23 + 19 + k_3 = 0, \quad k_3 = 4$$

Obtendremos ahora $(r_i+C_{ij}+k_j)$ para las casillas vacías:

Casilla 1-3: $r_1 + C_{13} + k_3 = -24 + 21 + 4 = +1$

Casilla 2-2: $r_2 + C_{22} + k_2 = -23 + 20 + 6 = +3$

De aquí vemos que nuestra distribución actual es la óptima, la cual es la misma obtenida con el método anterior, cuyo costo es Ct = 288,500.0.

Debemos señalar que cuando una casilla vacía en su evaluación del recorrido cerrado para el método del Cruce del Arroyo o bien en su valor de $(r_i + C_{ij} + k_j)$ por el presente método, su valor sea cero, esto significa que el asignar unidades en dicha casilla dará una distribución cuyo costo total empata con el de la tabla actual. Por eso se establece que si al hacer las evaluaciones para las casillas vacías, los valores de éstas resultan mayores o iguales que cero, será la distribución óptima, puesto que ya no habrá otra que disminuya más el costo.

Como podemos ver, ambos métodos son muy parecidos y no existe una diferencia significativa para usar uno u otro, por lo que puede emplearse el que el lector desee.

Variantes en los problemas de transporte.

Aquí veremos 4 situaciones especiales que suelen aparecer en los problemas de transporte como son: Oferta diferente de demanda, problemas de maximización, casos de degeneración y rutas prohibidas.

Oferta diferente de demanda.

Suele suceder en los problemas reales de transporte que la oferta total de los centros de producción no coincide con la demanda total de los centros de venta o distribución, a este tipo de situaciones suele conocérseles como problemas no equilibrados.

Para resolver éstos lo que se hace es crear un centro de producción ficticio si la oferta es menor que la demanda, o bien un centro de venta ficticio si la demanda es menor que la oferta, de tal forma que éstas se igualen, lo cual implica que el centro ficticio manejará un número de unidades exactamente igual a la diferencia entre la oferta y la demanda.

A los costos de las casillas de la línea del centro ficticio se les fija un valor de cero y para obtener la distribución inicial por alguno de los métodos vistos anteriormente, la línea correspondiente al centro ficticio no se toma en cuenta, sólo se asignarán sus casillas por diferencias respecto al total de las ofertas y demandas de los renglones y columnas de la tabla.

Presentaremos un ejercicio de este tipo para ilustrar lo que se ha señalado:

Ejemplo IX.8.- Dada la siguiente tabla de un problema de transporte, obtener la distribución óptima utilizando el método del Costo Menor por renglones para inicializar y el Modi para optimizar.

destino / origen	W	Y	Z	Ofertas
A	31	23	26	6000
B	27	30	24	5500
D	25	29	28	5000
E	23	28	27	4000
Demandas	8000	6500	4500	20500 / 19000

Solución:

Lo primero será crear un centro de ventas ficticio F, que tendrá una demanda de 20500 - 19000 = 1500 unidades, a fin de igualar la oferta y la demanda total, con casillas de costo cero, con esto nuestra tabla equilibrada será:

destino / origen	W	Y	Z	F	Ofertas
A	31	23	26	0	6000
B	27	30	24	0	5500
D	25	29	28	0	5000
E	23	28	27	0	4000
Demandas	8000	6500	4500	1500	20500

Ahora aplicaremos el método del Costo menor por renglón sin considerar las casillas de la columna F, con esto nuestra tabla inicial será:

destino / origen	W	Y	Z	F	Ofertas
A	31	23 6000	26	0	6000
B	27 1000	30	24 4500	0	5500
D	25 5000	29	28	0	5000
E	23 2000	28 500	27	0 1500	4000
Demandas	8000	6500	4500	1500	20500

Cuyo resumen de asignaciones fue:

1.- En el primer renglón se asignan 6000 unidades en la casilla más baja en costo AY, lo que agota la oferta.

2.- En el segundo renglón se asignan 4500 unidades a la casilla más barata BZ, lo que satisface la demanda. Se toma entonces la segunda casilla más barata BW y se asignan 1000 unidades con lo que se agota la oferta del renglón.

3.- En el tercer renglón asignamos 5000 unidades en la casilla de menor costo, la DW, lo cual satisface la oferta.

4.- En el cuarto renglón la casilla más barata es la EW, la cual se asigna con 2000 unidades, que llena la demanda de su columna. Se asigna luego la casilla EY con 500 unidades, lo que satisface la demanda de su respectiva columna, para finalmente asignar la casilla EF con 1500 unidades lo que agota a la vez la oferta de su renglón y la demanda de su columna.

El costo de esta distribución es:

Ct $= (1000)(27) + (5000)(25) + (2000)(23) + (6000)(23) + (500)(28) + (4500)(24) + (1500)(0)$
$= 458{,}000.0$

De aquí pasaremos ahora a aplicar el Modi para la optimización, viendo que se cumple con la condición de no degeneración. Tendremos como coeficientes a r_A, r_B, r_D y r_E para los renglones y k_W, k_Y, k_Z y k_F para las columnas, elegiremos al azar definir $k_W = 0$, para calcular las demás con la ec. (IX.8), al aplicarla a las casillas llenas:

Casilla BW:

$$r_B + C_{BW} + k_W = 0$$
$$r_B + 27 + 0 = 0, \quad r_B = -27$$

Casilla DW:

$$r_D + C_{DW} + k_W = 0$$
$$r_D + 25 + 0 = 0, \quad r_D = -25$$

Casilla EW:

$$r_E + C_{EW} + k_W = 0$$
$$r_E + 23 + 0 = 0, \quad r_E = -23$$

Casilla EY:

$$r_E + C_{EY} + k_Y = 0$$
$$-23 + 28 + k_Y = 0, \quad k_Y = -5$$

Casilla AY:

$$r_A + C_{AY} + k_Y = 0$$
$$r_A + 23 - 5 = 0, \qquad r_A = -18.$$

Casilla BZ:

$$r_B + C_{BZ} + k_Z = 0$$
$$-27 + 24 + k_Z = 0, \qquad k_Z = 3$$

Casilla EF:

$$r_E + C_{EF} + k_F = 0$$
$$-23 + 0 + k_F = 0, \quad k_F = 23$$

Obtendremos ahora los valores de $(r_i + C_{ij} + k_j)$ para las casillas vacías:

Casilla AW: $r_A + C_{AW} + k_W = -18 + 31 + 0 = +13$
Casilla AZ: $r_A + C_{AZ} + k_Z = -18 + 26 + 3 = +11$
Casilla AF: $r_A + C_{AF} + k_F = -18 + 0 + 23 = +5$
Casilla BY: $r_B + C_{BY} + k_Y = -27 + 30 - 5 = -2$
Casilla BF: $r_B + C_{BF} + k_F = -27 + 0 + 23 = -4$
Casilla DY: $r_D + C_{DY} + k_Y = -25 + 29 - 5 = -1$
Casilla DZ: $r_D + C_{DZ} + k_Z = -25 + 28 + 3 = +6$
Casilla DF: $r_D + C_{DF} + k_F = -25 + 0 + 23 = -2$
Casilla EZ: $r_E + C_{EZ} + k_Z = -23 + 27 + 3 = +7$

Aquí la casilla más negativa es la BF, en la cual deberemos asignar unidades en el recorrido cerrado que le corresponde, que será: enviar desde la EF a la BF, compensando con enviar desde la BW a la EW, aquí las celdas donadoras son la EF y la BW, debiendo transferir entonces 1000 unidades que es la cantidad menor de las celdas donadoras. Con este movimiento nuestra tabla quedará de la manera siguiente:

destino / origen	W	Y	Z	F	Ofertas
A	[31] X	[23] 6000	[26] X	[0] X	6000
B	[27] X	[30] X	[24] 4500	[0] 1000	5500
D	[25] 5000	[29] X	[28] X	[0] X	5000
E	[23] 3000	[28] 500	[27] X	[0] 500	4000
Demandas	8000	6500	4500	1500	20500

El costo de esta distribución es:

Ct = (6000)(23) + (5000)(25) + (3000)(23) + (500)(28) + (4500)(24) + (1000)(0) + (500)(0)
= 454,000.0

Con lo que vemos que el costo ha disminuido en 4000 unidades monetarias, por enviar 1000 unidades desde la casilla BW con costo unitario de 27 hacia la casilla EW con un costo unitario de 23, por lo que el ahorro es de 4x1000= 4000 unidades monetarias.

Ahora procederemos a obtener los coeficientes r_i y k_j, definiendo ahora a $k_F = 10$ y calculando las restantes por la Ec. (IX.8):

Casilla BF:

$$r_B + C_{BF} + k_F = 0$$
$$r_B + 0 + 10 = 0, \quad r_B = -10$$

Casilla EF:

$$r_E + C_{EF} + k_F = 0$$
$$r_E + 0 + 10 = 0, \quad r_E = -10$$

Casilla BZ:

$$r_B + C_{BZ} + k_Z = 0$$
$$-10 + 24 + k_Z = 0, \quad k_Z = -14$$

Casilla EY:

$$r_E + C_{EY} + k_Y = 0$$
$$-10 + 28 + k_Y = 0, \quad k_Y = -18$$

Casilla EW:

$$r_E + C_{EW} + k_W = 0$$
$$-10 + 23 + k_W = 0, \quad k_W = -13$$

Casilla DW:

$$r_D + C_{DW} + k_W = 0$$
$$r_D + 25 - 13 = 0, r_D = -12$$

Casilla AY:

$$r_A + C_{AY} + k_Y = 0$$
$$r_A + 23 - 18 = 0, r_A = -5$$

Ahora estimaremos los valores de ($r_i + C_{ij} + k_j$) para las casillas vacías:

Casilla AW: $r_A + C_{AW} + k_W = -5 + 31 - 13 = +13$
Casilla AZ: $r_A + C_{AZ} + k_Z = -5 + 26 - 14 = +7$
Casilla AF: $r_A + C_{AF} + k_F = -5 + 0 + 10 = +5$
Casilla BW: $r_B + C_{BW} + k_W - 10 + 27 - 13 = +4$
Casilla BY: $r_B + C_{BY} + k_Y = -10 + 30 - 18 = +2$
Casilla DY: $r_D + C_{DY} + k_Y = -12 + 29 - 18 = -1$
Casilla DZ: $r_D + C_{DZ} + k_Z = -12 + 28 - 14 = +2$
Casilla DF: $r_D + C_{DF} + k_F = -12 + 0 + 10 = -2$
Casilla EZ: $r_E + C_{EZ} + k_Z = -10 + 27 - 14 = +3$

Aquí vemos que la casilla más negativa es la DF, para la cual el recorrido cerrado es enviar unidades a ella de la casilla EF y compensar los renglones enviando de la casilla DW a la EW. El número mínimo de las asignaciones de las casillas donadoras, EF y DW es 500, que serán las unidades a transferir.

Con esto nuestra tabla será ahora:

destino / origen	W	Y	Z	F	Ofertas
A	31 X	23 6000	26 X	0 X	6000
B	27 X	30 X	24 4500	0 1000	5500
D	25 4500	29 X	28 X	0 500	5000
E	23 3500	28 500	27 X	0 X	4000
Demandas	8000	6500	4500	1500	20500

Cuyo costo es :

$Ct = (6000)(23) + (4500)(24) + (1000)(0) + (500)(0) + (4500)(25) + (3500)(23) + (500)(28)$
$= 453{,}000.0$

Una disminución de 1000 unidades monetarias respecto a la distribución anterior, ahorro de 500 x (25-23) = 1000 por transferir 500 unidades de la casilla DW a la EW.

Debemos volver a calcular los coeficientes r_i y k_j, fijaremos $r_B = 0$ en este caso y estimaremos los restantes por la Ec. (IX.8):

Casilla BZ:

$$r_B + C_{BZ} + k_Z = 0$$
$$0 + 24 + k_Z = 0,\ k_Z = -24$$

Casilla BF:

$$r_B + C_{BF} + k_F = 0$$
$$0 + 0 + k_F = 0,\quad k_F = 0$$

Casilla DF:

$$r_D + C_{DF} + k_F = 0$$
$$r_D + 0 + 0 = 0,\quad r_D = 0$$

Casilla DW:

$$r_D + C_{DW} + k_W = 0$$
$$0 + 25 + k_W = 0, k_W = -25$$

Casilla EW:

$$r_E + C_{EW} + k_W = 0$$
$$r_E + 23 - 25 = 0, \; r_E = +2$$

Casilla EY:

$$r_E + C_{EY} + k_Y = 0$$
$$2 + 28 + k_Y = 0, \quad k_Y = -30$$

Casilla AY:

$$r_A + C_{AY} + k_Y = 0$$
$$r_A + 23 - 30 = 0, \quad r_A = +7$$

Evaluaremos ahora $(r_i + C_{ij} + k_j)$ para las casillas vacías:

Casilla AW: $r_A + C_{AW} + k_W = 7 + 31 - 25 = +13$
Casilla AZ: $r_A + C_{AZ} + k_Z = 7 + 26 - 24 = +9$
Casilla AF: $r_A + C_{AF} + k_F = 7 + 0 + 0 = +7$
Casilla BW: $r_B + C_{BW} + k_W = 0 + 27 - 25 = +2$
Casilla BY: $r_B + C_{BY} + k_Y = 0 + 30 - 30 = 0$
Casilla DY: $r_D + C_{DY} + k_Y = 0 + 29 - 30 = -1$
Casilla DZ: $r_D + C_{DZ} + k_Z = 0 + 28 - 24 = +4$
Casilla EZ: $r_E + C_{EZ} + k_Z = 2 + 27 - 24 = +5$
Casilla EF: $r_E + C_{EF} + k_F = 2 + 0 + 0 = +2$

Con lo que vemos que la distribución no es la óptima, pues la casilla DY es negativa, siendo ella hacia donde debemos transferir unidades. Su recorrido cerrado será enviar mercancías de la casilla EY a la DY y equilibrar los renglones reexpidiendo de la DW a la EW. Las casillas donadoras son la EY y la DW, por lo que transferiremos 500 unidades, con esto nuestra tabla quedará:

destino / origen	W	Y	Z	F	Ofertas
A	31 X	23 6000	26 X	0 X	6000
B	27 X	30 X	24 4500	0 1000	5500
D	25 4000	29 500	28 X	0 500	5000
E	23 4000	28 X	27 X	0 X	4000
Demandas	8000	6500	4500	1500	20500

Cuyo costo será:

$$Ct = (4000)(25) + (4000)(23) + (6000)(23) + (500)(29) + (4500)(24) + (1000)(0) + (500)(0)$$
$$= 452{,}500.0$$

Representando un ahorro de 500 unidades monetarias con respecto a la tabla anterior.

Nuevamente calcularemos las r_i y k_j, definiendo $k_F = 0$ y estimando las restantes por la Ec. (IX.8):

Casilla BF:

$$r_B + C_{BF} + k_F = 0$$
$$r_B + 0 + 0 = 0, \; r_B = 0$$

Casilla DF:

$$r_D + C_{DF} + k_F = 0$$
$$r_D + 0 + 0 = 0, \; r_D = 0$$

Casilla BZ:

$$r_B + C_{BZ} + k_Z = 0$$
$$0 + 24 + k_Z = 0, \; k_Z = -24$$

Casilla DY:

$$r_D + C_{DY} + k_Y = 0$$
$$0 + 29 + k_Y = 0, \quad k_Y = -29$$

Casilla DW:

$$r_D + C_{DW} + k_W = 0$$
$$0 + 25 + k_W = 0, \quad k_W = -25$$

Casilla AY:

$$r_A + C_{AY} + k_Y = 0$$
$$r_A + 23 - 29 = 0, r_A = +6$$

Casilla EW:

$$r_E + C_{EW} + k_W = 0$$
$$r_E + 23 - 25 = 0, \; r_E = +2$$

Volviendo a evaluar las casillas vacías, tendremos:
Casilla AW: $r_A + C_{AW} + k_W = 6 + 31 - 25 = +12$
Casilla AZ: $r_A + C_{AZ} + k_Z = 6 + 26 - 24 = +8$
Casilla AF: $r_A + C_{AF} + k_F = 6 + 0 + 0 = +6$
Casilla BW: $r_B + C_{BW} + k_W = 0 + 27 - 25 = +2$
Casilla BY: $r_B + C_{BY} + k_Y = 0 + 30 - 29 = +1$
Casilla DZ: $r_D + C_{DZ} + k_Z = 0 + 28 - 24 = +4$
Casilla EY: $r_E + C_{EY} + k_Y = 2 + 28 - 29 = +1$
Casilla EZ: $r_E + C_{EZ} + k_Z = 2 + 27 - 24 = +5$
Casilla EF: $r_E + C_{EF} + k_F = 2 + 0 + 0 = +2$

Lo cual nos indica que la distribución es la óptima.

Hemos visto aquí cómo el método Modi ha logrado la solución del problema en 3 iteraciones, por lo que la distribución inicial obtenida con el método del Costo Menor no ha sido muy buena. En comparación a esto podemos señalar que el método de Vogel obtiene al aplicarlo al problema como distribución inicial la tabla óptima, que nos da una clara idea de su superioridad respecto al método actual.

Problemas de Maximización.

Hay casos de transporte en donde aparecen problemas de programación lineal en los que deberá maximizarse una utilidad o un ingreso y no minimizar un costo como es la situación típica que hemos visto hasta ahora.

Para estas ocasiones se aplica la metodología descrita en los incisos anteriores con pequeños cambios que es conveniente señalar.

Por principio, diremos que la matriz incluirá en cada casilla en su recuadro superior derecho, a la utilidad o bien, el ingreso individual correspondiente a esa casilla por enviar mercancías del origen i al destino j respectivos. La función objetivo será la utilidad o el ingreso total, el cual deberá maximizarse.

En lo referente a los métodos de inicialización, comentaremos que el de la Esquina Noroeste no sufre ninguna modificación; el método del Costo Menor , buscará ahora por renglón o por columna, según el tipo que se trate, de asignar aquellas casillas que tengan la utilidad mayor en cada caso; el método Mutuamente Preferido de manera similar seleccionará para asignaciones a aquellas casillas que sean a la vez las de máxima utilidad del renglón y de la columna a la que pertenecen; el Vogel buscará las diferencias para cada renglón y para cada columna entre la casilla de mayor utilidad y la que le sigue; por su parte el método Russell, elegirá ahora aquella casilla que obtenga el mínimo valor de Δ_{ij}, conforme a la Ec. (IX.6), sólo que ahora α_i será la utilidad menor del renglón i, β_j será la mínima utilidad de la columna j y C_{ij} será la utilidad de la casilla en cuestión.

Por su parte, para los métodos de optimización, el del Cruce del Arroyo buscará asignar en aquella casilla vacía que haya obtenido el máximo valor del recorrido cerrado y la solución óptima se habrá obtenido cuando todos los valores de los recorridos cerrados sean menores o iguales a cero. El método Modi de manera similar, asignará en aquella casilla vacía que tenga el valor mayor de $(r_i+C_{ij}+k_j)$ y la solución óptima se hallará cuando estos valores sean menores o iguales a cero para todas las casillas vacías.

Para una idea más clara de lo antes descrito, presentaremos un ejercicio.

Ejemplo IX.9.- Maximizar la utilidad en el problema de transporte siguiente.

destino / origen	W	Y	Z	oferta
A	10	8	13	7500
B	13	11	9	6000
D	11	12	10	5500
demanda	8000	6700	4300	19000

Utilícese el método de Russell para la distribución inicial y el método Modi para la optimización.

Solución:

Conforme a la visto anteriormente para el método de Russell, aplicaremos la Ec. (IX.6) para cada una de las 9 casillas:

$$\Delta_{AW} = \alpha_A + \beta_W - C_{AW} = 8 + 10 - 10 = 8 \qquad \Delta_{AY} = \alpha_A + \beta_Y - C_{AY} = = 8 + 8 - 8 = 8$$

$$\Delta_{AZ} = \alpha_A + \beta_Z - C_{AZ} = 8 + 9 - 13 = 4 \qquad \Delta_{BW} = \alpha_B + \beta_W - C_{BW} = 9 + 10 - 13 = 6$$

$$\Delta_{BY} = \alpha_B + \beta_Y - C_{BY} = 9 + 8 - 11 = 6 \qquad \Delta_{BZ} = \alpha_B + \beta_Z - C_{BZ} = 9 + 9 - 9 = 9$$

$$\Delta_{DW} = \alpha_D + \beta_W - C_{DW} = 10 + 10 - 11 = 9 \qquad \Delta_{DY} = \alpha_D + \beta_Y - C_{DY} = 10 + 8 - 12 = 6$$

$$\Delta_{DZ} = \alpha_D + \beta_Z - C_{DZ} = 10 + 9 - 10 = 9$$

Donde vemos que la Δ_{ij} con el mínimo valor es la de la casilla del primer renglón y la tercera columna Δ_{AZ}, casilla AZ, a la que se le asignarán 4300 unidades, lo que agotará la demanda de la columna, con lo cual nuestra tabla quedará ahora de la manera siguiente:

destino / origen	W	Y	Z	oferta
A	10	8	13 4300	7500
B	13	11	9 X	6000
D	11	12	10 X	5500
demanda	8000	6700	4300	19000

Volvemos a estimar la Δ_{ij} para la parte de la tabla que todavía no es asignada,

$$\Delta_{AW} = \alpha_A + \beta_W - C_{AW} = 8 + 10 - 10 = 8 \qquad \Delta_{AY} = \alpha_A + \beta_Y - C_{AY} = 8 + 8 - 8 = 8$$

$$\Delta_{BW} = \alpha_B + \beta_W - C_{BW} = 11 + 10 - 13 = 8 \qquad \Delta_{BY} = \alpha_B + \beta_Y - C_{BY} = 11 + 8 - 11 = 8$$

$$\Delta_{DW} = \alpha_D + \beta_W - C_{DW} = 11 + 10 - 11 = 10 \qquad \Delta_{DY} = \alpha_D + \beta_Y - C_{DY} = 11 + 8 - 12 = 7$$

La Δ_{DY} es ahora la mínima, por lo tanto asignaremos a la casilla DY con 5500 unidades, lo que llenará la oferta del tercer renglón, con lo que nuestra tabla será:

destino / origen	W	Y	Z	oferta
A	10	8	13 4300	7500
B	13	11	9 X	6000
D	11 X	12 5500	10 X	5500
demanda	8000	6700	4300	19000

Volveremos a calcular Δ_{ij} para la parte no asignada de la distribución:

$$\Delta_{AW} = \alpha_A + \beta_W - C_{AW} = 8 + 10 - 10 = 8 \qquad \Delta_{AY} = \alpha_A + \beta_Y - C_{AY} = 8 + 8 - 8 = 8$$

$$\Delta_{BW} = \alpha_B + \beta_W - C_{BW} = 11 + 10 - 13 = 8 \qquad \Delta_{BY} = \alpha_B + \beta_Y - C_{BY} = 11 + 8 - 11 = 8$$

Aquí las 4 casillas están empatadas, por lo que al azar elegiremos la BW, la que se asignará con 6000 unidades, lo cual satisfará la oferta del segundo renglón. Las restantes casillas se llenan por diferencia, quedando entonces la tabla de la siguiente manera:

destino / origen	W	Y	Z	oferta
A	10 2000	8 1200	13 4300	7500
B	13 6000	11 X	9 X	6000
D	11 X	12 5500	10 X	5500
demanda	8000	6700	4300	19000

Cuya utilidad es :

$$U = (2000)(10) + (1200)(8) + (4300)(13) + (6000)(13) + (5500)(12) = 229{,}500.0$$

Aquí vemos que se cumple la condición de no degeneración, por lo que aplicaremos el Modi, definiendo arbitrariamente $r_A = 0$, los demás coeficientes los determinaremos con la ec. (IX.8):

Casilla AW:

$$r_A + C_{AW} + k_W = 0$$
$$0 + 10 + k_W = 0, k_W = -10$$

Casilla AY:

$$r_A + C_{AY} + k_Y = 0$$
$$0 + 8 + k_Y = 0, \quad k_Y = -8$$

Casilla AZ:

$$r_A + C_{AZ} + k_Z = 0$$
$$0 + 13 + k_Z = 0, \quad k_Z = -13$$

Casilla BW:

$$r_B + C_{BW} + k_W = 0$$
$$r_B + 13 - 10 = 0, \quad r_B = -3$$

Casilla DY:

$$r_D + C_{DY} + k_Y = 0$$
$$r_D + 12 - 8 = 0, \quad r_D = -4$$

Ahora calcularemos los valores de $(r_i + C_{ij} + k_j)$ para las casillas vacías:

Casilla BY: $r_B + C_{BY} + k_Y = -3 + 11 - 8 = 0$
Casilla BZ: $r_B + C_{BZ} + k_Z = -3 + 9 - 13 = -7$
Casilla DW: $r_D + C_{DW} + k_W = -4 + 11 - 10 = -3$
Casilla DZ: $r_D + C_{DZ} + k_Z = -4 + 10 - 13 = -7$

Con esto vemos que la distribución es la óptima, pues sólo habrá otra tabla diferente que empataría en utilidad con la actual, si asignáramos unidades a la BY conforme al recorrido cerrado correspondiente. En este problema el método Russell ha dado el óptimo con su distribución inicial.

Degeneración.

Esta sucede cuando no se cumple la ecuación (IX.7), presentándose entonces el problema de que el número de variables básicas (casillas asignadas) no es el adecuado para proceder a optimizar la tabla de la distribución correspondiente. La situación usual es que haya un número menor de casillas asignadas al señalado por la Ec. (IX.7), debiendo entonces llevarse a cabo el procedimiento que vamos a explicar.

La degeneración puede aparecer en una tabla de distribución inicial o en una intermedia. Cuando se trata del primer caso, lo que puede hacerse es buscar otra distribución inicial por medio de otro método de inicialización diferente al que se empleó cuando se dio la degeneración.

Esta suele presentarse en distribuciones iniciales cuando una casilla elegida para ser asignada satisface simultáneamente la oferta del renglón y la demanda de la columna, con la excepción de la última casilla de la tabla por asignar, la cual siempre agotará la oferta y la demanda a la vez.

Dado que el caso típico es que falte una casilla asignada para resolver la degeneración, el procedimiento que se sigue es:

Se asignará esa casilla faltante con una cantidad muy pequeña, la que denominaremos **e**, de modo que la suma de asignaciones por renglón y columna no se alteren, es decir, que se sigan cumpliendo la igualdades de las sumas horizontales con las ofertas y las verticales con las demandas. Con esto tendremos una casilla asignada más, con lo cual la resolución del problema podrá seguirse normalmente.

El criterio para elegir la casilla que se asignará con e unidades es:

1.- De las casillas vacías disponibles se toma aquella de menor costo si el problema es de minimización, o la de mayor utilidad si el problema es de maximización.

2.- Checar que las casillas que permanecen vacías tengan cada una su recorrido cerrado. Si esto se cumple, la casilla seleccionada en el paso 1 es elegible; de lo contrario, se vuelve al paso anterior aplicándolo a las casillas vacías restantes.

A continuación presentaremos un ejemplo:

Ejemplo IX. 10.- Obtener la distribución de costo mínimo.

destino / origen	1	2	3	Ofertas
1	14	10	12	7000
2	9	11	10	6000
3	11	12	11	5000
Demandas	6000	6000	6000	18000

Solución:

Aplicaremos el método Mutuamente Preferido para la distribución inicial, listando las casillas de menor costo para cada línea:

Línea	Casilla de menor costo
Renglón 1	1-2
Renglón 2	2-1
Renglón 3	3-1, 3-3
Columna 1	2-1
Columna 2	1-2
Columna 3	2-3

De la lista vemos que hay 2 casillas que son simultáneamente las de menor costo del renglón y de la columna a la que pertenecen: La 1-2 y la 2-1. La 1-2 se asignará con 6000 unidades, lo que agota la demanda de la columna. La casilla 2-1 se asigna con 6000 unidades, lo cual satisface a la vez a la oferta del renglón y la demanda de la columna (situación de degeneración). El resto de la tabla se asignará por diferencias respecto a las ofertas y las demandas totales. Con esto nuestra distribución inicial será:

destino / origen	1	2	3	Ofertas
1	14 X	10 6000	12 1000	7000
2	9 6000	11 X	10 X	6000
3	11 X	12 X	11 5000	5000
Demandas	6000	6000	6000	18000

La cual no cumple la condición de no degeneración, pues sólo tiene 4 casillas asignadas. Por lo tanto debemos hallar una casilla asignable conforme a las condiciones establecidas anteriormente.

De las casillas vacías, la de menor costo es la 2-3, con costo de 10. Si a ésta le asignamos la cantidad e, nuestra tabla es:

destino / origen	1	2	3	Ofertas
1	14	10 6000	12 1000	7000
2	9 6000	11	10 e	6000
3	11	12	11 5000	5000
Demandas	6000	6000	6000	18000

Ahora sólo tendremos que checar los recorridos cerrados de las casillas vacías:

Casilla 1-1: Enviar unidades de la casilla 1-3 a la 1-1 y compensar las columnas con el envío de unidades de la 2-1 a la 2-3.

Recorrido cerrado = 14 - 12 + 10 - 9 = +3

Casilla 2-2: Enviar unidades de la casilla 1-2 a la 2-2 y compensar los renglones con enviar unidades de la 2-3 a la 1-3.

Recorrido cerrado = 11 - 10 + 12 - 10 = +3

Casilla 3-1: Enviar unidades de la casilla 2-1 a la 3-1 y compensar los renglones con reexpedir unidades de la 3-3 a la 2-3.

Recorrido cerrado = 11 - 9 + 10 - 11 = +1

Casilla 3-2: Enviar unidades de la casilla 1-2 a la 3-2 y equilibrar los renglones enviando unidades de la 3-3 a la 1-3.

Recorrido cerrado = 12 - 10 + 12 - 11 = +3

Con esto vemos que las 4 casillas vacías tuvieron su respectivo recorrido cerrado y cómo también los valores de éstas fueron mayores o iguales que cero, por lo tanto nuestra distribución es la óptima, siendo la solución al problema.

destino / origen	1	2	3	Ofertas
1	[14]	[10] 6000	[12] 1000	7000
2	[9] 6000	[11]	[10]	6000
3	[11]	[12]	[11] 5000	5000
Demandas	6000	6000	6000	18000

Con un costo total de :

$$Ct = (6000)(9) + (6000)(10) + (1000)(12) + (5000)(11)$$
$$= 181,000.0$$

Que es la solución de costo mínimo y es además degenerada.

Rutas prohibidas.

Existen problemas de transporte en los cuales habrá rutas que por distintas causas no pueden llevarse a cabo, es la situación de las rutas prohibidas, éstas se manejan como una casilla cualquiera en la tabla de transporte normal a la cual se le pondrá un costo muy elevado, usualmente representado como M, con lo que si la casilla llegase a tener alguna asignación, el método de optimización tenderá a eliminársela. Esto lo ilustraremos con un caso.

Ejemplo IX.11.- La compañía Transportes del Centro tiene un contrato para fletear varillas de 2 fábricas situadas en México y Monterrey, hacia 4 ciudades que son Querétaro, San Luis Potosí, Guadalajara y Tampico.

Las producciones de las 2 fábricas son de 10,000 y 8,000 toneladas mensuales para México y Monterrey respectivamente.

Las 4 ciudades tienen pedidos por las siguientes cantidades:

Ciudad	Pedido mensual, toneladas
Querétaro	4,500
San Luis Potosí	3,000
Guadalajara	8,500
Tampico	2,000
Total	18,000

Debido a que no existen buenas carreteras en el tramo Monterrey-Tampico, esta ruta está descartada.

La tabla de costos del fleteo por tonelada en N$ es la siguiente:

Destino / Origen	Querétaro	S. L. P.	Guadalajara	Tampico
México	45	48	49	53
Monterrey	50	49	48	—

Encontrar la forma de efectuar los fletes a un costo total mínimo.

Utilícese el método de la Esquina Noroeste para inicializar el problema y el Modi para la optimización.

Solución:

Lo primero será acomodar la información del problema en una tabla de transporte, la cual será:

Destino / Origen	Querétaro	S. L. P.	Guadalajara	Tampico	Ofertas
México	45	48	49	53	10000
Monterrey	50	49	48	M	8000
Demandas	4500	3000	8500	2000	18000

La cual al inicializar con el método de la Esquina Noroeste quedará de la forma siguiente:

Destino / Origen	Querétaro	S. L. P.	Guadalajara	Tampico	Ofertas
México	45 / 4500	48 / 3000	49 / 2500	53 / X	10000
Monterrey	50 / X	49 / X	48 / 6000	M / 2000	8000
Demandas	4500	3000	8500	2000	18000

Cuyo costo es:

$$Ct = 757{,}000.0 + 2{,}000.0\ (M)$$

Aquí vemos que la condición de no degeneración está satisfecha, pero que la casilla correspondiente a la ruta prohibida está asignada, por lo que aplicaremos el Modi normalmente, para que éste la elimine.

Fijaremos al azar $r_{México} = 0$, entonces al aplicar la Ec. (IX.8) a las casillas asignadas tendremos:

Casilla México-Querétaro:

$$r_{Méx} + C_{Méx\text{-}Qro} + k_{Qro} = 0$$
$$0 + 45 + k_{Qro} = 0, \quad k_{Qro} = -45$$

Casilla México-S. L. P:

$$r_{Méx} + C_{Méx\text{-}SLP} + k_{SLP} = 0$$
$$0 + 48 + k_{SLP} = 0, \quad k_{SLP} = -48$$

Casilla México-Guadalajara:

$$r_{Méx} + C_{Méx\text{-}Guad} + k_{Guad} = 0$$
$$0 + 49 + k_{Guad} = 0, \quad k_{Guad} = -49$$

Casilla Monterrey-Guadalajara:

$$r_{Mty} + C_{Mty\text{-}Guad} + k_{Guad} = 0$$
$$r_{Mty} + 48 - 49 = 0, \quad r_{Mty} = +1$$

Casilla Monterrey-Tampico:

$$r_{Mty} + C_{Mty\text{-}Tam} + k_{Tam} = 0$$
$$1 + M + k_{Tam} = 0, \quad k_{Tam} = -1 - M$$

Obtendremos ahora el valor de las $(r_i + C_{ij} + k_j)$ para las casillas vacías:

Casilla México-Tampico : $r_{Méx} + C_{Méx\text{-}Tam} + k_{Tam} = 0 + 53 - 1 - M = 52 - M$
Casilla Monterrey-Querétaro: $r_{Mty} + C_{Mty\text{-}Qro} + k_{Qro} = 1 + 50 - 45 = +6$
Casilla Monterrey-San Luis Potosí: $r_{Mty} + C_{Mty\text{-}SLP} + k_{SLP} = 1 + 49 - 48 = +2$

La única casilla negativa es la México-Tampico, la cual conforme al recorrido cerrado debemos pasarle unidades de varilla de la Monterrey-Tampico y equilibrar los renglones enviando varilla de la casilla de México-Guadalajara a la Monterrey-Guadalajara. El número menor de las 2 celdas donadoras es 2000, por lo que ésta será la cantidad a reasignar.

Con estos cambios nuestra tabla quedará ahora:

Origen \ Destino	Querétaro	S. L. P.	Guadalajara	Tampico	Ofertas
México	45 4500	48 3000	49 500	53 2000	10000
Monterrey	50 X	49 X	48 8000	M X	8000
Demandas	4500	3000	8500	2000	18000

Con un costo de :

$$Ct = 861{,}000.0$$

Volveremos a fijar $r_{Méx}=0$ y aplicar la Ec. (IX.8) a las casillas asignadas, para obtener los demás coeficientes:

Casilla México-Querétaro:

$$r_{Méx} + C_{Méx\text{-}Qro} + k_{Qro} = 0$$
$$0 + 45 + k_{Qro} = 0, \quad k_{Qro} = -45$$

Casilla México-San Luis Potosí:

$$r_{Méx} + C_{Méx\text{-}SLP} + k_{SLP} = 0$$
$$0 + 48 + k_{SLP} = 0, \quad k_{SLP} = -48$$

Casilla México-Guadalajara:

$$r_{Méx} + C_{Méx\text{-}Guad} + k_{Guad} = 0$$
$$0 + 49 + k_{Guad} = 0, \quad k_{Guad} = -49$$

Casilla México-Tampico:

$$r_{Méx} + C_{Méx\text{-}Tam} + k_{Tam} = 0$$
$$0 + 53 + k_{Tam} = 0,\ k_{Tam} = -53$$

Casilla Monterrey-Guadalajara:

$$r_{Mty} + C_{Mty\text{-}Guad} + k_{Guad} = 0$$
$$r_{Mty} + 48 - 49 = 0,\ r_{Mty} = +1$$

Obtendremos nuevamente el valor de $(r_i + C_{ij} + k_j)$ para las casillas vacías:
Casilla Monterrey-Querétaro: $r_{Mty} + C_{Mty\text{-}Qro} + k_{Qro} = 1 + 50 - 45 = +6$
Casilla Monterrey-San Luis Potosí: $r_{Mty} + C_{Mty\text{-}SLP} + k_{SLP} = 1 + 49 - 48 = +2$

Aquí ya no calculamos la casilla Monterrey-Tampico por ser la ruta prohibida. Por lo tanto, esta distribución es la óptima del problema.

Casos especiales de Transporte.

En este inciso incluiremos 3 casos que aparecen con frecuencia en los ámbitos administrativos, los cuales son : Problemas de Programación de Producción, Problemas de Asignación y Problemas de Transbordo, los cuales presentaremos a continuación:

Programación de Producción.

Este tipo de casos es muy frecuente en las empresas, pues es usual que se presenten situaciones en las cuales haya periodos cuyas capacidades instaladas de producción no coincidan con la demanda del producto, por lo que habrá que planear inteligentemente la producción a fin de satisfacer las demandas y hacerlo a un costo total mínimo.

Es aquí donde interviene la investigación de operaciones para estos problemas, que pueden plantearse como casos de transporte, en los cuales las capacidades de producción constituyen las ofertas y los consumos de artículos para cada periodo serán las demandas del problema.

Debemos tener en cuenta que pueden programarse turnos extras de producción, así como manejar un inventario inicial, los cuales incrementarían las ofertas en caso que esto fuese necesario.

El costo de un artículo se elevará si éste tiene que almacenarse para ser consumido en un periodo posterior, por concepto de mantenimiento del inventario, el que normalmente se expresa como un porcentaje del costo del producto.

En este tipo de problemas habrá rutas prohibidas, las cuales serán aquellas en las que el origen sea un periodo dado de producción y el destino un periodo anterior para la demanda, dado que esto no sería posible puesto que no podemos consumir un artículo que aún no ha sido producido. Otra ruta prohibida sería tomar como origen al inventario inicial y como destino un centro de demanda ficticio, ya que el inventario inicial en caso de requerirse para completar las ofertas, se manejará para que sea consumido realmente.

Presentaremos un ejercicio para ilustrar lo anteriormente descrito:

Ejemplo IX.12.- Un fabricante de chamarras tiene que programar su producción para la próxima temporada de invierno para la cual su demanda es la siguiente : Diciembre 1500 piezas, Enero 2000 y Febrero 1300.

Su capacidad normal de producción es de 1000 piezas mensuales con un costo de N$ 175 por unidad. Puede programar turnos extras para fabricar hasta 600 piezas por mes a un costo de N$ 250 por unidad.

Si desea iniciar con un inventario de 300 piezas, ¿Cómo deberá programar su producción para cumplir sus demandas a un costo total mínimo?

El costo de mantener almacenada una chamarra es de N$ 30 mensuales.

Solución:

Para este problema los orígenes serán las capacidades mensuales de producción de cada mes, la capacidad con turnos extras y el inventario inicial, mientras que los destinos serán las demandas de chamarras de cada mes, así como también un centro ficticio de demanda a fin de igualar el total de las demandas con el de las ofertas.

Los costos están señalados en el enunciado del problema. Asignaremos como M al costo de producir piezas en un mes dado para ser vendido en un periodo anterior, así como también para la casilla cuyo origen es el inventario inicial y destino el centro ficticio. Las demás casillas de la columna de éste, llevarán costo cero. Cada casilla que corresponda a un origen de un centro de producción dado o el inventario inicial y a un destino de un periodo posterior de consumo, incrementará su costo en N$ 30 por concepto de mantenimiento de almacén.

Con esto, nuestra tabla de transporte correspondiente al problema será:

Destino / Origen	Demanda Diciembre	Demanda Enero	Demanda Febrero	Demanda Ficticia	Ofertas
Prod Norm Diciembre	175 / 1000	205	235	0	1000
Prod Ex Diciembre	250 / 200	280 / 400	310	0	600
Prod Norm Enero	M	175 / 1000	205	0	1000
Prod Ex Enero	M	250 / 600	280	0	600
Prod Norm Febrero	M	M	175 / 1000	0	1000
Prod Ex Febrero	M	M	250 / 300	0 / 300	600
Inventario Inicial	0 / 300	30	60	M	300
Demandas	1500	2000	1300	300	5100

La cual está inicializada con el método de Vogel que aunque da una distribución degenerada, es la solución del problema, lo cual podría comprobarse con asignar ε unidades en la casilla del segundo renglón y cuarta columna para romper la degeneración.

El costo total es Ct = N$ 912,000.0

Problemas de Asignación.

Estos problemas tratan de asignar trabajadores a distintas tareas, considerando los tiempos que tardan en desempeñarlas, teniendo como objetivo minimizar el tiempo total. Los trabajadores se consideran como orígenes y las tareas como destinos con todas las ofertas y demandas iguales a la unidad, de modo que si el número de trabajadores no fuera igual al de las tareas (oferta diferente de demanda), se crearán tareas o trabajadores ficticios de tal forma que el número de ambos se iguale. Los costos C_{ij} vendrán representados por los tiempos que tarda un trabajador i en ejecutar una tarea j.

El método normal de transporte es inadecuado para resolver este tipo de problemas, pues cae en degeneración debido a que cada casilla que se asigna con la unidad, satisface a la vez la oferta de su renglón y la demanda de su columna, por lo que al hacer varias asignaciones de casillas en una tabla de transporte, el número de casillas asignadas quedará muy por debajo de las necesarias para cumplir con la condición de no degeneración.

Método Húngaro.

Un método más apropiado para este tipo especial de problemas es el Método Húngaro, el cual consiste en los siguientes pasos:

Paso 1.- Colocar la información del problema en la matriz de asignación donde los elementos de la misma serán los tiempos en los cuales los trabajadores ubicados como renglones, ejecutan las tareas, situadas como columnas.

Paso 2.- Identificar el menor elemento de cada renglón y restárselo a cada uno de los elementos del renglón en el que fue localizado.

Paso 3.- Identificar el menor elemento de cada columna y restárselo a cada uno de los elementos de la columna en la que se encontró.

Paso 4.- Verificar la convergencia, la cual consiste en checar si en la matriz de asignación hay **n** elementos cero, siendo **n** el número de líneas de que consta la matriz, ubicados de tal forma que cada renglón y cada columna tenga uno de ellos sin que se repita ninguno en un mismo renglón o en una misma columna. Si esto se cumple el problema habrá sido resuelto, siendo la solución del mismo precisamente el asignar conforme a la ubicación de estos **n** ceros.

En caso que la convergencia no se satisfaga, ir al paso siguiente.

Paso 5.- Cubrir todos los ceros de la matriz de asignación con el menor número posible de líneas horizontales y verticales, donde cada una de éstas deberá pasar por todo el renglón y/o columna a la que corresponde. El número total de líneas deberá ser menor a **n**.

Paso 6.- Localizar el menor elemento de la matriz que no esté cubierto por ninguna línea, el cual deberá restarse a cada elemento no cubierto por ninguna línea y sumarse a cada elemento cubierto por 2 líneas.

De aquí se regresa al paso 4.

Presentaremos un caso para ilustrar el uso de este método.

Ejemplo IX. 13.- El jefe de turno de una fábrica está buscando la manera óptima de asignar 6 trabajadores a 5 tareas distintas. Dispone de una tabla en la que agrupa los tiempos en minutos que tarda cada trabajador para efectuar cada tarea.

tarea / trab	1	2	3	4	5
1	64	60	56	58	56
2	60	58	59	57	49
3	61	57	61	59	53
4	59	59	64	61	52
5	66	61	60	63	55
6	63	65	62	60	54

¿ Cómo deberá asignar a sus trabajadores de forma que se minimice el tiempo total?.

Solución:

Aplicaremos el método Húngaro, debiendo asignar una sexta tarea ficticia con tiempos cero para completar la matriz de 6x6, la cual conforme al paso 1, será:

	1	2	3	4	5	6
1	64	60	56	58	56	0
2	60	58	59	57	49	0
3	61	57	61	59	53	0
4	59	59	64	61	52	0
5	66	61	60	63	55	0
6	63	65	62	60	54	0

El paso 2 no altera la matriz , dado que cada renglón tiene un cero (el elemento de la sexta columna) el cual al restarse deja igual a la matriz.

Conforme al paso 3, restaremos a cada columna el menor elemento de la misma, es decir: en la primera columna se restará 59, en la segunda se restará 57, 56 se restará a la tercera, 57 a la cuarta, 49 a la quinta y 0 a la sexta, con estos cambios la matriz, será ahora:

	1	2	3	4	5	6
1	5	3	0	1	7	0
2	1	1	3	0	0	0
3	2	0	5	2	4	0
4	0.	2	8	4	3	0
5	7	4	4	6	6	0
6	4	8	6	3	5	0

Aquí vemos que la convergencia no se logra dado que los únicos ceros del quinto y sexto renglón se repiten en la misma columna, por lo que de acuerdo al paso 5 cubriremos los ceros de la matriz con el menor número de líneas posible, con esto tendremos:

	1	2	3	4	5	6
1	5	3	0	1	7	0
2	1	1	3	0	0	0
3	2	0	5	2	4	0
4	0	2	8	4	3	0
5	7	4	4	6	6	0
6	4	8	6	3	5	0

Lo que hemos logrado con 5 líneas.

Ahora conforme al paso 6, el menor elemento no cubierto por ninguna línea es el 3 que se halla situado en el sexto renglón y la cuarta columna, el cual restaremos a los elementos no cubiertos por ninguna línea en la matriz (elementos del 5 y 6 renglón con excepción de los de la sexta columna). Además le sumaremos el 3 a los elementos cubiertos por 2 líneas (4 primeros elementos de la sexta columna). Con estas modificaciones, la matriz quedará en la siguiente forma:

	1	2	3	4	5	6
1	5	3	0^*	1	7	3
2	1	1	3	0	0^*	3
3	2	0^*	5	2	4	3
4	0^*	2	8	4	3	3
5	4	1	1	3	3	0^*
6	1	5	3	0^*	2	0

La cual ya satisface la convergencia al tener en cada renglón y cada columna un cero que no se repite, los que hemos señalado con un asterisco en la matriz, indicando su posición la manera en que se han de asignar los trabajadores a las tareas, cuya solución presentamos en la tabla siguiente:

Trabajador	Tarea	Tiempo
1	3	56
2	5	49
3	2	57
4	1	59
5	Ficticia	0
6	4	60
---	---	281

Con el tiempo total de 281 minutos.

Para casos de maximización, lo que se debe de hacer es replantear el problema, convirtiéndolo para su resolución en uno de minimización, tomando el valor mayor de los datos como cero y los restantes como la diferencia de cada uno respecto al mayor, de este modo los valores se toman como la pérdida potencial en la que puede incurrirse por no seleccionar adecuadamente, así en el ejemplo IX.13 si el problema hubiera sido de maximización la nueva tabla sería:

	1	2	3	4	5
1	2	6	10	8	10
2	6	8	7	9	17
3	5	9	5	7	13
4	7	7	2	5	14
5	0	5	6	3	11
6	3	1	4	6	12

Dado que el máximo valor de ella era 66 (trabajador 5, tarea 1).

Ahora esta nueva tabla debe minimizarse dado que cada valor representa la pérdida respecto a 66.

Problemas de Transbordo.

Este tipo de problemas incluye todas las situaciones antes vistas de los casos de transporte y además una característica particular: Centros de transbordo o empalmes, los cuales funcionan como origen y destino a la vez, por lo que en la tabla de transporte se incluyen tanto del lado de las ofertas como de las demandas. Estos empalmes pueden ser solamente orígenes, o bien sólo destinos, pero se tratan como si fueran ambas cosas a la vez.

La oferta y la demanda de los empalmes se deberá incrementar con el número total de unidades que se manejan en el problema, permitiendo de este modo que todos los artículos puedan pasar por un empalme dado.

El costo de enviar un producto de un empalme a sí mismo será de cero.

Para aquellos casos en que la oferta total no sea igual a la demanda total, se crearán centros ficticios del lado que haga falta, tal y como se ha hecho anteriormente.

Es usual que en este tipo de casos haya rutas prohibidas, las cuales se trabajan tal y como se explicó en el inciso respectivo.

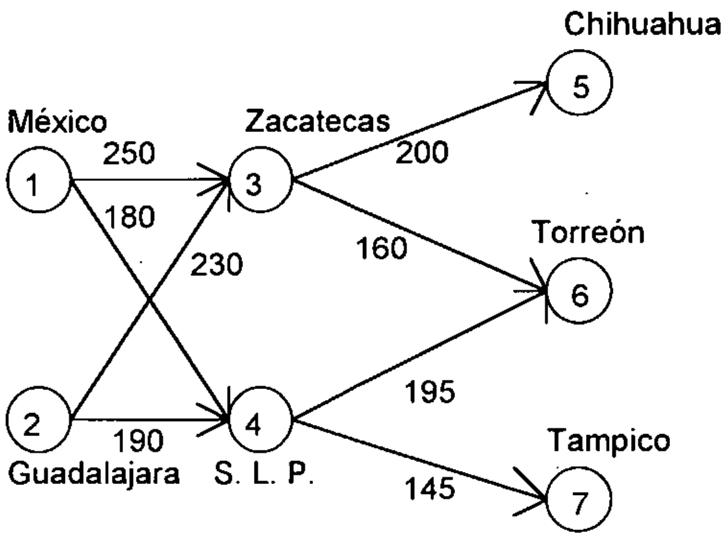
A continuación veremos un ejemplo típico de transbordo.

Ejemplo IX.14.- La empresa Nylon Mex tiene 2 fábricas, una en la ciudad de México y la otra en Guadalajara donde produce 1000 y 750 toneladas de fibra de nylon por semana respectivamente.

Debe con esto abastecer a 5 distribuidores, los cuales tienen diferentes demandas y se localizan en distintas ciudades, tal y como se indica en la tabla siguiente:

Ciudad	Demanda, Ton/Semana
Zacatecas	600
San Luis Potosí	400
Chihuahua	350
Torreón	300
Tampico	250
Total	1900

No es posible enviar mercancía directamente de las fábricas hacia Chihuahua, Torreón y Tampico, por lo que esto debe hacerse reembarcando en Zacatecas y San Luis Potosí, tal y como se muestra en la siguiente figura:



Donde las rutas no indicadas son prohibidas. Los números representan los costos de envío en N$ /unidad del origen al destino que señala la flecha correspondiente.

Se busca un programa de transporte que cumpla las demandas a un costo total mínimo.

Solución:

En este caso, México y Guadalajara son orígenes y las restantes ciudades son destinos. Zacatecas y San Luis Potosí son además empalmes, dado que tienen tanto entradas como salidas de mercancía. Debe además incluirse un centro ficticio de oferta para igualar ésta a la demanda total.

El número total de artículos que va a circular por el sistema es de 1900 ton/semana, por lo que conforme a lo explicado anteriormente, las ofertas y demandas de los empalmes deberán incrementarse en esta cantidad.

Los costos de las casillas correspondientes a la rutas prohibidas lo indicaremos por M.

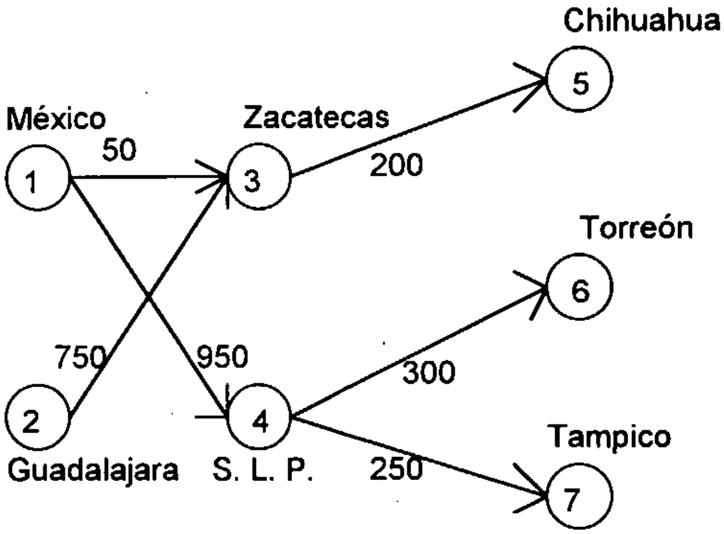
Con esto nuestra tabla de transporte será:

Destino / Origen	Zacatecas	San Luis P	Chihuahua	Torreón	Tampico	Ofertas
México	250	180	M	M	M	1000
Guadala-jara	230	190	M	M	M	750
Zacatecas	0	M	200	160	M	1900
San Luis P.	M	0	M	195	145	1900
Centro Ficticio	0	0	0	0	0	150
Demandas	2500	2300	350	300	250	

Si ésta la iniciamos con el método Vogel, nos da la solución óptima, la cual es:

Destino / Origen	Zacatecas	San Luis P	Chihuahua	Torreón	Tampico	Ofertas
México	250 / 50	180 / 950	M / X	M / X	M / X	1000
Guadala-jara	230 / 750	190 / X	M / X	M / X	M / X	750
Zacatecas	0 / 1700	M / X	200 / 200	160 / X	M / X	1900
San Luis P.	M / X	0 / 1350	M / X	195 / 300	145 / 250	1900
Centro Ficticio	0 / X	0 / X	0 / 150	0 / X	0 / X	150
Demandas	2500	2300	350	300	250	

La que mostraremos ahora en la figura esquemática indicando las tons/semana de envío en las flechas respectivas.



Donde vemos que los empalmes reciben una determinada cantidad de mercancía y reexpiden a su vez otra cantidad, siendo la diferencia entre estas 2 precisamente la demanda del empalme.

También vemos que habrá 150 ton/semana de demanda no satisfecha en Chihuahua, debido a que las ofertas son menores a las demandas.

El costo total de esta red de distribución será:

$$
\begin{aligned}
Ct &= (50)(250) + (950)(180) + (750)(230) + (200)(200) + (300)(195) + (250)(145) \\
&= 490{,}750.0 \text{ N\$/Semana}
\end{aligned}
$$

PROBLEMAS PROPUESTOS.

IX.1.- Hallar la distribución inicial y su respectivo costo para la siguiente tabla de transporte.

Origen \ Destino	A	B	C	D	Ofertas
W	26	28	28	27	500
Y	29	30	27	28	300
Z	25	31	28	26	350
Demandas	440	290	270	150	1150

a) Por el método de la Esquina Noroeste.
b) " " " del Costo Menor.
c) " " " Mutuamente Preferido.
d) " " " de Vogel.
e) " " " de Russell.

IX.2.- Hallar la solución óptima del problema anterior por el método del Cruce del Arroyo con la distribución inicial del Costo Menor.

IX.3.- Hallar la solución óptima del problema IX.1 por el método Modi y con la distribución inicial obtenida con el método Mutuamente Preferido.

IX.4.- Dada la tabla

Origen \ Destino	1	2	3	4	Ofertas
1	15	12	11	13	1000
2	10	16	12	14	700
3	13	11	12	10	600
Demandas	800	750	650	600	2300 \ 2800

Hallar la solución óptima usando el método de Vogel para inicializar y el Modi para optimizar.

IX.5.- Resolver el problema anterior utilizando el método de Russell para inicializar y el Cruce del Arroyo para optimizar.

IX.6.- Resolver

Destino / Origen	1	2	3	4	Ofertas
1	32	27	24	30	7500
2	28	30	28	30	5500
3	26	29	30	31	4000
4	24	31	28	27	3500
Demandas	9000	8000	2500	1000	20500

Por la Esquina Noroeste y el Modi obtener la distribución de costo mínimo.

IX.7.- Solucionar el problema anterior utilizando el Vogel y el Modi.

IX.8.- Resolver el problema IX.6 por el método Mutuamente Preferido y el Cruce del Arroyo.

IX.9.- Por medio del método de Russell y el Modi obtener la red de costo mínimo para el problema

Destino / Origen	1	2	3	4	Ofertas
A	500	470	450	460	2500
B	480	450	510	470	2200
D	465	480	500	500	1800
E	390	440	500	520	1500
F	450	460	470	410	1300
G	435	430	480	390	1200
Demandas	5000	2600	1800	1100	10500

IX.10.- Resolver el problema anterior usando el método de Vogel y el Cruce del Arroyo.
IX.11.- Solucionar el problema IX.9 para el caso de maximización usando el Vogel y el Modi.

IX.12.- Para la siguiente matriz de costos hallar la red de distribución de costo mínimo por medio del Vogel y el Cruce del Arroyo

Destino / Origen	1	2	3	Ofertas
1	43	38	48	3000
2	37	42	46	2000
3	46	42	39	1500
Demandas	2500	2000	1500	6500 / 6000

IX.13.- Resolver con los mismos métodos el problema anterior, pero ahora para el caso de maximización.

IX.14.- Resolver usando el método de Russell y el Modi.

Destino / Origen	1	2	3	Ofertas
1	25	30	M	3600
2	M	26	32	1800
3	31	M	28	1700
4	24	28	26	1600
Demandas	3700	2600	2400	8700

IX.15.- Dada la siguiente tabla de transporte.

Destino / Origen	1	2	3	4	Ofertas
1	28	M	24	30	7000
2	M	26	M	25	4000
3	27	30	28	M	3500
4	M	24	26	27	3000
Demandas	6700	4000	3000	2800	17500 / 16500

Hallar la distribución de costo mínimo por medio del método Vogel y el Cruce del Arroyo.

IX.16.- Un fabricante de ropa casual de verano desea programar su producción para la próxima temporada, estima su demanda para los 3 meses de verano en 1810 prendas en mayo, 1650 en junio y 1570 en julio. Su capacidad de producción es de 1580 prendas mensuales a un costo de N$ 7.20 la prenda en turno normal y a N$ 9.50 en turno extra. Su capacidad se incrementa hasta en un 50% por los turnos extras. Si su costo de mantener en inventario es de N$ 0.8 /mes por prenda y no maneja inventario inicial, hallar un plan que le permita satisfacer sus demandas a un costo mínimo.

IX.17.- Una empresa productora de equipo de alpinismo desea elaborar un plan de producción para cumplir sus demandas los próximos 4 meses: Noviembre, 1000 articulos; Diciembre, 1200 articulos; Enero, 1020 articulos; Febrero, 680 articulos. Su capacidad de producción es hasta 850 articulos/mes en turno normal a un costo de N$ 48/unidad y de 500 articulos /mes en turno extra a un costo de N$ 57/unidad.

El costo de mantener el inventario es de N$ 4.50 /mes por cada articulo.

Si la empresa maneja un inventario inicial de 350 articulos y desea terminar sin inventario, ¿Cómo deberá programar su producción a un costo total mínimo?.

IX.18.- Un entrenador de atletismo tiene a 8 atletas entre los cuales deberá seleccionar a 5 para la competencia del pentatlón que abarca 5 pruebas. Los tiempos de cada deportista en minutos en cada una de las pruebas es el siguiente:

Prueba / Atleta	1	2	3	4	5
1	117	130	136	176	211
2	116	133	149	170	198
3	119	136	140	167	207
4	123	138	143	168	205
5	125	128	138	172	210
6	122	130	142	183	201
7	135	130	150	180	200
8	140	132	135	175	198.

¿Cómo deberá asignar a los atletas en las pruebas, a fin de minimizar el tiempo total?.

IX.19.- Un supervisor dispone de 4 personas para desarrollar 3 diferentes trabajos. En la siguiente tabla se dan las utilidades esperadas por asignar una persona a un trabajo dado en N$:

Trabajo / Persona	1	2	3
José Martínez	1800	2100	2300
Juan Pérez	1700	2200	2250
Francisco Ruiz	1750	2000	2400
Luis González	1600	2300	2300

¿ Cómo deberá hacer la asignación de modo que obtenga la utilidad máxima?.

IX.20.- Un jefe de personal de una compañía debe seleccionar entre los trabajadores para llevar a cabo 4 diferentes tareas. Los costos en N$ por asignar un trabajador a una determinada tarea son.

Tarea / Trabajador	1	2	3	4
1	1500	1300	1200	1000
2	1600	1200	1200	1200
3	1800	1150	1300	1150
4	1420	1370	1320	1190
5	1500	1180	1210	1100
6	1500	1300	1200	1150

¿ Cómo deberá seleccionar a los trabajadores a fin de minimizar el costo total al efectuar las 4 tareas?.

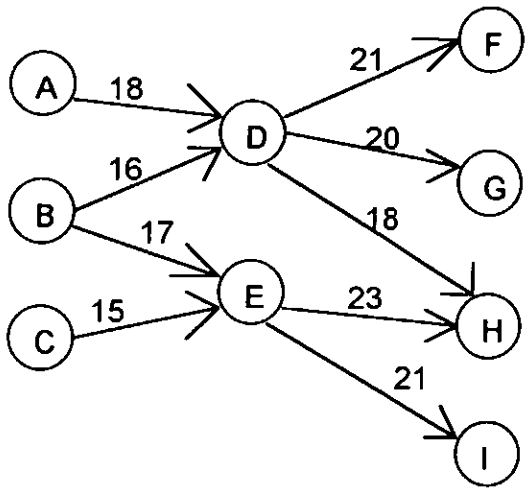
IX.-21.- La compañía Cal Mexicana, S.A. tiene 2 fábricas, la A y B con producciones de 2500 y 2000 toneladas mensuales y abastece a 6 distribuidores: M con demanda de 700 tons/mes, N con 650 tons/mes, O con 550 tons/mes, P con 400 tons/mes, Q con 750 tons/mes y R con 850 tons/mes, de las cuales M, N y O funcionan como empalmes. ¿ Cómo deberá ser la red de distribución de costo mínimo?.

Los costos de una ruta a otra en N$/ton embarcada se dan en la siguiente tabla:

Destino / Origen	M	N	O	P	Q	R
A	310	280	260	----	----	----
B	270	----	285	----	----	----
M	----	----	----	310	320	----
N	----	----	----	----	335	350
O	----	----	----	300	----	340

IX.22.- La empresa Metales Mexicanos tiene 3 centros de producción de varilla con las siguientes capacidades: El centro A con 1800 ton/mes, el B con 1650 y el C con 1300 ton mensuales.

Su red de distribución es la siguiente:



Donde los números indican los costos de las rutas.

Las demandas son: D con 800 ton/mes, E con 700 ton/mes, F 1650 ton/mes, G con 1300 ton/mes, H con 300 ton/mes e I con 250 ton/mes, siendo D y E empalmes.

¿ Cuál será la red de costo mínimo?

CAPITULO X

PROGRAMACION DINAMICA

Introducción.

En este capítulo trataremos sobre la programación dinámica, que es aplicable a un tipo particular de problemas para los que la programación lineal no resulta adecuada, dado que esta última es útil para aquellos casos en los cuales los parámetros o condiciones del problema permanecen sin cambio, es decir, estáticos. Cuando aparecen variaciones en dichos parámetros, tales casos pueden resolverse con la programación dinámica, la cual apareció en la década de los 50 siendo Richard Bellman su iniciador en los Estados Unidos.

El presente método maneja los casos en forma secuencial, dividiendo un problema grande en varios pequeños, donde cada uno de éstos se irá solucionando tomando la decisión que optimice la función objetivo, la cual a semejanza de la programación lineal puede ser una utilidad sujeta a maximización o bien un costo que busca minimizarse. Cada problema a su vez tendrá sus propios parámetros, los que influirán para la resolución que deba de tomarse. Luego se eslabona este problema pequeño con el que sigue en el orden determinado conforme a la secuencia inicial.

Con esto, lo que se logra es un ahorro en el número de cálculos que deben hacerse para solucionar el problema total, dado que no se ejecutan todas las opciones que puede tener el mismo, puesto que de la parte que ya se ha analizado, se toma la mejor decisión que contribuya a la optimización de la función objetivo.

La programación dinámica puede ser determinística, es decir, que los parámetros del problema se conozcan exactamente, o bien puede ser probabilística o estocástica, cuando aquellos vienen dados por una función de probabilidad.

Características y metodología.

Vamos ahora a enumerar las características que constituyen el método de la programación dinámica:

1. Cada problema debe dividirse en etapas, cada una de las cuales requiere de una política de decisión, que se determinará conforme a la función objetivo.
2. Cada etapa se divide a su vez en un cierto número de estados asociados a ella, donde cada uno de éstos representa una posibilidad de llevar a cabo la etapa.
3. En cada etapa habrá una política de decisión la cual deberá eslabonar la etapa actual con la siguiente del problema.
4. El método de la programación dinámica deberá hallar una solución óptima para el problema total, la que es diferente de la solución óptima de etapa a etapa.
5. El principio de optimalidad de Bellman dice:
   Cuando el problema se encuentra en un estado de una etapa dada, para salir de él, la decisión tomada debe constituir una política óptima, independientemente de las decisiones hechas anteriormente.
6. El problema se inicia por la última etapa y se mueve recursivamente, es decir, desde la última hasta la primera etapa, en la cual una vez determinada la decisión de la misma, el problema habrá sido resuelto.

Terminología.

Ahora daremos a conocer la terminología que se incluye en la programación dinámica para su mejor comprensión en el manejo de problemas.

N = Número total de etapas

n = Etapa particular, donde $n = 1, 2, ..., N$

e_n = Estado particular de la etapa n

x_n = Variable de decisión para la etapa n

x_n^* = valor óptimo de x_n para cada e_n

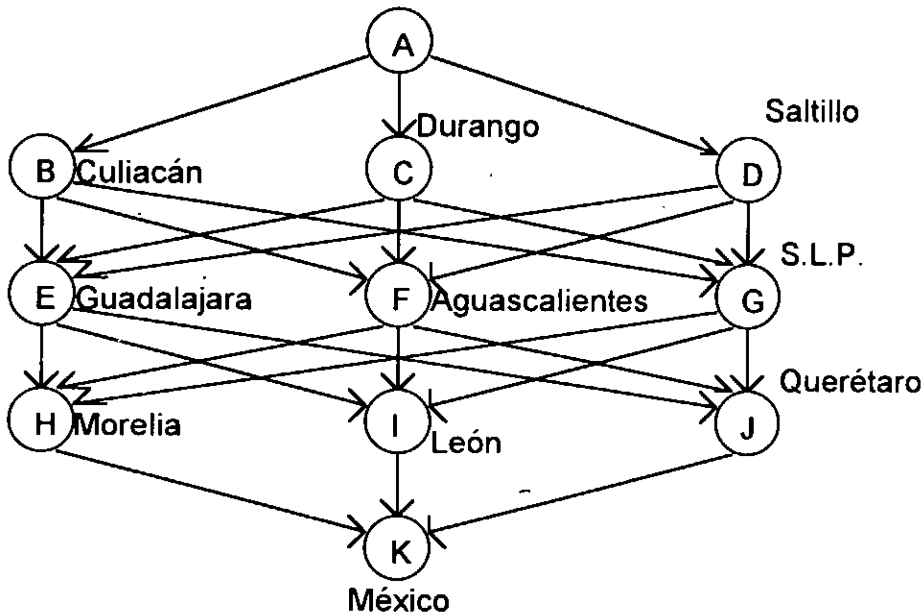
$fn(e_n x_n)$ = Contribución acumulada de la función objetivo de la etapa n hasta la N

$f_n^*(e_n) = f_n(e_n x_n^*)$, la cual deberá optimizarse.

Hay problemas de programación dinámica de adición y de multiplicación, según la forma de obtener la función objetivo a partir de las variables de decisión en cada etapa. Son más frecuentes los casos de adición en la práctica, sin embargo, también aparecen situaciones de multiplicación como en aquellos casos de probabilidad conjunta.

A continuación presentaremos un ejemplo, el cual es típico en la programación dinámica y es el caso de la ruta más corta, el que nos ayudará a ilustrar los conceptos de la metodología señalada.

Ejemplo X.1.- Un agente viajero busca la ruta más económica para desplazarse de Chihuahua a la ciudad de México conforme al esquema siguiente de posibilidades:



Aquí las ciudades se representan por círculos con una literal y las flechas indican traslado de una ciudad a otra. Los costos de transportarse de un lugar a otro se dan en las siguientes tablas en miles de N$:

	B	C	D
A	62	45	50

	E	F	G
B	40	58	65
C	55	43	53
D	59	47	44

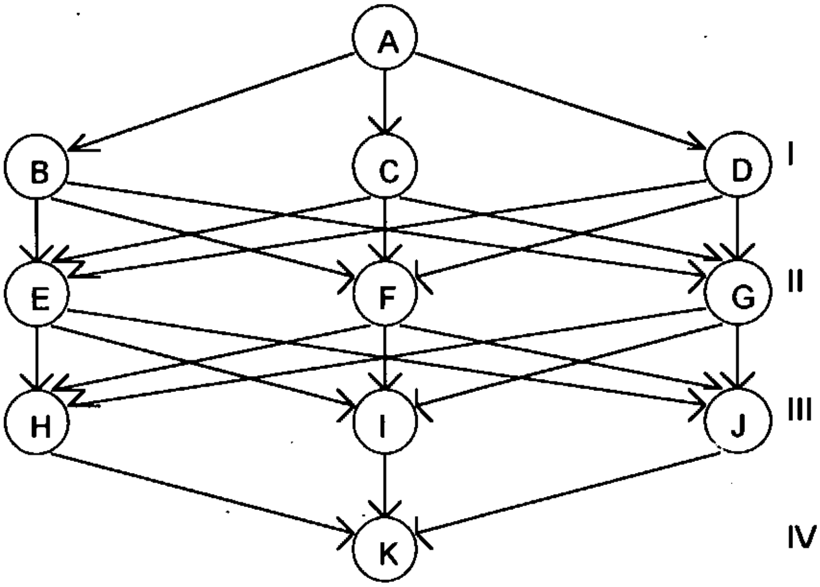
	H	I	J
E	21	23	32
F	24	18	26
G	29	25	17

	K
H	21
I	22
J	16

¿ Qué ruta deberá escoger el viajero?

Solución:

De acuerdo a la metodología descrita anteriormente lo primero será dividir el problema en etapas, las cuales serán 4 en este caso, cada una de ellas ubicada a un mismo nivel geográfico de latitud, como se indica en la figura por los números romanos.



Ahora debemos iniciar el procedimiento de solución en la última etapa y de aquí movernos recursivamente hasta llegar a la primera.

Para la etapa IV, que significa llegar a la ciudad de México, punto K, tenemos la posibilidad de lograrlo llegando por Morelia H, León I, o Querétaro J.

Aquí la función objetivo $f_n(e_n,x_n)$ será el costo total acumulado de ir de la etapa n hasta la última (la IV en este caso), el cual se calcula con la fórmula siguiente:

$$f_n(e_n,x_n)= Ce_nx_n + f_{n+1}{}^*(x_n) \qquad \text{Ec.(X.1)}$$

Donde Ce_nx_n es el costo para la etapa n y su estado asociado e_n, mientras que $f_{n+1}{}^*(x_n)$ es el costo óptimo acumulado de la etapa n+1 hasta la etapa N.

Como podemos ver este ejemplo es un caso de adición donde la función objetivo se irá calculando por sumatoria de costos de cada etapa.

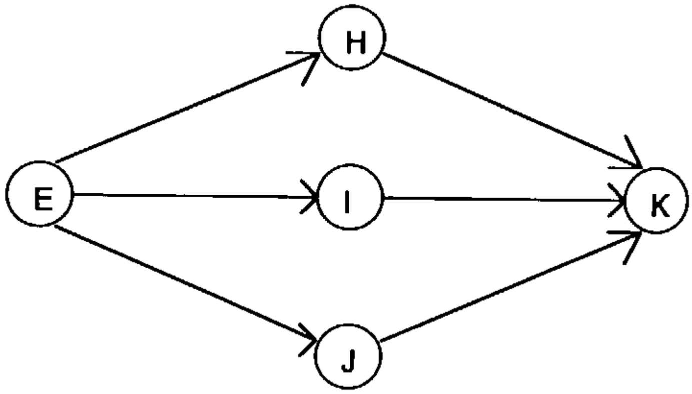
Como el problema apenas inicia en la etapa IV, la tabla de solución será prácticamente la misma que la tabla de los costos de ir desde H, I o J hasta K.

Etapa IV
n= 4

e_4	$f_4{}^*(e_4)$	$x_4{}^*$
H	21	K
I	22	K
J	16	K

En este caso $x_4{}^*$ será K pues es la variable de decisión de la cuarta etapa (llegar a la ciudad de México).

Ahora iremos a la etapa III, donde el viajero puede llegar a H, I o J partiendo de E, F o G. Aquí el costo $f_3(e_3,x_3)$ incluirá ir desde E, F o G hasta K pasando por el punto intermedio que corresponda H, I o J, así si tomamos el punto E para ilustrar la metodología de la programación dinámica.



deberemos ir de E al punto intermedio H, I o J y de aquí a K, cuyo costo acumulado vendrá dado por el costo de ir de E al punto intermedio correspondiente denominado Ce_3x_3, donde e_3 sería E, sumado éste al mejor costo obtenido de la etapa resuelta anteriormente, la cuarta en este caso, denominado como $f_4^*(x_3)$, siendo x_3 el punto intermedio respectivo, esto es :

$$f_3(e_3,x_3)= Ce_3x_3 + f_4^*(x_3)$$

Entonces procederemos a aplicar esta fórmula para los 3 puntos intermedios:

Para ir de E a K pasando por H, tendremos

$$f_3(E,H)= C_{EH} + f_4^*(H)$$
$$= 21+21 = 42$$

Por su parte para ir de E a K pasando por I,

$$f_3(E,I)= C_{EI} + f_4^*(I)$$
$$= 23+22 = 45$$

Finalmente para ir de E a K pasando por J,

$$f_3(E,J)= C_{EJ} + f_4^*(J)$$
$$= 32+16 = 48$$

Procediendo de una manera similar para los puntos F y G se obtienen los resultados que presentamos en la siguiente tabla de la tercera etapa:

Etapa III
n=3

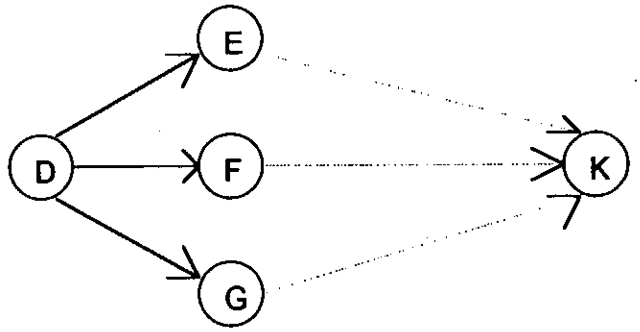
$$f_3(e_3,x_3)= Ce_3x_3 + f_4^*(x_3)$$

	x_3				
e_3	H	I	J	$f_3^*(e_3)$	x_3^*
E	42	45	48	42	H
F	45	40	42	40	I
G	50	47	33	33	J

En esta tabla se muestra la política óptima de decisiones para ir desde E, F o G hasta K, es decir las etapas III y IV eslabonadas señalándose el menor costo acumulado, $f_3^*(e_3)$ y el correspondiente punto intermedio entre las etapas, es decir x_3^*.

Proseguimos ahora a la etapa II, donde el agente deberá ir de B, C o D hasta K pasando por la mejor ruta posible de puntos intermedios, la cual se obtiene de la tabla última de resultados de la etapa III.

Ilustraremos el procedimiento tomando como base en esta ocasión al punto D, entonces nuestro recorrido tendrá la siguiente forma:



Donde las flechas punteadas indican las mejores rutas para llegar de E, F o G hasta K.

Para el cálculo del costo acumulado que incluye a esta segunda etapa, tendremos:

$$f_2(e_2,x_2)= C_{e_2x_2} + f_3^*(x_2)$$

Donde e_2 sería el punto original de partida para esta etapa (o estado asociado), D en este caso; por su parte x_2 será el punto intermedio E, F o G del que se trate y f_3^* el costo óptimo acumulado correspondiente de ir desde cada uno de estos puntos hasta K, dado por la tabla de decisiones de la etapa anterior. Al aplicar esta fórmula a las 3 opciones tendremos:

Para ir de D a K pasando por E,

$$f_2(D,E)= C_{DE} + f_3^*(E)$$
$$= 59+42 = 101$$

Para ir de D a K pasando por F,

$$f_2(D,F)= C_{DF} + f_3^*(F)$$
$$= 47+40 = 87$$

Finalmente para ir de D a K pasando por G,

$$f_2(D,G)= C_{DG} + f_3^*(G)$$
$$= 44+33 = 77$$

Si procedemos de forma análoga para los puntos B y C, obtendremos los resultados de la tabla de la segunda etapa:

Etapa II

n=2

$$f_2(e_2,x_2)= C_{e_2x_2} + f_3^*(x_2)$$

x_2 / e_2	E	F	G	$f_2^*(e_2)$	x_2^*
B	82	98	98	82	E
C	97	83	86	83	F
D	101	87	77	77	G

La cual reúne la política óptima de decisiones de ir desde B, C o D hasta K

Ahora sólo nos falta ir a la etapa primera, la cual implicará calcular al costo de ir de A a B, C o D y de cada punto intermedio de éstos hasta K por la ruta óptima obtenida en la tabla anterior.

La fórmula para calcular el costo será:

$$f_1(e_1,x_1)= C_{e_1x_1} + f_2^*(x_1)$$

Donde e_1 es el punto A, X_1 el punto intermedio B, C o D correspondiente y $f_2^*(x_1)$ el costo óptimo de ir desde cada punto intermedio hasta K obtenido de la tabla de la etapa II.

Así para ir de A a K pasando por B, tendremos

$$f_1(A,B)= C_{AB} + f_2^*(B)$$
$$= 62+82=144$$

Para ir de A a K por C,

$$f_1(A,C)= C_{AC} + f_2^*(C)$$

$= 45+83=128$

Finalmente la ruta de A a K por D,

$$f_1(A,D) = C_{AD} + f_2^*(D)$$
$$= 50+77=127$$

Estos resultados se resumen en la última tabla la cual es:

Etapa I

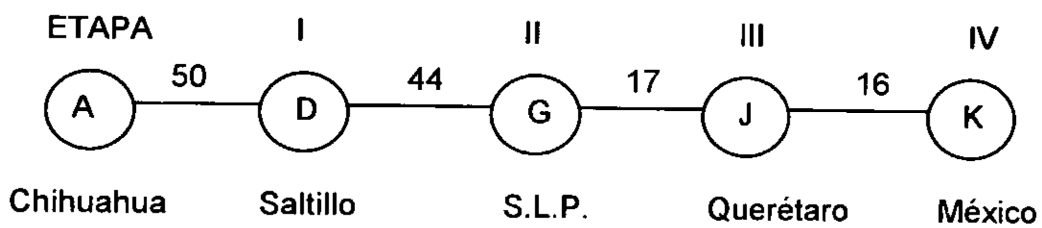
n=1

		$f_1(e_1,x_1) = C_{e_1x_1} + f_2^*(x_1)$			
e_1 x_1	B	C	D	$f_1^*(e_1)$	x_1^*
A	144	128	127	127	D

Donde vemos que la ruta óptima tiene un costo de N$ 127.00.

Ahora para definir la ruta debemos ver cómo fue el recorrido óptimo de las tablas de decisiones de las etapas, comenzando ahora por la primera y terminando en la última.

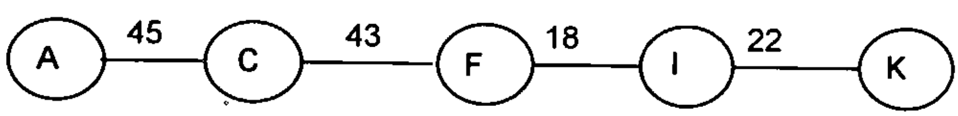
De esta forma vemos que de la tabla de la etapa I la ruta óptima es ir de A a D que viene siendo x_1^*; luego de la tabla de la etapa II, vemos que partiendo de D que fue el punto de salida de la etapa anterior, debemos ir hacia G que viene siendo x_2^*; de igual forma, al observar la tabla de la etapa III, vemos que partiendo de G, el camino óptimo es hacia J que es en este caso x_3^*; finalmente, de la tabla de la etapa IV vemos que de J debemos ir a K, que es x_4^*. De este modo el recorrido óptimo es el que se muestra en la



Costo total= 50+44+17+16=127

figura anterior donde vemos que la tabla final de la etapa I nos proporciona ya el costo total óptimo, puesto que lo fue acumulando en las diferentes tablas de decisión de las etapas.

También es importante señalar que la ruta óptima global es diferente de la ruta que se formaría si partiendo del inicio (Chihuahua) tomáramos el camino más económico en cada etapa, pues si procediéramos de esta manera, dicha ruta sería:



Costo total=45+43+18+22=128

De igual forma, es pertinente señalar que la programación dinámica representa un considerable ahorro en el número de cálculos que se tendrían que hacer si cada problema se fuese a resolver por enumeración completa de cada una de las rutas alternativas para ir del punto de inicio al final. Este ahorro es mayor, en cuanto sea mayor el número de etapas y de estados asociados de cada una de ellas. Para este caso en particular, hubiéramos tenido que calcular 3x3x3x1=27 diferentes rutas.

Presentaremos ahora otro caso práctico, como lo es el de asignar personal de la manera más eficiente para un determinado objetivo.

Ejemplo X.2.- Un despacho de abogados cuenta con 6 personas altamente capacitadas para enfrentar demandas del ramo penal. El despacho ha recibido últimamente 4 casos de esta área y busca la manera la siguiente tabla se muestran las utilidades en miles de nuevos pesos por la asignación de un número dado de abogados a las diferentes demandas.

No. de abogados asignados	Casos de demandas penales A	B	C	D
1	10	9	13	7
2	13	12	15	10
3	18	14	16	14
4	22	15	16	18
5	22	15	16	20
6	22	15	16	21

Si el despacho no asigna ningún abogado a cualquiera de las demandas, no obtiene ninguna utilidad.

Solución:

Lo primero será identificar para este caso las etapas, sus estados asociados y la función objetivo para poder plantear el problema como un caso de programación dinámica.

Aquí las etapas serán las demandas, mientras que los estados asociados a cada etapa serán el número de abogados asignados en total para las etapas ya analizadas, es decir desde la actual n hasta la última N, que es la etapa desde la cual debe iniciarse la solución del problema. La variable de decisión x_n será el número de abogados asignados a la etapa n que se esté resolviendo en particular.

La función objetivo en este caso será la utilidad acumulada obtenida por asignar abogados a las diferentes etapas, la cual deberá maximizarse y vendrá dada por la siguiente fórmula:

$$f_n(e_n,x_n)= U_n(x_n)+f_{n+1}^*(e_n - x_n) \qquad \text{Ec.(X.2)}$$

Donde:

$f_n(e_n,x_n)=$ Utilidad acumulada incluyendo la etapa actual n por asignar x_n abogados a ésta de un total de e_n

$n(x_n)=$ Utilidad obtenida por asignar x_n abogados a la etapa n.

$f_{n+1}^*(e_n - x_n)=$ Utilidad óptima acumulada de la etapa n+1 hasta la N por asignar $(e_n - x_n)$ abogados.

Procedemos ahora a la resolución del problema, iniciando con la última etapa, demanda D para obtener la tabla de decisiones, la que para este caso será igual a la columna de la demanda D de la tabla de utilidades, dado que al problema apenas comienza,

Etapa IV

Demanda D

e_4	$f_4^*(x_4)$	x_4^*
0	0	0
1	7	1
2	10	2
3	14	3
4	18	4
5	20	5
6	21	6

e_4 es el número total acumulado de abogados asignados de la etapa actual hasta la N y x_4^* representa la mejor asignación de la etapa actual, que como es la inicial, coinciden los valores de x_4^* con e_4.

Iremos ahora a la etapa III, la demanda C donde la función objetivo se calculará por la fórmula siguiente:

$$f_3(e_3,x_3)= U_3(x_3)+f_4^*(e_3 - x_3)$$

Donde e_3 será el número acumulado total de abogados asignados a las etapas III y IV, mientras que x_3 será el número de abogados asignados a la presente etapa.

Por su parte f_4^* se tomará de la tabla de la etapa anterior. Para ilustrar cómo se obtiene la tabla de decisiones de esta etapa, tomaremos como ejemplo el caso cuando $e_3 = 5$ y x_3 tiene valores de 0 a 5, puesto que x_3 no podrá ser mayor que e_3 .

Si $x_3 = 0$,

$$f_3(5,0)= U_3(0)+f_4^*(5)$$
$$= 0+20=20$$

Si $x_3 = 1$,

$$f_3(5,1)= U_3(1)+f_4^*(4)$$
$$= 13+18= 31$$

Si $x_3 = 2$,

$$f_3(5,2)= U_3(2)+f_4^*(3)$$
$$= 15+14= 29$$

Si $x_3 = 3$,

$$f_3(5,3)= U_3(3)+f_4^*(2)$$
$$= 16+10 = 26$$

Si $x_3 = 4$,

$$f_3(5,4)= U_3(4)+f_4^*(1)$$
$$= 16+7 = 23$$

Finalmente si $x_3 = 5$,

$$f_3(5,5)= U_3(5)+f_4^*(0)$$
$$= 16 + 0= 16$$

Si procedemos de la misma forma, para los diferentes valores posibles de e_3 desde cero a seis, obtenemos la tabla de la etapa, la cual es la siguiente:

Etapa III
Demanda C

$$f_3(e_3,x_3)= U_3(x_3)+f_4^*(e_3 - x_3)$$

e_3 \ x_3	0	1	2	3	4	5	6	$f_3^*(x_3)$	x_3^*
0	0	-	-	-	-	-	-	0	0
1	7	13	-	-	-	-	-	13	1
2	10	20	15	-	-	-	-	20	1
3	14	23	22	16	-	-	-	23	1
4	18	27	25	23	16	-	-	27	1
5	20	31	29	26	23	16	-	31	1
6	21	33	33	30	26	23	16	33	1, 2

Aquí es interesante notar que la columna x_3=0 es idéntica con la tabla de la etapa cuarta, dado que no se está asignando ningún abogado a la etapa actual. La columna de $f_3^*(x_3)$ nos da las utilidades máximas obtenidas para cada valor de e_3 que implica las etapas III y IV asociadas, mientras que la columna de x_3^* nos indica el número de abogados asignados en la etapa actual para la cual ocurrió $f_3^*(x_3)$.

Procederemos ahora a pasar a la etapa II, demanda B, para la cual la fórmula para calcular la función objetivo será:

$$f_2(e_2,x_2)= U_2(x_2)+f_3^*(e_2-x_2)$$

Donde e_2 será el número acumulado total de abogados asignados a las etapas II, III y IV y x_2 será el número de abogados asignados a esta etapa, mientras que f_3^* se toma de la tabla de decisiones de la etapa anterior.

Nuevamente ilustraremos la manera cómo se construye la tabla de decisiones con un ejemplo, para el caso de $e_2=4$ con x_2 variando de cero a 4.

Si $x_2 = 0$,

$$f_2(4,0)= U_2(0)+f_3^*(4)$$
$$= 0+ 27 = 27$$

Si $x_2 = 1$,

$$f_2(4,1)= U_2(1)+f_3^*(3)$$
$$= 9 + 23 = 32$$

Si $x_2 = 2$,

$$f_2(4,2)= U_2(2)+f_3^*(2)$$
$$= 12 + 20 = 32$$

Si $x_2 = 3$;

$$f_2(4,3)= U_2(3)+f_3^*(1)$$
$$= 14 + 13 = 27$$

Finalmente si $x_2 = 4$,

$$f_2(4,4)= U_2(4)+f_3^*(0)$$
$$= 15 + 0 = 15$$

Si efectuamos el mismo procedimiento, obtendremos la tabla de decisión de la etapa, la cual indica la política óptima de decisiones para las etapas II, III y IV conjuntamente. Dicha tabla es :

Etapa II
Demanda B

$$f_2(e_2,x_2)= U_2(x_2)+f_3^*(e_2-x_2)$$

x_2 / e_2	0	1	2	3	4	5	6	$f_2^*(x_2)$	x_2^*
0	0	-	-	-	-	-	-	0	0
1	13	9	-	-	-	-	-	13	0
2	20	22	12	-	-	-	-	22	1
3	23	29	25	14	-	-	-	29	1
4	27	32	32	27	15	-	-	32	1, 2
5	31	36	35	34	28	15	-	36	1
6	33	40	39	37	35	28	15	40	1

Donde nuevamente observamos que la columna de $x_2 = 0$, es igual a la de $f_3^*(x_3)$ de la tabla de la etapa anterior.

Finalmente iremos a la primera etapa, demanda A, para la cual la fórmula de la función objetivo será la siguiente:

$$f_1(e_1,x_1)= U_1(x_1)+f_2^*(e_1-x_1)$$

Donde e_1 tomará solamente el valor de 6, dado que se trata de la última etapa y por lo tanto deberán estar asignados el total de los abogados. Esta fórmula sumará la utilidad obtenida por asignar x_1 abogados a la etapa actual, $_1(x_1)$, con la mejor utilidad de asignar 6- x_1 abogados a las etapas restantes, así para el caso de x_1 =3, por asignar 3 abogados a la demanda A, nuestra utilidad será de 18, mientras que la mejor forma de asignar los 6-3 = 3 abogados restantes entre las otras demandas, se obtiene de la tabla de la etapa anterior, $f_2^*(3)= 29$, dando una utilidad global de 47 (18+29).

Aplicando un procedimiento similar para los demás valores de x_1, obtenemos nuestra tabla final, la cual será:

Etapa I
Demanda A

x_1			$f_1(e_1,x_1)= U_1(x_1)+f_2^*(e_1-x_1)$					$f_1^*(x_1)$	x_1^*
e_1	0	1	2	3	4	5	6		
6	40	46	45	47	44	35	22	47	3

De aquí vemos que la utilidad óptima es N$ 47,000 la cual resulta de asignar 3 abogados a la demanda A mientras que los 3 restantes deben asignarse de la siguiente manera:

Si analizamos la tabla de la etapa II vemos que para $e_2 = 3, x_2^*=$ por lo que debemos asignar sólo 1 abogado a la demanda B. Ahora, si observamos la tabla de la etapa III, para asignar los 2 abogados restantes, para $e_3 = 2, x_3^*= 1$, por lo que deberemos asignar también un abogado a esta etapa (demanda C) y el restante a la última etapa (demanda A).

Por lo tanto nuestra solución óptima es :

Demanda	No. de abogados asignados	Utilidad en MN$
A	3	18
B	1	9
C	1	13
D	1	7
Totales	6	47

Presentaremos ahora el caso de un problema de programación dinámica con multiplicación.

Ejemplo X.3.- El señor Juan García es el principal accionista de una sociedad la que es propietaria de 3 equipos de futbol soccer de la primera división: Toros, Potros y Lobos. En un viaje reciente a Brasil al señor García le han ofrecido a un precio muy accesible a 5 jugadores, los cuales ha adquirido para distribuir entre sus equipos.

De pláticas hechas con los técnicos de los equipos, ha formado una tabla de probabilidades de éxito de los mismos por asignarle un número determinado de jugadores, la cual es la siguiente:

Número de jugadores asignados	Toros	Potros	Lobos
0	0.20	0.30	0.35
1	0.45	0.48	0.50
2	0.60	0.62	0.60
3	0.72	0.70	0.68
4	0.75	0.74	0.70
5	0.73	0.76	0.72

Donde las probabilidades se han expresado en fracciones.

¿Cuál sería la forma más adecuada de distribuir los 5 jugadores entre los 3 equipos?

Solución:

Este es un problema similar al anterior de asignar personal entre diferentes equipos para lograr un objetivo. La diferencia esencial será la manera de definir la función objetivo, dado que el presente es un caso de maximización de la probabilidad conjunta de éxito de los 3 equipos, la cual se integrará ahora por la multiplicación de las probabilidades individuales de cada uno.

Aquí las etapas serán los equipos, 3 en este caso, mientras que los estados asociados con cada etapa será el número de jugadores totales que se van asignando desde la etapa actual hasta la última; x_n es la variable de decisión y representa el número de jugadores asignados a la etapa actual n.

La función objetivo vendrá dada en este caso por el producto de factores individuales, que son las probabilidades de éxito de cada equipo, cuya fórmula será la siguiente:

$$f_n(e_n, x_n) = p_n(x_n) . f_{n+1}^*(e_n - x_n) \qquad \text{Ec.(X.3)}$$

Donde:

$f_n(e_n, x_n)$= Probabilidad conjunta de éxito de la etapa actual n hasta la última N.

$p_n(x_n)$= Probabilidad individual de éxito por asignar x_n jugadores al equipo que corresponde a la etapa actual.

$f_{n+1}^*(e_n - x_n)$= Probabilidad conjunta óptima de las etapas asociadas n+1 hasta la N por asignar $(e_n - x_n)$ jugadores, la cual vendrá dada por la ecuación:

$$f_{n+1}^*(e_n - x_n) = {}_{Max} \prod_{i=n+1}^{N} p_i(x_i) \qquad \text{Ec.(X.4)}$$

Donde el símbolo Π denota multiplicación de todos los factores $p_i(x_i)$.

Una vez definidos los parámetros del problema, procederemos a la solución del mismo iniciando en la última etapa, el equipo de Lobos, cuya tabla de decisión será idéntica a la de los datos del problema, dado que éste apenas inicia.

Etapa III
Lobos

e_3	$f_3^*(e_3)$	x_3^*
0	0.35	0
1	0.50	1
2	0.60	2
3	0.68	3
4	0.70	4
5	0.72	5

Por lo cual también coinciden los valores de la columna de x_3^* con los de e_3 dado que no ha habido asignaciones anteriores.

Iremos ahora a la etapa II, el equipo de Potros, donde para dejar en claro el procedimiento que se debe seguir para obtener la tabla de decisiones de la etapa, tomaremos como ejemplo el cálculo cuando $e_2 = 4$ tomando x_2 valores de 0 a 4. Por su parte, la función objetivo habrá de calcularse con la Ec. (X. 3) aplicada a esta etapa, la cual será:

$$f_2(e_2, x_2) = p_2(x_2) . f_3^*(e_2 - x_2)$$

Entonces si $e_2 = 4$,

Para $x_2 = 0$,

$$f_2(4,0) = p_2(0) . f_3^*(4)$$
$$= (0.30)(0.70) = 0.21$$

Para $x_2 = 1$,

$$f_2(4,1) = p_2(1) . f_3^*(3)$$
$$= (0.48)(0.68) = 0.3264$$

$$f_2(4,2) = p_2(2).f_3^*(2)$$
$$= (0.62)(0.60) = 0.372$$

Para $x_2 = 3$,

$$f_2(4,3) = p_2(3).f_3^*(1)$$
$$= (0.70)(0.50) = 0.35$$

Finalmente para $x_2 = 4$,

$$f_2(4,4) = p_2(4).f_3^*(0)$$
$$= (0.74)(0.35) = 0.259$$

Efectuando un procedimiento análogo para los demás valores de e_2 obtenemos la tabla respectiva de la etapa, la cual será la siguiente:

Etapa II

Potros

$$f_2(e_2,x_2) = p_2(x_2).f_3^*(e_2 - x_2)$$

e_2 x_2	0	1	2	3	4	5	$f_2^*(e_2)$	x_2^*
0	0.105	-	-	-	-	-	0.105	0
1	0.150	0.168	-	-	-	-	0.168	1
2	0.180	0.240	0.217	-	-	-	0.240	1
3	0.204	0.288	0.310	0.245	-	-	0.310	2
4	0.210	0.3264	0.372	0.350	0.259	-	0.372	2
5	0.216	0.336	0.4216	0.420	0.370	0.266	0.4216	2

La que muestra la política de decisiones de las etapas conjuntas II y III.

En esta tabla es interesante observar que a diferencia del ejemplo X.2, la columna de la tabla para x_2 =0 no es igual a la columna de la tabla de la etapa III como sucedía con los problemas de adición, dado que para el caso presente las probabilidades van multiplicadas para las etapas II y III conjuntamente.

Finalmente iremos a la etapa I, asignar jugadores al equipo Toros. Aquí para construir la tabla de decisiones, la fórmula para la función objetivo será:

$$f_1(e_1,x_1) = p_1(x_1).f_2^*(e_1 - x_1)$$

Donde e_1 solamente tendrá el valor de 5, es decir el total de jugadores, ya que por ser la última etapa, deberá dejar el problema resuelto. Entonces, al aplicar la fórmula tendremos:

Como $e_1 = 5$, para $x_1 = 0$,

$$f_1(5,0) = p_1(0).f_2^*(5)$$
$$= (0.20)(0.4216) = 0.08432$$

Para $x_1 = 1$,

$$f_1(5,1) = p_1(1).f_2^*(4)$$
$$= (0.45)(0.372) = 0.1674$$

Para $x_1 = 2$,

$$f_1(5,2) = p_1(2).f_2^*(3)$$
$$= (0.60)(0.31) = 0.186$$

Para $x_1 = 3$,

$$f_1(5,3) = p_1(3).f_2^*(2)$$
$$= (0.72)(0.24) = 0.1728$$

Para $x_1=4$,

$$f_1(5,4)= p_1(4).f_2^*(1)$$
$$= (0.75)(0.168) = 0.126$$

Finalmente para $x_1=5$,

$$f_1(5,5)= p_1(5).f_2^*(0)$$
$$= (0.73)(0.105)= 0.07665$$

Con esto nuestra tabla es:
Etapa I
Toros

$$f_1(e_1,x_1)= p_1(x_1).f_2^*(e_1-x_1)$$

x_1							$f_1^*(e_1)$	x_1^*
e_1	0	1	2	3	4	5		
5	0.08432	0.1674	0.186	0.1728	0.126	0.07665	0.186	2

De la cual vemos que la mejor opción es una probabilidad conjunta de obtener éxito con sus tres equipos para el señor Juan García de 0.186, la cual realizará asignando 2 jugadores al equipo Toros, tal y como se observa de la tabla de la etapa I, puesto que $x_1^*=2$. Para saber cómo distribuir los restantes 3 jugadores, vamos a la tabla de decisión de la etapa II, donde vemos que para $e_2 = 3$, $x_2^*= 2$, por lo que se deberán asignar 2 jugadores de esos 3 restantes al equipo que comprende a esta etapa, Potros. Con esto el único jugador restante debe ser incorporado al equipo Lobos. Estas asignaciones se muestran en la tabla siguiente:

Equipos	No. de jugadores	Probabilidad de éxito
Lobos	1	0.50
Potros	2	0.62
Toros	2	0.60
Totales	5	(0.50)(0.62)(0.60)= 0.186

Estos ejemplos nos muestran claramente las ventajas de la programación dinámica para resolver este tipo de problemas, pues aún cuando los ejercicios resueltos en el capítulo no son grandes, se puede apreciar que ha habido ahorro en el número de cálculos necesarios para obtener su solución. Este ahorro obviamente será mayor cuando se manejen casos con más etapas y estados asociados.

PROBLEMAS PROPUESTOS

X.1.- Un candidato a senador por el Partido Inteligente busca obtener el mayor número de votos en 4 distritos, para lo cual dispone de 6 trabajadores, los cuales deberá distribuir entre los 4 distritos para obtener su fin. Su jefe de campaña ha estimado los votos incrementales que se obtendrían por tales asignaciones, los cuales son los siguientes:

Distritos / No. de trabajadores	I	II	III	IV
0	0	0	0	0
1	2500	2300	2000	2250
2	4300	4600	3950	4600
3	6000	6800	5800	7000
4	7200	9000	7600	8600
5	8250	10500	8700	9400
6	9000	10500	10000	9600

¿ Cómo deberá asignar a los trabajadores entre los distritos a fin de maximizar el número de votos incrementales?

X.2- Un comerciante en frutas tiene 4 bodegas de naranja en diferentes ciudades: México, Monterrey, Guadalajara y Puebla. Ha hecho compras de la fruta por un total de 7 lotes en huertas de naranja.

La tabla siguiente muestra las utilidades esperadas en miles de nuevos pesos (MN$), por asignar los 7 lotes entre las 4 bodegas:

	Bodegas			
No. de lotes	México	Monterrey	Guadalajara	Puebla
0	0	0	0	0
1	70	60	50	35
2	120	110	105	65
3	180	160	153	95
4	240	205	200	125
5	305	260	248	155
6	360	310	300	185
7	400	365	335	210

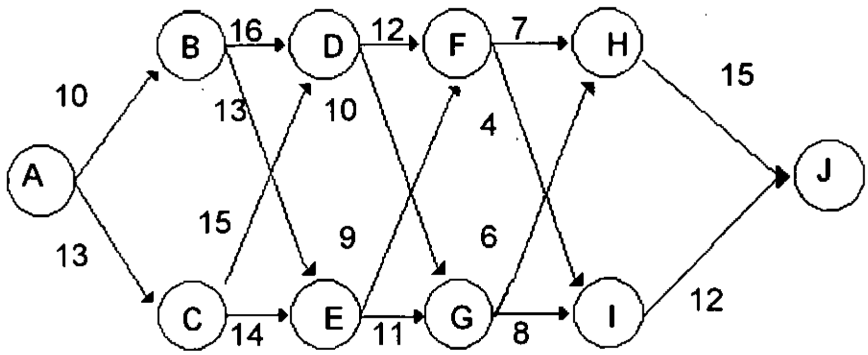
¿Cómo debe el comerciante efectuar sus asignaciones para maximizar su utilidad?

X.3.- Un detective cuenta con 3 ayudantes y debe resolver 3 casos de homicidios que le han sido encomendados. De un estudio de factibilidad le han entregado la siguiente información donde aparecen las probabilidades de fracaso en la aclaración de dichos homicidios por asignar a sus ayudantes a los 3 casos:

	Casos		
No. ayudantes asignados	I	II	III
0	0.50	0.60	0.60
1	0.40	0.48	0.50
2	0.30	0.36	0.38
3	0.22	0.25	0.32

¿ Cómo debe asignar a su personal a fin de minimizar la probabilidad conjunta de fracaso en los 3 casos?

X.4.- El esquema siguiente muestra 10 ciudades en las cuales se indican las rutas para abastecer de un producto desde A hasta J, sobre las flechas se han colocado los costos de flete para el transporte en miles de nuevos pesos, MN$. ¿ Cuál será la mejor ruta a seguir para minimizar el costo total?.



X.5.- Obtenga la peor ruta posible del problema anterior.

X.6.- ¿Cuál será la peor opción del detective en el caso del problema X.3?

X.7.- Un empresario desea expander su empresa, para lo cual ha contratado a 4 asesores para que le estructuren las áreas de producción, ventas, finanzas y mantenimiento.

Dispone de una tabla que le indica las utilidades en miles de nuevos pesos (MN$) incrementales que puede esperar por asignar a estos asesores en las diferentes áreas.

	A r e a s			
Número de asesores	Producción	Ventas	Finanzas	Mantenimiento
0	0	0	0	0
1	50	60	48	42
2	90	80	80	60
3	120	90	92	80
4	125	92	100	85

¿ Cómo deberá asignar a sus asesores a fin de maximizar sus utilidades incrementales?

X.8.- Un entrenador de atletismo debe asignar 4 atletas adicionales para 3 diferentes pruebas que son: Salto de altura, carrera de 10 Kms. y salto de longitud.

En la siguiente tabla se dan las probabilidades de éxito por dichas asignaciones.

No. atletas asignados	Pruebas Salto de altura	Carrera de 10 kms	Salto de longitud
0	0.40	0.30	0.50
1	0.50	0.45	0.68
2	0.60	0.58	0.80
3	0.65	0.70	0.82
4	0.70	0.73	0.84

¿ Cómo deberá asignar a sus atletas a fin de maximizar la probabilidad conjunta de lograr éxito en las 3 pruebas?

CAPITULO XI

ADMINISTRACION DE PROYECTOS

Introducción

En el mundo de las empresas y el de la vida cotidiana, el hombre suele con cierta frecuencia llevar a cabo proyectos con los fines más diversos, por ejemplo la construcción de una vivienda. Un proyecto podría definirse como un plan, el cual deberá incluir un objetivo o una serie de éstos debidamente planteados, así como también un presupuesto que contenga los recursos económicos destinados para el mismo y una calendarización con los plazos de tiempo correctamente estipulados para su conclusión.

Por lo antes expuesto, es claro que un proyecto deberá ser bien administrado, para que se logre un buen resultado conforme al programa inicial del mismo.

En el presente capítulo veremos algunos métodos que han sido diseñados para la administración de proyectos, los cuales han probado ser de gran ayuda para los administradores.

Este capítulo incluye primeramente el Gráfico de Gantt, que es el método más antiguo utilizado para la administración de proyectos; luego se verá el método de PERT/CPM, el que la mayoría de los autores maneja conjuntamente, aunque en realidad se trata de 2 métodos un poco diferentes, en este texto lo presentaremos sólo como uno, señalando las diferencias entre cada uno de ellos; finalmente se comenta brevemente acerca del planteamiento de este tipo de problemas desde el enfoque de la programación lineal.

El Gráfico de Gantt

Este es un método gráfico diseñado por H.L. Gantt para el control de proyectos, el cual aunque es muy simple, puede ser muy útil en algunos casos sencillos.

Consiste básicamente en incluir en forma gráfica las diferentes actividades que componen el proyecto, las cuales se incluyen en el eje de las ordenadas, mientras que en el eje de las abcisas va el tiempo, esto implica una calendarización del proyecto en forma gráfica. Las actividades del proyecto se pueden mostrar en la gráfica como barras o rayas horizontales, las cuales se podrán ir señalando de algún modo particular, como por ejemplo, rellenando las barras o ensanchar las rayas para indicar los avances del proyecto conforme al tiempo. Este método es útil para proyectos sencillos y proporciona una visualización rápida de las actividades y sus avances respecto al tiempo. Desgraciadamente no señala las dependencias entre las diferentes actividades, ya que en todo proyecto siempre habrá algunas actividades que para que puedan llevarse a cabo, deberán haber sido concluidas otras que son precedentes a las primeras, así por ejemplo, en el caso de la construcción de una vivienda, primero deberá terminarse la cimentación antes de levantar los muros de la misma, siendo que esta situación de dependencia no se muestra en el gráfico. Otra desventaja del presente método es que no indica el camino crítico del proyecto, el cual es aquella ruta que por ningún motivo puede retrasarse en las actividades que la componen, ya que de suceder así, implicará un retraso en el plazo de terminación del proyecto completo. Del mismo modo, el método del gráfico de Gantt tampoco indica los tiempos de holgura de las rutas no criticas del proyecto, los cuales son las cantidades de tiempo en que pueden demorarse las actividades de ese camino dado que no es crítico, sin que el proyecto global se retrase.

A continuación presentaremos un ejemplo ilustrativo del presente método.

Ejemplo XI.1.- Elaborar el gráfico de Gantt para el proyecto de reemplazar un molino en una planta beneficiadora de minerales. La siguiente tabla indica las actividades que se deben desarrollar, así como sus tiempos de ejecución y las actividades precedentes.

Clave de actividad	Descripción de la actividad	Tiempo de duración, hrs.	Actividad precedente
A	Quitar sistema de anclaje	4	---
B	Desconectar sistema eléctrico	1	---
C	Desconectar sistema hidráulico	2	---
D	Quitar molino anterior	4	A, B, C
E	Limpieza y adaptación de sistema de anclaje	2.5	D
F	Colocar molino nuevo	2.5	E
G	Anclaje molino nuevo	1.5	F
H	Conectar sistema eléctrico	1	F
I	Conectar sistema hidráulico	1.5	F
J	Arrancar molino nuevo	3.5	G, H, I

Solución:

De acuerdo con la metodología, debemos colocar nuestros ejes, el eje de las ordenadas será para mostrar las 10 actividades que integran el proyecto, mientras que el de las abcisas será la escala de tiempo, la cual deberá ser suficiente para el tiempo total del proyecto.

Luego procedemos a ubicar cada actividad en el gráfico conforme a sus duraciones, lo que se hará del modo siguiente:

Las actividades A, B y C por no tener actividad precedente pueden iniciar a tiempo cero y concluirán entonces según el tiempo de duración de cada una, de esta forma la A terminará a las 4 horas, la B a la hora y la C a las 2 horas.

De manera similar, la actividad D que lleva como actividades precedentes a la A, B y C, podrá iniciar hasta que estas tres hayan sido efectuadas, siendo su tiempo de inicio a las 4 horas y el de terminación a las 8 horas, que será la suma de su tiempo de inicio más el de su duración.

Prosiguiendo con el orden de la tabla, la actividad E tiene como precedente a la D, por lo que su inicio será tan pronto como finalice ésta a las 8 horas, concluyendo a las 10.5 horas, dado que su duración es de 2.5 horas.

Luego la actividad F puede iniciar a las 10.5 horas, dado que la E es su única actividad precedente y terminará a las 13 horas, puesto que se efectuará en 2.5 horas.

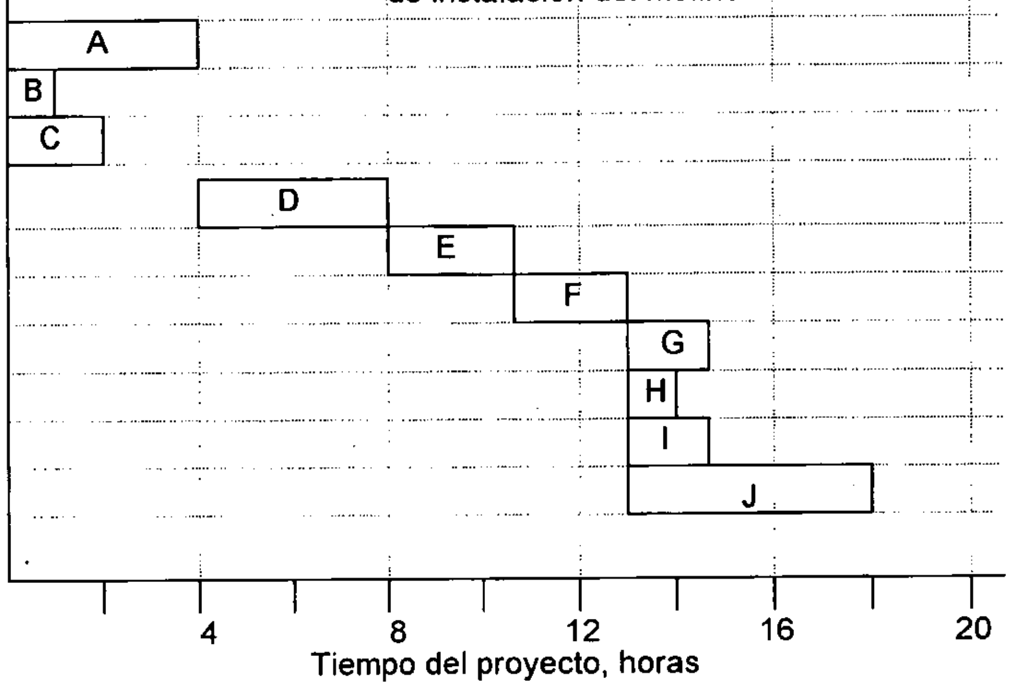
De la tabla de actividades del proyecto podemos observar que las 3 actividades siguientes, es decir la G, H e I tienen como única actividad precedente a la F, por lo cual pueden ser comenzadas a las 13 horas, terminando entonces a la suma de este tiempo común de inicio más su tiempo particular de duración de cada una. Con esto, la G finalizará a las 14.5 horas, la H a las 14 horas y la I a las 14.5 horas.

Finalmente la última actividad es la J, la cual tiene como precedentes a las 3 anteriores: G, H e I pudiendo ser iniciada tan pronto como éstas hayan concluido, siendo por este motivo su inicio a las 14.5 horas y su terminación a las 18 horas, dado que dura 3.5 horas.

Con esto, nuestra gráfica quedará tal y como se muestra en la figura XI.1, donde cada actividad se ha indicado por barras con diagonales, las que a la hora de llevar a cabo el proyecto se podrían ir rellenando conforme se fueran efectuando aquellas para un mejor control del mismo. Vemos también que éste debe tener 18 horas de tiempo para su culminación.

También del gráfico podemos apreciar que no hay ninguna indicación de las precedencias entre las diferentes actividades, tal y como fue comentado en la explicación del método. Lo único que podemos apreciar es la programación de las actividades respecto al tiempo. No obstante que el gráfico de Gantt es simple, suele ser de gran utilidad para proyectos que no abarcan muchas actividades, como en el presente caso.

Figura XI.1.- Gráfico de Gantt del proyecto de instalación del molino.



Método PERT/CPM

Generalidades

Este método hoy en nuestros días ha ganado mucha popularidad debido a que puede aplicarse a un gran número de casos que aparecen en los negocios, la industria y en las áreas de investigación y desarrollo de nuevas tecnologías, además de que no es muy complejo para su manejo, aunque sí más elaborado que el método anterior. La mayoría de los autores de la materia suele presentarlo como un método, cuando en realidad es una mezcla de dos:

El PERT, de sus siglas en Inglés (*Program Evaluation and Review Technique*), Técnica de Evaluación y Revisión de Programas, el cual fue desarrollado en la década de los 50 y utilizado en el proyecto de los misiles Polaris para la Fuerza Naval de los Estados Unidos; el otro método, CPM, de sus siglas en Inglés (*Critical Path Method*), Método de la Ruta Crítica, se originó en forma independiente a PERT y se ha utilizado ampliamente en proyectos industriales y del ramo de la construcción.

Los dos métodos son similares, teniendo algunas variantes entre ellos, las cuales comentaremos:

Estimación del tiempo de las actividades del proyecto.

PERT maneja los tiempos de las actividades en forma probabilística, basado en una distribución de probabilidad, tal y como veremos más adelante, mientras que CPM lo hace en forma determinística, es decir que los tiempos se conocen con certeza basados en experiencias anteriores.

Area de énfasis.

PERT se ha diseñado para que los proyectos sean llevados a cabo en el plazo de tiempo programado, mientras que CPM analiza la relación tiempo-costo del proyecto y en base a ésta determina la acción a seguir.

Aplicación.

Mientras que PERT se ha utilizado generalmente para proyectos de investigación y desarrollo en los cuales los tiempos de las actividades no se conocen con precisión, CPM por su parte se ha empleado en proyectos donde el administrador ya cuenta con alguna experiencia anterior, como son las áreas industriales y de la construcción donde los tiempos de las actividades pueden definirse sin mucha dificultad.

Notación.

En la elaboración de la red de un proyecto, en la cual se indican las actividades del mismo, así como también los sucesos o eventos, los que no son otra cosa que el inicio o terminación de una actividad; se tiene la siguiente diferencia entre PERT y CPM: En PERT los eventos se representan por círculos, a los cuales se les denomina nodos y las actividades por flechas, las cuales también indican las relaciones de precedencia. Por su parte en CPM los nodos simbolizan tanto eventos como actividades y las flechas sólo muestran precedencias. En este texto adoptaremos la notación PERT, que es la más usual.

El método presente es mejor que el gráfico de Gantt, dado que no tiene las desventajas de aquel, aunque requiere de mayor trabajo para ser implementado por parte del administrador.

Es muy adecuado para grandes proyectos en donde es importante tanto el tiempo de realización como el costo de los mismos. En la actualidad la mayor parte de las industrias y empresas consultoras en el ramo lo aplican en alguna de sus versiones.

En este texto, utilizaremos el PERT/CPM en su versión más común para el área de la enseñanza de la Investigación de Operaciones y el cual se compone tomando partes tanto de PERT como de CPM.

Metodología

Construcción de la red del proyecto.

Ahora explicaremos la metodología del PERT/CPM, la que nos servirá para elaborar la red de un proyecto, que incluirá las actividades, las cuales se representarán por flechas, así como los eventos, indicados por círculos o nodos.

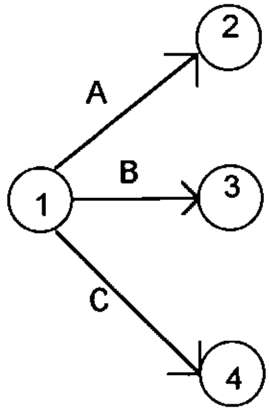
Para esto daremos 8 reglas prácticas que pensamos serán de gran utilidad para la construcción de la red, una vez que se han listado las actividades con sus tiempos de duración y sus relaciones de precedencia:

1. Antes de representar cualquier actividad en la red, deberán haberse indicado ya en ella todas las actividades precedentes.
2. Las flechas indicarán tanto las actividades como también las precedencias, no teniendo ningún significado la longitud de las mismas.
3. Todas las flechas de la red deberán iniciar y terminar en un nodo.
4. No puede haber dos nodos que queden conectados entre sí por más de una flecha.
5. No puede haber más de un nodo inicial o final.
6. No puede haber en la red ciclos, es decir, flechas que regresen el flujo de las actividades a algún nodo anterior del cual habían partido.
7. Puede haber actividades ficticias, las cuales se representarán por medio de flechas punteadas y que servirán solamente para mostrar precedencias, con un tiempo de duración de cero.
8. Deben numerarse los nodos de los eventos en orden creciente desde el inicio hasta el final de la red.

A continuación ilustraremos la aplicación de estas reglas con un ejemplo:

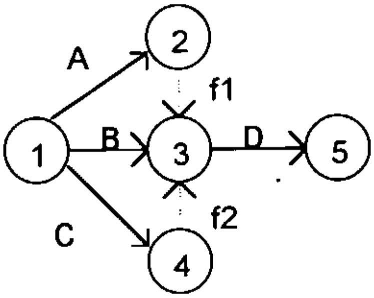
Ejemplo XI.2.- Elaborar la red del proyecto del ejemplo XI.1

Solución: Tomaremos como base la tabla de actividades del problema XI.1, con la cual y de acuerdo a la primera regla, deberemos iniciar por la primera actividad, que en este caso serán las actividades A, B y C, dado que ninguna de ellas tiene alguna precedente, dicha parte de la red será :



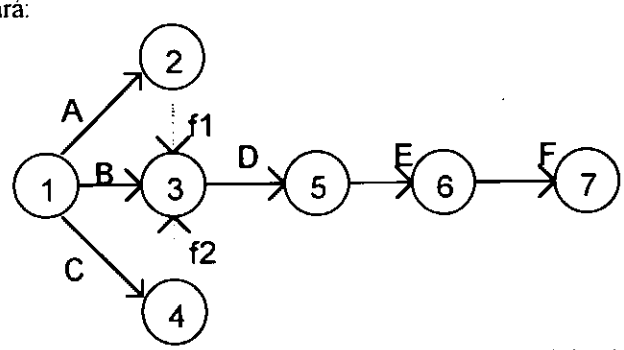
Dado que la tercera regla indica que cada flecha debe terminar en un nodo, los cuales han sido numerados conforme a la regla ocho.

De aquí debe seguir la actividad D quien tiene como precedentes a la A, B y C, esto se representa en la red de la manera siguiente:

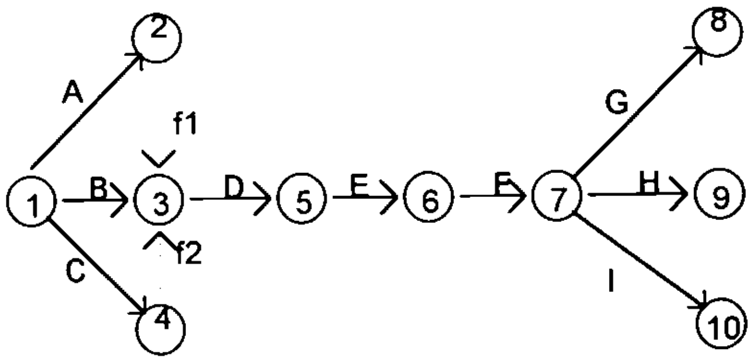


En la cual se incorporan las actividades ficticias f1 y f2 para señalar que las actividades A y C respectivamente son precedentes de la D.

Luego vemos de la tabla de actividades que la D es precedente de la E y ésta a su vez de la F, con esto la red quedará:



Luego vemos que la actividad F es precedente de tres actividades: la G, H e I, las cuales aparecerán en la red del modo siguiente:



De aquí la única actividad que falta por señalar en la red es la J, la cual por tener de precedentes a las tres actividades antes citadas, irá representada así :

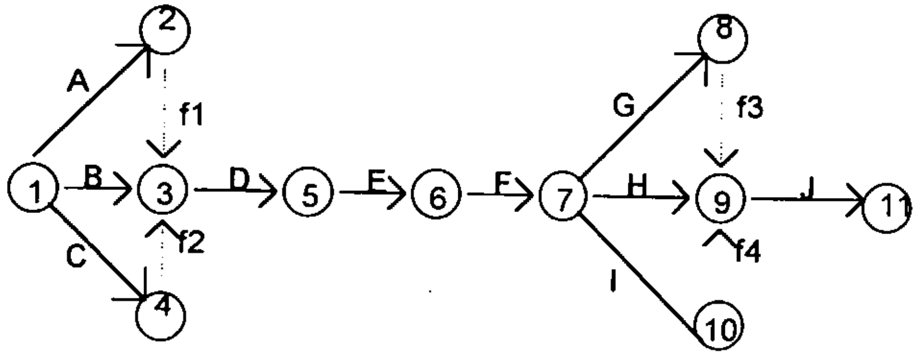


Figura XI.2. Red final del proyecto de reemplazo del molino

Donde se ha requerido incluir las actividades ficticias f3 y f4 para indicar las precedencias de las actividades G e I respectivamente.

Con esto la red ha quedado terminada con 14 actividades, 4 de ellas ficticias con tiempos de duración de cero y con 11 nodos o eventos del proyecto.

Determinación del camino crítico.

Una vez que se ha construido la red del proyecto, el siguiente paso es determinar que es el camino crítico para el mismo, dado que éste determinará el plazo de tiempo para su finalización.

Para lograr esto, primeramente debemos estimar para cada evento de la red, dos variables: El tiempo más próximo y el tiempo más lejano.

El tiempo más próximo de un evento es el tiempo en el que puede suceder éste, si las actividades precedentes a él ocurren lo más pronto posible; por su parte **el tiempo más lejano** de un evento es el último tiempo al cual puede acontecer, sin retrasar al proyecto.

Para obtener el tiempo más próximo de un evento dado cualquiera, se recurre a la siguiente fórmula:

$$\begin{array}{c}\text{Tiempo más}\\ \text{próximo del}\\ \text{evento actual}\end{array} = \begin{array}{c}\text{Tiempo más}\\ \text{próximo del}\\ \text{evento precedente}\end{array} + \begin{array}{c}\text{Tiempo de duración de la}\\ \text{actividad que va del evento}\\ \text{precedente al actual}\end{array} \qquad \text{Ec.(XI.1)}$$

Para aquellos casos en los cuales el evento actual tenga varios eventos precedentes, su tiempo más próximo será el mayor de los calculados al aplicar la fórmula antes citada para cada evento precedente.

Para obtener los tiempos más próximos de los eventos del proyecto, se inicia por el evento inicial y se aplica el procedimiento antes descrito hasta terminar en el evento final .

Por su parte, para obtener el tiempo más lejano de un evento dado cualquiera, se utiliza la siguiente fórmula:

$$\begin{array}{c}\text{Tiempo más}\\ \text{lejano del}\\ \text{evento actual}\end{array} = \begin{array}{c}\text{Tiempo más}\\ \text{lejano del}\\ \text{evento posterior}\end{array} - \begin{array}{c}\text{Tiempo de duración de la}\\ \text{actividad que va del evento}\\ \text{actual al posterior}\end{array} \qquad \text{Ec.(XI.2)}$$

De manera análoga para aquellos casos en los que el evento actual tenga varios eventos posteriores a él, se calculará el tiempo más lejano del evento actual por la fórmula (XI.2) para el caso de cada evento posterior y se tomará el que resulte ser el menor.

Para obtener los tiempos más lejanos de los eventos de una red, se inician los cálculos por el evento último y se avanza en sentido inverso al de la red hasta finalizar en el primer evento.

Por otro lado, **la holgura de un evento** se define como la diferencia entre el tiempo más próximo y el más lejano para el evento, representando la cantidad de tiempo en la cual podría demorarse dicho evento sin que el proyecto aumente el plazo de tiempo para su terminación.

Por su parte se define también el término de **la holgura para una actividad**, como la cantidad de tiempo que podría demorarse la actividad sin ocasionar retrasos en el proyecto, la cual puede obtenerse por medio de la siguiente fórmula:

Holgura para la actividad	=	Tiempo más lejano del evento correspondiente al nodo destino	-	Tiempo más próximo del evento correspondiente al nodo origen	-	Tiempo de duración de la actividad	Ec.(XI.3)

El nodo origen será donde inicia la actividad y el nodo destino aquel hacia donde llega la flecha correspondiente a la actividad.

A los diferentes caminos alternativos de una red que van del evento inicial hasta el final, se les conoce como **rutas**. La ruta crítica será aquella que tenga la máxima sumatoria de tiempos de las actividades que la forman, de modo que ella define al plazo de tiempo para que el proyecto sea completado, por lo tanto, en la ruta crítica no podrá haber demoras en las actividades que la integran, puesto que si éstas aparecieran, el proyecto se vería retrasado.

De hecho una definición frecuente de la ruta crítica es la siguiente: **Ruta crítica** es aquella cuyas actividades tienen todas una holgura de cero, dado que no pueden permitirse tiempos ociosos, los cuales demorarían el proyecto.

Todo proyecto tiene por lo menos una ruta crítica, pudiendo haber varias en un momento dado.

A continuación presentaremos dos ejemplos que aclaran los conceptos anteriores.

Ejemplo XI.3.- Determinar los tiempos más lejanos y los más próximos de los eventos, las holguras y la ruta crítica para la red del proyecto del problema XI.2.

Solución:

De la figura XI.2, que es la red del ejemplo anterior, prepararemos 2 tablas, una para los tiempos más próximos de los eventos de la red y la otra para los tiempos más lejanos, conforme a las fórmulas (XI.1) y (XI.2) respectivamente.

Dichas tablas se explican por sí solas, por lo que se recomienda al lector el seguimiento por cada evento para darse cuenta de la manera cómo se han aplicado las fórmulas respectivas.

Tabla XI.2 Cálculo de los tiempos más próximos para la red de la figura XI.2

Evento actual	Evento precedente	Cálculo del tiempo más próximo para el evento actual, fórmula (XI. 1)	Tiempo más próximo del evento actual
1	---	---	0
2	1	0+4	4
4	1	0+2	2
3	1	0+1	4
	2	4+0	
	4	2+0	
5	3	4+4	8
6	5	8+2.5	10.5
7	6	10.5+2.5	13
8	7	13+1.5	14.5
10	7	13+1.5	14.5
9	7	13+1	14.5
	8	14.5+0	
	10	14.5+0	
11	9	14.5+3.5	18

De la tabla vemos que el tiempo más próximo para el evento final es de 18 horas, el cual por ser el último evento será también su tiempo más lejano, a partir del cual se calculará la tabla de los tiempos más lejanos para el total de los eventos de la red y que presentamos a continuación:

Tabla XI.3. Tiempos más lejanos para la red de la figura XI.2

Evento actual	Evento posterior	Cálculo del tiempo más lejano para el evento actual, fórmula (XI. 2)	Tiempo más lejano del evento actual
11	---	---	18
9	11	18-3.5	14.5
10	9	14.5-0	14.5
8	9	14.5-0	14.5
7	8	14.5-1.5	13
	9	14.5-1	
	10	14.5-1.5	
6	7	13-2.5	10.5
5	6	10.5-2.5	8
3	5	8-4	4
2	3	4-0	4
4	3	4-0	4
1	2	4-4	0
	3	4-1	
	4	4-2	

En estas tablas se muestra claramente cómo cuando existen varios eventos precedentes para el cálculo de los tiempos más próximos, se toma el mayor valor y de forma similar cuando se calculan los tiempos más lejanos, cuando hay varios eventos posteriores, se toma el menor.

Ahora prepararemos la tabla de holguras para los eventos y las actividades, conforme a lo explicado anteriormente, que la holgura de un evento es la diferencia entre su tiempo más próximo y más lejano y la holgura de una actividad se estima por medio de la fórmula (XI.3). Con esto nuestra tabla será la siguiente:

Tabla XI.4. Holgura de eventos y actividades para la red de la figura XI.2

Evento	Holgura del evento	Actividad	Holgura de la actividad
1	0-0=0	A	4-0-4=0
2	4-4=0	B	4-0-1=3
3	4-4=0	C	4-0-2=2
4	4-2=2	D	8-4-4=0
5	8-8=0	E	10.5-8-2.5=0
6	10.5-10.5=0	F	13-10.5-2.5=0
7	13-13=0	G	14.5-13-1.5=0
8	14.5-14.5=0	H	14.5-13-1=0.5
9	14.5-14.5=0	I	14.5-13-1.5=0
10	14.5-14.5=0	J	18-14.5-3.5=0
11	18-18=0		

En esta tabla no se han incluido las actividades ficticias.

Toda esta información de los tiempos y holguras se incluye en la red, lo cual se muestra en la figura XI.3.

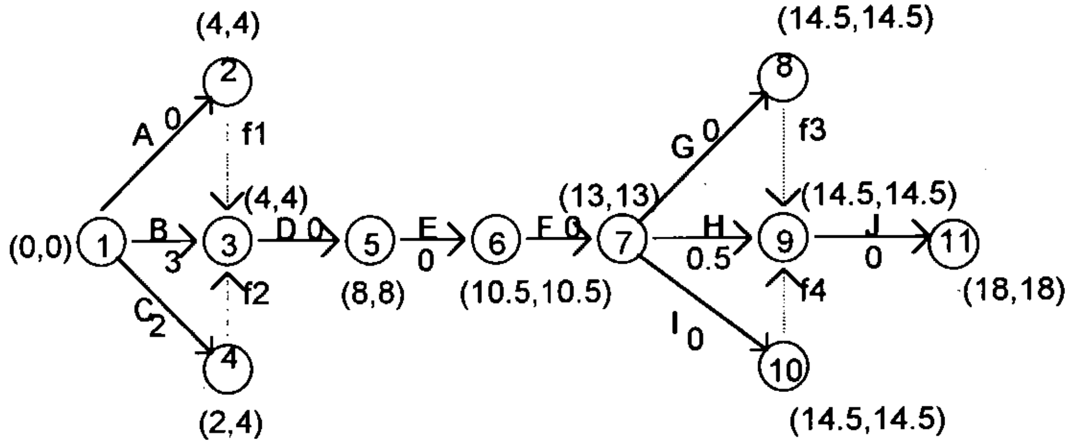


Figura XI.3. Red del proyecto mostrando los tiempos más próximos y más lejanos de los eventos y las holguras de las actividades.

Donde los números en los nodos que están entre paréntesis son el tiempo más próximo y el más lejano para el evento respectivo, mientras que las holguras de cada actividad se han señalado por un número colocado junto a la actividad correspondiente. Puesto que la ruta crítica es aquella cuyas actividades tienen todas una holgura de cero, vemos que esta red tiene dos rutas críticas con un tiempo total para el proyecto de 18 horas cada una, las cuales son: A- f1- D- E- F- G- f3- J

A- f1- D- E- F- I- f4- J

Con esto vemos que si el proyecto se desea terminar a tiempo, deberá ponerse especial atención a estas 2 rutas, dado que cualquier demora en alguna de las actividades que las forman, causará un retraso en el tiempo de entrega de 18 horas para el proyecto.

Ahora presentaremos otro ejemplo:

Ejemplo XI.4.- Para el proyecto de la construcción de una casa, se tiene la tabla XI.5 con el listado de las actividades que la componen, así como las precedencias y los tiempos de duración.

Se desea obtener la red, los tiempos más próximos y más lejanos para los eventos, los holguras y la ruta crítica del proyecto.

Tabla XI.5 Actividades en el proyecto de la construcción de una casa.

Clave de actividad	Actividad precedente	Descripción de la actividad	Tiempo de duración, días
A	---	Excavación de zanjas para cimentación	3
B	A	Cimentación	5
C	B	Levantar paredes	12
D	C	Instalar plomería exterior	5
É	C	Hacer instalación eléctrica	8
F	C	Colar techos	8
G	D	Instalar plomería interior	7
H	E, G	Hacer aplanado de interiores	10
I	F	Hacer aplanado de exteriores	7
J	H	Pintar interiores	3
K	H	Colocar pisos	6
L	D, I	Pintar exteriores	10
M	J, K	Hacer acabados interiores	9
N	L	Hacer acabados exteriores	8
O	N	Hacer trabajo de áreas verdes	2

Solución: Lo primero será elaborar la red del proyecto, la cual se muestra en la figura XI.4

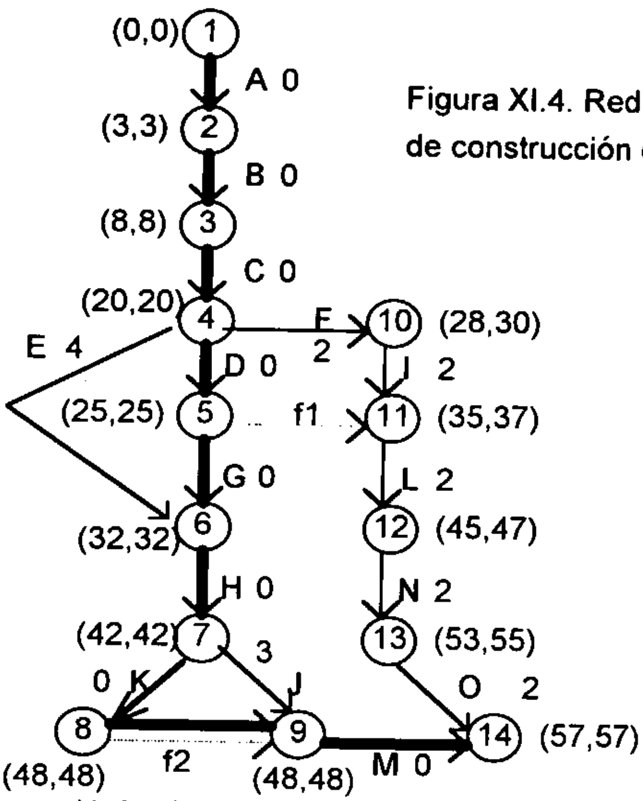


Figura XI.4. Red del proyecto de construcción de una casa.

Se han requerido 2 actividades ficticias: La f1 para indicar que la actividad L tiene como precedente a la D y la f2 para señalar que la actividad K es precedente de la M. También es interesante observar que en el caso de la actividad E que es precedente de la H, no se ha hecho necesario incluir una actividad ficticia, puesto que la flecha correspondiente a ella no viola la regla 4 ya que viene del nodo número 4 y la flecha de la actividad G viene del nodo número 5. Por su parte, mediante la aplicación de la fórmula (XI.1) e iniciando por el nodo 1, se crea la tabla de los tiempos más próximos de los eventos, la cual es:

Tabla XI.6 Cálculo de los tiempos más próximos de la red del proyecto de la construcción de una casa.

Evento actual	Evento precedente	Cálculo del tiempo más próximo para el evento actual, fórmula (XI. 1)	Tiempo más próximo evento actual
1	---	---	0
2	1	0+3	3
3	2	3+5	8
4	3	8+12	20
5	4	20+5	25
6	4	20+8	
	5	25+7	32
7	6	32+10	42
8	7	42+6	48
9	7	42+3	
	8	48+0	48
10	4	20+8	28
11	5	25+0	
	10	28+7	35
12	11	35+10	45
13	12	45+8	53
14	9	48+9	57
	13	53+2	

De forma similar se estiman los tiempos más lejanos, por medio de la fórmula (XI.2), iniciando por el nodo 14 y avanzando por la red en sentido inverso, la tabla siguiente muestra estos cálculos:

Tabla XI.7 . Cálculo de los tiempos más lejanos de la red del proyecto de la construcción de una casa.

Evento actual	Evento posterior	Cálculo del tiempo más lejano para el evento actual, fórmula (XI.2)	Tiempo más lejano del evento actual
14	---	---	57
13	14	57-2	55
12	13	55-8	47
11	12	47-10	37
10	11	37-7	30
9	14	57-9	48
8	9	48-0	48
7	8	48-6	42
	9	48-3	
6	7	42-10	32
5	6	32-7	25
	11	30-0	
4	5	25-5	20
	6	32-8	
	10	30-8	
3	4	20-12	8
2	3	8-5	3
1	2	3-3	0

Ahora prepararemos la tabla de holguras, la de los eventos es simplemente la diferencia entre el tiempo más próximo y el más lejano del evento, mientras que la holgura de las actividades se obtiene por medio de la fórmula (XI.3). Los resultados se presentan en la tabla siguiente:

Tabla XI.8 Holguras de los eventos y las actividades para la red del proyecto de la construcción de una casa.

Evento	Holgura del evento	Actividad	Holgura de la actividad
1	0-0=0	A	3-0-3=0
2	3-3=0	B	8-3-5=0
3	8-8=0	C	20-8-12=0
4	20-20=0	D	25-20-5=0
5	25-25=0	E	32-20-8=4
6	32-32=0	F	30-20-8=2
7	42-42=0	G	32-25-7=0
8	48-48=0	H	42-32-10=0
9	48-48=0	I	37-28-7=2
10	30-28=2	J	48-42-3=3
11	37-35=2	K	48-42-6=0
12	47-45=2	L	47-35-10=2
13	55-53=2	M	57-48-9=0
14	57-57=0	N	55-45-8=2
		O	57-53-2=2

Esta información se incluye en la red de la figura XI. 4, apareciendo entre paréntesis los tiempos más próximos y más lejanos de los eventos y las holguras de las actividades junto a cada una de éstas.

De la figura se puede apreciar claramente que la ruta crítica es la que se compone por las actividades A - B - C - D - G - H - K - f2 - M, la cual se muestra por las flechas más gruesas, con todas sus actividades con holguras cero y con un tiempo total del proyecto de 57 días.

También podemos observar que la actividad J tiene una holgura de 3 días, mientras que para la actividad E es de 4 días y la rama de la red formada por las actividades F - I - L - N - O tiene una holgura de 2 días, lo que significa que todas estas actividades pueden permitir en conjunto una demora en esta cantidad de tiempo, por lo que si una sola de ellas, por decir la F, se retrasa 2 días, el resto de las actividades que componen la rama ya no podrá demorarse, pues de suceder así, retrasará al proyecto completo.

Con esto podemos darnos cuenta que algunas rutas que no son críticas, pueden llegar a convertirse en tales si alguna o algunas de las actividades que las forman llegaran a retrasarse en una cantidad de tiempo mayor o igual a la de sus holguras correspondientes.

Estimación de tiempos en PERT/CPM

El método PERT usualmente se ha utilizado en proyectos de investigación y desarrollo, donde no existe ningún antecedente en cuanto a los tiempos de duración de las actividades, por lo cual deberán estimarse de alguna manera para poder efectuar la programación correspondiente.

Lo que supone el PERT y que es el tema de este inciso es que los tiempos de las actividades deben seguir un comportamiento que pueda ser descrito por alguna distribución de probabilidad, para lo cual resultó ser adecuada la distribución beta, dado que tiene sólo un valor más alto (una sola moda), además de que sus menores valores son no negativos, los mayores son finitos y no es necesariamente simétrica, razones por las cuales quienes desarrollaron PERT la eligieron.

El tiempo esperado para cada actividad se calcula por medio de la siguiente fórmula:

$$t_e = \frac{t_o + 4t_m + t_p}{6} \qquad \text{Ec.(XI.4)}$$

Donde :

t_e = Tiempo esperado para la actividad.

t_o = Tiempo optimista para la actividad (tiempo de la actividad si todo sale bien), es la cota inferior de la distribución beta.

t_m = Tiempo más probable para la actividad (tiempo de la actividad en condiciones normales), es la moda de la distribución beta.

t_p = Tiempo pesimista para la actividad (tiempo de la actividad si todo sale mal), es la cota superior de la distribución beta.

Con esta ponderación de los 3 tiempos, se halla el tiempo esperado para la actividad, el cual ha funcionado bien en las distintas aplicaciones de PERT a proyectos innovadores.

Sin embargo, cuando los intervalos de valor entre los tiempos optimista y pesimista son grandes, disminuye la confianza en el uso del tiempo esperado estimado por la fórmula (XI. 4). Por esto es usual determinar el grado de variación que puede haber en las estimaciones, lo cual se logra mediante el cálculo de la variancia, que se hace con la siguiente fórmula :

$$\sigma^2 = [(t_p - t_o)/6]^2 \qquad \textbf{Ec.(XI.5)}$$

Donde σ^2 es la variancia y σ será entonces la desviación estándar. Esta fórmula se utiliza debido a que muchas distribuciones de probabilidad tienen sus cotas superiores a una distancia de 6 desviaciones estándar de las inferiores.

En un proyecto dado, la variancia del tiempo de terminación del proyecto será la suma de las variancias individuales de las actividades que integran la ruta crítica, lo cual es de gran importancia, puesto que nos permite saber con cuanta certeza se puede esperar que el proyecto se termine en un plazo dado de tiempo.

Para esto se suponen 2 situaciones: los tiempos de las actividades son estadísticamente independientes y que el tiempo del proyecto sigue la curva de distribución normal de probabilidad.

Enseguida presentaremos un ejemplo ilustrativo de los conceptos de este inciso.

Ejemplo XI.5.- Para el proyecto de construcción de una casa visto anteriormente, determinar la probabilidad de que el proyecto se realice: (a) en 60 días, (b) en 62 días y (c) en 65 días.

En la siguiente tabla se dan los tiempos optimista, más probable y pesimista para cada actividad.

Tabla XI.9 . Tiempos optimista, más probable y pesimista para el proyecto de construcción de una casa, en días.

Actividad	Tiempo optimista	Tiempo más probable	Tiempo pesimista
A	1	3.2	4.2
B	4	5	6
C	8	11.5	18
D	3	5.2	6.2
E	4.4	8.4	10
F	5	8.2	10.2
G	4.6	6.8	10.2
H	6	9	18
I	4.8	6.9	9.6
J	1.2	3	4.8
K	4	5	12
L	8	10	12
M	7.2	8.2	14
N	6	8	10
O	0.8	1.8	4

Solución: Para cada actividad, debemos estimar su tiempo esperado por la fórmula (XI.4) y su variancia por la fórmula(XI.5), esto lo ejemplificamos para el caso de la actividad A:

Tiempo esperado, $t_e = \dfrac{t_o + 4\,t_m + t_p}{6} = \dfrac{1 + 4\,(3.2) + 4.2}{6} = 3.0$

Variancia, $\sigma^2 = [(t_p - t_o)/6]^2 = [(4.2 - 1)/6]^2 = 0.2844$

Si se aplican las fórmulas anteriores a cada actividad, se generan los resultados que presentamos en la siguiente tabla:

Tabla XI. 10 .Tabla anterior incluyendo los tiempos esperados y las variancias para cada actividad.

Actividad	Tiempo optimista	Tiempo más probable	Tiempo pesimista	Tiempo esperado	Variancia
A	1	3.2	4.2	3	0.2844
B	4	5	6	5	0.1111
C	8	11.5	18	12	2.7778
D	3	5.2	6.2	5	0.2844
E	4.4	8.4	10	8	0.8711
F	5	8.2	10.2	8	0.7511
G	4.6	6.8	10.2	7	0.8711
H	6	9	18	10	4.0
I	4.8	6.9	9.6	7	0.640
J	1.2	3	4.8	3	0.360
K	4	5	12	6	1.7778
L	8	10	12	10	0.4444
M	7.2	8.2	14	9	1.2844
N	6	8	10	8	0.4444
O	0.8	1.8	4	2	0.2844

Si comparamos los resultados de los tiempos esperados calculados aquí con los datos de la tabla XI. 5, veremos que son exactamente iguales.

La ruta crítica para este proyecto, tomándola del ejemplo anterior, puesto que los tiempos son los mismos, es A - B - C - D - G - H - K - f2 - M, por lo que la variancia del proyecto será la suma de las variancias individuales para las actividades que forman la ruta crítica, entonces.

$$\sigma^2 = \sigma^2_A + \sigma^2_B + \sigma^2_C + \sigma^2_D + \sigma^2_G + \sigma^2_H + \sigma^2_K + \sigma^2_{f2} + \sigma^2_M$$

Como σ^2_{f2} es cero, dado que f2 es una actividad ficticia,

$$\sigma^2 = 0.2844 + 0.1111 + 2.7778 + 0.2844 + 0.8711 + 4.0 + 1.7778 + 0 + 1.2844$$

$$= 11.391$$

por lo cual la desviación estándar, $\sigma = \sqrt{11.391} = 3.375$

El tiempo de terminación del proyecto es de 57 días, el cual vendrá siendo la media si se cumple la curva normal de distribución de probabilidad, es decir

$$X = 57 \text{ días}$$

Con estos datos, vamos ahora a contestar las preguntas:

(a) Si el tiempo del proyecto es de 60 días, estamos hablando de 60-57 = 3 días más que la media y 3 días son 3/3.375 = 0.889 desviaciones estándar a la derecha de la media, para este valor se obtiene el 81.3% del área bajo la curva normal, lo que vendrá siendo la probabilidad de que el proyecto se cumpla en 60 días.

(b) Para 62 días, serán (62-57)/3.375=1.481 desviaciones estándar a la derecha de la media. Para este valor, se tendrá el 93.1 % del área bajo la curva y ésta será también la probabilidad de que el proyecto se realice en este plazo de tiempo.

(c) Para 65 días, utilizando el mismo procedimiento, tendremos (65-57)/3.375=2.37 desviaciones estándar a la derecha de la media, por su parte para este valor corresponde el 99.1% del área bajo la curva, que será la probabilidad de que el proyecto se termine en los 65 días.

Relaciones entre tiempo y costo para los proyectos en PERT/CPM.

Hasta ahora lo que hemos visto en el método PERT/CPM se ha enfocado a cumplir con un plazo de tiempo establecido para que los proyectos se completen. Sin embargo, algo muy importante en todo proyecto lo constituye otro factor: El costo del mismo, ya que para un plazo de tiempo de terminación del mismo, habrá un costo implícito asociado a él. El método del camino crítico, CPM, fue el primero que trató sobre esta relación entre el tiempo y el costo de los proyectos, lo cual se incorporó posteriormente a PERT. Por ser un tema de suma importancia en la actualidad, la mayoría de las versiones de PERT/CPM lo manejan y por esta misma razón se ha incluido en el presente capítulo.

Es bien sabido que la mayoría de las actividades de un proyecto pueden disminuirse hasta cierto punto en su tiempo de duración si se les asignan recursos adicionales, como pueden ser: Un mayor número de gentes que las realicen, emplear equipos y maquinaria adicional, pagos extras a contratistas, etc., los cuales repercutirán necesariamente en un incremento del costo.

Por esto, es importante analizar ambos factores conjuntamente.

En la figura XI.5 se muestra una relación gráfica entre el tiempo y el costo de un proyecto.

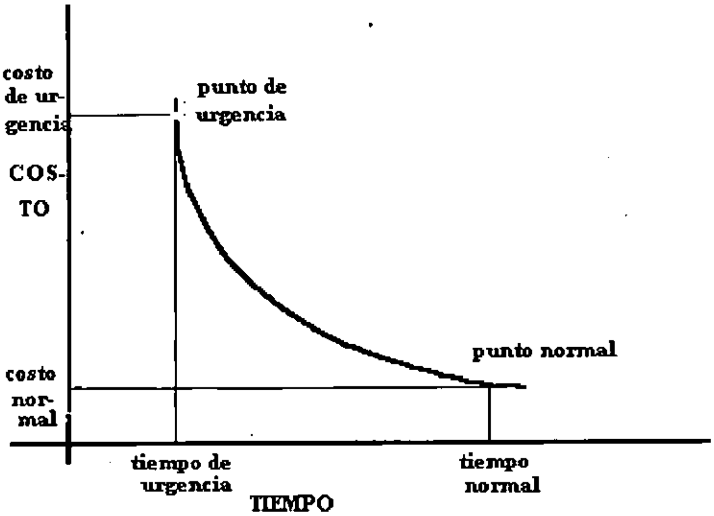


Figura XI.5. Relación gráfica entre el tiempo y el costo de un proyecto.

En ella puede apreciarse un punto normal de costo mínimo del proyecto y un punto de urgencia de tiempo mínimo del proyecto. Entre estos 2 valores extremos habrá una serie de puntos intermedios, cada uno de los cuales sirve para generar la relación entre el tiempo y el costo. Como podemos observar en la figura, es factible disminuir el tiempo de terminación de un proyecto, pero a expensas de incrementar su costo.

Es posible manejar relaciones entre el tiempo y el costo de los proyectos en forma numérica si se dispone de información acerca de los costos normales de las actividades, los tiempos de urgencia o tiempos mínimos en que pueden ser efectuadas las mismas y los costos asociados a ellas, es decir, los costos de urgencia. Con éstos podemos obtener el factor de reducción del costo por unidad de tiempo, S_{tc}, por medio de la siguiente fórmula:

$$S_{tc} = \frac{Cu - Cn}{t_{ah}} \qquad \text{Ec.(XI.6)}$$

Donde:
Cu = Costo de la actividad a tiempo de urgencia.
Cn = Costo de la actividad a tiempo normal.
t_{ah} = Tiempo de ahorro, dado por la fórmula (XI.7).

Siendo:

$$t_{ah} = t_n - t_u \qquad \text{Ec.(XI.7)}$$

Donde:
t_n = tiempo normal de la actividad.
t_u = tiempo de urgencia de la actividad.

Con los valores de S_{tc} de las actividades que integran un proyecto, es posible cuantificar las reducciones de los tiempos de las mismas y con ello la del proyecto completo y también evaluar el incremento en el costo del mismo que va asociado a ello. Para hacer esto, debemos llevar a cabo el siguiente procedimiento:

1. Determinar para cada actividad del proyecto su valor de S_{tc}.
2. Con los valores de S_{tc} del total de las actividades del proyecto, reducir el máximo número posible de días, que será el valor de t_{ah} para la actividad, para aquella que forme parte de la ruta crítica y que tenga el mínimo valor de S_{tc}.

3. Repetir el procedimiento con la siguiente actividad que forme parte de la ruta crítica y que tenga el siguiente valor mínimo de S_{tc}. Aquí deberá ponerse especial atención a todas las rutas no críticas del proyecto, puesto que, a medida que la ruta crítica vaya disminuyendo sus tiempos por la reducción de la duración de las actividades que la forman, será posible que alguna ruta no crítica llegue a convertirse en tal por igualar su tiempo con el de la ruta original, cuando esto sucede, se deberán disminuir simultáneamente los tiempos de todas las rutas que sean críticas en ese momento para poder bajar el tiempo del proyecto.
4. Repetir el mismo procedimiento de las fases anteriores, mientras esto sea posible, lo cual sucederá hasta que alguna de las rutas críticas que haya en este momento tenga todas sus actividades sin la posibilidad de ser disminuidas en sus tiempos de duración.

Como podemos ver de las fases antes descritas, cada reducción del tiempo del proyecto nos dará un nuevo punto de menor tiempo y mayor costo para establecer la relación entre estos dos factores. Enseguida ilustraremos el procedimiento descrito anteriormente con la resolución de un ejercicio.

Ejemplo XI.6.- Establecer numérica y gráficamente la relación tiempo-costo para el proyecto de la construcción de una casa del ejemplo XI.4, la información pertinente para esto, se da en la siguiente tabla:

Tabla XI.11. Datos normales y de urgencia para las actividades del proyecto de construcción de una casa.

Actividad	Tiempo normal (días)	Costo normal (MN$)	Tiempo de urgencia (días)	Costo de urgencia (MN$)
A	3	7.0	2	8.0
B	5	10.0	3	12.0
C	12	28.0	10	30.0
D	5	9.5	4	10.0
E	8	14.5	6	16.0
F	8	17.0	7	18.5
G	7	12.0	6	14.0
H	10	16.5	10	16.5
I	7	15.0	6	16.2
J	3	7.4	2	8.2
K	6	16.2	5	17.0
L	10	18.2	8	19.5
M	9	17.4	8	18.0
N	8	15.0	8	15.0
O	2	3.2	2	3.2

Solución:

Lo primero que se hará es mostrar la red del proyecto, señalando en ella, los tiempos de las actividades, la ruta crítica y las holguras de las rutas no críticas denominadas como h, lo cual se muestra en la figura XI.6, también se indica el costo del proyecto para el tiempo normal de 57 días, el cual es de MN$ 206.9 y se forma por la sumatoria de los costos normales de las actividades individuales. Además se hace la aclaración que las actividades H, N y O aparecen encerradas en un cuadro en la figura, por no poder ser reducidas en ningún día, dado que su tiempo de ahorro es de cero (tiempo normal igual al de urgencia).

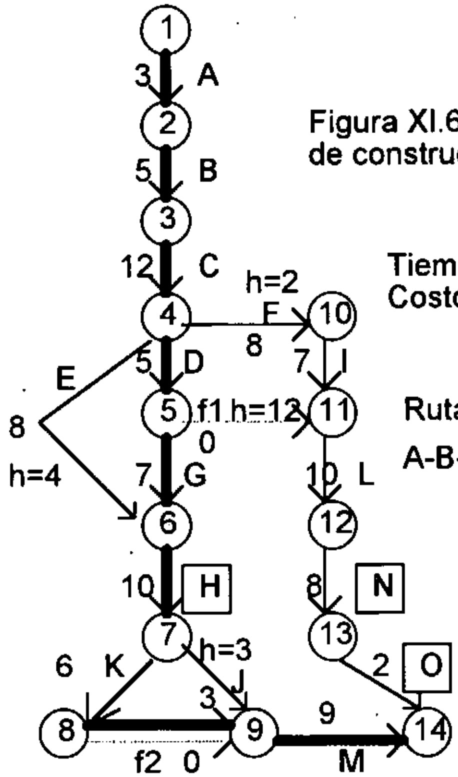


Figura XI.6. Red del proyecto de construcción de una casa.

Tiempo normal=57 días
Costo normal=206.9 MN

Ruta crítica
A-B-C-D-G-H-K-f2-M

Ahora calcularemos para cada actividad, su tiempo de ahorro, t_{ah}, que es la diferencia entre el tiempo normal y el de urgencia, para luego estimar el factor de reducción del costo por unidad de tiempo, S_{tc}, mediante la fórmula (XI.6), para cada actividad. Estos cálculos los presentamos en la tabla XI.12, la cual será la base para la resolución del ejemplo.

Tabla XI.12 Tiempos de ahorro y factores de reducción del costo por unidad de tiempo para las actividades del proyecto de construcción de una casa.

Actividad	Tiempo de ahorro, t_{ah},días	Factor de reducción del costo por unidad de tiempo , S_{tc}, MN\$/día
A	1	1.0
B	2	1.0
C	2	1.0
D	1	0.5
E	2	0.75
F	1	1.5
G	1	2.0
H	0	---
I	1	1.2
J	1	0.8
K	1	0.8
L	2	0.65
M	1	0.6
N	0	---
O	0	---

Luego conforme al procedimiento indicado, vemos que la actividad de la ruta crítica con el menor valor de S_{tc} es la D con 0.5, la cual podemos reducir en el valor de su tiempo de ahorro, es decir un día, con esto la red será ahora la de la figura XI.7.

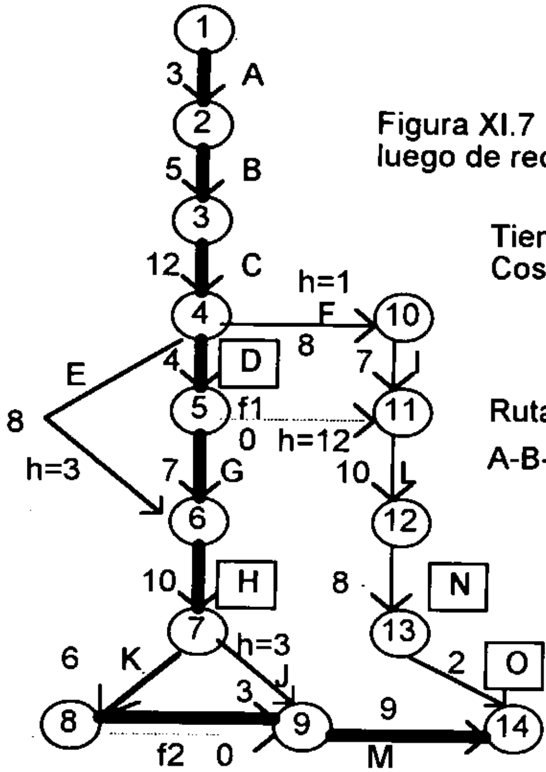


Figura XI.7 Red del proyecto luego de reducir D en un día

Tiempo = 56 días
Costo = 207.4 MN$

Ruta crítica
A-B-C-D-G-H-K-f2-M

En ella vemos que las holguras de la ramas de la actividad E y las actividades F - I - L - N - O han disminuido en un día. Por su parte la actividad D aparece en un cuadro por haber agotado la posibilidad de seguirla reduciendo en tiempo, mientras que su costo ha aumentado en 0.5 MN$, siendo ahora 207.4 MN$.

La ruta crítica sigue siendo la misma, por lo que su siguiente actividad con el mayor valor de S_{tc} es la M con 0.6, la cual puede disminuirse en un día, con lo cual la red será la de la figura XI. 8, en la cual vemos que aparecen 2 rutas críticas, dado que al disminuir la holgura de la rama F - I - L - N - O en un día, llega a cero y por tal motivo ésta pasa también a ser crítica. Aquí también observamos que la actividad M ya no es susceptible de ser reducida, por lo que aparece en un cuadro. Por su parte el costo se incrementa en 0.6 MN$, llegando de esta forma a un costo total del proyecto de 208.0 MN$.

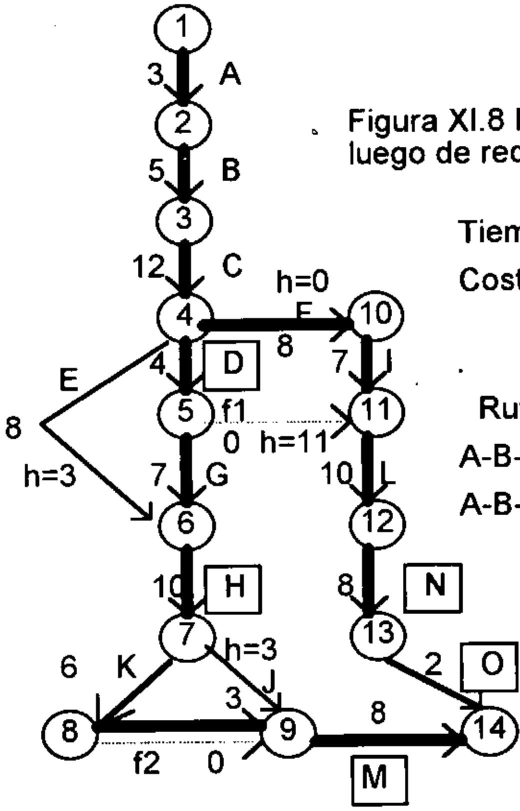


Figura XI.8 Red del proyecto luego de reducir M en un día

Tiempo= 55 días

Costo = 208.0 MN$

Rutas críticas

A-B-C-D-G-H-K-f2-M

A-B-C-F-I-L-N-O

De aquí vemos que la manera más económica de reducir días de las 2 rutas críticas es hacerlo en aquellas actividades que forman parte de ambas rutas simultáneamente, tal es el caso de las actividades A, B y C. Si observamos la tabla XI.12, vemos que éstas tienen el mismo valor de S_{tc}, por lo que podemos acortar las 3 en sólo un paso en sus respectivos tiempos de ahorro, es decir, A en un día y B y C en 2 días cada una. Con esto, nuestra nueva red quedará tal y como se indica en la figura XI.9, para la cual no hay cambios en las holguras de las ramas no críticas, dado que las 3 actividades reducidas forman parte de todas las rutas posibles del proyecto. En la figura aparecen las actividades A, B y C en cuadro por haber sido acortadas al máximo. Con estos cambios el costo se elevará a razón de 1.0 MN$ por cada día de disminución del tiempo, llegando éste a 50 días y aquel a 213.0 MN$.

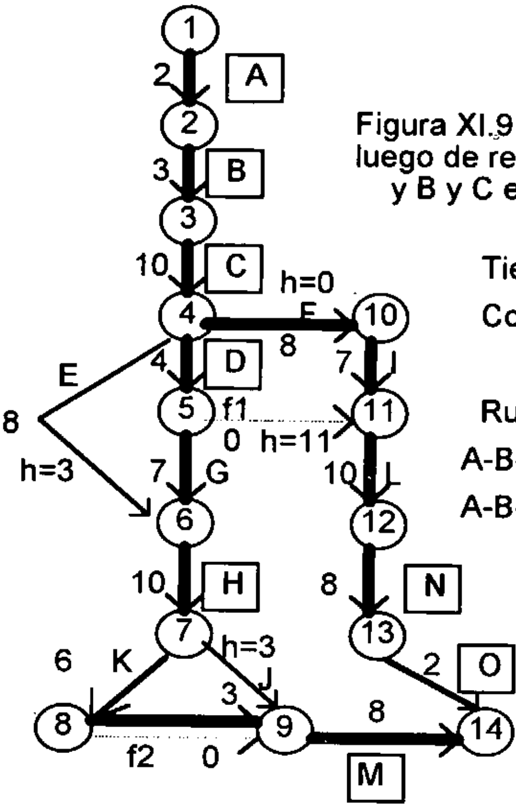


Figura XI.9 Red del proyecto luego de reducir A en un día y B y C en dos días

Tiempo = 50 días

Costo = 213.0 MN$

Rutas críticas

A-B-C-D-G-H-K-f2-M

A-B-C-F-I-L-N-O

Las rutas críticas han seguido siendo las mismas, si las observamos, nos damos cuenta que en la primera de ellas sólo tenemos posibilidad de reducir las actividades G y K, pues las restantes ya han sido acortadas al máximo. Por su parte la otra ruta crítica tiene la posibilidad de reducción de tiempo en las actividades F, I y L. Si vemos la tabla XI.12, de la primera ruta crítica la actividad K tiene el menor valor de S_{tc} con 0.8, pudiendo ser reducida sólo en un día, mientras que en la segunda ruta crítica es la actividad L con S_{tc} = 0.65 la del menor valor, con posibilidad de ser disminuida en 2 días. Por esto, en nuestro siguiente paso de reducción de tiempo, el cual debemos llevar a cabo en ambas rutas críticas, será solamente un día el tiempo posible de acortamiento. Con esta nueva etapa, nuestra red será tal y como se muestra en la figura XI.10.

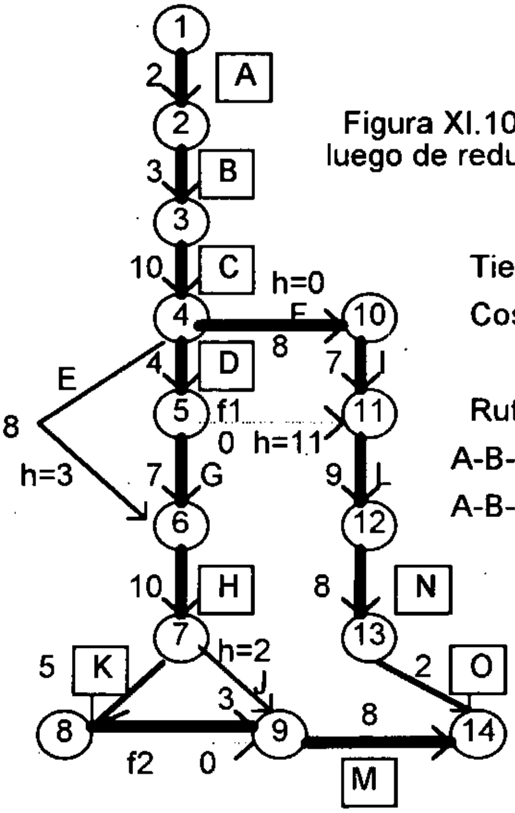


Figura XI.10 Red del proyecto luego de reducir K y L en un día

Tiempo = 49 días
Costo = 214.45 MN$

Rutas críticas
A-B-C-D-G-H-K-f2-M
A-B-C-F-I-L-N-O

De ella vemos que la holgura de la rama de la actividad J se ha acortado a 2 días y además que el incremento del costo del proyecto ha sido de N$ 1,450, que es la suma de 0.8 y 0.65 MN$ por acortar las actividades K y L respectivamente para disminuir su tiempo en solamente 1 día.

Si analizamos nuestras rutas críticas vemos que para la primera de ellas, sólo nos queda la actividad G con posibilidad de reducción en su tiempo. De la tabla XI.12 vemos que se puede acortar dicha actividad en un día y su valor de S_{tc} es de 2.0, por lo tanto la reduciremos en esa cantidad; mientras que por su parte, para la otra ruta crítica, la actividad L que era la de menor valor de S_{tc}, todavía puede reducirse en un día, al efectuar esto nuestra red será ahora la que se muestra en la figura XI.11, donde vemos que para disminuir el tiempo del proyecto en un día adicional se ha tenido que incrementar el costo del mismo en 2,650 N$, dado por la suma de bajar las actividades G y L en un día cada una (2.0+0.65 MN$), respectivamente. Por esto nuestro costo total será ahora de 217,100 N$.

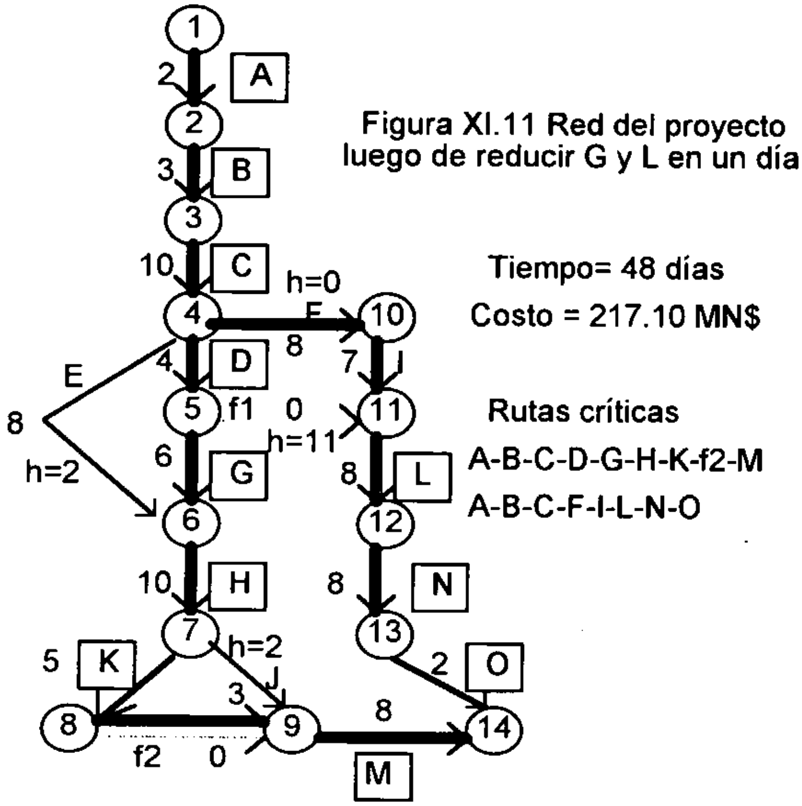


Figura XI.11 Red del proyecto luego de reducir G y L en un día

La cual es ya la red final reducida al máximo, dado que la ruta crítica A B C D G H K f2 M no tiene en este momento ninguna actividad que pueda ser todavía acortada en su tiempo de duración.

En la tabla XI.13 presentamos la relación de los datos de tiempo y costo del proyecto y en la figura XI.12 la gráfica respectiva.

Tabla XI.13. Relación entre tiempo y costo para el proyecto de construcción de una casa.

Tiempo del proyecto, días	Costo del proyecto, MN$	Punto de la gráfica
57	206.9	a
56	207.4	b
55	208.0	c
50	213.0	d
49	214.45	e
48	217.10	f

De aquí vemos cómo el costo incrementa poco al comienzo de la reducción en días del proyecto, pero luego los aumentos en costo van siendo mayores para las siguientes reducciones en el tiempo, lo cual se aprecia por las pendientes cada vez mayores hacia el lado izquierdo de la gráfica, hasta llegar al punto final f. Esto se debe a que el procedimiento de reducción del tiempo inicia tomando los valores mínimos de S_{tc}, que en la gráfica vendría siendo la pendiente con el signo cambiado, luego se prosigue con valores cada vez mayores de S_{tc} hasta el final.

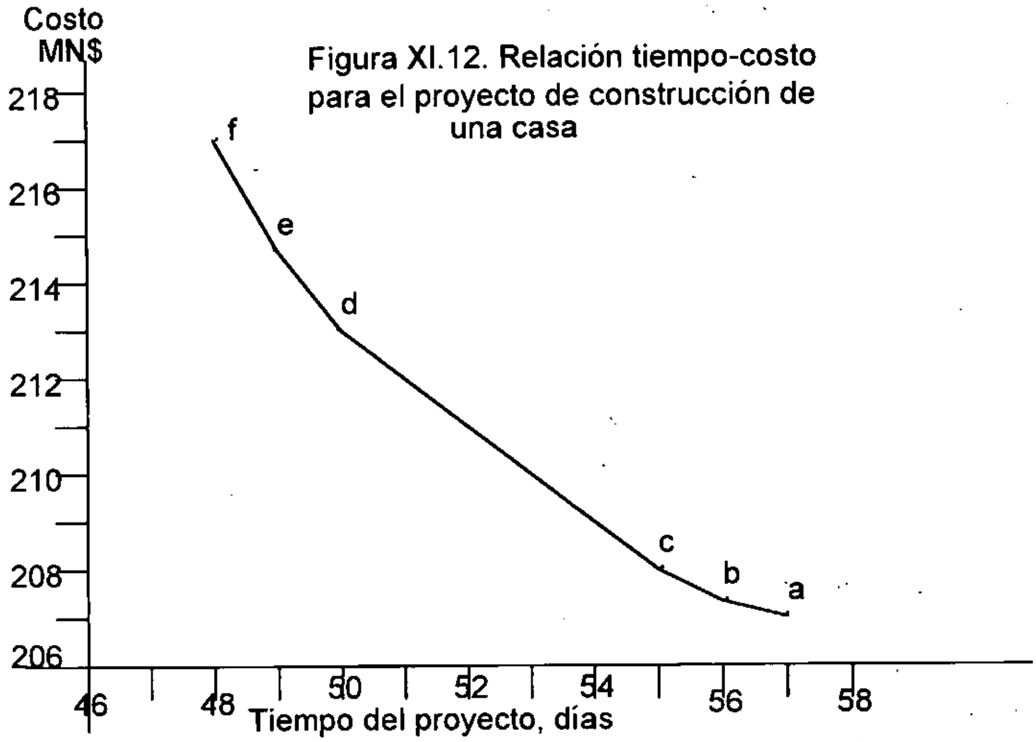


Figura XI.12. Relación tiempo-costo para el proyecto de construcción de una casa

Este procedimiento que hemos efectuado en forma manual, es posible plantearlo como un problema de programación lineal con una función objetivo que es el costo de reducción del tiempo del proyecto, el cual buscará minimizarse y estará sujeto a restricciones, las que se desarrollan una por cada evento del proyecto y también una para cada actividad del mismo. Esto significaría para nuestro caso del presente ejemplo un total de 14+15=29 restricciones. Por esta razón es poco frecuente el resolver este tipo de problemas como casos de programación lineal.

PROBLEMAS PROPUESTOS.

XI.1. Para las siguientes actividades que componen un proyecto.

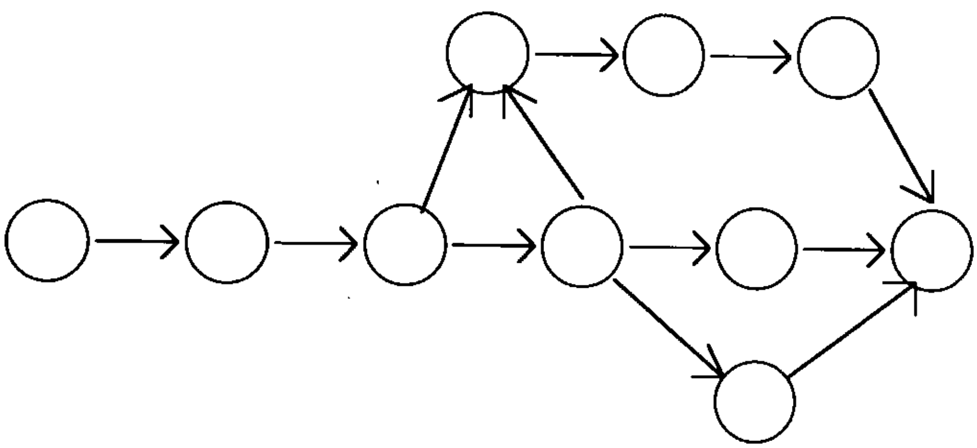
Actividad	Actividad precedente	Tiempo de duración, días
A	---	5
B	A	2
C	B	3
D	C	4
E	D, J	2
F	B	3
G	F	6
H	G	1
I	H	4
J	C	5

Construya el gráfico de Gantt respectivo.

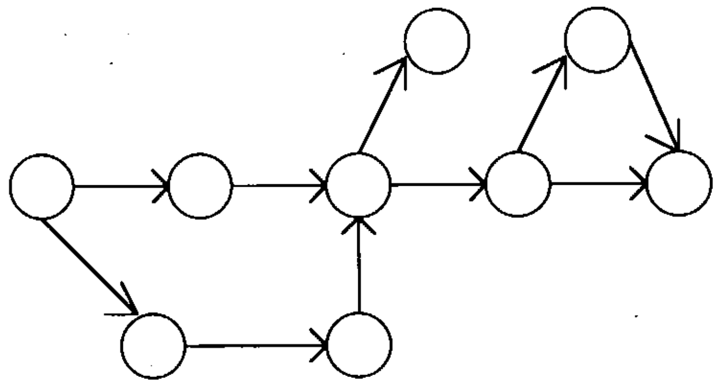
XI.2 Para el problema anterior, elabore la red del proyecto, determine la ruta crítica y obtenga los tiempos más próximos, más lejanos y holguras correspondientes.

XI.3 Localice errores en las siguientes redes de proyecto.

a)



b)



XI.4. Para las actividades del siguiente proyecto, elabórese el gráfico de Gantt.

Actividad	Actividad precedente	Tiempo, semanas
A	-	2
B	-	1.5
C	A	3
D	A	2
E	B,C	4
F	B,C	2.5
G	E	2
H	D,F	3
I	G	1

XI.5. Hacer la red, hallar la ruta critica y los tiempos más próximos, más lejanos y las holguras del proyecto del problema XI.4.

XI.6 Para las actividades del proyecto.

Actividad	Actividad precedente	Tiempo de duración , hrs.
A	---	4
B	A	2
C	A	3
D	C	5
E	B, D	6
F	B, D	1
G	E	3
H	F	4
I	G	2

a) Construya el gráfico de Gantt.
b) Elaborar la red del proyecto.
c) Determinar la ruta crítica y los tiempos más próximos, más lejanos y holguras.

XI.7. Para el proyecto.

Actividad	Actividad precedente	Tiempo pesimista, días	Tiempo más probable, días	Tiempo optimista, días
A	---	4	3	2
B	A	5	2.1	1
C	A	6	4	3.2
D	B	5	3.5	2
E	C	2	1.6	1.2
F	D	4	2	1.2
G	E	6	3	2.4

Determinar la probabilidad de que el proyecto se termine en 13 días.

XI.8. Para las siguientes actividades de un proyecto

Actividad	Actividad precedente	Tiempo pesimista, días	Tiempo más probable, días	Tiempo optimista, días
A	---	3.8	3	2.2
B	A	5	4	3
C	A	3	2	1
D	B	8	5	2
E	B	4	1	0.4
F	C	6	3	1.8
G	D	5	2	1.4
H	F	7.2	4	2
I	E, H	3.6	2	1

Hallar la probabilidad de que se cumpla en 16 días.

XI.9. Elaborar la gráfica de tiempo-costo para el proyecto cuyos datos son:

Actividad	Actividad precedente	Tiempo normal, semanas	Costo normal, MN$	Tiempo de urgencia, semanas	Costo de urgencia, MN$
A	---	4	4.5	3	5.1
B	A	3	4	3	4
C	B	3.5	4.2	3	4.6
D	C	2	2.8	2	2.8
E	A	2.5	3.5	2	4
F	E	4	4.8	3	5.7
G	F	1	2	1	2

XI.10. Hacer la gráfica de tiempo-costo para el siguiente proyecto.

Actividad	Actividad precedente	Tiempo normal, días	Costo normal, MN$	Tiempo de urgencia, días	Costo de urgencia, MN$
A	---	6	5	5	6
B	A	4	4.8	3	6.8
C	A	3	3	2	3.8
D	A	1	2	1	2
E	C	2	2.4	2	2.4
F	D	4	4.2	3	4.8
G	F	2	1.8	2	1.8

CAPITULO XII

ANALISIS DE REDES

Introducción.

Aquí veremos un tema que ya se ha comenzado a tratar en el capítulo anterior: El análisis de redes, el cual es muy importante en el ambiente empresarial, puesto que numerosos problemas pueden plantearse bajo la metodología de los modelos de redes para su resolución.

Como veíamos en el capítulo precedente, los problemas de administración de proyectos, los cuales se tratan por métodos como el PERT y el CPM, se manejan como problemas de redes, pero estos casos ya no se presentarán aquí, dado que fueron vistos anteriormente.

Este capitulo se expone en la siguiente manera: Primeramente se trata la terminología de redes, luego se presentan métodos para problemas de redes, como son el método del Recorrido Mínimo, el método de la Ruta más corta y el método del Flujo Máximo. Finalmente se indica cómo los problemas de transporte, asignación y transbordo vistos en el capítulo IX, se plantean como casos de análisis de redes.

Una cuestión que es conveniente señalar ahora es que todos los problemas de redes pueden ser resueltos como casos de programación lineal. Sin embargo, esto no se presenta en este texto, dado que los algoritmos que se van a dar a conocer son más eficientes para estos casos que aquél.

Terminología de Redes.

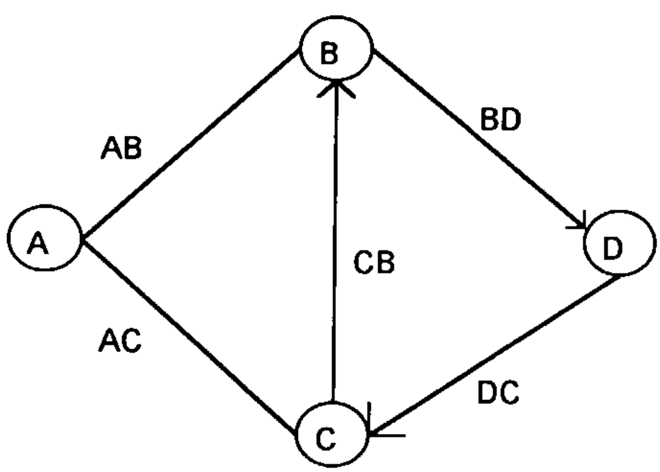
Ahora daremos a conocer algunos términos que es conveniente definir, dado que se utilizan frecuentemente en los problemas de análisis de redes. Asimismo daremos algunas reglas de notación que se usarán en el presente capítulo.

Como vimos en el capítulo anterior, una red es una representación gráfica de una serie de eventos y actividades que suceden en un trabajo que se programa para lograr un determinado objetivo.

Un evento o suceso se representaba en la red por un círculo que se conoce como **nodo**, los cuales también pueden indicar puntos geográficos o estaciones en algunos casos. Las actividades de los proyectos solían representarse por **ramas** en la red, las cuales también pueden señalar sentidos o direcciones en las cuales hay algún movimiento. Estas ramas pueden ser **dirigidas** si tienen sólo un sentido o dirección, en cuyo caso éste se indica por una punta de flecha en la rama, y **no dirigidas** si permiten el tránsito en las 2 direcciones. Una rama no dirigida puede representarse por 2 ramas dirigidas en sentidos opuestos.

En la figura XII.1 se muestran estos 2 tipos de ramas, siendo la AB y la AC no dirigidas y la BD, CB y DC ramas dirigidas.

Figura XII.1 Ejemplo de una red



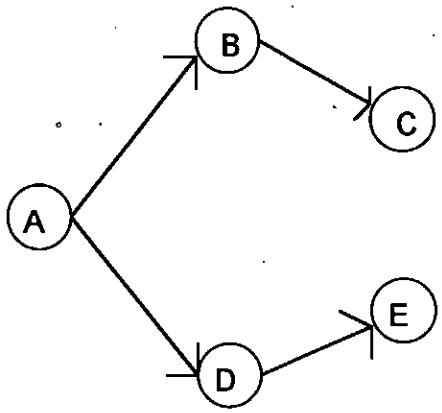
Es usual que la notación de estas ramas se forme por las letras y/o números de los nodos a los cuales conectan. En el caso de las ramas dirigidas, primero se coloca la letra o número del nodo a partir del cual proviene la rama, y al final aquél hacia el cual se dirige la rama, como en el caso de la rama DC que parte del nodo D y llega al C.

Una **red dirigida** es aquella que tiene solamente ramas dirigidas. Igualmente si las ramas son no dirigidas, la **red es no dirigida**. Si la red tiene de ambos tipos de ramas, se puede transformar en una red dirigida si se convierten sus ramas no dirigidas por ramas dirigidas en direcciones opuestas.

Una **trayectoria** en la red es una forma de conectar dos o más nodos. Existen **Trayectorias dirigidas y no dirigidas**, dependiendo del tipo de ramas que conectan a los nodos. Así, en el caso de la figura XII.1, las ramas AB - AC - CB forman una trayectoria no dirigida entre los nodos A, B y C y las ramas CB - BD - DC forman una trayectoria dirigida del nodo C a él mismo. A este tipo de trayectorias que inician y terminan en el mismo nodo, se les llama **ciclos**, los cuales a su vez también pueden ser **dirigidos** y **no dirigidos**, según el tipo de trayectoria de las ramas que lo forman.

Una **red conexa** es aquella en la cual cada nodo está conectado a la red al menos por una rama, así en el caso de la figura XII.1 se trata de una red conexa. A toda red conexa que no contenga ciclos no dirigidos, se le llama **árbol**, como la red de la figura XII.2

Figura XII.2. Ejemplo de una red tipo árbol



Si el árbol tiene exactamente una rama menos que su número de nodos, se le conoce como **árbol de expansión**, como el de la figura XII.2 que tiene 4 ramas y 5 nodos. Todo árbol en una red, representa una solución básica (no siempre factible) de la programación lineal.

Al flujo o tránsito que una rama puede permitir, se le conoce como **capacidad o flujo de la rama.** Toda rama lleva también asociado a ella un costo.

Si para un nodo cualquiera de la red, el flujo que entra a él es mayor que el que sale de él, al nodo se le conoce como **nodo fuente u origen.** Por el contrario, si el flujo de salida es mayor que el de entrada, hablaremos de un **nodo demanda o destino**. Si la entrada y la salida son iguales, hablaremos entonces de un **nodo de transbordo.**

Método de Recorrido Mínimo.

Los problemas de recorrido mínimo los que también son conocidos como problemas de árbol de mínima expansión, forman redes no dirigidas, donde cada rama tiene un costo no negativo asociado a ella. La metodología que vamos a presentar ahora tiene como finalidad hallar una red conexa que incluya a todos los nodos de modo que el costo total de ella sea mínimo.

La red solución del problema será un árbol de expansión, conforme a lo señalado en el inciso anterior, puesto que tendrá una rama menos que el número total de nodos.

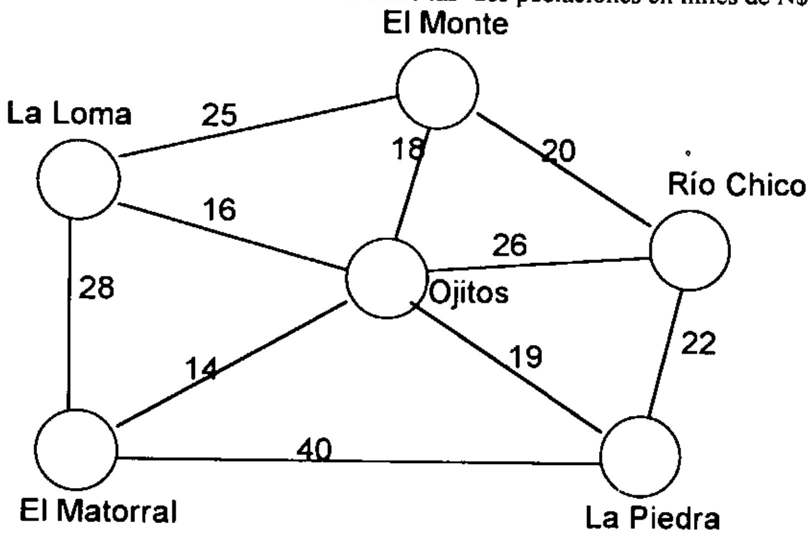
Existe un algoritmo sencillo y rápido para solucionar este tipo de problemas, el cual busca el costo mínimo en cada etapa, el que al llegar al final dará la red del costo total mínimo. Este algoritmo consiste en los siguientes pasos:

1.- Se selecciona arbitrariamente cualquier nodo de la red para iniciar.
2.- Se analizan las ramas que conectan al nodo inicial elegido en el paso anterior con nodos no conectados todavía a la red y se selecciona la del costo mínimo (en caso de empate, se escoge al azar).
3.- Con los 2 nodos conectados en los pasos anteriores, buscar la rama más económica que conecte a cualquiera de ellos con un nuevo nodo no conectado. Este procedimiento se repite hasta que todos los nodos de la red hayan quedado unidos, momento en el cual habremos hallado la red óptima.

Este algoritmo podría también ser aplicado en sentido inverso, es decir para encontrar la red de costo o recorrido máximo, sólo que en la práctica no suelen aparecer problemas de este tipo.

A continuación presentaremos un ejemplo para ilustrar la metodología antes descrita:

Ejemplo XII.1.- La compañía Teléfonos Eficientes está buscando la forma más económica de conectar el servicio telefónico para 6 poblaciones del medio rural. En la siguiente figura se muestra un diagrama de las poblaciones representadas por círculos, mientras que los números que aparecen en las ramas de conexión entre ellas son los costos de conexión del servicio entre las dos poblaciones en miles de N$.



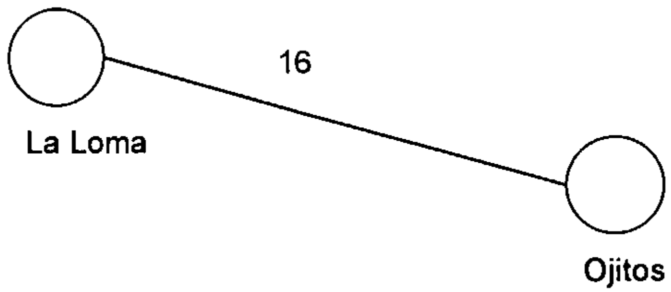
Solución:

Como podemos observar en la figura, hay una red donde las poblaciones son los nodos y las ramas representan las posibles conexiones del servicio telefónico con su costo asociado en cada caso.

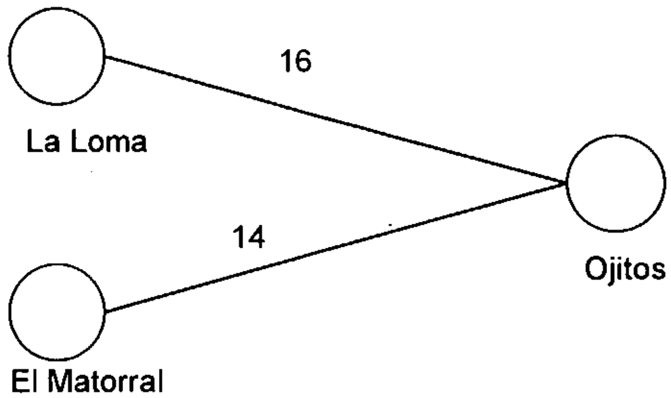
Debemos hallar la red del costo mínimo total con el algoritmo del Recorrido Mínimo, por lo que procederemos a aplicarlo y conforme al primer paso, elegiremos arbitrariamente al nodo de La Loma como el inicial para este caso. Después y de acuerdo al segundo paso, vemos que de la figura hay 3 ramas que conectan al nodo de La Loma con otros nodos, los cuales son:

Rama de conexión con El Monte, costo = MN$ 25.
Rama de conexión con Ojitos, costo = MN$ 16.
Rama de conexión con El Matorral, costo = MN$ 28.

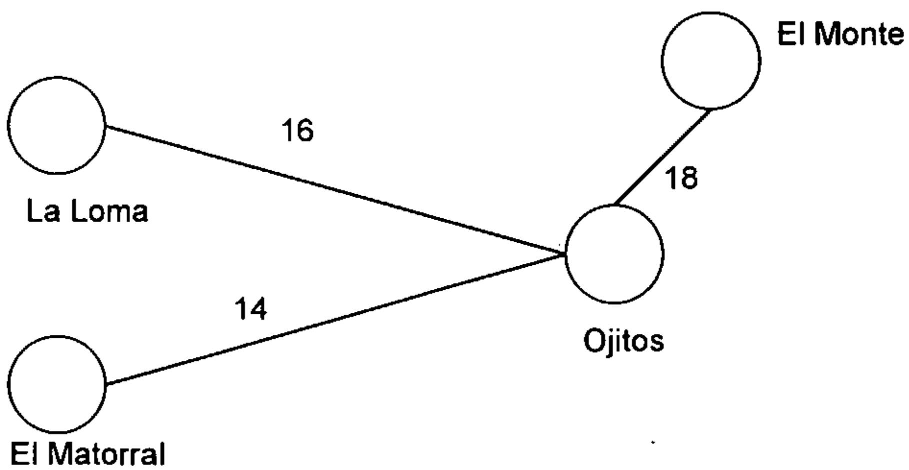
Por lo cual, seleccionaremos a la rama de conexión con Ojitos por ser la de costo mínimo, con esto nuestra red de conexión será:



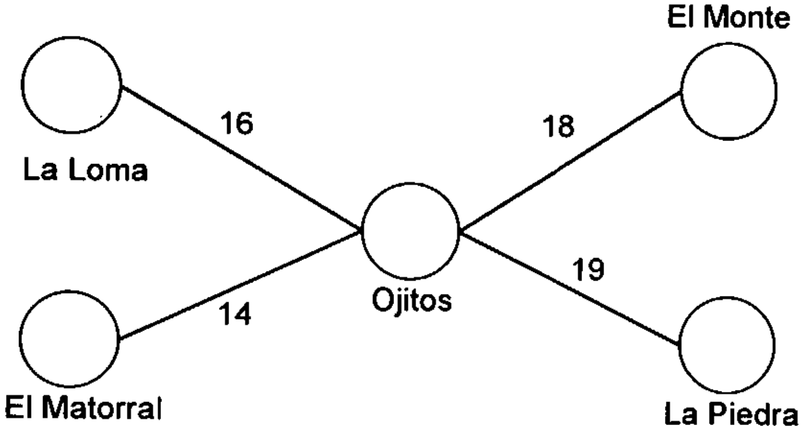
Ahora, conforme al paso 3, del nodo de La Loma hay 2 ramas de conexión con nodos no conectados a la red, las cuales son: La rama de conexión con El Monte (costo =MN$25) y la de El Matorral (costo =MN$28), por su parte, para el nodo Ojitos hay 4 ramas de conexión con nodos no conectados, que son: Con El Monte (costo =MN$18), Río Chico (costo =MN$26), El Matorral (costo =MN$14) y La Piedra (costo =MN$19). De esas 6 ramas conectoras, la de menor costo es la de Ojitos a El Matorral, con MN$ 14. Al incluir ésta en la red solución, quedará de la siguiente manera:



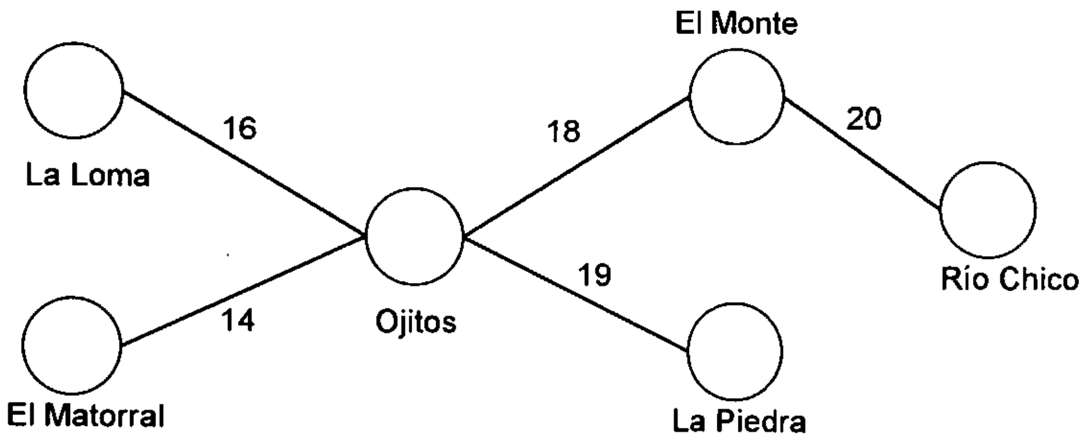
De aquí , debemos revisar las ramas que conectan a cada uno de estos 3 nodos con un nodo aún no conectado. Para el nodo de La Loma, se tiene sólo a la rama de conexión con El Monte (costo = 25), para el nodo El Matorral, sólo se considera la rama que lo conecta con La Piedra (costo = 40) y finalmente para el nodo de Ojitos se tienen 3 ramas de conexión: la que conecta con El Monte (costo =18), la que conecta con Río Chico (costo = 26) y la que conecta con la Piedra (costo = 19). De estas 5 ramas, la más baja en costo es la que conecta a Ojitos con El Monte, con un costo de MN$ 18, la cual deberá incluirse en la red, para quedar de la forma siguiente:



Ahora revisaremos las ramas que conectan a cualquiera de estos 4 nodos con un nodo aún no conectado, estas ramas son: La rama que conecta El Matorral con La Piedra con un costo de MN$40; la rama que conecta Ojitos con Río Chico, con costo de MN$26; la rama que conecta Ojitos con La Piedra, con un costo de MN$19 y la rama que conecta El Monte con Río Chico, con costo de MN$20. De éstas, la de menor costo es la de Ojitos a La Piedra, la cual al ser incluida en la red de solución nos dará:



Finalmente, solo nos falta por conectar al nodo de Río Chico. Las ramas que lo conectan son: La rama que lo conecta con El Monte con un costo de 20, la rama de conexión con Ojitos con costo de 26 y la rama que lo conecta con La Piedra, con costo de 22. De estas 3 ramas, la más baja en costo es la conexión con El Monte, con costo de 20. Al incluir esta última rama, tendremos nuestra red final de solución, la cual será:



Cuyo costo total es N$ 87,000.
De la red vemos que consta de 6 nodos y 5 ramas, constituyendo un árbol de expansión.

Método de la Ruta más corta.

En la práctica aparecen cierto tipo de problemas que para ser resueltos requieren del algoritmo de la Ruta más corta.

Estos casos forman redes no dirigidas a semejanza de los problemas de Recorrido Mínimo, pero a diferencia de éstos, no generan árboles de expansión en la red final que representa la solución, puesto que muchas de las veces en ésta no se ven conectados todos los nodos que componen la red. Otra diferencia significativa es que este método inicia por un nodo particular, que viene siendo el nodo fuente u origen y finaliza en el nodo destino, lo cual no implica que las ramas de la red sean dirigidas, sino solamente donde comienza y termina la aplicación del algoritmo al problema.

En los casos que caen dentro de esta clasificación, se busca hallar una ruta de costo mínimo (tiempo mínimo, distancia mínima), que nos permita ir del punto de arranque (nodo fuente) al punto final (nodo destino).

El algoritmo de la Ruta más corta consiste en los pasos siguientes:

1.- Elaborar una tabla donde cada columna estará representada por un nodo de la red del problema. Bajo cada nodo se colocarán las ramas que conectan a éste con el resto de los nodos de la red en orden de menor a mayor en cuanto a su costo. Cada rama colocada en la columna de un nodo dado se denominará conforme a la notación indicada para ramas dirigidas, tomando al nodo presente como su origen.

En esta tabla no deberán incluirse aquellas ramas que tengan al nodo origen como su segundo nodo y/o al nodo destino como su primero.

2.- El nodo origen se marca con un asterisco en la tabla y se le asigna un valor inicial de costo cero.

3.- De las ramas colocadas en la columna del nodo origen, se encierra en un cuadro la que sea menor en costo.

4.- Se pasa al nodo que esté ubicado como segundo nodo de la rama seleccionada en el paso anterior y se le señala con un asterisco y con el costo de dicha rama.

5.- Se eliminan de la tabla todas aquellas ramas que no estén encerradas en un cuadro y que tengan como segundo nodo al señalado con asterisco en el paso anterior.

6.- Si el último nodo marcado con asterisco es el nodo destino del problema, se deberá ir al paso 12, en caso contrario se va al paso siguiente.

7.- De todos los nodos que están marcados con asterisco hasta este momento, se deberá calcular el costo de la primera rama de su columna que no esté encerrada en un cuadro. Este costo, denominado como **P**, será la suma del costo indicado en el nodo más el de la rama en cuestión.

8.- Aquella rama que resulte con el menor valor de **P** del paso anterior, se encerrará en un cuadro.

9.- Se pasa al segundo nodo de la rama elegida anteriormente, al cual se le señala con asterisco y se le asigna como costo el valor de **P** de la rama.

10.- Se eliminan de la tabla todas las ramas no encerradas en un cuadro hasta este momento que tengan al nodo marcado con asterisco del paso anterior como su segundo nodo.

11.- Se regresa al paso número 6.

12.- Aquí ya hemos llegado al nodo destino del problema, con lo cual lo único que nos falta es indicar cuál fue la ruta que se siguió desde el nodo origen hasta el nodo destino, la que será la ruta más corta, con un costo total igual al valor de **P** indicado en el nodo destino. La ruta se identifica en sentido inverso al desarrollo del procedimiento de solución, es decir iniciará por el nodo destino, señalando la rama que nos llevó ahí, con lo que sabremos cuál fue el nodo inmediato anterior, luego se repite esto hasta llegar al nodo origen del problema.

Ahora presentaremos un caso para ilustrar la metodología antes explicada.

Ejemplo XII.2.- Un individuo busca la ruta más corta para trasladarse de su domicilio a su trabajo en una gran ciudad. Dicha persona vive en la colonia Arsénico y su trabajo se halla en la colonia Flúor. En la siguiente tabla se dan las distancias en kms. entre las diferentes colonias por las que podría atravesar para hacer su recorrido

Destino / Origen	Arsénico	Bromo	Cloro	Dino	Estaño	Flúor
Arsénico	------	18	------	16	14	-----
Bromo	18	-----	12	15	-----	16
Cloro	-----	12	-----	11	10	-----
Dino	16	15	11	-----	11	9
Estaño	14	-----	10	11	-----	8
Flúor	-----	16	-----	9	8	-----

Como puede verse en la tabla algunas distancias no se indican, lo cual significa que no es posible ese recorrido.

Solución:

En el presente caso trataremos de hallar la distancia mínima total para ir desde el domicilio de la persona, en la colonia Arsénico, hasta su trabajo en la colonia Flúor. A las diferentes colonias las llamaremos por su letra inicial. Entonces conforme al algoritmo , con A como nodo origen y F como nodo destino, crearemos la tabla inicial de nodos y ramas, ordenadas éstas de menor a mayor en cuanto a sus distancias.

Nodos	A* (0)	B	C	D	E	F
	AE - 14	BC - 12	CE - 10	DF - 9	EF - 8	
	AD - 16	BD - 15	CD - 11	DC - 11	EC - 10	
	AB - 18	BF - 16	CB - 12	DE - 11	ED - 11	
				DB - 15		

En esta tabla se han incluido las ramas bajo el sentido de notación descrito en el primer paso, así bajo el nodo B, por ejemplo, aparece la rama BC, la cual en la columna del nodo C aparece como CB. Asimismo no se han incluido aquellas ramas que tienen como segundo nodo a A y como primer nodo a F.

También es conveniente señalar que en esta tabla ya se han efectuado los pasos 2 y 3, puesto que el nodo origen A se ha marcado con asterisco y costo cero y la rama de menor costo bajo el nodo A, la AE se ha encerrado en un cuadro.

Ahora iremos al cuarto paso, conforme al cual el segundo nodo de la rama AE es el E, el que se señala con asterisco y se asigna con el costo de AE, es decir 14. Luego de acuerdo al paso 5, se eliminan de la tabla aquellas ramas que tengan como su segundo nodo a E, es decir, la CE y la DE, con esto nuestra nueva tabla quedará en la siguiente forma:

Nodos	A* (0)	B	C	D	E* (14)	F
	EA - 14	BC - 12	CD - 11	DF - 9	EF - 8	
	AD - 16	BD - 15	CB - 12	DC - 11	EC - 10	
	AB - 18	BF - 16		DB - 15	ED - 11	

De aquí vamos al paso 6, conforme al cual debemos seguir al paso 7, dado que E no es el nodo destino.

Entonces, de acuerdo al paso 7, los nodos marcados con asterisco hasta este momento son el A y el E. Las primeras ramas bajo estos nodos que no están encerradas en un cuadro son la AD y la EF cuyos valores de P serán 0 + 16 = 16 y 14 + 8 = 22 respectivamente, por lo que se deberá encerrar en un cuadro a la rama AD, conforme al paso 8, luego se irá al segundo nodo de esta rama que es el D, el cual se marca con un asterisco y se le asigna un costo de 16, según el paso 9 y se eliminan de la tabla todas aquellas ramas no encerradas en cuadro que tengan como su segundo nodo a D, es decir BD, CD y ED conforme al paso 10, con estos cambios nuestra tabla será:

Nodos	A* (0)	B	C	D* (16)	E* (14)	F
	AE - 14	BC - 12	CB - 12	DF - 9	EF - 8	
	AD - 16	BF - 16		DC - 11	EC - 10	
	AB - 18			DB - 15		

Luego el algoritmo nos llevará nuevamente al sexto paso, de donde puesto que el nodo D no es el destino, debemos proseguir con el paso.7, según el cual, los nodos marcados con asterisco son el A, D y E. Las primeras ramas bajo estos nodos que no están encerradas en un cuadro son la AB, con un valor de P igual a 18; la rama DF con P = 16 + 9 = 25; y la rama EF con P = 14 + 8 = 22.

Ahora conforme a los pasos 8, 9 y 10, se debe encerrar en un cuadro a la rama AB, luego el nodo B se señala con asterisco y se le asigna un costo de 18 y se eliminan de la última tabla a las ramas CB y DB. Con esto nuestra nueva tabla será:

Nodos	A* (0)	B* (18)	C	D* (16)	E* (14)	F
	AE - 14	BC - 12		DF - 9	EF - 8	
	AD - 16	BF - 16		DC - 11	EC - 10	
	AB - 18					

De aquí puesto que el nodo B no es el destino, el método nos conduce nuevamente al paso 7, según el cual los nodos con asterisco son ahora el A, B, D y E. Las primeras ramas de estos nodos no encerradas en un cuadro son la BC, con P = 18 + 12 = 30, la DF con P = 16 + 9 = 25 y la EF con P = 14 + 8 = 22. Por lo cual conforme a los pasos 8, 9 y 10, se encerrará en un cuadro a la rama EF, se marcará al nodo F con asterisco y con un costo de 22 y se eliminarán de la última tabla a las ramas BF y DF.

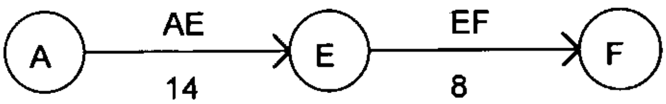
Con esto nuestra tabla quedará de la siguiente manera:

Nodos	A* (0)	B* (18)	C	D* (16)	E* (14)	F* (22)
	AE - 14	BC - 12		DC - 11	EF - 8	
	AD - 16				EC - 10	
	AB - 18					

De aquí conforme al paso 6, por ser F el nodo destino, iremos al paso 12, según el cual ya hemos hallado la ruta más corta, que tiene un costo (distancia) de 22. Dicha ruta se identifica iniciando por la rama EF, que fue la que nos llevó a F; por su parte para llegar a E debimos tomar la rama AE. Con esto nuestra solución para ir de A hasta F fue:

AE - AF

Distancia = 22 Kms.



Que es la ruta más corta de cuantas son posibles.

Método de Flujo Máximo.

Los problemas de flujo máximo suelen aparecer con frecuencia en la práctica de los negocios, como es el caso de gasoductos, canales y tuberías hidráulicas, líneas de transmisión de electricidad, tránsito de vehículos en una ciudad, etcétera, por lo que veremos ahora un método para su resolución.

Primero estableceremos que este tipo de problemas generan redes no dirigidas cuyas ramas tienen una capacidad de flujo, el cual puede ser diferente en un sentido que en el opuesto. Entonces el método de solución buscará encontrar un programa de flujo máximo desde un punto inicial o nodo origen a uno final o nodo destino. En el problema puede haber cualquier número de puntos intermedios, a los cuales se les denomina empalmes. En éstos no se puede acumular material de flujo, es decir, que lo que entra a un empalme, deberá ser igual a lo que sale de él.

Para formar la red, los empalmes aparecen como nodos y las ramas serán las posibles rutas o conductos a través de los cuales puede circular el material.

Para explicar la notación nos apoyaremos en la figura XII.3, en la que vemos 4 nodos y 5 ramas.

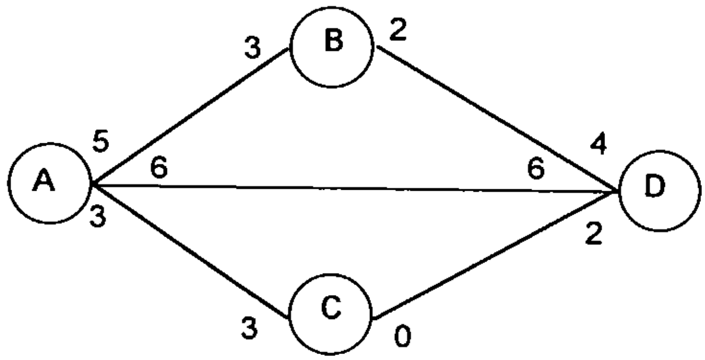


Figura XII.3.- Ejemplo de una red de un problema de flujo máximo.

Las ramas tienen un par de números, los cuales representan la capacidad de flujo en una y otra dirección, así por ejemplo, la rama AB permite la circulación de 5 unidades de material desde A hasta B y 3 unidades en la dirección opuesta. En esta red vemos que hay 2 ramas con la misma capacidad de flujo en un sentido que en el opuesto, tal es el caso de AD con 6 unidades y AC con 3. El nodo A es el origen, el nodo D es el destino y los nodos B y C son empalmes.

Aprovecharemos también la figura para ilustrar la definición de **Ruta de Flujo Positivo**, la cual será toda ruta de una red que vaya del origen al destino, sin importar por cuantos empalmes pase, tal que cada rama de la ruta tenga en su parte inicial un número diferente de cero, el número inicial menor de todos, será la capacidad de la ruta. Así para el caso de la figura XII.3, la ruta AB - BD es de flujo positivo, puesto que la rama AB permite el envío de 5 unidades en la dirección del origen al destino, mientras que la BD tiene capacidad para 2 unidades en la misma dirección, por lo que la ruta completa tiene capacidad para 2 unidades. Por la misma definición antes explicada, la ruta AC - CD no será de flujo positivo, pues aún cuando la rama AC permita el envío de 3 unidades de A hasta C, la rama CD no puede enviar ninguna en la dirección hacia D. Por su parte la rama AD también es de flujo positivo, pues aún cuando no tiene ningún empalme, permite el flujo de 6 unidades desde A hasta D.

Presentaremos ahora el algoritmo de solución de los problemas de flujo máximo, el cual consiste en los siguientes pasos:

1.- Hallar de la red del problema, una ruta de flujo positivo y enviar el número máximo de unidades posible, denotado como M, desde el origen al destino a través de dicha ruta.
Si no hubiera tal ruta, se deberá ir al paso 4.

2.- Para el envío de las M unidades del origen al destino, se deberán disminuir todas las ramas de la ruta seleccionada en el paso anterior en M unidades en su inicio y se deberán aumentar en esa misma cantidad en su parte final.

3.- De aquí se deberá regresar al primer paso.

4.- El problema ya ha sido resuelto al llegar a este paso, dado que ya no hay ramas de flujo positivo en la red, por lo que la cantidad máxima de flujo posible será la suma de todos los envíos realizados en las etapas anteriores.

A continuación presentaremos un par de ejemplos para ilustrar esta metodología.

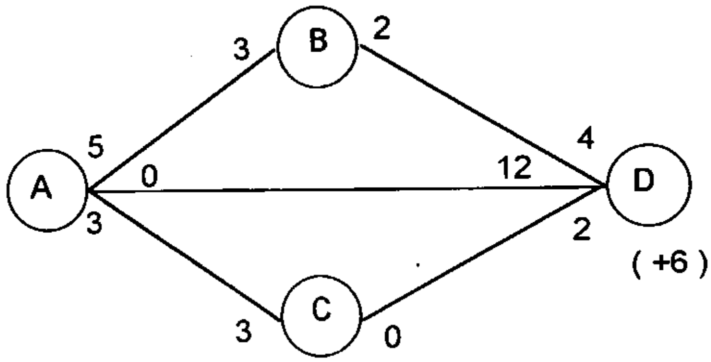
Ejemplo XII.3 .- Para la red de la figura XII.3, hallar el flujo máximo posible de envío de A a D.

Solución:

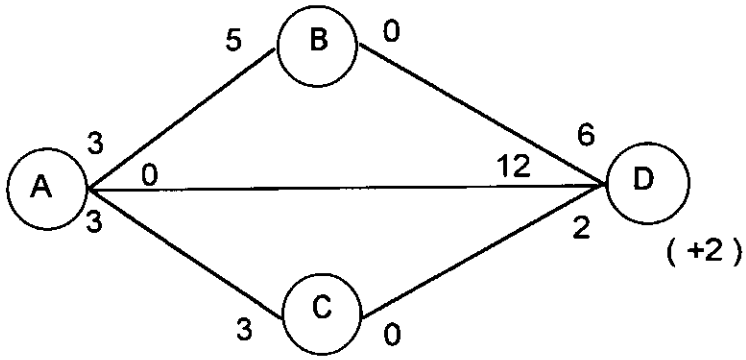
Para dicha red ya hemos comentado que 2 rutas de flujo positivo son la AB - BD con capacidad para enviar 2 unidades y la AD con 6 unidades.

Por lo tanto, tomamos esta última conforme al primer paso del algoritmo, donde M será igual a 6.

Ahora de acuerdo al paso 2, debemos disminuir la rama AD en su parte inicial en 6 unidades y aumentarla en esta misma cantidad en su parte final. Con esto modificación nuestra red será:



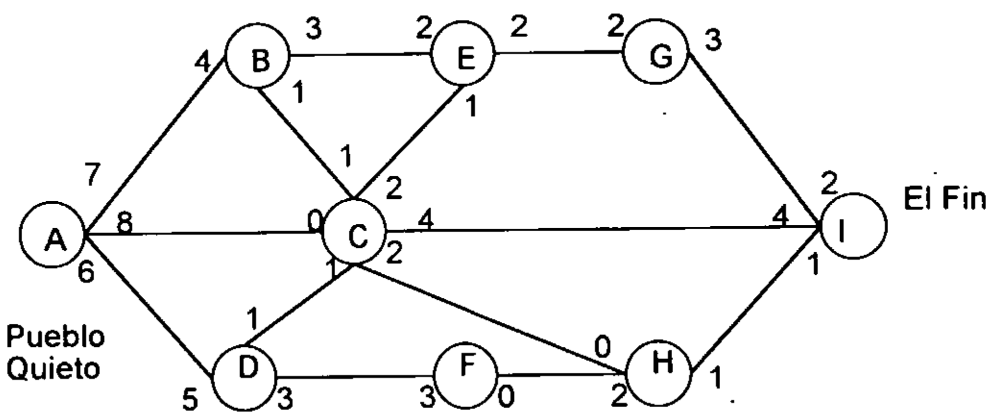
Luego se regresa al primer paso, donde otra ruta de flujo positiva es la AB - BD con capacidad para enviar 2 unidades a través de la misma, por lo que M = 2. Entonces conforme al segundo paso, disminuiremos las ramas AB y BD en sus partes iniciales en 2 unidades y las incrementaremos en esta cantidad en sus partes finales. Con esto nuestra nueva red será:



Luego volvemos al paso 1, donde si observamos nuestra red, nos daremos cuenta que no hay ninguna ruta de flujo positivo, puesto que las 3 ramas que llevan a D, que son la BD, AD y la CD, tienen en su parte inicial una capacidad de flujo de cero en la dirección hacia D. Por esto vamos al cuarto paso del algoritmo, según el cual la cantidad máxima de flujo positivo del problema será la suma de los envíos de las 2 etapas llevadas a cabo, o sea 6 + 2 = 8 unidades, con lo cual nuestra caso ha sido resuelto.

Veremos ahora otro ejemplo.

Ejemplo XII.4.- La Compañía Eléctrica desea determinar cuál es el amperaje máximo que es posible enviar por sus líneas de transmisión desde Pueblo Quieto hasta El Fin, según la red siguiente:

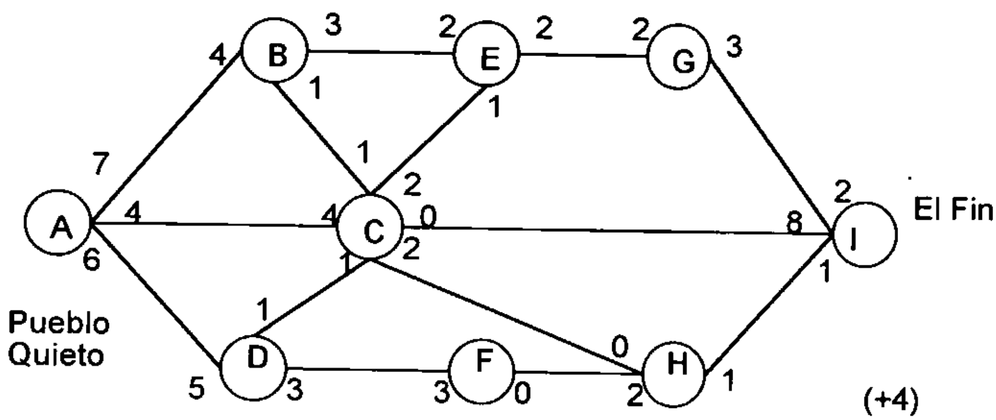


Donde los números indican millones de amperes.

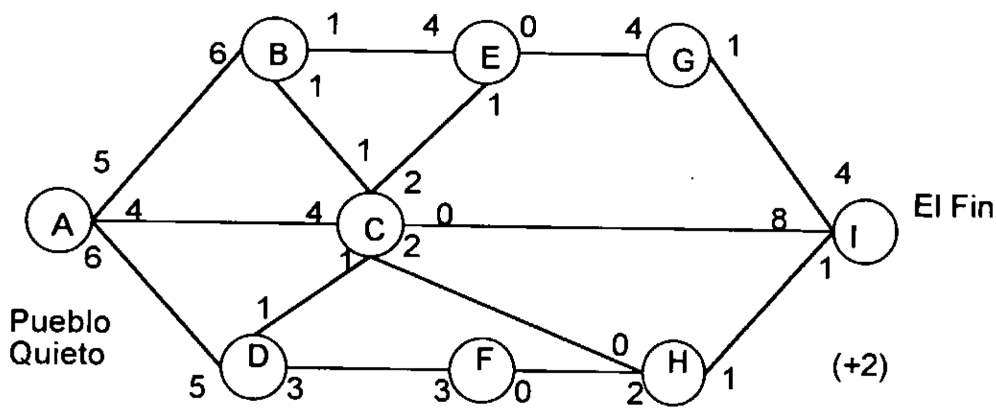
Solución:

Aplicaremos la metodología a nuestro caso y conforme al primer paso, una ruta de flujo positivo desde A hasta I es la AC - CI que permite enviar 4 unidades, por lo que M será este valor.

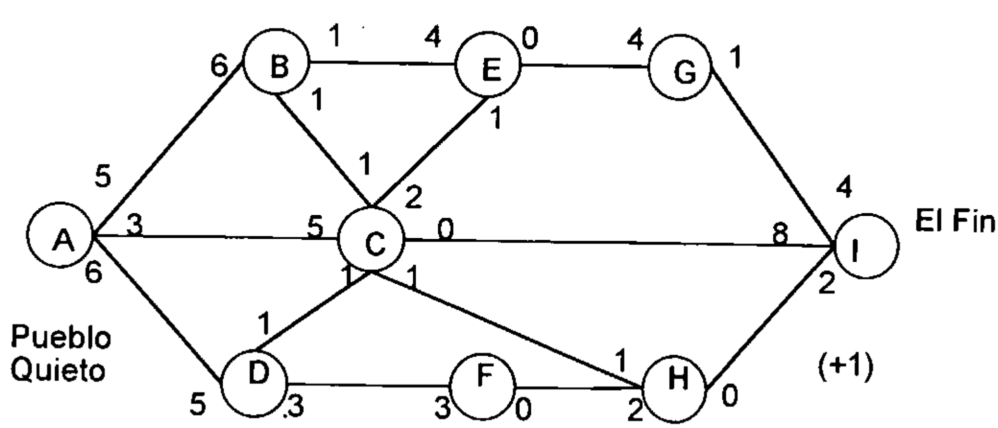
Entonces se deberán disminuir las ramas AC y CI en 4 unidades en su inicio y aumentar en esta misma cantidad al final, con esto nuestra red será:



Otra ruta de flujo positivo es la AB - BE - EG - GI que permite enviar 2 unidades de A a I. Al hacer los cambios en las 4 ramas, nuestra red será ahora:



De esta red, otra ruta de flujo positivo es la AC - CH - HI con capacidad de 1 unidad. Al hacer los cambios en las 3 ramas en una unidad, nuestra nueva red quedará de la siguiente manera:



Si observamos esta red, vemos que las ramas de acceso al nodo destino I como es el caso de CI y de HI no tienen capacidad de flujo en la dirección hacia I. La única rama que llega a I que sí tiene capacidad de flujo en ese sentido es la GI, sin embargo, la rama predecesora de ésta que es la EG no puede permitir envíos en esa dirección, por lo cual nuestra red actual ya no tiene rutas de flujo positivo.

Entonces, conforme al paso 4 del algoritmo, nuestra capacidad de flujo máximo será 4 + 2 + 1 = 7, por lo que la máxima cantidad de amperes que puede enviarse de Pueblo Quieto a El Fin es de 7,000,000.

Una observación que es conveniente señalar es que para la solución de un problema de este tipo, no es importante el orden en el cual se hayan identificado las rutas de flujo positivo.

Otros problemas planteados como modelos de redes.

Otros problemas de la Investigación de Operaciones que pueden ser planteados como redes son los de administración de proyectos, los cuales se resuelven por PERT/CPM y que ya han sido vistos en el capítulo anterior, por lo que ya no se tratarán ahora. Además los problemas de transbordo, transporte y asignación, que presentamos en el capítulo IX, también pueden ser planteados como casos de redes. En este inciso veremos cómo construir las redes de estos 3 tipos de casos, sin entrar en la resolución de los mismos, dado que éstos ya han sido vistos anteriormente.

Problemas de Transbordo.

Como podemos recordar, los problemas de transbordo tienen fuentes u orígenes, destinos y empalmes. Para tratarse como redes, los orígenes, destinos y empalmes se presentan como nodos fuente, nodos demanda y nodos de transbordo, respectivamente. La red que se forma será una red dirigida en la cual aparecerán las ofertas de los nodos fuente, las demandas de los nodos demanda y de transbordo, así como los costos asociados que vienen en cada rama de la red. Las ofertas son ramas de entrada a los nodos fuente, mientras que las demandas son ramas de salida de los nodos demanda y de transbordo.

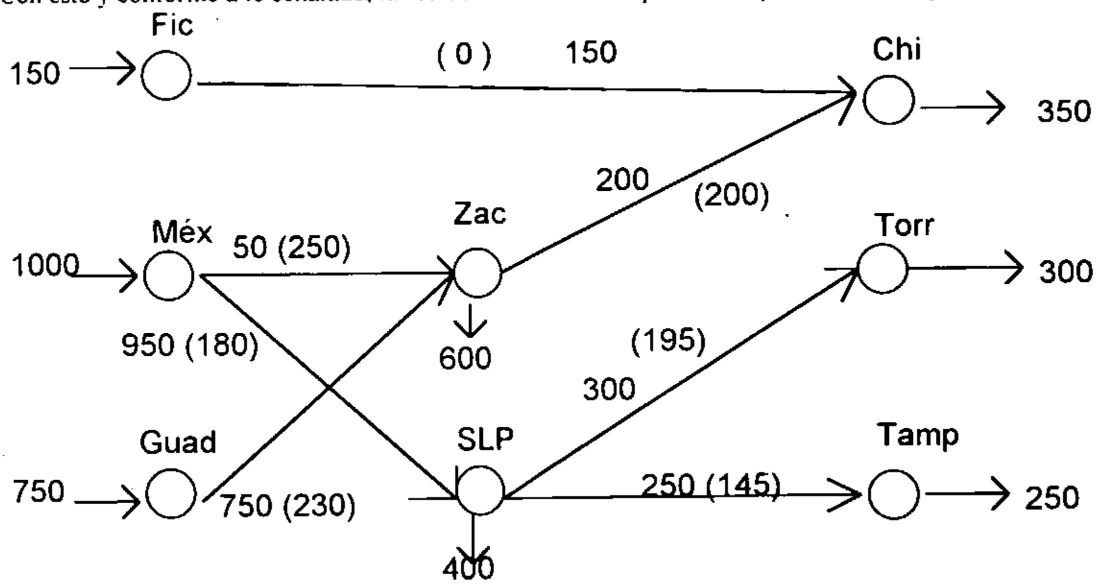
A continuación presentaremos un ejemplo para ilustrar lo anterior.

Ejemplo XII.5 .- Elaborar la red del problema de transbordo del ejemplo IX.14.

Solución:

Como podemos recordar este problema tiene 3 orígenes: México, Guadalajara y un origen ficticio, con ofertas de 1000, 750 y 150 unidades respectivamente. Tiene también 2 empalmes que son Zacatecas y San Luis Potosí, con demandas de 600 y 400 unidades respectivamente y además 3 destinos que son Chihuahua, Torreón y Tampico con demandas de 350, 300 y 250 unidades respectivamente.

Con esto y conforme a lo señalado, la red de la solución del problema quedará de la siguiente manera:



Donde los números entre paréntesis son los costos de cada rama y los otros números son las unidades enviadas a través de las mismas, así como también las ofertas y demandas de los nodos correspondientes. Así por ejemplo, el nodo de México tiene una oferta de 1000 unidades, de las cuales se envían 50 a Zacatecas con un costo de 250 N$/unidad y 950 unidades a San Luis Potosí con un costo de 180 N$ cada una.

Problemas de Transporte.

Estos son similares a los de transbordo, excepto por el hecho de no tener empalmes. Habrá nodos fuente que son los origenes, nodos demanda que son los destinos y ramas dirigidas de cada origen a cada destino con su costo asociado para cada una de ellas.

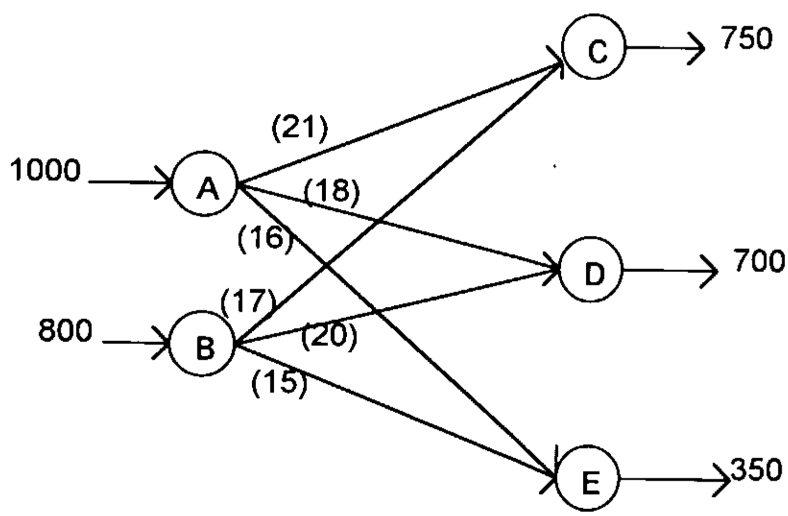
A continuación presentaremos un ejemplo de la manera de elaborar la red de un caso de este tipo.

Ejemplo XII.6.- Para el problema del transporte cuya tabla se muestra, elaborar su red.

Destino / Origen	C	D	E	Ofertas
A	21	18	16	1000
B	17	20	15	800
Demandas	750	700	350	1800

Solución:

Para este problema tendremos 2 nodos fuente: A y B, y 3 nodos demanda: C, D y E con sus correspondientes ofertas y demandas y las ramas con sus costos respectivos que van de cada origen a cada destino, por lo que serán 2 x 3 = 6 ramas, la red será la siguiente.



Donde cada rama lleva su costo encerrado en paréntesis. Aquí no hemos puesto las cantidades de unidades de cada origen a cada destino, puesto que el problema no ha sido resuelto, sólo deseamos mostrar la construcción de la red.

Problemas de Asignación.

Como podrá recordarse los casos típicos de asignación son aquellos que buscan la manera óptima de asignar trabajadores a diferentes tareas. Para su planteamiento como modelos de redes, los trabajadores constituirán los nodos fuente y las tareas los nodos destino. Las ofertas y demandas de éstos serán la unidad, tal y como se desarrollaban este tipo de problemas en el capítulo IX, donde cada rama de la red irá de cada nodo fuente a cada nodo demanda con los tiempos de ejecución de las tareas asociados a cada rama. A semejanza de los casos de transporte, en este tipo de problemas tampoco habrá empalmes.

Enseguida ilustraremos la construcción de una red para un problema de este tipo.

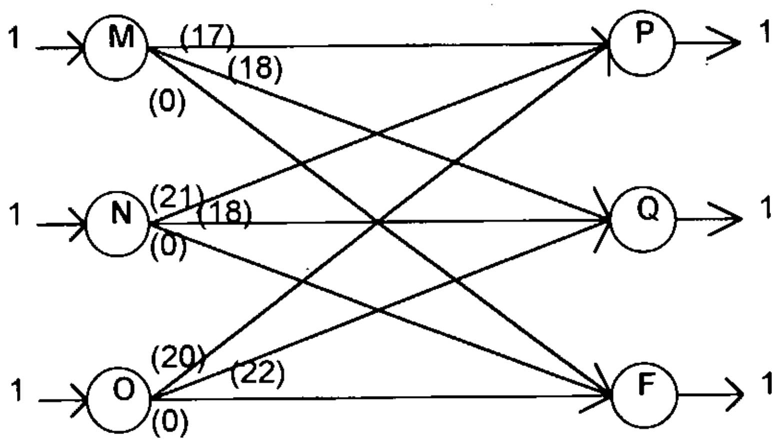
Ejemplo XII.7.- Para el siguiente problema de asignación constrúyase la red correspondiente.

Tarea / Trab.	P	Q	Ofertas
M	17	18	1
N	21	18	1
O	20	22	1
Demandas	1	1	3 / 2

Solución:

Aquí lo primero será asignar una tarea ficticia con demanda igual a la unidad y tiempo de ejecución igual a cero, para igualar el número de aquellas al de trabajadores. Entonces la red se construye con 3 nodos fuente M, N y O, 3 nodos demanda P, Q y el ficticio que llamaremos F con ofertas y demandas unitarias y con 3 x 3 = 9 ramas, cada una con su tiempo asociado.

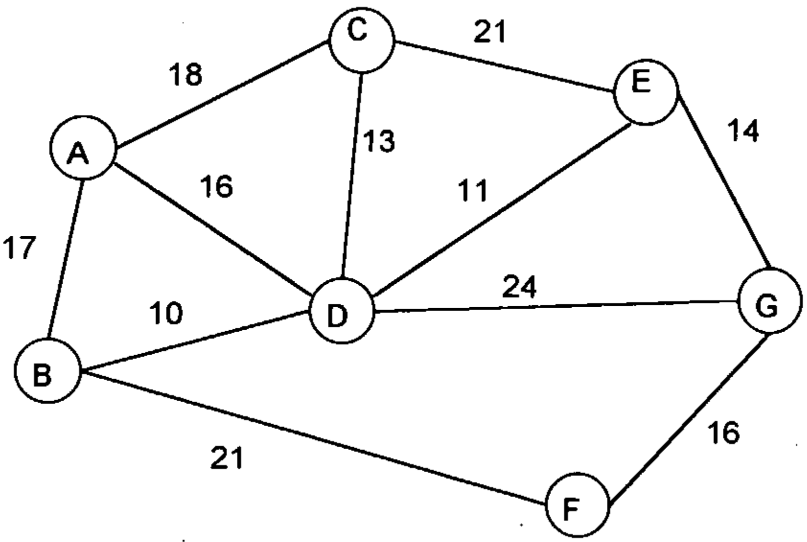
La figura de la red será la siguiente:



Los tiempos de las ramas aparecen en paréntesis.

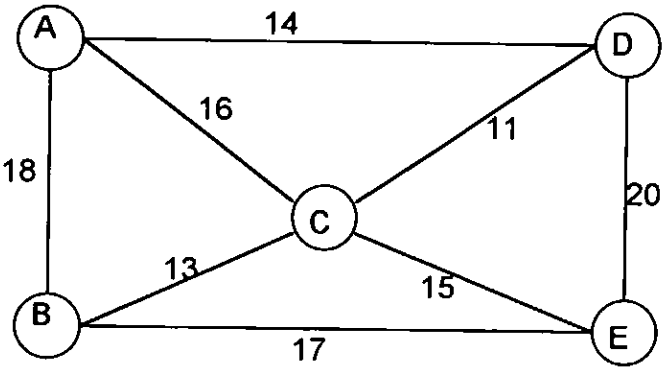
PROBLEMAS PROPUESTOS.

XII.1.- Para la red siguiente, encuéntrese el recorrido mínimo.



XII.2 .- Para la misma red del problema anterior, hallar la red de recorrido máximo.

XII.3 .- Hallar el recorrido mínimo para la red siguiente:



XII.4.- La tabla siguiente da los tiempos en minutos de moverse de cada origen a cada destino.

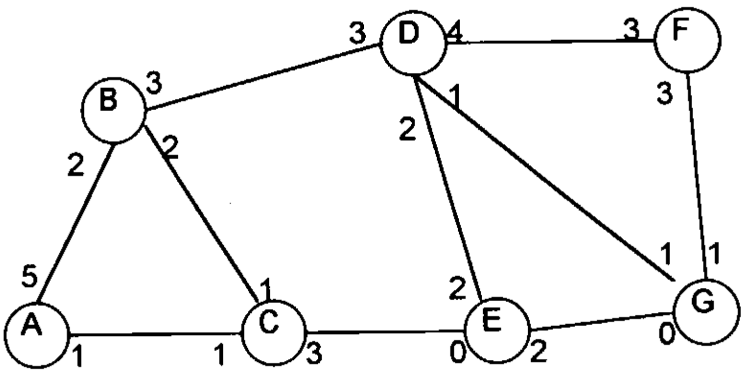
Destino / Origen	M	N	O	P	Q
M	---	18	21	---	23
N	18	---	16	17	---
O	21	16	---	15	---
P	---	17	15	---	10
Q	23	---	---	10	---

Hallar la ruta más corta para ir desde M hasta Q

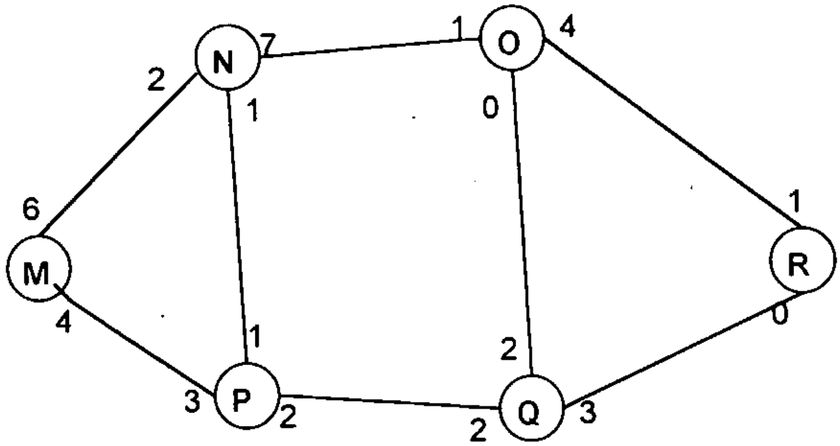
XII.5 .- Encontrar la ruta más corta para ir de A hasta F.
La siguiente tabla muestra las distancias en kms.

Destino / Origen	A	B	C	D	E	F
A	---	16	18	30	21	---
B	16	---	23	---	26	14
C	18	23	---	18	15	20
D	30	---	18	--	17	16
E	21	26	15	17	---	---
F	---	14	20	16	---	---

XII.6 .- Para la siguiente red, hallar el flujo máximo posible desde A hasta G.



XII.7 .- Determine el flujo máximo posible entre M y R para la red.



APENDICE I

Areas bajo la curva normal de probabilidad
para una desviación estándar dada

	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73536	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97784	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

CAPITULO II

II.1.- (a) R=0; (b) R= -2; (c) R=0

II.2.- (a) R=0; (b) R=370; (c) R= -12

II.3.- R= - 66

II.4.- R= 3

II.5.- R= 0

II.6.- R= - 136

II.7.- R= - 136

II.8.- R= 136

II.9.- R= 0

II.10.- C= - 10,350

II.11.- $X_1= 3, X_2= 4, X_3= 1$

II.12.- $X_1= 6, X_2= 3$

II.13.- $X_1= 5, X_2= 3, X_3= 0$

II.14.- Rango = 3

II.15.- Rango=2

II.16.-

$$A^T = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 8 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad B^t = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

II.17.- R= No

II.18.- R= Sí

II.19.-

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

II.20.-

$$(a)\begin{pmatrix} 10 & 6 & 6 \\ 6 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad (b)\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad (c)\begin{pmatrix} 39 & 10 & 11 \\ 10 & 4 & 8 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (\mathrm{d})\begin{pmatrix} 29 & 24 & 19 \\ 21 & 18 & 15 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

II.21.-

$$R = \begin{pmatrix} 26 & 5 \\ 42 & 5 \end{pmatrix}$$

II.22.-

$$R = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 6 \\ 22 & 25 & -1 \\ 19 & 27 & -5 \end{pmatrix}$$

II.23.- Valor común

$$\begin{pmatrix} 26 & 13 \\ -20 & 10 \end{pmatrix}$$

II.24.-

$$R = \begin{pmatrix} 19 & -20 & -26 \\ -5 & 19 & 16 \\ -27 & 33 & 69 \end{pmatrix}$$

II.25.-

$$R=\begin{pmatrix}0.2184 & -0.2299 & -0.2989\\ -0.0575 & 0.2184 & 0.1839\\ -0.3103 & 0.3793 & 0.7931\end{pmatrix}$$

II.26.-

$$R=\begin{pmatrix}0.0403 & -0.0565 & 0.1210\\ 0.0161 & 0.1774 & 0.0484\\ 0.2419 & -0.3387 & -0.2742\end{pmatrix}$$

II.27.- $X_1 = 2$, $X_2 = 3$

II.28.- $X_1 = 2$, $X_2 = 3$, $X_3 = 1$

II.29.- $X_1 = 6$, $X_2 = 4$, $X_3 = 7$

II.30.- Valor común

$$\begin{pmatrix}25 & 6 & 27\\ 0 & -7 & 0\\ 21 & 8 & 5\end{pmatrix}$$

CAPITULO III

III.1.- Max $Z = 3.5\,X_1 + 3.6\,X_2 + 4\,X_3 + 4.6\,X_4$

Sujeto a $60\,X_1 + 70\,X_2 + 90\,X_3 + 120\,X_4 \leq 10{,}000$

$120\,X_1 + 135\,X_2 + 170\,X_3 + 200\,X_4 \leq 18{,}000$

siendo X_1, X_2, X_3, X_4, enteras y no negativas.

III.2.- Min $Z = 3\,X_1 + 3.3\,X_2 + 3.5\,X_3$

Sujeto a $20\,X_1 + 18\,X_2 + 15\,X_3 \leq 18.5$

$17\,X_1 + 15\,X_2 + 15\,X_3 \leq 16$

$X_1 + X_2 + X_3 = 1$

siendo X_1, X_2, X_3, no negativas.

III.3.- Max $Z = 180\,X_1 + 200\,X_2$

Sujeto a $10\,X_1 + 12\,X_2 \leq 150$

$6\,X_1 + 7\,X_2 \leq 70$

siendo X_1, X_2, enteras y no negativas.

III.4.- Min $Z = 7500\,X_1 + 8500\,X_2$

Sujeto a $(70\,X_1 + 80\,X_2) / (X_1 + X_2) \geq 75$

$X_1 + X_2 = 4$

siendo X_1, X_2, enteras y no negativas.

III.5.- Max $Z = 15.2\,X_1 + 13\,X_2 + 13.5\,X_3$

Sujeto a $2.5\,X_1 + 2\,X_2 + 2.2\,X_3 \leq 100$

$1.2\,X_1 + X_2 + 1.05\,X_3 \leq 40$

siendo X_1, X_2, X_3, enteras y no negativas.

III.6.- Min $Z = 1.2\,X_1 + 1.7\,X_2$

Sujeto a $25\,X_1 + 16\,X_2 \leq 20$

$X_1 + X_2 = 1$

siendo X_1, X_2, no negativas.

III.7.- Max $Z = 6 X_1 + 7 X_2 + 8.5 X_3$
Sujeto a $3 X_1 + 4 X_2 + 5 X_3 \leq 80$
siendo X_1, X_2, X_3, enteras y no negativas.

III.8.- Min $Z = 10 X_1 + 7 X_2 + 6.5 X_3$
Sujeto a $80 X_1 + 60 X_2 + 58 X_3 \geq 65$
$X_1 + X_2 + X_3 = 1$
siendo X_1, X_2, X_3, no negativas.

III.9.- Min $Z = 35 MB + 28 R + 20 P$
Sujeto a $400 MB + 300 R + 250 P \geq 3000$
$MB \leq 4$
$R \leq 6$
$P \leq 8$
$MB + R + P = 10$
siendo MB, R, P, enteras y no negativas.

III.10.- Max $Z = 18 X_1 + 15 X_2 + 13 X_3$
Sujeto a $2 X_1 + 1.7 X_2 + 1.5 X_3 \leq 120$
siendo X_1, X_2, X_3, enteras y no negativas.

CAPITULO IV

IV.1.- A= 4, B= 2, Z= 22

IV.2.- A= 6.5, B= 5, Z= 79

IV.3.- X= 6, Y= 8, Z=114

IV.4.- X= 5, Y= 5, Z= 50

IV.5.- A= 4, B= 12, Z= 84

IV.6.- X= 9.333, Y= 5.333, Z= 104

IV.7.- C= 15, D= 15, Z= 1170

CAPITULO V

V.1.- X_1= 0, X_2= 0.8, X_3= 0.2, Z= 11.6

V.2.- No hay solución factible.

V.3.- X_1= 2, X_2= 1, Z= 1.1

V.4.- X_1= 0.8, X_2= 1, X_3= 1.2, Z= 272

V.5.- X_1= 2, X_2= 3, X_3= 0, Z= 560

V.6.- No hay solución factible.

V.7.- No hay solución factible.

V.8.- X_1= 1.025, X_2=1.225, X_3= 1.525, Z=3.775

V.9.- No hay solución factible.

CAPITULO VI

VI.1.- Max $Z_D = 5Y_1 + 8Y_2 + 2Y_3 + 1.5Y_4$

Sujeto a $2Y_1 + 3Y_2 + Y_3 \leq 4$

$Y_1 + 2Y_2 + 2Y_4 \leq 3$

siendo Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, no negativas.

VI.2.- $Y_2 = 1.3333$, $Y_4 = 0.1667$, $Z_D = 10.9167$

VI.3.- Min $Z_D = 3Y_1 + Y_2 - Y_3$

Sujeto a $3Y_1 + Y_2 - Y_3 \geq 10$

$Y_1 + Y_2 - Y_3 \geq 9$

siendo Y_1, Y_2, Y_3, no negativas.

$Y_1 = 0.5$, $Y_2 = 8.5$, $Z_D = 10$

VI.4.- Min $Z_D = 4Y_1 + Y_2 + Y_3 + 2Y_4$

Sujeto a $Y_1 + Y_2 \geq 1$

$Y_1 + Y_3 \geq 2$

$Y_4 \geq 1$

$Y_1 \geq 1$

$Y_1 = 1$, $Y_2 = 0$, $Y_3 = 1$, $Y_4 = 1$, $Z_D = 7$

VI.5.- Max $Z_D = 4Y_1 + 5Y_2 + Y_3$

Sujeto a $2Y_1 + Y_2 + Y_3 \leq 8$

$Y_1 + 2Y_2 \leq 6$

siendo Y_1, Y_2, Y_3, no negativas.

$Y_1 = 3.333$, $Y_2 = 1.333$, $Y_3 = 0$, $Z_D = 20$

VI.6.- En la segunda tabla del primario, $H_1=3$, $H_2=1$, $H_4=2$, son variables básicas y $H_3=0$ es básica; mientras que en el dual, $Y_1= Y_2= Y_4=0$ son no básicas y $Y_3=2$ es básica, con lo que se comprueba la propiedad de holgura complementaria.

CAPITULO VII

VII.1.- La solución del caso original es $X_1=3.5$, $X_2=0$, $X_3=7$, $Z=35$, mientras que para los incisos es:

(a) la misma que la original
(b) $X_1=2$, $X_2=0$, $X_3=10$, $Z=38$
(c) $X_1=6.5$, $X_2=0$, $X_3=7$, $Z=47$

VII.2.- La solución original es la misma que la del problema propuesto VII.1, mientras que para los incisos es:

(a) $X_1=0$, $X_2=7$, $X_3=7$, $Z=35$
(b) $X_1=0$, $X_2=8$, $X_3=6$, $Z=50$
(c) $X_1=3.5$, $X_2=0$, $X_3=7$, $Z=49$

VII.3.- (a) $X_1=4$, $X_2=0$, $X_3=7$, $Z=37$
(b) $X_1=6$, $X_2=0$, $X_3=2$, $Z=30$

VII.4.- $X_1=0$, $X_2=0$, $X_3=6$, $X_4=8$, $Z=46$

VII.5.- $X_1=4$, $X_2=0$, $X_3=6$, $Z=34$

VII.6.- $X_1=0$, $X_2=0$, $X_3=14$, $Z=42$

VII.7.- La solución del caso original es $X_1=6$, $X_2=0$, $Z=12$, mientras que para los incisos es:

(a) $X_1=9$, $X_2=0$, $Z=18$
(b) $X_1=1$, $X_2=5$, $Z=7$

VII.8.- (a) $X_1=3.5$, $X_2=0$, $Z=7$
(b) $X_1=6$, $X_2=0$, $Z=12$

VII.9.- $X_1=6$, $X_2=0$, $X_3=0$, $Z=12$

VII.10.- $X_1=6$, $X_2=0$, $Z=12$

VII.11.- $X_1=3.5$, $X_2=0$, $Z=7$

CAPITULO VIII

VIII.1.- $X_1=0$, $X_2=2$, $Z=6$

VIII.2.- $X_1=2$, $X_2=1$, $Z=17$

VIII.3.- La misma solución que el problema propuesto VIII.1

VIII.4.- $X_1=2$, $X_2=2$, $Z=22$

VIII.5.- La misma solución que el problema propuesto VIII.1

VIII.6.- $X_1=0$, $X_2=3$, $Z=3$

VIII.7.- $X_1=1$, $X_2=2$, $Z=10$

VIII.8.- $X_1=0$, $X_2=4$, $Z=4$

VIII.9.- $X_1=0$, $X_2=2$, $Z=6$

VIII.10.- La misma solución que el problema propuesto VIII.1

VIII.11.- $X_1=2$, $X_2=2$, $Z=16$

VIII.12.- $X_1=3$, $X_2=0$, $X_3=1$, $Z=14$

VIII.13.- $X_1=1$, $X_2=2$, $X_3=0$, $Z=3$

VIII.14.- $X_1=0$, $X_2=3$, $X_3=0$, $Z=15$

CAPITULO IX

IX.1.-
(a) $X_{WA}=440$, $X_{WB}=60$, $X_{YB}=230$, $X_{YC}=70$, $X_{ZC}=200$, $X_{ZD}=150$, Costo= 31,410
(b) $X_{WA}=440$, $X_{WD}=60$, $X_{YC}=270$, $X_{YD}=30$, $X_{ZB}=290$, $X_{ZD}=60$, Costo= 31,740
(c) $X_{WA}=90$, $X_{WB}=260$, $X_{WD}=150$, $X_{YB}=30$, $X_{YC}=270$, $X_{ZA}=350$, Costo= 30,610
(d) $X_{WA}=90$, $X_{WB}=290$, $X_{WD}=120$, $X_{YC}=270$, $X_{YD}=30$, $X_{ZA}=350$, Costo= 30,580
(e) Igual al inciso (d)

IX.2.- X_{WA}= 210, X_{WB}= 290, X_{YC}= 270, X_{YD}= 30, X_{ZA}= 230, X_{ZD}= 120, Costo= 30,580
IX.3.- Igual a los incisos (d) y (e) del problema propuesto IX.1.

IX.4.- X_{12}= 350, X_{13}= 650, X_{21}= 700, X_{34}= 600, Costo= 24,350, es una solución degenerada.
IX.5.- Igual al problema propuesto IX.4.

IX.6.- X_{12}= 5000, X_{13}= 2500, X_{21}= 1500, X_{22}= 3000, X_{31}= 4000, X_{41}= 3500, X_{24}= 1000,Costo= 545,000.

IX.7.- Igual al problema propuesto IX.6.

IX.8.- Igual al problema propuesto IX.6.

IX.9.- X_{A1}= 300, X_{A2}= 400, X_{A3}= 1800, X_{B2}= 2200, X_{D1}= 1800, X_{E1}= 1500, X_{F1}=1300, X_{G1}= 100, X_{G4}= 1100, Costo= 4,617,500.

IX.10.- Igual al problema propuesto IX.9.

IX.11.- X_{A1}= 2500, X_{B1}= 2000, X_{B3}= 200, X_{D2}= 1800, X_{E3}= 400, X_{E4}= 1100, X_{F1}= 500, X_{F2}= 800, X_{G3}= 1200, Costo= 5,117,000.

IX.12.- X_{11}= 500, X_{12}= 2000, X_{21}= 2000, X_{23}= 1500, Costo= 230,000, es solución degenerada.

IX.13.- X_{11}= 2500, X_{22}= 500, X_{23}= 1500, X_{32}= 1500, Costo= 260,500, es solución degenerada.

IX.14.- X_{11}= 3600, X_{22}= 1800, X_{33}= 1700, X_{41}= 100, X_{42}= 800, X_{43}= 700, Costo= 227,400.

IX.15.- X_{11}=3200, X_{13}= 3000, X_{22}= 1000, X_{24}= 2800, X_{31}= 3500, X_{42}= 3000, Costo= 424,100.

IX.16.- La demanda de mayo la satisface con 1580 prendas fabricadas en turnos normales y 230 en turnos extras, la demanda de junio con 1580 prendas en turnos normales y 70 en turnos extras y la de julio con 1570 prendas en turnos normales, con un costo total de N$ 36,906.00.

IX.17.- La demanda de noviembre se cumple con los 350 artículos del inventario inicial y producir 650 en turnos normales del mismo mes, la demanda de diciembre con 200 artículos producidos en turnos normales de noviembre, 850 artículos de turnos normales de diciembre y 150 artículos producidos en turnos extras de diciembre, la demanda de enero se satisface con producir 850 artículos en turnos normales y 170 en turnos extras del mismo mes, finalmente la demanda de febrero se cumple con la producción de los 680 artículos en turnos normales del mismo mes, con un costo total del programa de producción de N$174,180.00

IX.18.- Se debe asignar al primer atleta para la prueba 1, al segundo atleta para la prueba 5, al tercer atleta para la prueba 4, al quinto atleta para la prueba 2 y al octavo atleta para la prueba 3, por su parte los atletas cuarto, sexto y séptimo quedarán sin asignación, el tiempo total de los atletas será de 745 minutos.

IX.19.-Se debe asignar a José Martínez para el trabajo 1, a Luis González para el trabajo 2 y a Francisco Ruiz para el trabajo 3, quedando sin asignar a ningún trabajo Juan Pérez, con esto la utilidad total será de N$6500.00.

IX.20.-Se debe asignar al primer trabajador para la tarea 4, al segundo trabajador para la tarea 3, al tercer trabajador para la tarea 2 y al cuarto trabajador para la tarea 1, mientras que los trabajadores quinto y sexto quedan sin asignar, con ello el costo total es de N$ 4,770,0

IX.21.- X_{AN}= 650, X_{AO}= 1800, X_{BM}= 1450, X_{MQ}= 750, X_{OP}= 400, X_{OR}= 850, Costo= N$ 1,690,500 /mes.

IX.22.- X_{AD}= 1800, X_{BD}= 1650, X_{CE}= 1300, X_{DF}= 1450, X_{DG}= 1100, X_{DH}= 100, X_{EH}= 300, X_{EI}= 300, Costo= N$ 145,750 /mes.

CAPITULO X

X.1.- Se debe asignar 1 trabajador al distrito I, 2 al distrito II, ninguno al III y 3 trabajadores al IV, para obtener 14,100 votos incrementales.

X.2.- Se deben asignar 6 lotes a México y 1 a Monterrey para obtener una utilidad de MN$ 420.

X.3.- Se deben asignar los 3 ayudantes al caso II, para lograr una probabilidad conjunta de fracaso de 0.075.

X.4.- La ruta de costo mínimo es A-B-E-F-I-J con un costo de MN$ 48.

X.5.- La peor ruta es la A-C-D-F-H-J con un costo de MN$ 62.

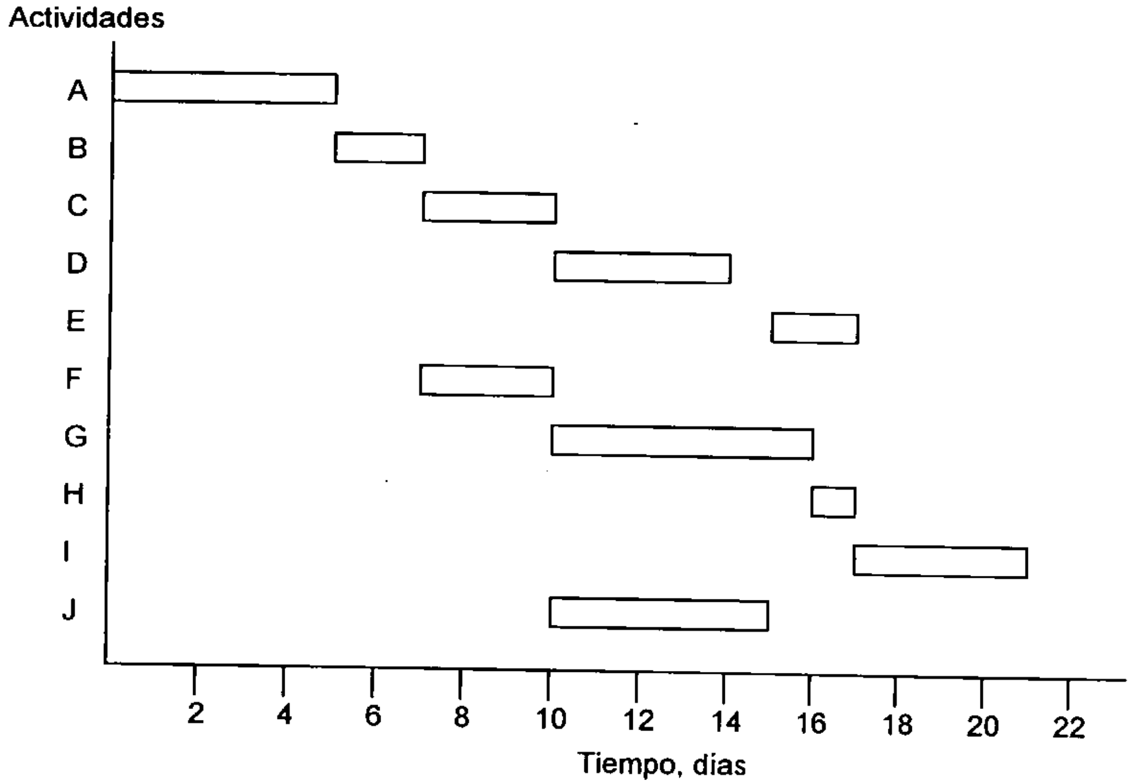
X.6.- Hay 2 opciones empatadas que son: (a) asignar los 3 ayudantes al caso III y (b) asignar un ayudante a cada caso, obteniéndose una probabilidad conjunta de fracaso de 0.096.

X.7.- Se debe asignar un asesor a cada departamento para obtener una utilidad incremental de MN$ 200.

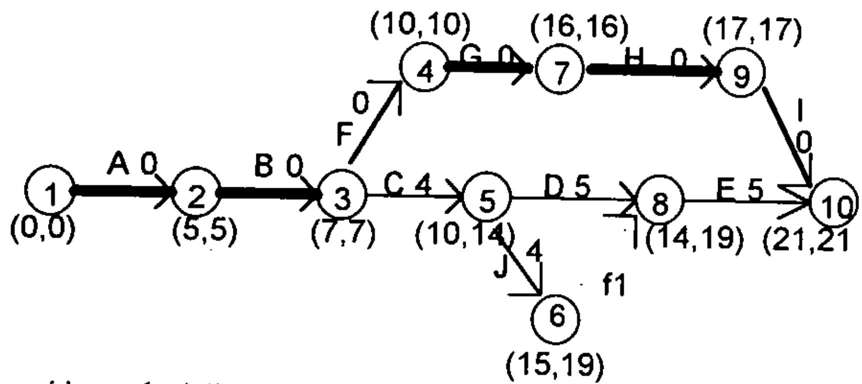
X.8.- Se debe asignar un atleta a la prueba de salto de altura, dos a la de 10 kms y el otro al salto de longitud, para lograr una probabilidad conjunta de éxito de 0.1972.

CAPITULO XI

XI.1.- El gráfico de Gantt es



XI.2.- La red es

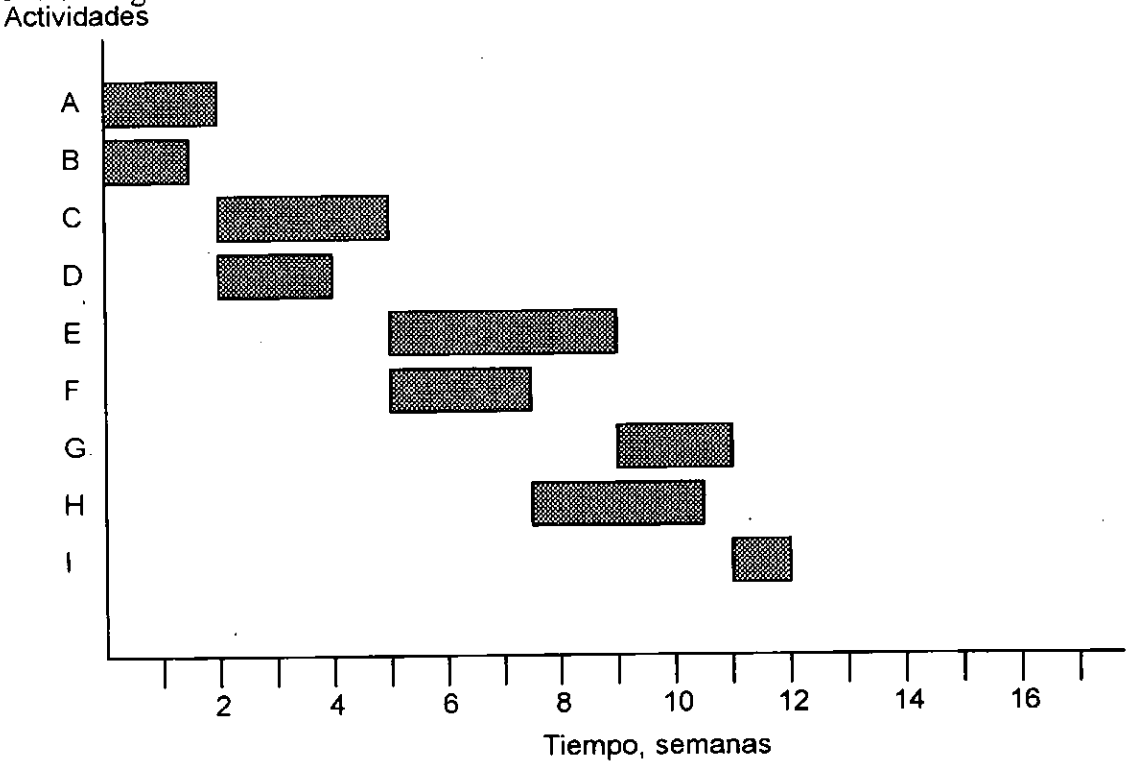


La ruta crítica es la A-B-F-G-H-I con un tiempo de 21 días

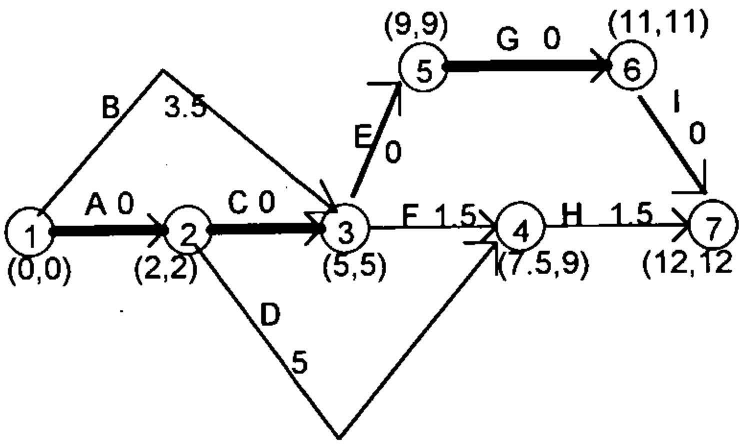
Los tiempos más próximos y más lejanos de los eventos aparecen en la red entre paréntesis y las holguras de las actividades son los números que van junto a las literales que representan cada actividad. Los eventos 5 y 6 tienen una holgura de 4 días, el evento 8 de 5 días y los restantes eventos de cero.

XI.3.- (a) No hay error.
(b) No debe haber más de un nodo final.

XI.4.- El gráfico de Gantt es

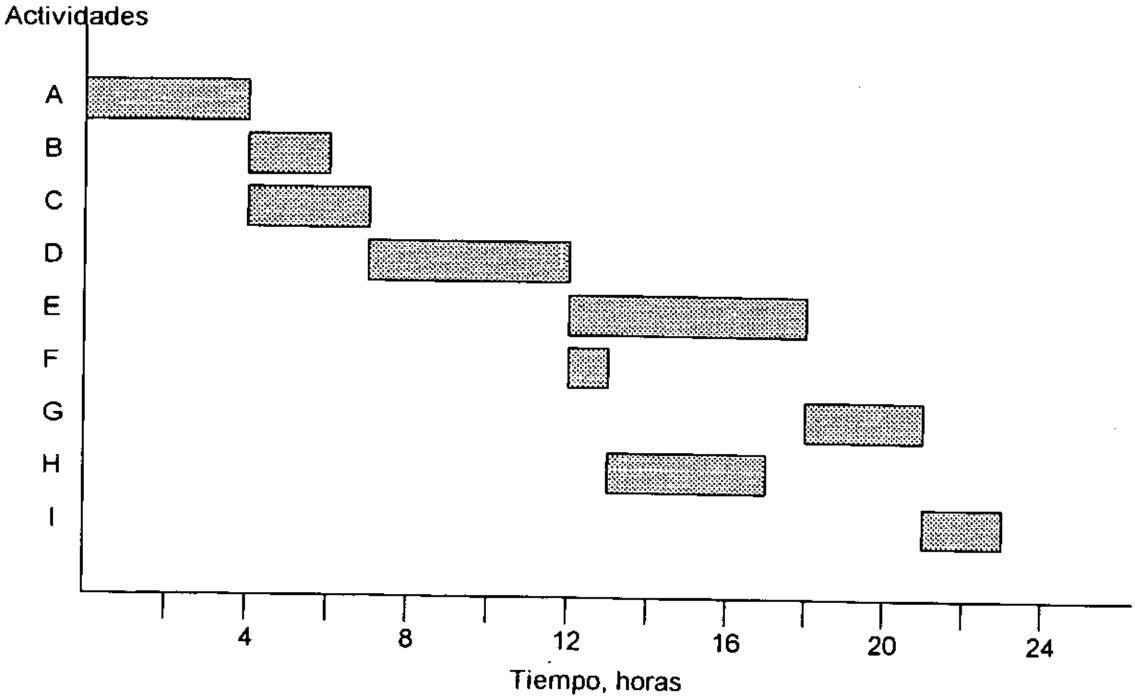


XI.5.- La red es

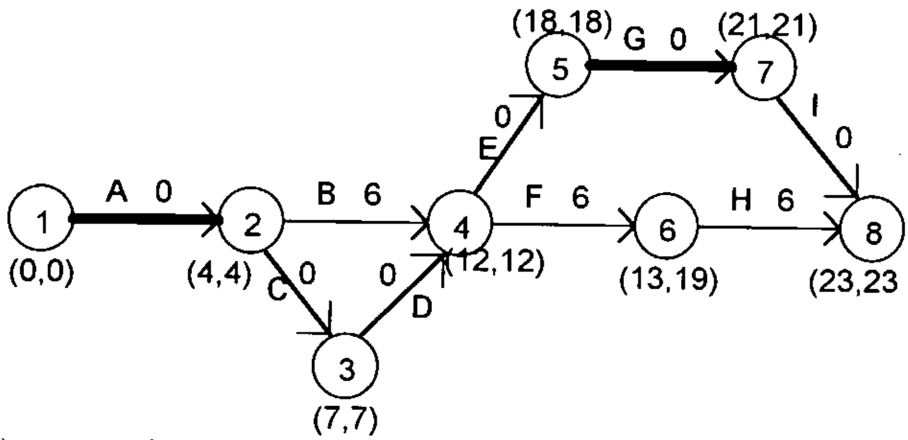


La ruta crítica es la A-C-E-G-I con un tiempo de 12 semanas.
Los tiempos más próximos y más lejanos se muestran en paréntesis.
Las holguras de las actividades aparecen en la red junto a aquellas y las de los eventos son cero, excepto para el evento 4, que es 1.5.

XI.6.- (a) El gráfico de Gantt es



(b) La red es

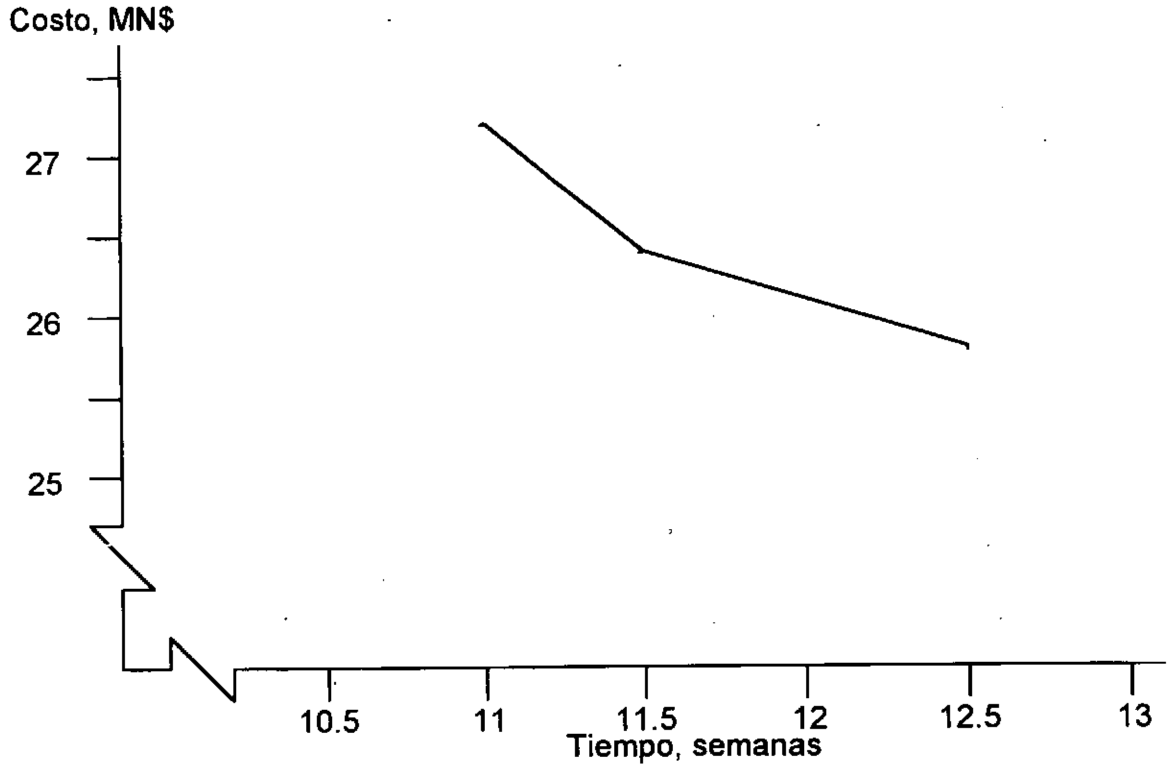


(c) La ruta crítica es la A-C-D-E-G-I con un tiempo de 23 horas.
Los tiempos más próximos y más lejanos de los eventos aparecen en la figura entre paréntesis, las holguras de las actividades aparecen junto a éstas en la figura y las holguras de los eventos son cero a excepción del evento 6 que es 6.

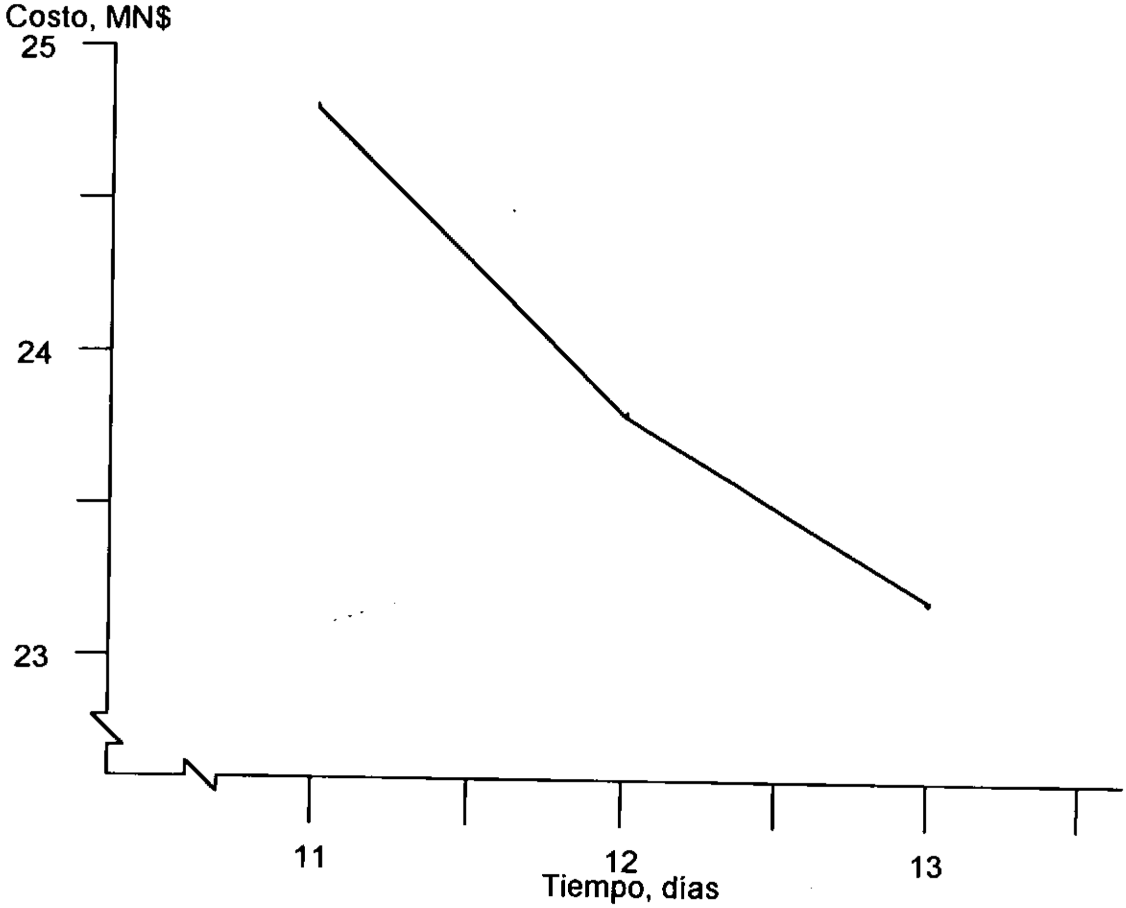
XI.7.- 82.94%

XI.8.- 86.50%

XI.9.- La gráfica tiempo-costo es

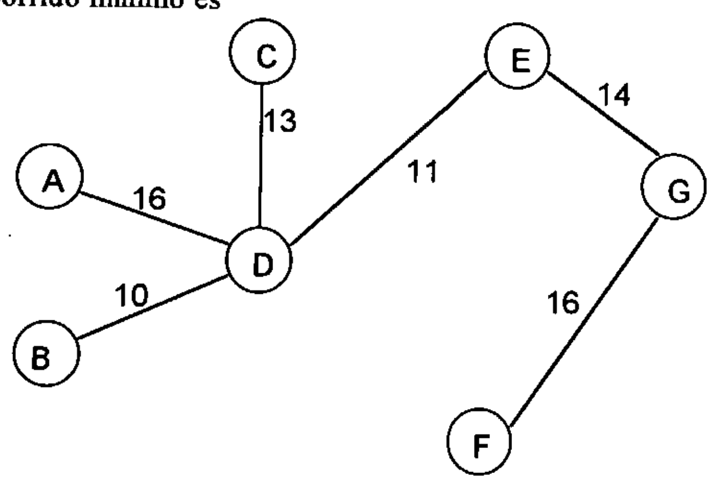


XI.10.- La gráfica tiempo-costo es



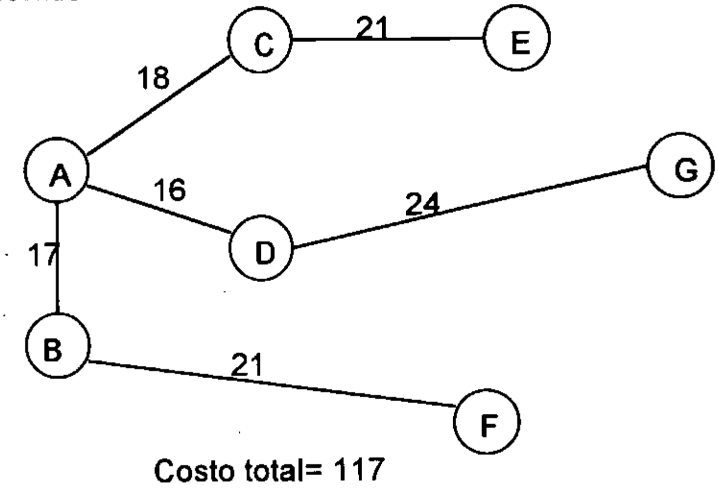
CAPITULO XII

XII.1.- La red de recorrido mínimo es

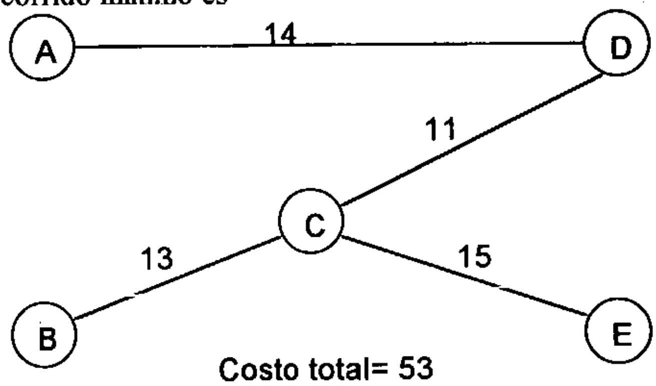


Costo total= 80

XII.2.- La red de recorrido máximo es



XII.3.- La red de recorrido mínimo es



XII.4.- La ruta más corta es M-Q, con un tiempo de 23 minutos.

XII.5.- La ruta más corta es A-B-F con una distancia de 30 kms.

XII.6.- Es posible enviar de A hasta G un máximo de 6 unidades.

XII.7.- Es posible enviar un máximo de 6 unidades desde M hasta R.

BIBLIOGRAFIA

1.- Ackoff R.L., Sasieni M.W., *Fundamentos de Investigación de Operaciones*, Limusa, 1979.

2.- Bronson R., *Investigación de Operaciones*, McGraw-Hill, 1993.

3.- Davis K.R., McKeown P.G., *Modelos Cuantitativos para Administración*, Grupo Editorial Iberoamérica, 1984.

4.- Gallagher C.A., Watson H.J., *Métodos Cuantitativos para la Toma de Decisiones en Administración*, McGraw-Hill, 1982.

5.- Hillier F.S., Lieberman G.J., *Introducción a la Investigación de Operaciones*, McGraw-Hill, 1991.

6.- Izar L. J. M., *Elementos de Métodos Numéricos para Ingeniería*, U.A.S.L.P. Unidad Zona Media, 1994.

7.- Kaufmann A., *Métodos y Modelos de la Investigación de Operaciones*, C.E.C.S.A., 1970.

8.- Kreyszig E., *Matemáticas avanzadas para Ingeniería*, Limusa, 1975.

9.- Miller I., Freund J.E., *Probabilidad y Estadística para Ingenieros*, Reverté, 1973.

10.- Thierauf R. J., Grosse R.A., *Toma de decisiones por medio de Investigación de Operaciones*, Limusa, 1990.

11.- Vaughn R.C., *Introducción a la Ingeniería Industrial*, Reverté, 1971.

El Señor Ing. Jaime Valle Méndez, Rector de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, ordenó la impresión de este libro a la Editorial Universitaria Potosina. La edición fue concluida el 19 de julio de 1996 y consta de 1000 ejemplares.

Editorial
Universitaria
Potosina