

# DINAMICA EN ESPACIOS CON RUIDO

TESIS que para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS  
(FISICA)

presenta

GELASIO SALAZAR ANAYA.

FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE SAN LUIS POTOSI

MARZO DE 1993

## RESUMEN

Introducimos un operador de Markov con ruido  $\mathcal{R}_{p_1, \dots, p_N}$  que describe la evolución de un sistema de funciones  $SF \{ \mathbf{X}; w_i \}_{i=1, \dots, N}$  para el caso en que el espacio subyacente posee algún tipo coherente de inestabilidad interna, denotada como "ruido". Se introduce una definición adecuada de espacio con ruido  $(\mathbf{X}, d, \mathcal{S})$ , donde  $(\mathbf{X}, d)$  es un espacio métrico compacto y  $\mathcal{S} : \mathcal{P}(\mathbf{X}) \times [0, \infty) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{X})$  es el operador que describe los efectos del ruido en ausencia de influencias externas, donde  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$  es el conjunto de las medidas normalizadas definidas sobre  $\mathbf{X}$ . Se estudian condiciones suficientes para la forma funcional de  $\mathcal{S}$  que inducen una evolución global  $\mathcal{R}_{p_1, \dots, p_N} : \mathcal{P}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{X})$  contractiva en la métrica de Hutchinson, determinando así una medida invariante asociada a la dinámica, cuyo soporte, a diferencia del caso sin ruido, no es más un fractal determinista. Finalmente presentamos un  $SF$  cuya medida invariante en el espacio sin ruido tiene como soporte un conjunto de Cantor. Se presenta la medida invariante para el mismo  $SF$  en un espacio con ruido.

## AGRADECIMIENTOS

Ante todo quiero agradecer al asesor de este trabajo, Dr. Jesús Urías, por el tiempo y esfuerzo dedicados a este trabajo y asimismo al Gallo y a Enciso por sus sugerencias y comentarios.

Este trabajo fue realizado en el Instituto de Investigación en Comunicación Óptica. Agradezco al Dr. Alfonso Lastras Martínez por haberme concedido la oportunidad de desarrollar el presente trabajo en esta institución bajo su dirección.

Agradezco las valiosas sugerencias que realizó el Dr. Xavier Gómez Mont Avalos durante la etapa intermedia de este trabajo, así como a los doctores Lilia del Riego Senior, Hugo Navarro Contreras y Magdaleno Medina Noyola por sus comentarios sobre el aspecto general de esta tesis. Quiero agradecer asimismo a Marcela Mejía Carlos, del Laboratorio de Comunicación del IICO por su ayuda en la preparación de las gráficas que aparecen en este trabajo.

Finalmente, agradezco el apoyo económico otorgado por las siguientes instituciones:

Dirección Adjunta de Formación de Recursos Humanos del CONACyT, a través del Programa de Apoyo al Posgrado.

Fondo de Apoyo a la Investigación de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Fondo para la Modernización de la Educación Superior (FOMES) de la SEP.

DEDICO ESTE TRABAJO A MIS PAPÁS, A MI HERMANA Y A MI SOBRINA,  
CON MUCHO CARÍÑO

A MI NOVIA, PATRICIA

A URIAS Y AL GALLO Y A ENCISO

A MIS AMIGOS DE TAMPICO Y A MIS AMIGOS DE SAN LUIS

*Pequeña secuencia numérica*

Mira lo que tengo! : Una gota de mercurio,  
Dos gansitos Marinela,  
tres dedos en cada mano,  
Dónde quedaron los otros cuatro?

EDGARDO UGALDE

POEMAS POR PEDIDO (1993). Inédito.

## INTRODUCCION

Existen incontables motivaciones que inducen al estudio de la evolución de un sistema (no necesariamente físico; cualquier cosa que cambia al paso del tiempo es susceptible en principio de admitir una descripción de su evolución). Con tal finalidad, se han realizado múltiples esfuerzos para abstraer los elementos fundamentales que participan en la descripción de tal evolución.

Los elementos comunes que encontramos en tales formulaciones son un *espacio de estados* o *espacio fase* y una regla de evolución. El espacio de estados es normalmente un espacio topológico, aunque en principio cualquier conjunto abstracto con propiedades satisfactorias puede ser válidamente aceptado. Normalmente se abstrae un cierto número (finito o infinito) de propiedades del sistema original cuyo conocimiento se considera suficiente para la descripción del estado del sistema, y a cada configuración posible de tal conjunto de propiedades se le asigna un único elemento de un conjunto abstracto, el espacio de estados. De igual manera, se identifican con cierta aproximación las propiedades del mecanismo de evolución, de modo que para describir la evolución temporal en el sistema real se introduce en el espacio de estados alguna *regla* (frecuentemente en forma de ecuación), de manera tal que a través de ella podemos en principio deducir la evolución de cualquier punto en el espacio fase a cualquier tiempo, es decir, a partir de esta regla podemos concebir una asociación tal que a cada punto  $x$  del espacio de estados y a cada valor  $t$  de tiempo le asocia un nuevo punto del espacio de estados, la *evolución* de  $x$  al tiempo  $t$ . De esta forma hemos trasladado nuestro problema original a otro equivalente, dejando de lado en un principio nuestro sistema "real" para estudiar sus propiedades en un espacio "abstracto".

Los ejemplos clásicos en esta dirección lo constituyen las leyes de Newton y los principios variacionales de Lagrange y Hamilton, por citar algunos. A pesar de estos formalismos y de otros más sofisticados no es posible aún hallar una manera única e infalible de resolver el problema general de la evolución de un sistema arbitrario. En años recientes se ha enfocado este problema de manera un poco diferente, en cierto sentido a la inversa: se han propuesto muy diversos espacios de estados con muy variadas reglas de evolución, aun no siendo estos en principio espacios contruidos *ad hoc* como auxiliares para la descripción de otro sistema,

y se han estudiado sus propiedades. Un ejemplo de este tipo podemos hallarlo en los *autómatas celulares* (V. [6]).

Los autómatas celulares constituyen un ejemplo en el cual la dinámica involucrada es *discreta*. Frecuentemente al espacio de estados junto con la regla de evolución le llamamos *sistema dinámico*, y en el caso especial en el que el sistema no se encuentra evolucionando a todo tiempo real sino que cambia únicamente en tiempos discretos ( $t = 0, 1, 2, \dots$ ) decimos que estamos tratando con un *sistema dinámico discreto*. El interés en sistemas discretos no es exclusivamente académico: se han encontrado múltiples aplicaciones ([6], [7], [8], [9]) para los resultados encontrados en el estudio de sistemas discretos.

En este trabajo desarrollamos ciertas ideas y conceptos concernientes a un tipo especial de sistema discreto, a saber, el sistema dinámico compuesto por un espacio de estados  $\mathbf{X}$ , que es un espacio métrico y una regla de evolución inducida por un número finito  $N$  de funciones  $w_i : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  contractivas, es decir, tales que para cualquier par de puntos en el espacio se cumple que la distancia de sus imágenes bajo cualquier  $w_i$  es menor que la distancia entre ellos. La manera en que se induce la evolución es la siguiente: cada punto en  $\mathbf{X}$  evoluciona al conjunto de todas las imágenes suyas bajo las  $w_i$ . Es claro que tal regla esté bien definida, en el sentido de que un punto no evoluciona a un punto, sino a un conjunto de puntos. Por esta razón resulta más cómodo visualizar la evolución como ocurriendo en  $2^{\mathbf{X}}$ , el conjunto de todos los subconjuntos de  $\mathbf{X}$ .

Para el caso en que  $N = 1$ , esto es, cuando tenemos involucrada únicamente una función  $w_1$ , existe un teorema que nos asegura que la *órbita* de un punto en  $\mathbf{X}$  (esto es, la sucesión formada por la evolución del punto en  $t = 1, t = 2$ , etc., asumiendo que se encuentra inicialmente en  $t=0$ ) es trivial en el sentido de que converge a un *único* punto (el cual no cambia en el tiempo; es decir, es *invariante*), independientemente del punto original que tomamos. Evidentemente resulta interesante preguntar si podemos extrapolar este resultado para el caso de la dinámica asociada en  $2^{\mathbf{X}}$ ; la respuesta es sí, al menos parcialmente. El problema principal con el que nos enfrentamos es que los conceptos tales como convergencia toman sentido únicamente cuando el espacio subyacente es un espacio métrico, y no resulta posible definir una métrica interesante en  $2^{\mathbf{X}}$ . Este problema se resuelve si nos limitamos a considerar la dinámica asociada en cierto subespacio de  $2^{\mathbf{X}}$ , la clase de los subconjuntos compactos de  $\mathbf{X}$ , que denotaremos por  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$ . En tal espacio es posible definir una métrica, la *métrica de Hausdorff*, y con la cual la evolución asociada resulta ser contractiva, a partir de lo cual podemos concluir que existe un único conjunto compacto tal que toda órbita en  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$  inducida por la evolución converge a él. Si  $H$  es un conjunto tal, decimos que  $H$  es el *atractor* de la dinámica; también se dice frecuentemente que  $H$  es un *fractal determinista*, el fractal determinista inducido por el sistema de funciones  $w_1, \dots, w_N$ . En algunos casos un fractal es un objeto autosimilar, en el sentido de que en cualquier subconjunto suyo "suficientemente grande" se puede encontrar una copia idéntica suya, esto es, un conjunto idéntico al original pero contraído

por un factor  $\alpha$ . El estudio de los fractales encuentra muchas aplicaciones en la actualidad, en ramas tan diversas como morfología y gráficas por computadora [9].

Existe aún otra manera de visualizar la dinámica original en  $\mathbf{X}$ , que contiene asimismo la información que obtenemos de la dinámica en  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$ . Este aspecto concierne al conjunto de las medidas definidas sobre el espacio  $\mathbf{X}$ . Intuitivamente, una medida definida en un espacio  $\mathbf{X}$  es una función que asigna a cada subconjunto  $A$  de  $\mathbf{X}$  un número entre 0 y 1, la *medida* de  $A$ . Este concepto generaliza los conceptos ordinarios de área y volumen, en el sentido de que si  $A$  y  $B$  son subconjuntos de  $\mathbf{X}$  con intersección vacía, entonces la medida de  $A \cup B$  es la suma de las medidas de  $A$  y de  $B$ . Para fines de estandarización frecuentemente se requiere que las medidas estén normalizadas, esto es, que la medida de  $\mathbf{X}$  sea igual a 1. Una medida asocia más "peso" a algunas regiones de  $\mathbf{X}$  que a otras, y en general puede tener cualidades arbitrariamente caprichosas, siempre y cuando satisfaga las condiciones mencionadas. El concepto de medida resulta sumamente útil cuando, por ejemplo, queremos saber cómo evolucionará ante cierta regla alguna parte de nuestro espacio  $\mathbf{X}$  (algún subconjunto  $A$ ), sobre la cual tenemos alguna información adicional. Si nos atenemos a la dinámica en  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$ , toda la información que podremos obtener es la trivial, a saber, a qué puntos se evolucionará. Pero si tenemos información en el sentido de que "algunas regiones se encuentran más pobladas que otras", podemos representar este hecho por una medida sobre  $\mathbf{X}$ , que asigne mayor peso a las regiones más pobladas, por ejemplo. En este punto no podemos conformarnos con saber a qué conjunto evolucionará  $A$ , sino que queremos saber en este nuevo conjunto qué partes se encuentran más pobladas que otras, y *cuánto*; en otras palabras, queremos saber *a qué medida evoluciona nuestra medida*. Existe una manera de crear este efecto, a saber, un operador en el conjunto de las medidas definidas sobre  $\mathbf{X}$  que satisface tales condiciones. A tal operador se le denomina Operador de Markov, y contiene evidentemente mucho más información sobre la dinámica original que la dinámica asociada en  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$ , pues contiene a esta última.

Una vez que hemos llegado a este punto, podemos preguntarnos si existe un resultado similar al hallado para  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$ , esto es, que el Operador de Markov sea contractivo en alguna métrica en el espacio de medidas, de modo tal que exista una única medida invariante asociada a la dinámica inducida originalmente por las funciones  $w_i$  en el espacio  $\mathbf{X}$ . La respuesta es que existe tal métrica (la métrica de Hutchinson), y por consecuencia tal única medida invariante definida sobre  $\mathbf{X}$ . Como puede demostrarse, contiene toda la información hallada para  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$ , en el sentido de que el fractal invariante en  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$  tiene medida igual a uno según la medida invariante del Operador de Markov. En el capítulo I formalizamos estos hechos, en un breve recuento de los resultados que utilizaremos sobre dinámica inducida por un sistema de funciones. Para un tratamiento exhaustivo del tema, véase [1].

En el presente trabajo procuramos generalizar estos resultados para el caso en el que el espacio de estados subyacente posee algún tipo de inestabilidad in-



terna, en el sentido de que el sistema cambia de estado "espontáneamente" aun en ausencia de influencias externas. También podemos considerar que las causas que originan tal evolución nos resultan desconocidas, pero que conocemos ciertas características de tal proceso. En ambos casos consideramos que este proceso admite una descripción según la cual es conocida la evolución espontánea de un punto en el espacio de estados, en el sentido de que si tomamos un punto arbitrario y observamos su evolución durante un período de tiempo  $\Delta t$  podemos identificar (tal vez muestreando a subintervalos pequeños  $\delta t$ ) en qué regiones es más probable hallar la evolución del punto durante ese intervalo y cuantificar esas proporciones, esto es, asignar una *medida* a cada punto y cada  $\Delta t$  (evidentemente, para diferentes valores de  $\Delta t$  podemos hallar diferentes medidas asociadas al mismo punto).

Como podemos notar, en un espacio con ruido no podemos hablar de evolución de puntos a puntos, pues existe una incertidumbre en tal proceso. De esta manera, aun cuando la dinámica conocida sea inducida por una regla que asocia puntos a puntos, es necesario recurrir a un tipo de descripción diferente a la utilizada en el caso sin ruido. Para esto, suponemos que el tiempo durante el cual actúa la regla de evolución es demasiado pequeño como para que durante ese intervalo sean apreciables los efectos del ruido, pero que existe sin embargo entre tiempos de acción de la regla un intervalo de tiempo fijo mucho mayor, para el cual los efectos del ruido son ya de importancia. Debe tomarse en cuenta, sin embargo, que la regla de evolución debe ser tal que describa la evolución de *medidas* (el mapeo de Markov en el caso que nos concierne).

Con estos elementos concluimos que la descripción adecuada de la evolución viene dada por una sucesión de aplicaciones (que llamaremos operador de Markov con ruido): dada una medida arbitraria, esta evoluciona a otra según la regla de la dinámica, y esta medida obtenida evoluciona a otra más debido a los efectos del ruido (en el "tiempo de relajación"). Acto seguido vuelve a aplicarse a la medida resultante la regla de la dinámica y así sucesivamente. Debemos notar que en un principio únicamente pedimos conocer a qué medida evoluciona un punto por los efectos del ruido y no una medida arbitraria, por lo que podría pensarse que carecemos de una descripción de esto último; sin embargo, en el capítulo II demostraremos que la evolución de una medida arbitraria puede deducirse a partir del conocimiento de la evolución debido al ruido de cada punto del espacio, por lo que podemos considerar nuestra descripción como bien definida. Para un enfoque diferente sobre dinámica con ruido, véase [7].

Una vez planteado esto, queda aún por determinar bajo qué condiciones nuestro operador con ruido induce una dinámica tal que la evolución de una medida arbitraria puede ser conocida. Para esto proponemos deducir condiciones bajo las cuales el operador con ruido es contractivo. Demostramos que este hecho depende únicamente del ruido involucrado, y planteamos una condición suficiente que debe satisfacer el ruido para garantizar tal contractividad, y, como es evidente, en tal caso encontramos una medida invariante asociada a la evolución. El desarrollo completo de estas cuestiones y la forma explícita de las condiciones suficientes:

para el ruido constituye el capítulo II. El trabajo que exponemos a partir de este capítulo es original, y en general los teoremas y postulados para los que se provee una demostración constituyen resultados originales. Para el resto de los teoremas utilizados se hace referencia al lugar donde puede encontrarse una prueba de los mismos, por carecer de sentido reescribir paso a paso su demostración. Puede encontrarse una formulación diferente de estos hechos para un caso especial de ruido y ciertos casos especiales de sistemas de funciones en [5].

En el capítulo III consideramos, a modo de ejemplo, el caso en que el espacio  $X$  es un intervalo  $[A,B]$ . En él demostramos que existe una amplia gama de posibilidades de elección para la forma explícita del ruido que inducen un operador con ruido contractivo. Finalmente, en el capítulo IV presentamos una simulación por computadora de una de las dinámicas con ruido propuestas en el capítulo III. En las gráficas mostradas puede notarse que la estructura de la medida invariante hallada (que es representada por una curva: en  $[A,B]$  las medidas son distribuciones) es autosimilar *hasta cierta escala*, dependiendo particularmente del tipo de ruido utilizada. El hecho de que sean autosimilares "hasta cierta escala" puede significar cierta ventaja para la descripción de sistemas reales, en los cuales carece de sentido hablar de autosimilaridad hasta un grado infinito de precisión.

INTRODUCCION

vi

CAPITULO I

BREVE COMPENDIO SOBRE DINÁMICA INDUCIDA POR UN SF

Introducción	1
Dinámicas Discretas	1
Dinámica Inducida por un SF	3
Dinámica en $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ : El Mapeo de Markov	4

CAPITULO II

OPERADOR DE MARKOV PARA UN ESPACIO CON RUIDO

Introducción	7
Espacios con Ruido	7
Operador de Markov con Ruido	8
Condiciones para la contractividad de $\mathcal{R}_{p_1, p_N}$	12

CAPITULO III

RUIDO EN  $\mathbf{X} = [A, B]$

Introducción	17
Propiedades de medibilidad y no expansividad para mapeos N	17
Medidas Simples	18
Medidas Compuestas	22
Una desigualdad para medidas arbitrarias	23

CAPITULO IV

UN EJEMPLO NUMÉRICO EN  $\mathbf{X} = [A, B]$

28

CONCLUSIONES

31

APENDICE

32

# CAPITULO I

## Breve Compendio sobre Dinámica Inducida por un SF.

### INTRODUCCIÓN.

El objetivo de este capítulo es proporcionar una compilación de resultados preliminares sobre dinámicas discretas en general, y un breve recuento de la dinámica discreta inducida por un sistema de funciones (SF) en un espacio métrico. Las principales referencias en esta dirección lo constituyen [1] y [2].

### DINÁMICAS DISCRETAS.

En un contexto general, una *órbita discreta* sobre un espacio  $\mathbf{X}$  es una función  $\mathcal{O} : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{X}$ , donde  $\mathbf{N}$  denota el conjunto de los enteros no-negativos. Una *dinámica discreta determinista* sobre  $\mathbf{X}$  es un conjunto  $\mathcal{T}$  de órbitas discretas sobre  $\mathbf{X}$  tal que:

- i) Para todo  $x \in \mathbf{X}$  existe  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$  tal que  $\mathcal{O}(0) = x$ .
- ii) Si  $\mathcal{O}_1(n) = \mathcal{O}_2(m)$ , para  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}$ ,  $m, n \in \mathbf{N}$ , entonces  $\mathcal{O}_1(n + n_0) = \mathcal{O}_2(m + n_0) \forall n_0 \in \mathbf{N}$ .

La condición i) nos asegura que la dinámica es "completa", en el sentido de que podemos seguir la evolución de cualquier  $x \in \mathbf{X}$  en calidad de condición inicial; por su parte, ii) garantiza el hecho de que la dinámica es absolutamente determinista. La siguiente proposición caracteriza la totalidad de las dinámicas deterministas que pueden definirse sobre un espacio  $\mathbf{X}$ .

PROPOSICIÓN(1.1). Sea  $F : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ .  $F$  induce de manera natural una dinámica determinista  $\mathcal{T}_F$  sobre  $\mathbf{X}$ . Por otra parte, si  $\mathcal{T}$  es una dinámica determinista sobre  $\mathbf{X}$ , entonces existe una única  $F : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  que induce naturalmente a  $\mathcal{T}$ .

*Demostración.* Considérese  $F : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ . Para  $x \in \mathbf{X}$ , constrúyase de la siguiente manera la única órbita  $\mathcal{O}_x$  de  $\mathcal{T}_F$  tal que  $\mathcal{O}_x(0) = x$ : para  $n \in \mathbf{N}$ , defínase  $\mathcal{O}_x(n) \equiv F^{\circ n}(x)$ , donde  $F^{\circ n}$  denota la  $n$ -ésima iteración de  $F$ . Evidentemente la propiedad i) para dinámicas deterministas se cumple, y para demostrar ii) supóngase que  $\mathcal{O}_x(n) = \mathcal{O}_y(m)$  para  $x, y \in \mathbf{X}, m, n \in \mathbf{N}$ .  $F^{\circ n}(x) = F^{\circ m}(y)$ , a partir de lo cual  $F^{\circ n_0}(F^{\circ n}(x)) = F^{\circ n_0}(F^{\circ m}(y))$ , esto es,  $\mathcal{O}_x(n + n_0) = \mathcal{O}_y(m + n_0)$ .

Por otra parte, sea  $\mathcal{T}$  una dinámica determinista sobre  $\mathbf{X}$ . Sea  $x \in \mathbf{X}$ , y  $\mathcal{O}_x$  la única órbita asociada de  $\mathcal{T}$  tal que  $\mathcal{O}_x(0) = x$ . Defínase  $F(x) \equiv \mathcal{O}_x(1)$ . Se verifica fácilmente que  $F : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  está bien definida, y que induce a  $\mathcal{T}$ .  $\square$

La anterior proposición nos garantiza la existencia de una correspondencia uno-a-uno entre el conjunto de las dinámicas deterministas definidas sobre un espacio  $\mathbf{X}$  y el conjunto de las funciones de  $\mathbf{X}$  a él mismo; es así que cuando estudiamos las propiedades de una dinámica discreta apelamos al mapeo que la induce. Por esta razón utilizaremos la notación  $(\mathbf{X}, F)$  para denotar un *sistema dinámico discreto* (SD), donde  $\mathbf{X}$  es un espacio cualquiera y  $F : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  la función que induce la dinámica.

Dado un sistema dinámico discreto  $(\mathbf{X}, F)$ , en general estaremos interesados en el comportamiento asintótico o límite del proceso iterativo de  $F$  en subconjuntos (no necesariamente unitarios) de  $\mathbf{X}$ . Para este fin únicamente necesitamos definir la imagen de  $A \subseteq \mathbf{X}$  bajo  $F$ : naturalmente  $F(A) \equiv \{x \in \mathbf{X} : f(y) = x \text{ para } y \in A\}$ . La ventaja de tal generalidad es que nos permitirá estudiar procesos iterativos más generales y no solo los inducidos por un mapeo, además de la intrínseca importancia que pueda tener comprender la evolución de un subconjunto particular de  $\mathbf{X}$ . El siguiente resultado es clásico en tal dirección: nos dice todo acerca del sistema dinámico si  $F$  pertenece a una clase especial de funciones.

DEFINICIÓN(1.1). Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Se dice que  $F : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  es *contractivo* si existe  $s, 0 \leq s < 1$ , tal que  $d(F(x), F(y)) \leq sd(x, y)$  para todos los  $x, y \in \mathbf{X}$ . A una tal  $s$  se le denomina *factor de contractividad* de  $F$ .

PROPOSICIÓN(1.2). Si  $((\mathbf{X}, d), F)$  es un sistema dinámico discreto tal que  $F$  es un mapeo contractivo y  $(\mathbf{X}, d)$  es un espacio métrico completo, entonces existe  $x_0 \in \mathbf{X}$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^{\circ n}(x) = x_0 \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

Además,  $x_0$  es un punto fijo de la dinámica, esto es,  $F(x_0) = x_0$ .

*Demostración.* Véase [1].  $\square$

## DINÁMICA INDUCIDA POR UN SF.

Existen ciertas motivaciones para extender la definición de sistema dinámico discreto a un concepto más general (tal vez el ejemplo más vivo lo constituya la descripción analítica de objetos geométricos autosimilares o fractales). Dicha generalización procura combinar "ponderadamente" los efectos de un número finito de dinámicas discretas definidas en un espacio completo  $\mathbf{X}$ .

DEFINICIÓN(1.2). Un sistema de funciones (SF)  $\{\mathbf{X}; w_i\}$  sobre un espacio métrico completo  $\mathbf{X}$  es un conjunto finito de mapeos contractivos  $w_i : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , con factores de contractividad  $s_1, \dots, s_N$ , respectivamente. A  $s \equiv \max\{s_1, \dots, s_N\}$  se le denomina *factor de contractividad del sistema de funciones*  $\{\mathbf{X}; w_i\}$ .

Todo sistema de funciones  $\{\mathbf{X}, w_i\}$  induce de manera natural una dinámica en  $2^{\mathbf{X}}$  (y no en  $\mathbf{X}$ , si  $i > 1$ ), donde la órbita de un subconjunto  $A$  de  $\mathbf{X}$  queda determinada por la iteración de  $\mathcal{W} : 2^{\mathbf{X}} \rightarrow 2^{\mathbf{X}}$ , la cual se define por

$$\mathcal{W}(A) \equiv \bigcup_{i=1}^N w_i(A).$$

La Proposición 1.2 da cuenta de cualquier dinámica inducida por un mapeo  $F$  contractivo en un espacio métrico completo  $\mathbf{X}$ : toda órbita, vista como sucesión en  $\mathbf{X}$  converge a un único  $x_o \in \mathbf{X}$ . Surge naturalmente la pregunta de si existen dinámicas inducidas por sistemas de funciones y que presenten propiedades similares. La respuesta a esto es sí, al menos parcialmente. La dificultad se centra, en un principio, en el hecho de que para que tales conceptos tomen sentido en  $2^{\mathbf{X}}$ , es necesario proponer una métrica en tal espacio (por demás con suficiente coherencia e interés), que además induzca en éste la propiedad de completez. Existen resultados bien conocidos en tal dirección [1]; a continuación presentamos un breve recuento de los hechos más relevantes para nuestro trabajo posterior.

PROPOSICIÓN(1.3). Sea  $(\mathbf{X}, d)$  un espacio métrico completo, y  $\{(\mathbf{X}, d), w_i\}$  un sistema de funciones sobre  $\mathbf{X}$ , con factor de contractividad  $s$ , y  $\mathcal{W} : 2^{\mathbf{X}} \rightarrow 2^{\mathbf{X}}$  la dinámica inducida. Denótese por  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$  al conjunto de los subconjuntos compactos de  $\mathbf{X}$ . Defínase la *distancia dirigida de Hausdorff*  $h : (\mathcal{H}(\mathbf{X}), \mathcal{H}(\mathbf{X})) \rightarrow \mathbf{R}$  por

$$h(A, B) \equiv \max\{d(a, B) : a \in A\}.$$

Se cumplen los siguientes hechos:

i) La función  $d_H : (\mathcal{H}(\mathbf{X}), \mathcal{H}(\mathbf{X})) \rightarrow \mathbf{R}$  definida por

$$d_H(A, B) \equiv \max\{h(A, B), h(B, A)\}$$

es una métrica.

ii)  $(\mathcal{H}(\mathbf{X}), d_H)$  es un espacio métrico completo (a  $d_H$  se le conoce comunmente como la métrica de Hausdorff).

iii)  $\mathcal{W}|_{\mathcal{H}(\mathbf{X})}$  es contractiva (equipando a  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$  con la métrica de Hausdorff), con factor de contractividad  $s$  (evidentemente,  $\mathcal{W}|_{\mathcal{H}(\mathbf{X})}: \mathcal{H}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbf{X})$ ).

*Demostración.* Véase [1]. □

Los resultados resumidos en la proposición anterior constituyen una base sólida para el estudio de los fractales deterministas. De hecho, puede decirse que un fractal determinista es un atractor (o punto fijo) de una dinámica inducida por un SF en un espacio métrico completo, a partir del mapeo  $\mathcal{W}|_{\mathcal{H}(\mathbf{X})}$ . En lo subsecuente dirigiremos nuestra atención a la restricción de  $\mathcal{W}$  a  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$ , por lo que omitiremos toda alusión explícita, sobreentendiendo que el dominio de  $\mathcal{W}$  es  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$ .

## DINÁMICA EN $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ : EL MAPEO DE MARKOV.

Para el caso en que  $\mathbf{X}$  es un espacio métrico compacto, existe una manera de visualizar la evolución  $\mathcal{W}: \mathcal{H}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbf{X})$  inducida por un SF, que involucra una familia de dinámicas en el espacio de las medidas normalizadas de Borel de  $\mathbf{X}$ . A continuación presentaremos la notación asociada a estos conceptos y que será extensamente utilizada en este trabajo.

Si  $(\mathbf{X}, d)$  es un espacio métrico compacto, denotaremos por  $\mathcal{B}(\mathbf{X})$  a la familia de los conjuntos de Borel de  $\mathbf{X}$ , y por  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$  al conjunto de las medidas normalizadas de Borel sobre  $\mathbf{X}$ . Una *combinación convexa no-nula*  $C_{p_1, \dots, p_N}(\nu_1, \dots, \nu_N)$  de un conjunto de medidas  $\{\nu_i\}_{i=1, \dots, N}$  es la medida  $\mu$  definida por

$$\mu \equiv \sum_{i=1}^N p_i \nu_i,$$

asumiendo que se satisfacen las condiciones  $0 < p_i \leq 1$ ,  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ .

La función  $d_U: (\mathcal{P}(\mathbf{X}), \mathcal{P}(\mathbf{X})) \rightarrow \mathbf{R}$  definida por

$$d_U(\mu, \nu) \equiv \sup_{f \in \mathcal{F}} \left\{ \left| \int d\mu f - \int d\nu f \right| \right\}$$

donde  $\mathcal{F} \equiv \{f: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R} \text{ tal que } |f(x) - f(y)| \leq d(x, y) \forall x, y \in \mathbf{X}\}$  resulta ser una métrica en  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ , la *métrica de Hutchinson* (V.[2]);  $(\mathcal{P}(\mathbf{X}), d_U)$  es un espacio métrico completo.

Siempre que se tiene involucrada una evolución en un espacio métrico cualquiera, resulta de manifiesto interés el conocimiento de la evolución de una

medida  $\mu$  definida en él. En el caso que nos ocupa, el estudio de los sistemas de funciones, la evolución "puntual" asociada al espacio no es más una dinámica determinista, a pesar de lo cual es posible definir sin ambigüedades la dinámica asociada en  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ . La argumentación es la siguiente: sea  $\{\mathbf{X}; w_i\}$  un SF sobre un espacio métrico compacto  $(\mathbf{X}, d)$ , y sea  $\nu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ . Para  $F : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  medible definimos la evolución  $\nu_F$  de  $\nu$  bajo la dinámica inducida por  $F$  por la regla  $\nu \rightarrow \nu_F$  si

$$F : (\mathbf{X}, \mathcal{B}(\mathbf{X}), \nu) \rightarrow (\mathbf{X}, \mathcal{B}(\mathbf{X}), \nu_F)$$

preserva medida (esto es,  $\nu_F = \nu \circ F^{-1}$ ). Por extensión natural a este concepto se define, para un SF  $\{\mathbf{X}; w_i\}$  una evolución  $\nu_{\{w_i\}}$  de una medida  $\nu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$  como cualquier combinación convexa no-nula  $C_{p_1, \dots, p_N}(\nu_{w_1}, \dots, \nu_{w_N})$ . El objetivo principal de que la combinación sea no-nula es que se satisfaga la igualdad

$$\bigcup_{i=1}^N w_i(\text{supp}[\nu]) = \text{supp}[M_{p_1, \dots, p_N}(\nu_{w_1}, \dots, \nu_{w_N})],$$

donde  $\text{supp}[\nu]$  denota el soporte de la medida  $\nu$ . Al operador  $M_{p_1, \dots, p_N}$  definido por

$$M_{p_1, \dots, p_N}(\nu) \equiv C_{p_1, \dots, p_N}(\nu_{w_1}, \dots, \nu_{w_N}),$$

que como se ha visto describe la evolución en  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ , se le denomina *mapeo de Markov con parámetros*  $p_1, \dots, p_N$ . Como se ha definido, la evolución en  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$  asociada a un SF contiene  $N$  parámetros libres; de este modo la dinámica inducida por el SF en  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$  no queda únicamente especificada por él mismo, sino que es posible elegir entre un conjunto de parámetros y aún así obtener para cada caso una evolución coherente. Existe, de hecho, una interpretación de esta libertad en la elección del operador de evolución  $M$  en términos de dinámica probabilista; para este fin, véase el excelente libro de Barnsley [1].

Un hecho importante para el estudio de la evolución en  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$  inducida por un SF, cuando  $\mathbf{X}$  es un espacio compacto, es el siguiente:

PROPOSICIÓN(1.4). Sea  $\{\mathbf{X}, w_i\}$  un sistema de funciones sobre un espacio métrico compacto  $\mathbf{X}$ , con factor de contractividad  $s < 1$ , y  $M_{p_1, \dots, p_N} : \mathcal{P}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{X})$  un mapeo de Markov asociado:

$$M_{p_1, \dots, p_N} \nu \equiv \sum_{i=1}^N p_i \nu \circ w_i^{-1}$$

Entonces  $M_{p_1, \dots, p_N}$  es contractivo en la métrica de Hutchinson, con factor de contractividad  $s$ .

*Demostración.* Véase [1]. □

El enunciado anterior, utilizando la Proposición 1.2, nos asegura que la dinámica en  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$  inducida por un SF es sumamente simple: existe  $\mu_I \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$



tal que, independientemente de la medida inicial  $\mu$  que elijamos, invariablemente  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{p_1, \dots, p_N}^{\circ n}(\mu) = \mu_I$ , donde  $\mu_I$  es además el único elemento de  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$  que satisface la ecuación  $M_{p_1, \dots, p_N}(\mu_I) = \mu_I$ . Por razones evidentes, a tal  $\mu_I$  se le denomina *medida invariante* del SF  $\{(\mathbf{X}, d); w_i\}_{i=1, \dots, N}$  con parámetros  $\{p_i\}_{i=1, \dots, N}$ .

## CAPITULO II

### Operador de Markov para un Espacio con Ruido.

#### INTRODUCCIÓN.

Los conceptos desarrollados en el capítulo anterior describen la dinámica asociada a un sistema de funciones que actúa sobre un espacio compacto  $\mathbf{X}$ . Nuestro propósito en este capítulo es estudiar el tipo de evolución inducida por un SF cuando el espacio subyacente es aún un espacio compacto, pero en el cual existe cierto tipo de inestabilidad interna, que se presenta independientemente de cualquier dinámica involucrada en  $\mathbf{X}$ . El concepto intuitivo de tal inestabilidad se asocia con el de "ruido", que sugiere algún tipo de incertidumbre en los procesos de evolución del espacio en cuestión.

#### ESPACIOS CON RUIDO.

Dado que nuestro interés se centra en la descripción de la dinámica inducida por sistemas de funciones que actúan a tiempo discreto *y de forma instantánea*, estaremos interesados únicamente en la evolución "espontánea" del espacio *entre* los pasos de acción del SF en cuestión, que se asumen espaciados por iguales intervalos de tiempo  $\Delta t$ . Para caracterizar el ruido en un espacio de la manera más general, debemos especificar la evolución de cada  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$  a cada tiempo  $t \geq 0$ . Para este fin introducimos un operador  $\mathcal{S}$  en cuya definición se contiene tal información.

DEFINICIÓN(2.1). Un espacio con ruido es una terna  $(\mathbf{X}, d, \mathcal{S})$ , donde  $(\mathbf{X}, d)$  es un espacio métrico y  $\mathcal{S}$  es un mapeo  $\mathcal{S} : (\mathcal{P}(\mathbf{X}) \times [0, \infty)) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{X})$ .

De esta manera,  $\mathcal{S}(\mu, t_0)$  es aquella medida a la que evoluciona la medida  $\mu$  después de un tiempo  $t_0$ , debida tal evolución exclusivamente a que el espacio subyacente es un espacio con ruido (evidentemente, en un espacio métrico sin ruido  $\mathcal{S}(\mu, t) = \mu \forall \mu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ ) y toda  $t$ . De acuerdo con los comentarios hechos antes de la definición, únicamente nos concierne, para el estudio de SF's en un espacio con ruido la restricción de  $\mathcal{S}$  a  $\mathcal{P}(\mathbf{X}) \times (\mathbf{N} \cdot \Delta t)$  donde  $\mathbf{N}$  denota el conjunto de los enteros no-negativos. Para simplificar la notación, reescalamos  $t$  para hacer  $\Delta t = 1$ , de modo que nuestro interés se restringe a  $\mathcal{S} |_{\mathcal{P}(\mathbf{X}) \times \mathbf{N}}$  (que denotaremos por  $\mathcal{S}_{\mathbf{N}} : \mathcal{P}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{X})$ ). Si asumimos que el ruido en el espacio es determinista, esto es, que  $\mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{S}_{n+m} \forall n, m \in \mathbf{N}$ , entonces el conocimiento de  $\mathcal{S}_1$  bastará para nuestros propósitos.

## OPERADOR DE MARKOV CON RUIDO.

Podemos entonces resumir que el problema de un SF en un espacio con ruido se reduce a la descripción de la evolución conjugada de la acción del SF en pasos discretos de tiempo y una dinámica interna que se lleva a cabo entre la acción del SF, y descrita por un mapeo  $\mathcal{S} : \mathcal{P}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{X})$ . Con estos elementos, concluimos que la evolución de un SF en un espacio con ruido se describe así:

Existe un operador  $\mathcal{R} : \mathcal{P}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{X})$  que describe la evolución del sistema a tiempos discretos ( $t = 0, t = 1, \dots, t = n, \dots$ ). La forma funcional de  $\mathcal{R}$  viene dada por

$$\mathcal{R}\nu = \mathcal{S} \circ M_{p_1, \dots, p_N} \nu,$$

si  $\nu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ , donde  $M_{p_1, \dots, p_N}$  es un operador de Markov. De este modo, los parámetros del operador de Markov involucrado determinan asimismo la acción de  $\mathcal{R}$ , por lo que escribiremos  $\mathcal{R}_{p_1, \dots, p_N}$  para el operador  $\mathcal{R}$  inducido por los parámetros  $\{p_i\}_{i=1, \dots, N}$ . A  $\mathcal{R}_{p_1, \dots, p_N}$  le llamaremos el *operador de Markov con ruido con parámetros*  $\{p_i\}_{i=1, \dots, N}$ .

Es clara la razón de tal nombre para  $\mathcal{R}_{p_1, \dots, p_N}$ : describe la evolución en  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$  inducida por un SF  $\{\mathbf{X}; w_i\}$  cuando  $\mathbf{X}$  es un espacio con ruido. Evidentemente, para el caso en el que  $\mathbf{X}$  es un espacio sin ruido,  $\mathcal{R}_{p_1, \dots, p_N} = M_{p_1, \dots, p_N}$ .

Para realizar cualquier análisis sobre  $\mathcal{R}_{p_1, \dots, p_N}$ , es necesario conocer explícitamente la forma funcional de  $\mathcal{S}$ . Existe, sin embargo, un caso en el cual no es necesario tal conocimiento exhaustivo de  $\mathcal{S}$ . Se presenta cuando  $\mathcal{S}$  exhibe propiedades "deseables" (por demás, bastante razonables). Intuitivamente, esperaríamos que si  $\{\mu_i\}_{i=1, \dots, I}$  es una familia de elementos de  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ , para cualquier combinación conexa  $C_{p_1, \dots, p_N}(\mu_1, \dots, \mu_N)$  se cumpliera la relación

$$\mathcal{S}(C_{p_1, \dots, p_N}(\mu_1, \dots, \mu_N)) = \sum_{i=1}^N p_i \cdot \mathcal{S}\mu_i. \quad (I)$$

Por razones evidentes, a la propiedad (I) le llamaremos *propiedad de linealidad* para mapeos  $\mathcal{S}$ ; si  $\mathcal{S}$  satisface (I) diremos que se trata de un *ruido aditivo*. Aunque esta propiedad puede parecer evidente, debemos recordar que  $\mathcal{S}$  es en principio arbitrario, por lo que la linealidad no es sino una propiedad especial que solo algunos (los "coherentes") mapeos  $\mathcal{S}$  poseen. Además de pedir que  $\mathcal{S}$  sea lineal, debemos incluir una propiedad adicional para simplificar el estudio de  $\mathcal{S}$ . Esta cualidad es la *continuidad*: aunque pueda también parecer razonable que medidas cercanas evolucionen a tiempos finitos a medidas también cercanas, evidentemente tampoco es esto una propiedad que cualquier función en  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$  posee. Podemos considerar entonces que el ruido en el espacio no es de naturaleza caprichosa. Por supuesto, para apelar a la noción de continuidad debemos equipar a  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$  con alguna topología; para este fin elegimos la topología débil  $\mathcal{W}(\mathbf{X})$  [4]. Escribimos entonces explícitamente la propiedad de continuidad para  $\mathcal{S}$ .

$$\mathcal{S} : \mathcal{P}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{X}) \text{ es continua.} \quad (II)$$

Supongamos ahora que  $(\mathbf{X}, d, \mathcal{S})$  es un espacio con ruido, donde  $\mathcal{S}$  satisface las propiedades de linealidad y continuidad. El siguiente teorema nos dice que bajo tales condiciones podemos conocer todo  $\mathcal{S}$  a partir de  $\mathcal{S}|_{\Delta(\mathbf{X})}$ , donde  $\Delta(\mathbf{X}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{X})$  denota el conjunto de las medidas  $\delta$  definidas sobre  $\mathcal{B}(\mathbf{X})$ .

**TEOREMA(2.1).** Sea  $(\mathbf{X}, d, \mathcal{S})$  un espacio con ruido tal que  $\mathcal{S}$  es lineal y continua. Sea  $\nu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ . Defínase  $N : \mathbf{X} \times \mathcal{B}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{R}$  por  $N(x, B) \equiv [\mathcal{S}\delta_x](B)$ , y supóngase que  $N(\cdot, B) : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}$  es medible para todo  $B \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$ . Sea  $\nu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ . Entonces

$$\mathcal{S}\nu(A) = \int d\nu(x)N(x, A)$$

para todo  $A \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$ .

*Demostración.* Sea  $A \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$ . Sabemos [3] que podemos construir una secuencia  $\{N_n\}$  de funciones simples  $N_n : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}$  con las propiedades de que  $N_n(x) \rightarrow N(x, A)$  para toda  $x$  y  $N_n \leq N_{n+1} \leq N(\cdot, A)$ . Sea  $N_n \equiv \sum_i c_{in} \chi_{E_{in}}$ , con  $E_{jn} \cap E_{kn}$  vacío si  $j \neq k$ . Por otra parte, para cada  $n \in \mathbf{N}$ , sea  $\{B_{mn}\}$  una partición de diámetro menor a  $1/n$ . Esto es,  $\bigcup_m B_{mn} = \mathbf{X}$ ,  $B_{in} \cap B_{jn}$  es vacía si  $i \neq j$  y  $\text{diam}(B_{i,n}) < 1/n \forall i$ . Formamos, para cada  $n$ , la partición  $\mathcal{A} = \{A_{mn}\}$ , donde los conjuntos  $A_{mn}$  son las intersecciones de los  $B_{mn}$  con los  $E_{mn}$ . Elíjase, para cada  $A_{mn}$ , un  $x_{mn} \in A_{mn}$  con la propiedad de que  $N(x_{mn}, A) - \inf\{N(x, A) : x \in A_{mn}\} < 1/n$  (es claro que tal  $x_{mn}$  debe existir). A partir de nuestra construcción podemos concluir que la secuencia de funciones simples  $\{N'_n\}$  converge a  $N(\cdot, A)$ , donde  $N'_n : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}$  se define por

$$N'_n(x) \equiv \sum_m N(x_{mn}, A) \chi_{A_{mn}}(x).$$

Por otra parte, sea  $\nu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ . La secuencia de medidas  $\{\nu_n\}$ , con

$$\nu_n \equiv \sum_m \nu(A_{mn}) \delta_{x_{mn}},$$

converge débilmente a  $\nu$  ( $\nu_n \rightarrow \nu$ ). Para probarlo, sea  $f \in \mathcal{C}(\mathbf{X})$ , donde  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$  denota el conjunto de las funciones continuas con valores reales definidas sobre  $\mathbf{X}$ . Se cumple que

$$\int f d\nu_n = \sum_m \nu(A_{mn})f(x_{mn}),$$

a partir de lo cual es inmediato que  $\int f d\nu_n \rightarrow \int f d\nu \forall f \in \mathcal{C}(\mathbf{X})$ , y así  $\nu_n \rightarrow \nu$ . Como  $\mathcal{S}$  es continua,  $\mathcal{S}\nu_n \rightarrow \mathcal{S}\nu$ , de donde  $\sum_m N(x_{mn}, A)\nu(A_{mn}) \rightarrow \mathcal{S}\nu(A) \forall A \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$ . Como  $\{N'_n\}$  converge puntualmente a  $N(\cdot, A)$  y se encuentra acotada por la función constante unidad, la aplicación del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue nos asegura que  $\int d\nu N'_n \rightarrow \int d\nu(x)N(x, A)$ . Finalmente, notando que  $\sum_m N(x_{mn}, A)\nu(A_{mn}) = \int d\nu N'_n$  para cada  $n$ , concluimos de inmediato que  $\int d\nu(x)N(x, A) = \mathcal{S}\nu(A)$ .  $\square$

La importancia del teorema anterior es enorme: nos da la evolución bajo  $\mathcal{S}$  de cualquier elemento de  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ , siempre y cuando  $\mathcal{S}$  cumpla las condiciones estipuladas de linealidad y continuidad. La utilidad de este hecho es que nos permite analizar con cierta comodidad la evolución inducida por un  $SF$  en un espacio con ruido, nos permite referir  $\mathcal{S}$  a  $N : \mathbf{X} \times \mathcal{B}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{R}$ , puesto que este último mapeo determina  $\mathcal{S}$  en su totalidad. Como decíamos anteriormente, si  $\mathcal{S}$  es arbitrario (tal vez, inclusive, sin cumplir (I) y (II)), para estudiar la evolución  $\mathcal{R}$  es necesario conocer la forma explícita de  $\mathcal{R}$  en su totalidad, pudiendo volver el análisis imposible para todos los fines prácticos. Es entonces únicamente cuando la acción de  $\mathcal{S}$  fuese espresable en una forma funcional cerrada que sería posible describir la evolución. Evidentemente, es necesario demostrar que  $\mathcal{S}$  está bien definida, en el sentido de que  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$  es cerrado bajo la acción del ruido. Este es el objetivo de la siguiente proposición.

**PROPOSICIÓN(2.1).** Sea  $(\mathbf{X}, d)$  un espacio métrico compacto. Sea  $N : \mathbf{X} \times \mathcal{B}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{R}$  tal que para toda  $x \in \mathbf{X}$ ,  $N(x, \cdot) \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$  y  $N(\cdot, A)$  es medible para todo  $A \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$ . Para  $\nu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$  definimos la función de conjuntos  $\mathcal{S}\nu : \mathcal{B}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{R}$  por la regla

$$\mathcal{S}\nu(A) \equiv \int d\nu(x)N(x, A).$$

Entonces  $\mathcal{S}\nu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ .

*Demostración.*  $\mathcal{S}\nu : \mathcal{B}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{R}$  está bien definida por la medibilidad de  $N(\cdot, A)$ . Supóngase que  $A = \mathbf{X}$ . Dado que  $N(x, \mathbf{X}) = 1 \forall x \in \mathbf{X}$ ,

$$\mathcal{S}\nu(\mathbf{X}) = \int d\nu(x)1 = 1. \quad (1)$$

Sea ahora  $\{E_i\}$  una colección numerable donde  $E_i \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$  con la propiedad de que  $E_i \cap E_j$  es vacía si  $i \neq j$ . Es claro que  $N(x, \bigcup_i E_i) = \sum_i N(x, E_i)$ . De aquí,

$$\mathcal{S}\nu(\bigcup_i E_i) = \int d\nu(x)N(x, \bigcup_i E_i) = \int d\nu(x) \left( \sum_i N(x, E_i) \right)$$

Debido a que  $N(\cdot, E_i)$  es medible, tenemos la igualdad (V.[4])

$$\int d\nu(x) \left( \sum_i N(x, E_i) \right) = \sum_i \int d\nu(x) N(x, E_i).$$

Con estas últimas dos ecuaciones podemos concluir que

$$\mathcal{S}\nu \left( \bigcup_i E_i \right) = \sum_i \int d\nu(x) N(x, E_i) = \sum_i \mathcal{S}\nu(E_i) \quad (2)$$

Por (1) y (2) queda demostrado que  $\mathcal{S}\nu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ . □

De ahora en adelante, al referirnos a un espacio con ruido  $(\mathbf{X}, d, \mathcal{S})$  asumiremos que  $\mathcal{S}$  es generada a través de  $\mathcal{S} |_{\Delta(\mathbf{X})}$  en el sentido del teorema 1, de modo que la forma funcional de  $\mathcal{S}$  es conocida a partir de la de  $N$ . Por la misma razón denotaremos indistintamente a tal espacio con ruido por  $(\mathbf{X}, d, \mathcal{S})$  o por  $(\mathbf{X}, d, N)$ .

Con estos elementos en claro, volvemos al operador  $\mathcal{R}_{p_1, \dots, p_N}$ , que describe la evolución para un sistema compuesto por un espacio con ruido  $(\mathbf{X}, d, \mathcal{S})$  y un SF definido sobre él, a tiempos discretos. Como habíamos explicado, su forma funcional es

$$\mathcal{R}_{p_1, \dots, p_N} \nu = \mathcal{S} \circ M_{p_1, \dots, p_N} \nu,$$

para  $\nu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$  y parámetros  $\{p_i\}_{i=1, \dots, N}$ . A partir de la forma funcional que hemos hallado para  $\mathcal{S}$ , vemos que podemos escribir

$$\mathcal{R}_{p_1, \dots, p_N} \nu(A) = \int d[M_{p_1, \dots, p_N} \nu](x) N(x, A)$$

La feroz apariencia de esta última expresión se suaviza haciendo uso de la siguiente proposición.

**PROPOSICIÓN(2.2).** Sea  $M_{p_1, \dots, p_N} : \mathcal{P}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{X})$  un Mapeo de Markov en un espacio métrico compacto  $\mathbf{X}$ . Sea  $\nu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ , arbitraria. Entonces, para cualquier función  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}$  medible se cumple la igualdad

$$\int d[M_{p_1, \dots, p_N} \nu] f = \sum_{i=1}^N p_i \int d\nu f \circ w_i,$$

donde  $w_i : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  denota la  $i$ -ésima función del SF  $\{\mathbf{X}; w_i\}$  asociado al operador  $M_{p_1, \dots, p_N}$ .

*Demostración.* Este resultado es de hecho un corolario del Lema 9.6.1 de [1], en el cual se prueba el enunciado del teorema para  $f$  continua o simple. Para  $f$  medible no-negativa, encuéntrase una sucesión monótona de funciones simples  $\{f_n\}$ ,  $f_n : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}$ , con la propiedad de que  $f_{n+1} \geq f_n \geq 0$  para toda  $n$ , y además

$f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in \mathbf{X}$  (la existencia de tal sucesión está garantizada [3]). Por una parte,

$$\int d [M_{p_1, \dots, p_N} \nu] f_n \rightarrow \int d [M_{p_1, \dots, p_N} \nu] f,$$

mientras que por otro lado

$$\sum_{i=1}^N p_i \int d\nu f_n \circ w_i \rightarrow \sum_{i=1}^N p_i \int d\nu f \circ w_i.$$

Por ser iguales estas sucesiones término a término, se concluye que

$$\int d [M_{p_1, \dots, p_N} \nu] f = \sum_{i=1}^N p_i \int d\nu f \circ w_i,$$

para toda función  $f$  medible no-negativa. La extensión para funciones medibles arbitrarias es trivial.  $\square$

Con la proposición anterior, el operador de Markov con ruido, que describe la evolución en  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$  inducida por un SF  $\{\mathbf{X}; w_i\}_{i=1, \dots, N}$  en un espacio con ruido  $(\mathbf{X}, d, \mathcal{S})$  toma la siguiente forma:

$$\mathcal{R}_{p_1, \dots, p_N} \nu(A) = \sum_{i=1}^N p_i \int d\nu(x) N(w_i(x), A),$$

para  $\nu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$  y  $A \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$ .

## CONDICIONES PARA LA CONTRACTIVIDAD DE $\mathcal{R}_{p_1, \dots, p_N}$ .

A una medida  $\nu$  que satisfaga la ecuación  $\mathcal{R}_{p_1, \dots, p_N} \nu = \nu$  le llamaremos *medida invariante* del sistema dinámico  $\{\mathbf{X}; w_i\}_{i=1, \dots, N}$  en el espacio con ruido  $(\mathbf{X}, d, \mathcal{S})$  con parámetros  $\{p_i\}$ . El interés de una tal  $\nu$  es manifiesto a partir del hecho de que la propiedad de invariancia ante  $\mathcal{R}_{p_1, \dots, p_N}$  nos dice mucho acerca de la evolución involucrada. Existe un caso (en analogía a los sistemas sin ruido) en el cual la existencia de una única medida invariante se encuentra garantizada, a saber, cuando  $\mathcal{R}_{p_1, \dots, p_N}$  resulta contractivo en alguna métrica sobre  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ . Apegándonos al trabajo realizado en esta dirección [1], utilizaremos la métrica de Hutchinson  $d_U$ , definida en el capítulo anterior. El siguiente resultado es un teorema sobre cambio de variables; resultará sumamente útil para nuestro trabajo posterior.

**TEOREMA(2.2).** Sea  $(\mathbf{X}, d)$  un espacio métrico compacto, y  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}$  continua. Sea  $N$  un mapeo  $N : \mathbf{X} \times \mathcal{B}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{R}$  tal que para todo  $x \in \mathbf{X}$   $N(x, \cdot) \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ , y

además para todo  $A \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$   $N(\cdot, A) : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}$  es medible. Para  $\nu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$  defínase  $\nu_N$  por la regla

$$\nu_N(A) \equiv \int d\nu(x)N(x, A).$$

Entonces se cumple que

$$\int d\nu_N f = \int d\nu(x) \left[ \int N(x, dy) f(y) \right].$$

*Demostración.* Primero supóngase que  $f \geq 0$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Existe una secuencia  $\{f_n\}$  de funciones medibles (de hecho, simples)  $f_n : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}$  que satisfacen  $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq f \forall n$ , y además  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  para toda  $x \in \mathbf{X}$ . Por el teorema de convergencia monótona de Lebesgue, para cualquier  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$  se cumple que

$$\int d\mu f_n \rightarrow \int d\mu f.$$

Así, existe  $N_1$  tal que

$$\left| \int d\mu f_n - \int d\mu f \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

para toda  $n \geq N_1$ . Sea  $\mu = \nu_N$ . Entonces, como

$$f_n(x) = \sum_i \chi_{E_{n,i}}(x) c_{n,i},$$

tenemos que

$$\int d\nu_N f_n = \sum_i \nu_N(E_{n,i}) c_{n,i},$$

y como  $\nu_N(A) = \int d\nu(x)N(x, A)$ ,

$$\int d\nu_N f_n = \sum_i c_{n,i} \int d\nu(x)N(x, E_{n,i}).$$

A partir de esto último,

$$\left| \int d\nu_N f - \sum_i c_{n,i} \int d\nu(x)N(x, E_{n,i}) \right| < \frac{\epsilon}{2}, \forall n \geq N_1 \quad (3)$$

Por otra parte, para cada  $x \in \mathbf{X}$  se tiene que

$$\int f_n(y)N(x, dy) \rightarrow \int f(y)N(x, dy).$$



Además, como  $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq f$ , se tiene  $\forall x \in \mathbf{X}$  que

$$\int f_n(y)N(x, dy) \leq \int f_{n+1}(y)N(x, dy).$$

Evidentemente, para toda  $n$ ,  $\int f_n(y)N(\cdot, dy) : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}$  es medible, de donde concluimos que

$$\int d\nu(x) \left[ \int f_n(y)N(x, dy) \right] \rightarrow \int d\nu(x) \left[ \int f(y)N(x, dy) \right].$$

De aquí, existe  $N_2$  tal que

$$\left| \int d\nu(x) \left[ \int f_n(y)N(x, dy) \right] - \int d\nu(x) \left[ \int f(y)N(x, dy) \right] \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

$\forall n \geq N_2$ . Sea  $N \equiv \max\{N_1, N_2\}$ . A partir de la expresión anterior, y de la forma explícita de  $f_N$ , obtenemos que

$$\left| \sum_i f(x_{N,i}) \int d\nu(x)N(x, E_{N,i}) - \int d\nu(x) \left[ \int f(y)N(x, dy) \right] \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por otra parte, de (3) obtenemos, dado que  $N \geq N_1$ ,

$$\left| \int d\nu_N f - \sum_i c_{N,i} \int d\nu(x)N(x, E_{N,i}) \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

De estas últimas expresiones obtenemos la desigualdad

$$\left| \int d\nu(x) \left[ \int f(y)N(x, dy) \right] - \int d\nu_N f \right| < \epsilon.$$

Como  $\epsilon$  era arbitrario, de aquí resulta que

$$\int d\nu(x) \left[ \int f(y)N(x, dy) \right] = \int d\nu_N f$$

para toda  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}$  continua,  $f \geq 0$ . La extensión de la prueba para  $f$  continua arbitraria es muy simple:  $f$  puede escribirse como  $f = g - K$ , donde  $g \geq 0$  es una función continua y  $K$  es una función constante no-negativa. El teorema vale para  $g$  y para  $K$ , y por tanto evidentemente para  $g - K = f$ . Queda así concluida la demostración.  $\square$

Para apreciar la conexión de este resultado con las condiciones de contractividad para  $\mathcal{R}_{p_1, \dots, p_N}$ , primero nótese que podemos escribir la evolución como

$$\mathcal{R}_{p_1, \dots, p_N} \nu(A) = \sum_{i=1}^N p_i \int d\nu(x) N_{w_i}(x, A) \quad (4)$$

donde  $N_{w_i} : \mathbf{X} \times \mathcal{B}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{R}$  se define por  $N_{w_i}(x, A) \equiv N(w_i(x), A)$ . Evidentemente  $N_{w_i}(\cdot, A) : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}$  es medible para todo conjunto de Borel  $A$  y  $N_{w_i}(x, \cdot)$  pertenece a  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$  para todo  $x \in \mathbf{X}$ , de manera que  $N_{w_i}$  es por sí mismo un mapeo "válido" para inducir un espacio con ruido, y es susceptible de aplicarse al teorema anterior. El siguiente teorema utiliza este hecho para dar condiciones suficientes bajo las cuales un mapeo de Markov con ruido es contractivo en  $(\mathcal{P}(\mathbf{X}), d_U)$ .

**TEOREMA(2.3).** Sea  $\mathcal{R}_{p_1, \dots, p_N}$  un operador de Markov con ruido inducido por un  $SF$  con factor de contractividad  $s$  en un espacio con ruido  $(\mathbf{X}, d, \mathcal{S})$ ,  $\mathcal{S}$  a su vez inducido por una función  $N : \mathbf{X} \times \mathcal{B}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{R}$ , con parámetros  $\{p_i\}$ . Supóngase que  $N$  es tal que

$$\left| \int f(z)N(x, dz) - \int f(z)N(y, dz) \right| \leq d(x, y)$$

para  $x, y \in \mathcal{W}(\mathbf{X})$ ,  $\forall f \in \mathcal{F} \equiv \{f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R} : |f(x) - f(y)| \leq d(x, y) \forall x, y \in \mathbf{X}\}$ . Entonces  $\mathcal{R}_{p_1, \dots, p_N} : (\mathcal{P}(\mathbf{X}), d_U) \rightarrow (\mathcal{P}(\mathbf{X}), d_U)$  es contractiva, con factor de contractividad  $s$ .

*Demostración.* Denotaremos a  $\mathcal{R}_{p_1, \dots, p_N}$  simplemente por  $\mathcal{R}$ . Sean  $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ , arbitrarias.  $d_U(\mathcal{R}\mu, \mathcal{R}\nu) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \{ |\int d\mathcal{R}\mu f - \int d\mathcal{R}\nu f| \}$ , y a partir de (4) tenemos

$$\begin{aligned} d_U(\mathcal{R}\mu, \mathcal{R}\nu) &= \sup_{f \in \mathcal{F}} \left\{ \left| \sum_{i=1}^N p_i \left( \int d\mu F_i - \int d\nu F_i \right) \right| \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^N p_i \sup_{f \in \mathcal{F}} \left\{ \left| \int d\mu F_i - \int d\nu F_i \right| \right\} \\ &= s \cdot \sum_{i=1}^N p_i \sup_{f \in \mathcal{F}} \left\{ \left| \int d\mu \frac{1}{s} F_i - \int d\nu \frac{1}{s} F_i \right| \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

donde  $F_i : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}$  se define por  $F_i(x) \equiv \int N_{w_i}(x, dz)f(z)$ . Utilizando las hipótesis del teorema, para toda  $f \in \mathcal{F}$ , y para toda  $i$ ,

$$\left| \frac{1}{s} \int N_{w_i}(x, dz)f(z) - \frac{1}{s} \int N_{w_i}(y, dz)f(z) \right| \leq \frac{1}{s} d(w_i(x), w_i(y)) \leq \frac{1}{s} \cdot s d(x, y),$$

de manera que  $\frac{1}{s}F_i \in \mathcal{F}$  para toda  $i = 1, \dots, N$  y toda  $f \in \mathcal{F}$ . Utilizando la desigualdad (5), a partir de este hecho es evidente que

$$d_U(\mathcal{R}\mu, \mathcal{R}\nu) \leq s \cdot \sum_{i=1}^N p_i d_U(\mu, \nu) = s \cdot d_U(\mu, \nu).$$

□

Es importante señalar que en el teorema anterior únicamente se pide que se satisfaga la condición para  $x, y \in \mathcal{W}(\mathbf{X})$ , pues es todo lo que se necesita para garantizar su conclusión. Por esta razón, en adelante nos limitaremos exclusivamente a considerar mapeos  $N : \mathcal{W}(\mathbf{X}) \times \mathcal{B}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{R}$ . Debido a que  $(\mathcal{P}(\mathbf{X}), d_U)$  es un espacio métrico completo, aplicando la Proposición 1.2 encontramos que las condiciones del teorema anterior garantizan la existencia de una única medida invariante al mapeo de Markov con ruido  $\mathcal{R}_{p_1, \dots, p_N}$ .

## CAPITULO III

### Ruido en $\mathbf{x} = [A, B]$ .

#### INTRODUCCIÓN.

En este capítulo nos disponemos a explorar la clase de ruidos que satisfacen las condiciones de suficiencia enunciadas en el Teorema 2.3 para el caso en que  $\mathbf{X}$  es un intervalo cerrado  $[A, B]$ . Como quedó establecido, tales restricciones conciernen únicamente al espacio con ruido  $(\mathbf{X}, d, N)$  involucrado, y específicamente a ciertas propiedades del mapeo  $N$ . El principal resultado que demostraremos es que existe una amplia gama de posibilidades de elección para  $N$  que inducen un mapeo de Markov con ruido  $\mathcal{R}_{p_1, \dots, p_N}$  contractivo (evidentemente para cualquier conjunto  $\{p_i\}$  de parámetros). Llegaremos a esta conclusión en base al análisis de mapeos  $N$  en ciertos ejemplos específicos.

#### PROPIEDADES DE MEDIBILIDAD Y NO-EXPANSIVIDAD PARA MAPEOS $N$ .

A partir de los resultados obtenidos hasta ahora, comprendemos que la dificultad para establecer si un mapeo  $N$  induce un mapeo de Markov con ruido contractivo radica principalmente en la satisfacción de la condición especial para  $N$  mencionada en la hipótesis del Teorema 2.3. Existe, sin embargo una condición preliminar para  $N$  que no debe pasarse por alto:  $N(\cdot, C) : \mathcal{W}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{R}$  debe ser una función medible para *cualquier*  $C \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$ . En el caso que actualmente nos interesa,  $\mathbf{X} = [A, B]$ , existe un resultado que nos garantiza que basta probar que  $N(\cdot, C)$  es medible para *ciertos* subconjuntos  $C$  de  $[A, B]$ .

Supongamos que para cualquier subintervalo (cerrado o abierto)  $C$  de  $[A, B]$  tenemos que  $N(\cdot, C)$  es medible. Entonces  $N(\cdot, D)$  es medible para todos los

elementos  $D$  de la semi-álgebra  $\mathcal{J}$  formada por los subintervalos de  $[A, B]$  de la forma  $[0, b]$  o  $(a, b]$ , y podemos ver fácilmente que esto implica que  $N(\cdot, D)$  es medible para el álgebra  $\mathcal{K}$  generada por  $\mathcal{J}$ , que a su vez genera  $\mathcal{B}([A, B])$ . Es fácil verificar, por otra parte, que la familia de los subconjuntos  $D$  de  $[A, B]$  para los cuales  $N(\cdot, D)$  es medible es una clase monótona. Finalmente, a partir de que  $N(\cdot, D) : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}$  es medible si  $D \in \mathcal{K}$ , queda establecido que la clase de los  $D \in \mathcal{B}([A, B])$  para los cuales  $N(\cdot, D)$  es medible es una clase monótona que contiene a  $\mathcal{K}$ , y por lo tanto a  $\mathcal{B}([A, B])$  (véanse [4] y [6]).

Un corolario inmediato de este hecho es que si  $N(\cdot, C)$  es medible para el caso en que  $C$  es una bola cerrada o abierta, entonces  $N(\cdot, D)$  es medible para todo  $D \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$ . De este modo se reduce notablemente lo que debemos verificar explícitamente para admitir un mapeo  $N$  como una fuente de ruido.

Una vez determinado este hecho, reenunciaremos las características que debe reunir una función  $N : \mathcal{W}(\mathbf{X}) \times \mathcal{B}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{R}$  para que en el espacio con ruido que induce, la dinámica generada por un  $SF \{ \mathbf{X}; w_i \}$  con parámetros  $\{ p_i \}$ , representada por  $\mathcal{R}_{p_1, \dots, p_N}$ , sea tal que  $\mathcal{R}_{p_1, \dots, p_N} : (\mathcal{P}(\mathbf{X}), d_U) \rightarrow (\mathcal{P}(\mathbf{X}), d_U)$  es contractiva. Las denotaremos como "propiedad de medibilidad" y "propiedad de no-expansividad" para mapeos  $N$ .

(I) (*Medibilidad*)  $N(\cdot, C) : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}$  es medible para toda bola  $C$  (cerrada o abierta).

(II) (*No-expansividad*) Se cumple que

$$\left| \int f(z)N(x, dz) - \int f(z)N(y, dz) \right| \leq |x - y|$$

para toda  $f \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$ , y todo par de puntos  $x, y \in \mathcal{W}(\mathbf{X})$ .

A continuación introduciremos una clase de medidas definidas en  $[A, B]$ , cuyas propiedades resultarán cruciales para la construcción de ruidos "adecuados".

## MEDIDAS SIMPLES.

Sea  $[a, b] \subseteq \mathbf{R}$ . Consideremos al espacio medible  $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$  equipado con la siguiente medida:  $\mathcal{L}_{[a,b]}(C) \equiv \mathcal{L} \left( \frac{1}{b-a}C - \frac{a}{b-a} \right)$  para  $C \in \mathcal{B}([a, b])$ , donde  $\mathcal{L}$  denota la medida de Lebesgue sobre  $[0, 1]$ . Evidentemente  $\mathcal{L}_{[a,b]}$  así definida es una medida en  $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$ , la *medida de Lebesgue* sobre  $[a, b]$  (si  $a = b$ , dotaremos de manera natural al espacio  $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$  con la medida  $\delta_a = \delta_b$ ). A una medida  $\mu$  sobre  $[a, b]$  tal que  $\mu = \mathcal{L}_{[c,d]}$  para algún  $[c, d] \subseteq [a, b]$ , le llamaremos *medida simple sobre  $[a, b]$* . Dado que en adelante nos enfocaremos únicamente a un intervalo fijo  $[A, B](= \mathbf{X})$ , consideraremos la totalidad de las medidas simples normalizadas definidas sobre subintervalos  $[a, b]$  de  $[A, B]$ ,  $\mathcal{P}_s(\mathbf{X})$ .

A partir de que  $\mathcal{P}_s(\mathbf{X})$  proporciona el ejemplo más sencillo de medidas definidas sobre  $\mathcal{W}([A, B])$ , resulta natural cuestionar sobre los posibles mapeos  $N : \mathcal{W}(\mathbf{X}) \times \mathcal{B}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{R}$  que inducen  $\mathcal{R}_{p_1, \dots, p_N}$  contractivos, y que sean tales que  $N(x, \cdot) \in \mathcal{P}_s(\mathbf{X})$ . Aunque la propiedad de inducir contractividad en  $\mathcal{R}_{p_1, \dots, p_N}$  es, como se ha visto, sujeto a ciertas características de la forma funcional explícita de  $N$  (propiedades de medibilidad y no-expansividad), es evidente que existen muchísimas formas de definir mapeos  $N$  con  $N(x, \cdot) \in \mathcal{P}_s(\mathbf{X})$ , que como veremos adelante resultarán en muchos casos inductores de contractividad.

Tal vez la familia natural de tales asociaciones sean los mapeos parametrizados  $\mathcal{M}_a$  definidos por la regla

$$\mathcal{M}_a(x) \equiv \mathcal{L}_{[x-a, x+a]},$$

para  $a \leq \mathcal{A} \equiv \min\{d(A, \mathcal{W}(\mathbf{X})), d(B, \mathcal{W}(\mathbf{X}))\}$ . Se verifica que el mapeo  $\mathcal{M}_a$  está bien definido, y veremos posteriormente que induce mapeos  $\mathcal{R}$  contractivos. Existe, de hecho, un amplio espectro de posibilidades para definir asociaciones  $N(x, \cdot) : \mathcal{W}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{P}_s(\mathbf{X})$  válidas, diferentes de los  $\mathcal{M}_a$ , pero con el fin de ver si cumple la propiedad de no-expansividad, necesitamos recurrir a ciertos resultados específicos sobre integrales definidas en espacios con medidas simples. El siguiente teorema está claramente centrado en esa dirección.

**TEOREMA(3.1).** Sean  $[a, b]$  y  $[c, d]$  subintervalos de  $[A, B]$ . Sea  $f \in \mathcal{F}([A, B])$ . Entonces

$$\left| \int d\mathcal{L}_{[a,b]}f - \int d\mathcal{L}_{[c,d]}f \right| \leq \frac{1}{2} |(a+b) - (c+d)|$$

si y solo si ninguno de los intervalos en cuestión está contenido en el interior del otro. Además, si dos intervalos cumplen con esta última condición, no existe  $r_o < \frac{1}{2} |(a+b) - (c+d)|$  tal que

$$\left| \int d\mathcal{L}_{[a,b]}f - \int d\mathcal{L}_{[c,d]}f \right| \leq r_o$$

para toda función  $f \in \mathcal{F}([A, B])$ .

*Demostración.* Ver Apéndice. □

## EJEMPLO 1.

El Teorema 3.1 constituye nuestra herramienta fundamental para la construcción de mapeos  $N$  que satisfagan la propiedad de no-expansividad. Como habíamos mencionado anteriormente, el mapeo parametrizado  $\mathcal{M}_a$  constituye un

ejemplo muy natural de asociación inductora de ruido  $N : \mathcal{W}(\mathbf{X}) \times \mathcal{B}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{R}$ , cuya propiedad esencial puede escribirse

$$\mathcal{M}_a(x, A) = \mathcal{M}_a(x + \tau, A + \tau)$$

para alguna  $\tau$ , siempre que tal expresión tenga sentido. Para este tipo especial de mapeo, tenemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN(3.1). Sea  $\mathcal{M}_a : \mathcal{W}(\mathbf{X}) \times \mathcal{B}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{R}$  un mapeo definido en un espacio métrico compacto con un  $SF \{ \mathbf{X}; w_i \}$ , con forma funcional

$$\mathcal{M}_a(x) \equiv \mathcal{L}_{[x-a, x+a]}.$$

Entonces  $\mathcal{M}_a$  satisface la condición de no-expansividad si  $a \leq \mathcal{A} \equiv \min \{ d(A, \mathcal{W}(\mathbf{X})), d(B, \mathcal{W}(\mathbf{X})) \}$ .

*Demostración.* Este hecho es un corolario fácil del Teorema 3.1. Sean  $x, y \in \mathcal{W}(\mathbf{X})$ . Sea  $f \in \mathcal{F}([A, B])$ .

$$\left| \int f(z) \mathcal{M}_a(x, dz) - \int f(z) \mathcal{M}_a(y, dz) \right| = \left| \int f d\mathcal{L}_{[x-a, x+a]} - \int f d\mathcal{L}_{[y-a, y+a]} \right|$$

$\leq \frac{1}{2} |x - a + x + a - (y - a + y + a)| = |x - y|$ . La condición para  $a$  nos garantiza que el mapeo está bien definido, esto es, que  $\mathcal{M}_a(x, \cdot)$  pertenece a  $\mathcal{P}([A, B])$  para todo  $x \in \mathcal{W}(\mathbf{X})$ .  $\square$

El ruido inducido por  $\mathcal{M}_a$  resulta adecuado cuando queremos modelar una evolución en un espacio con ruido, sin dar a éste una forma funcional que manifieste conocimiento del mecanismo de producción de ruido:  $([A, B], \mathcal{M}_a)$  representa un espacio con un ruido altamente aleatorio (excepto cuando  $a = 0$ , en cuyo caso recuperamos la evolución original sin ruido). A continuación presentamos un ejemplo adicional de mapeo  $N$  que satisface la propiedad de no-expansividad.

## EJEMPLO 2.

Sea  $\{ \mathbf{X}; w_i \}$  un  $SF$  en un espacio métrico compacto. Como se puede verificar fácilmente,  $\mathcal{W}(\mathbf{X}) = \bigcup_{i=1}^M [A_i, B_i]$  para algunos  $A_i, B_i \in [A, B]$  (la representación no es única; requeriremos que ningún par de tales intervalos se intersecte salvo en los extremos). Considérese la función  $\mathcal{Q} : \mathcal{W}(\mathbf{X}) \times \mathcal{B}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{R}$  definida por

$$\mathcal{Q}(x, C) \equiv \begin{cases} \mathcal{L}_{[A_i, 2x-A_i]}(C), & A_i \leq x \leq A_i + B_i/2 \\ \mathcal{L}_{[2x-B_i, B_i]}(C), & A_i + B_i/2 \leq x \leq B_i. \end{cases}$$

Sucede que  $\mathcal{Q}$  también satisface la propiedad de no-expansividad. Para demostrarlo, tomamos  $x, y \in \mathcal{W}(\mathbf{X})$ . En rigor, debe ser demostrada la propiedad para cualesquiera  $x, y$ , pero por razones obvias de espacio nos limitaremos a demostrarlo para  $x, y$  que satisfagan las siguientes desigualdades:  $A_k \leq x \leq A_k + B_k/2$ ,  $A_m \leq y \leq A_m + B_m/2$ . Para tales  $x, y$  tenemos que

$$\left| \int f(z) \mathcal{Q}(x, dz) - \int f(z) \mathcal{Q}(y, dz) \right| = \left| \int f d\mathcal{L}_{[A_k, 2x-A_k]} - \int f d\mathcal{L}_{[2y-B_m, B_m]} \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} |2x - A_k + A_k - (2y - B_m + B_m)| = |x - y|. \text{ Donde hemos utilizado las hipótesis sobre los intervalos involucrados, lo que nos permite aplicar el Teorema 3.1. Queda así demostrado que también en este caso el mapeo } \mathcal{Q} \text{ satisface la no-expansividad.}$$

### EJEMPLO 3.

Los dos ejemplos anteriores dan la pauta para construir múltiples mapeos  $N$  que poseen la propiedad de no-expansividad. Puede, por ejemplo, desearse equipar a nuestro sistema dinámico con un mapeo  $N$  que lo convierta en no-determinista. Los mapeos  $\mathcal{Q}$  pueden, sin embargo, proveer de una dinámica demasiado local para nuestros fines (en el sentido de que se asignan medidas  $\delta$  a los extremos y solo a ellos), y las asociaciones  $\mathcal{M}_a$  pueden a su vez parecer demasiado holgadas (tenemos alguna información adicional de la estructura de la dinámica). En tal caso pueden adecuarse asociaciones  $N$  a nuestra dinámica particular. Por ejemplo, para  $\mathbf{X} = [A, B]$ ,  $\mathcal{W}(\mathbf{X}) = [A_1, B_1] \cup [A_2, B_2]$  con  $A + a = A_1$  ( $a > 0$ ),  $B - B_2 > a$  y  $B_1 + b = A_2$  ( $b > 0$ ), puede resultar adecuado asignar el mapeo  $N$  definido por

$$N(x, C) \equiv \begin{cases} \mathcal{L}_{[x-u(x), x+u(x)]}(C), & A_1 \leq x \leq B_1 \\ \mathcal{L}_{[x-v(x), x+v(x)]}(C), & A_2 \leq x \leq B_2, \end{cases}$$

donde

$$u(x) \equiv \begin{cases} \frac{2q\epsilon}{B_1-A_1}x + \epsilon \left(1 - \frac{2qA_1}{B_1-A_1}\right), & A_1 + B_1/2 \leq x \leq B_1 \\ \frac{2q\epsilon}{A_1-B_1}x + \epsilon \left(1 - \frac{2qB_1}{A_1-B_1}\right), & A_1 + B_1/2 \leq x \leq B_1, \end{cases}$$

y

$$v(x) \equiv \begin{cases} \frac{2p\delta}{B_2-A_2}x + \delta \left(1 - \frac{2pA_2}{B_2-A_2}\right), & A_2 \leq x \leq A_2 + B_2/2 \\ \frac{2p\delta}{A_2-B_2}x + \delta \left(1 - \frac{2pB_2}{A_2-B_2}\right), & A_2 + B_2/2 \leq x \leq B_2. \end{cases}$$

para  $\epsilon/2 \leq a, \epsilon/2 \leq b, \delta/2 \leq a, \delta/2 \leq b, q\epsilon \leq B_1 - A_1/2, p\delta \leq B_2 - A_2/2$ . De hecho, variando los valores de  $q, p, \epsilon$  y  $\delta$ , vemos que estamos trabajando con una



nueva familia multiparametrizada  $N_{\epsilon, \delta}^{q, p}$ . Puede demostrarse que los elementos de la familia  $N_{\epsilon, \delta}^{q, p}$  cumplen con la propiedad de no-expansividad.

El Teorema 3.1 contiene un ingrediente aparentemente superfluo, aunque en realidad es sumamente importante: el establecimiento de en qué casos es falso el enunciado

$$\left| \int d\mathcal{L}_{[a, b]} f - \int d\mathcal{L}_{[c, d]} f \right| \leq \frac{1}{2} |(a + b) - (c + d)| \text{ para toda } f \in \mathcal{F}(\mathbf{X}).$$

La utilidad de esto radica en que nos permite utilizar las conclusiones del Teorema 3.1 para el análisis de mapeos  $N$  propuestos tales que  $N(x, \cdot) \in \mathcal{P}_s(\mathbf{X})$ , asumiendo que se dan en una forma funcional "accesible", susceptible de tal análisis. Este es el criterio utilizado para construir el ejemplo 3, y a partir del cual pueden verificarse sus conclusiones.

## MEDIDAS COMPUESTAS.

Los resultados obtenidos hasta ahora comparten la característica de que las medidas  $N(x, \cdot)$  involucradas en ellos pertenecen a  $\mathcal{P}_s(\mathbf{X})$ . Sin embargo, a partir de los hechos que hemos demostrado para integrales en medidas simples, podemos extender nuestro rango de mapeos  $N$ . En particular, ahora consideraremos asociaciones  $N$  tales que  $N(x, \cdot) \in \mathcal{P}_c(\mathbf{X})$ , donde  $\mathcal{P}_c(\mathbf{X}) \supseteq \mathcal{P}_s(\mathbf{X})$  es la familia de las medidas compuestas de Borel

DEFINICIÓN(3.1). Si  $\{\nu_i\}_{i=1, \dots, M}$  es un conjunto de medidas simples sobre  $\mathbf{X}$ , a una combinación conexa no-nula  $C_{p_1, \dots, p_M}(\nu_1, \dots, \nu_M)$  le llamaremos *medida compuesta*.

A continuación demostraremos una proposición que involucra medidas compuestas, con la motivación de que este resultado nos permitirá extender nuestro estudio al de una familia mucho más general que la de las medidas compuestas.

PROPOSICIÓN(3.2). Sea  $C_{p_1, \dots, p_M}(\nu_1, \dots, \nu_M) = \sum_{i=1}^M p_i \nu_i : \mathcal{B}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{R}$  una medida compuesta. Si la medida  $\sum_{i=1}^M p_i \nu_i \circ K : \mathcal{B}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $[\sum_{i=1}^M p_i \nu_i \circ K](C) \equiv [\sum_{i=1}^M p_i \nu_i](C - K)$  es tal que  $\text{supp} [\sum_{i=1}^M p_i \nu_i \circ K] \subseteq \mathbf{X}$ , entonces

$$\left| \int d[\sum_{i=1}^M p_i \nu_i \circ K] f - \int d[\sum_{i=1}^M p_i \nu_i] f \right| \leq |K|$$

para toda  $f \in \mathcal{F}$ .

*Demostración.* Sea  $f \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$ . Como puede demostrarse fácilmente,

$$\int d[\sum_{i=1}^M p_i \nu_i] f = \sum_{i=1}^M p_i [\int d\nu_i f].$$

De aquí,

$$\begin{aligned}
& \left| \int d \left[ \sum_{i=1}^M p_i \nu_i \circ K \right] f - \int d \left[ \sum_{i=1}^M p_i \nu_i \right] f \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^M p_i \left[ \int d(\nu_i \circ K) f \right] - \sum_{i=1}^M p_i \left[ \int d\nu_i f \right] \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^M p_i \left| \int d(\nu_i \circ K) f - \int d\nu_i f \right|.
\end{aligned}$$

Es un corolario trivial del Teorema 3.1 que si  $\nu$  es una medida simple,  $\forall f \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$

$$\left| \int d\nu f - \int d(\nu \circ K) f \right| \leq |K|.$$

Siguiendo la cadena de igualdades y desigualdades, obtenemos finalmente que

$$\left| \int d \left[ \sum_{i=1}^M p_i \nu_i \circ K \right] f - \int d \left[ \sum_{i=1}^M p_i \nu_i \right] f \right| \leq |K|.$$

□

Este resultado, independientemente de la importancia que pueda tener por el hecho de que nos sugiere una gran familia de mapeos  $N$  tales que  $N(x, \cdot) \in \mathcal{P}_c(\mathbf{X})$  y satisfacen la condición de no-expansividad, será fundamental para la siguiente sección, que involucra mapeos  $N$  mucho más generales.

## UNA DESIGUALDAD PARA MEDIDAS ARBITRARIAS.

Para el caso en que  $N : \mathcal{W}(\mathbf{X}) \times \mathcal{B}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{R}$  es tal que existe  $a$  tal que  $N(x, C) = N(a, C - x)$  para todo  $C \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$ , tenemos un resultado en el que se involucran medidas arbitrarias en  $\mathbf{X}$ , proporcionando la más amplia libertad para construir asociaciones  $N$  que satisfagan la propiedad deseada. El siguiente teorema constituye la base de este resultado.

**TEOREMA(3.2).** Sean  $\mu, \mu \circ K \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ , y  $f \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$ . Entonces

$$\left| \int d\mu f - \int d[\mu \circ K] f \right| \leq |K|.$$

*Demostración.* Sin perder genrealidad, sea  $K \geq 0$ . Como es evidente,  $\text{supp}[\nu] = \text{supp}[\nu \circ K] - K$ . Denotamos por  $I_\mu$  al menor intervalo cerrado que

contenga a  $\text{supp}[\mu] : I_\mu = [P, Q]$ . Sea  $L = Q - P$ . Defínase para  $m$  entero, las familias de particiones  $(I_\mu)_m$  y  $(I_{\mu \circ K})_m$  (de  $(I_\mu)$  y  $(I_{\mu \circ K})$  respectivamente) del siguiente modo:

$$(I_\mu)_m = \{ (I_\mu)_{mj} \},$$

$$(I_\mu)_{mj} = \begin{cases} [P + jL/m, P + (j+1)L/m], j = 0, \dots, m-2 \\ [P + m-1/mL, Q], j = m-1 \end{cases}$$

y análogamente para  $I_{\mu \circ K}$ . La secuencia  $\{ G_m \}$  donde  $G_m$  se define por

$$G_m \equiv \int d \left[ \sum_{j=0}^{m-1} \mu \left( (I_\mu)_{mj} \right) \mathcal{L}_{(I_\mu)_{mj}} \right] f$$

converge a  $\int d\mu f$ . Para verificarlo, notamos que, por el teorema del valor medio, existe para cada  $(I_\mu)_{mj}$  una  $c_{mj} \in (I_\mu)_{mj}$  tal que  $\int d\mathcal{L}_{(I_\mu)_{mj}} f = f(c_{mj})$ . Por otra parte, como

$$\begin{aligned} & \int d \left[ \sum_{j=0}^{m-1} \mu \left( (I_\mu)_{mj} \right) \mathcal{L}_{(I_\mu)_{mj}} \right] f = \\ & = \sum_{j=0}^{m-1} \mu \left( (I_\mu)_{mj} \right) \int d\mathcal{L}_{(I_\mu)_{mj}} f = \sum_{j=0}^{m-1} \mu \left( (I_\mu)_{mj} \right) f(c_{mj}) \end{aligned}$$

y si definimos  $S_m : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}$  por  $S_m(x) \equiv \sum_{j=0}^{m-1} f(c_{mj}) \chi_{(I_\mu)_{mj}}(x)$ , vemos a partir de esta última expresión que

$$\int d \left[ \sum_{j=0}^{m-1} \mu \left( (I_\mu)_{mj} \right) \mathcal{L}_{(I_\mu)_{mj}} \right] f = \int d\mu S_m. \quad (1)$$

Como  $f$  es uniformemente continua, es fácil verificar que  $S_m(x) \rightarrow f(x)$  para toda  $x$ , y que  $|S_m(x)|$  se encuentra acotada, pues  $f$  lo está. Estos hechos nos permiten aplicar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue [3], garantizándonos de este modo que  $\int d\mu S_m \rightarrow \int d\mu f$ , y por (1), vemos que efectivamente la secuencia  $\{ G_m \}$  converge a  $\int d\mu f$ . Por un procedimiento similar llegamos a la conclusión de que la secuencia  $\{ H_m \}$  definida por

$$H_m \equiv \int d \left[ \sum_{j=0}^{m-1} (\mu \circ K) \left( (I_{\mu \circ K})_{mj} \right) \mathcal{L}_{(I_{\mu \circ K})_{mj}} \right] f$$

converge asimismo a  $\int d(\mu \circ K) f$ .

Elíjase ahora  $\epsilon > 0$ . Por la convergencia de  $\{ G_m \}$  y  $\{ H_m \}$  existe  $N$  tal que

$$\left| G_N - \int d\mu f \right| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \left| H_N - \int d(\mu \circ K) f \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

A partir de estas desigualdades, obtenemos

$$\left| G_N - \int d\mu f - H_N + \int d(\mu \circ K) f \right| < \epsilon,$$

$$\left| H_N - \int d(\mu \circ K) f - G_N + \int d\mu f \right| < \epsilon.$$

Como (por la Proposición 3.2)  $|G_N - H_N| \leq K$ , es fácil ver que estas dos desigualdades implican que

$$\left| \int d(\mu \circ K) f - \int d\mu f \right| < \epsilon + K.$$

Como  $\epsilon$  era arbitrario, esto implica que

$$\left| \int d(\mu \circ K) f - \int d\mu f \right| \leq K.$$

□

Existen varias formas equivalentes de enunciar el siguiente teorema; la idea fundamental que subyace en todas ellas es que si  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$  y  $N(x_0, \cdot) = \mu$  para alguna  $x_0 \in \mathbf{X}$ , entonces siempre y cuando tenga sentido, la asociación  $N : \mathcal{W}(\mathbf{X}) \times \mathcal{B}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $N(x, \cdot) = \mu \circ (x - x_0)$  satisface la propiedad de no-expansividad. Es un resultado bastante general, que guarda bastante similitud con el presentado en [5], planteado y demostrado en un contexto diferente al que aquí presentamos.

**TEOREMA(3.3).** Sea  $(\mathbf{X}, d)$  un espacio métrico compacto y  $\{\mathbf{X}; w_i\}$  un SF definido sobre él. Sea  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ , arbitraria. Cualquier asociación  $N : \mathcal{W}(\mathbf{X}) \times \mathcal{B}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{R}$  definida por

$$N(x, \cdot) = \mu \circ (x - x_0)$$

donde  $x_0 \in \mathcal{W}(\mathbf{X})$ , satisface la propiedad de no-expansividad, con la única condición de que  $\text{supp}[N(x, \cdot)] \subseteq \mathbf{X}$  para todo  $x \in \mathcal{W}(\mathbf{X})$ .

*Demostración.* Supongamos que se satisface que  $\text{supp}[N(x, \cdot)] \subseteq \mathbf{X}$  para todo  $x \in \mathbf{X}$ , esto es, que  $N(x, \cdot)$  pertenece a  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$  para toda  $x$ . Sean  $x, y \in \mathcal{W}(\mathbf{X})$ .

$$\begin{aligned} & \left| \int f(z)N(x, dz) - \int f(z)N(y, dz) \right| = \\ & = \left| \int d[\mu \circ (x - x_0)] f - \int d[\mu \circ (y - x_0)] f \right| \end{aligned}$$

$$= \left| \int d[\mu \circ (x - x_0)] f - \int d[(\mu \circ (x - x_0)) \circ (y - x)] f \right| \leq |x - y|$$

por el Teorema 3.2. □

Los ejemplos anteriores de mapeos que satisfacen la propiedad de no-expansividad proporcionan una pauta para la construcción de nuevas asociaciones  $N$  que la satisfagan. Resta únicamente analizar bajo qué condiciones los mapeos propuestos cumplen además la propiedad de medibilidad. A continuación esbozaremos las demostraciones de esto para algunos casos.

Los ejemplos en que  $N(x, \cdot) \in \mathcal{P}_s(\mathbf{X})$  para todo  $x$  y  $\text{supp}[N(x, \cdot)]$  tiene interior no vacío, comparten la característica de que si  $x_n \rightarrow x$ ,  $\text{supp}[N(x_n, \cdot)] \rightarrow \text{supp}[N(x, \cdot)]$  (en la métrica de Hausdorff). Es fácil verificar que si  $[a, b] \subseteq \mathbf{X}$ ,  $[N(x_n, [a, b])] \rightarrow [N(x, [a, b])]$ , por lo que  $N(\cdot, [a, b])$  (y por tanto  $N(\cdot, (a, b))$ ) es continua, y entonces medible. Si  $x_n \rightarrow x$  no implica que  $\text{supp}[N(x_n, \cdot)] \rightarrow \text{supp}[N(x, \cdot)]$ , por ejemplo, aún la forma funcional explícita de  $N$  nos debe permitir decidir por métodos similares si  $N(\cdot, [a, b])$  es o no medible.

Para los casos en que  $N(x, \cdot) \in \mathcal{P}_s(\mathbf{X})$  para todo  $x$  pero  $N(x, \cdot) = \delta_y$  para algún número finito de puntos  $x \in \mathbf{X}$ , es fácil también checar que para ciertos intervalos  $I$ ,  $N(\cdot, I)$  es continua, y para otros al menos medible. El procedimiento para demostrarlo es similar al del párrafo anterior, pues en los casos estudiados se cumple que  $\text{supp}[N(x_n, \cdot)] \rightarrow \text{supp}[N(x, \cdot)]$  (en la métrica de Hausdorff) si  $x_n \rightarrow x$ . En el caso de  $N(x, \cdot) \in \mathcal{P}_c(\mathbf{X})$ , una vez demostrado lo anterior, la verificación de la medibilidad de  $N(\cdot, [a, b])$  y  $N(\cdot, (a, b))$  está resuelta, se reduce a su comprobación para las medidas simples componentes de  $N(x, \cdot)$ .

Finalmente, para determinar el cumplimiento de la propiedad de medibilidad en los casos contemplados por el Teorema 3.3, hay que analizar cada uno separadamente. Consideremos, a modo de ejemplo, el caso en que  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$  es tal que existe  $g : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}$  continua tal que

$$\mu(A) = \int_A dz g(z).$$

Sin pérdida de generalidad, supóngase que  $N(x, \cdot) = \mu$ . Demostraremos que si  $\{x_n\}$  es una secuencia que converge a  $x_0 \in \mathbf{X}$ , entonces la secuencia  $\{N(x_n, [a, b])\}$  ( $= \{N(x_n, (a, b))\}$ ) converge a  $N(x_0, [a, b])$ . Primero notemos que como  $g$  es continua, es uniformemente continua sobre  $\mathbf{X}$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Existe, por la continuidad uniforme de  $g$ ,  $\delta > 0$  tal que  $|g(x) - g(y)| < \epsilon$  si  $|x - y| < \delta$  para todos los  $x, y \in \mathbf{X}$ . Como  $\{x_n\}$  converge a  $x_0$ , existe  $N_1$  tal que  $|x_n - x_0| < \delta$  para toda  $n \geq N_1$ . Dado que

$$N(x_n, [a, b]) = \int_{[a, b]} dz g(z - (x_n - x_0))$$

y que  $\left| (z - (x_n - x_0)) - z \right| = |x_n - x_0| < \delta$ ,  $|g(z - (x_n - x_0)) - g(z)| < \epsilon$ , a partir de lo cual sabemos que

$$\left| \int_{[a,b]} dz g(z - (x_n - x_0)) - \int_{[a,b]} dz g(z) \right| < \epsilon,$$

esto es, que

$$|N(x_n, [a, b]) - N(x_0, [a, b])| < \epsilon$$

para toda  $n \geq N_1$ . Queda entonces demostrado que la secuencia  $\{N(x_n, [a, b])\}$  converge a  $N(x_0, [a, b])$ , a partir de lo cual queda garantizada la continuidad de  $N(\cdot, [a, b])$  en  $x_0$ , y como  $x_0$  era arbitraria,  $N(\cdot, [a, b])$  es continua en todo  $\mathbf{X}$ .

## CAPITULO IV

### Un ejemplo numérico en $\mathbf{x} = [A, B]$ .

En este capítulo presentaremos una simulación por computadora de la dinámica inducida por un  $SF \{ \mathbf{X}; w_i \}$  en el espacio con ruido  $\{ [A, B], \mathcal{M}_a \}$  para diferentes valores del parámetro  $a$ .

La idea original que nos motivó a realizar tal simulación era la de conocer aproximadamente la manera en que se afectaba la medida invariante asociada al operador de Markov inducido por el  $SF \{ [0, 1]; w_1, w_2 \}$ , donde

$$w_1(x) \equiv \frac{x}{3}, \quad w_2(x) \equiv \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \quad (1)$$

cuando se introduce ruido del tipo  $\mathcal{M}_a$  en el espacio  $[0, 1]$  (para cualquier conjunto  $\{ p_1, p_2 \}$  de parámetros el soporte de la medida invariante resultante es un conjunto de Cantor, en el caso sin ruido).

Sin embargo, es fácil convencerse de que el único mapeo  $\mathcal{M}_a$  que tiene sentido en este espacio es  $\mathcal{M}_0$ , es decir, el mapeo que deja al espacio carente de ruido. Existe, sin embargo, una manera de sobrepasar esta dificultad, a saber, considerando la misma dinámica pero teniendo lugar en  $[-\frac{3}{2}a, 1 + \frac{3}{2}a]$ . Como puede verificarse, la medida invariante asociada al  $SF \{ [-\frac{3}{2}a, 1 + \frac{3}{2}a]; w_1, w_2 \}$  (que se encuentra bien definido) es la misma que la asociada al  $SF \{ [0, 1]; w_1, w_2 \}$ , y al primero se le puede equipar con el ruido  $\mathcal{M}_a$ . Por esta razón para cualquier  $a$  fija consideramos la dinámica inducida por el  $SF$  con  $w_1, w_2$  antes definidos, en el espacio con ruido

$$\{ [-\frac{3}{2}a, 1 + \frac{3}{2}a], \mathcal{M}_a \}.$$

Para simular tal evolución, aproximamos  $[-\frac{3}{2}a, 1 + \frac{3}{2}a]$  por un espacio finito de  $N$  puntos, donde el punto  $j$  se considera representativo del subintervalo

$$[\frac{1+3a}{N}j - \frac{3}{2}a, \frac{1+3a}{N}(j+1) - \frac{3}{2}a], \quad j = 0, \dots, N-1.$$

De este modo, a partir de una medida  $\mu \in \mathcal{P}([-\frac{3}{2}a, 1 + \frac{3}{2}a])$  ( $\equiv \mathcal{P}(\mathbf{X})$ ) inducimos una medida en el espacio discreto de  $N$  puntos, asociando a cada punto la medida correspondiente al intervalo que representa (en este sentido, evidentemente consideramos al espacio discreto como ordenado). El  $SF$  induce una dinámica de  $\mathcal{P}(N)$  a él mismo, de la siguiente manera:

Sea  $\mu = \delta_{j_0}$  para alguna  $j_0, 0 \leq j_0 \leq N-1$ . Denotemos por  $I_{j_0}$  al subintervalo representado por  $j_0$ , y por  $x_{j_0}$  al punto medio de este intervalo. En  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ ,  $\delta_{x_{j_0}}$  evoluciona a  $p_1 \mathcal{L}_{[w_1(x_{j_0})-a, w_1(x_{j_0})+a]} + p_2 \mathcal{L}_{[w_2(x_{j_0})-a, w_2(x_{j_0})+a]}$ , por lo cual definimos la evolución inducida para  $\delta_{j_0}$  como la medida

$$p_1 \frac{1}{N_1} \sum_{i=0}^{N-1} \chi_{w_1(I_{j_0})}(x_i) \delta_i + p_2 \frac{1}{N_2} \sum_{i=0}^{N-1} \chi_{w_2(I_{j_0})}(x_i) \delta_i,$$

donde  $N_i$  denota el factor necesario para la normalización de la medida que multiplica a  $p_i$  (claramente  $N_i$  es el número de subintervalos "invadidos" por  $w_i(I_{j_0})$ ). La evolución en  $\mathcal{P}(N)$  está bien definida, y como podemos ver constituye, al menos en principio, la regla de evolución más plausible en  $\mathcal{P}(N)$  en el sentido de que si hemos de "reproducir" nuestra dinámica de interés en un espacio finito (y por supuesto que debemos hacerlo: las computadoras no poseen resolución infinita), la dinámica asociada más precisa la constituye la definida anteriormente. De este modo, concebimos la evolución en  $\mathcal{P}(N)$  como una reproducción más o menos fiel de la dinámica en  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ .

Una vez definido esto, procuramos encontrar la medida invariante asociada a nuestra dinámica en  $\mathcal{P}(N)$  por iteración repetida de tal acción (todo esto reproducido en la computadora), en el entendimiento de que la forma de tal medida invariante coincide en buena aproximación con la medida invariante de interés, en el sentido de que la medida (invariante) asociada a un punto debe coincidir aproximadamente con la medida (invariante) del subintervalo que representa. Ciertamente la precisión de esta similitud debe resultar más satisfactoria en la medida en que  $N$  crece, y además esperaríamos una reproducción más fiel en el caso en el cual  $a$  contiene varios subintervalos de  $[A, B]$ ; estos elementos constituyeron nuestra guía para la adecuación de estos parámetros. Cabe hacer notar, finalmente, que el hecho de que se hayan encontrado en la simulación medidas invariantes para todos los casos estudiados no era en principio predecible a partir de los resultados hallados en este trabajo, pues los espacios involucrados en las simulaciones son evidentemente discretos, mientras que los casos que estudiamos concernían a intervalos en  $\mathbf{R}$ . Haber hallado medidas invariantes en las simulaciones es en todo caso un apoyo más a la idea de que las medidas halladas dan una buena idea de las medidas invariantes que pretenden aproximar.



En el siguiente grupo de gráficas presentamos los resultados obtenidos para el proceso antes mencionado con diferentes  $N$ 's y valores del parámetro de ruido  $a$ . En el eje de las abcisas localizamos (en algunos casos solo a través de uno o dos pixeles) los subintervalos considerados, y el valor asociado en el eje de las ordenadas representa la medida (invariante) hallada mediante el proceso iterativo descrito para el  $j$  asociado a tal subintervalo, donde ( $j = 0, \dots, N$ ). En cada caso, la medida utilizada para iniciar el proceso iterativo es la medida *uniforme* en  $[-\frac{3}{2}a, 1 + \frac{3}{2}a]$ .

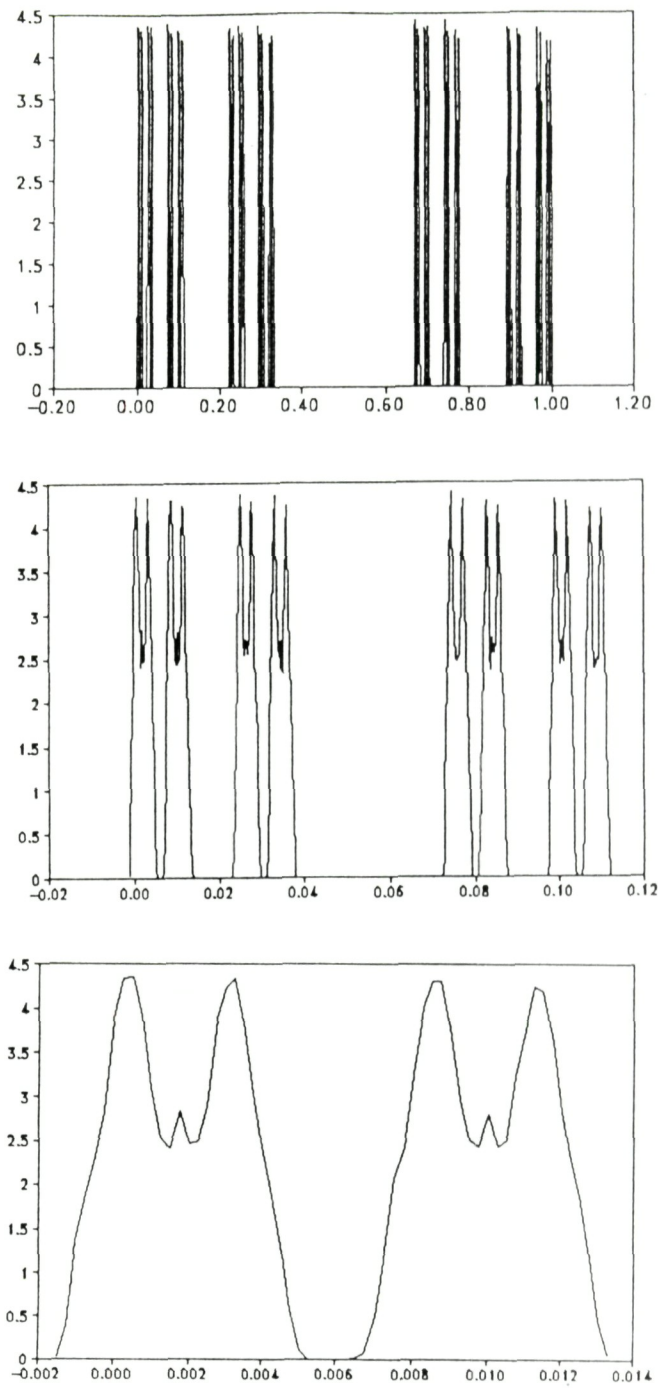


FIGURA 1. Medida invariante para el SF (1). Se muestra la distribución invariante en diferentes rangos, mostrando las propiedades de autosimilaridad hasta cierta escala.

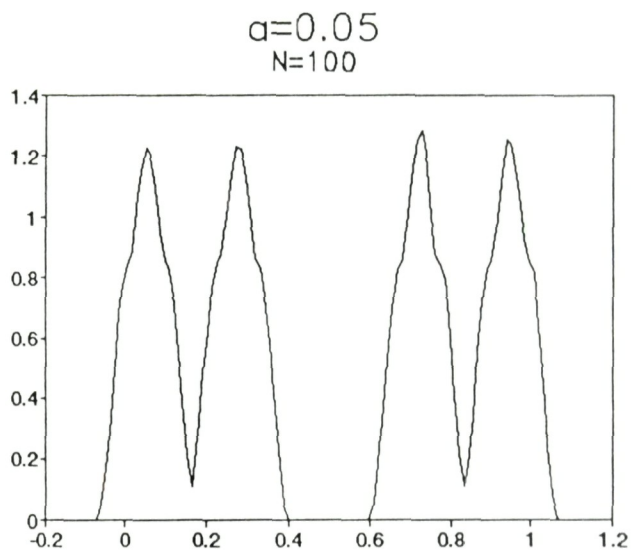


FIGURA 2. Medida invariante para el SF (1). Puede observarse cierta similitud entre esta distribución invariante y el segundo zoom en la figura 1, lo que sugiere cierta relación entre la estructura de las medidas invariantes para un SF con ruido muy ancho (como es el caso aquí) y aquellas correspondientes a un ruido más pequeño.

## CONCLUSIONES

El principal resultado de este trabajo es, sin duda alguna, el establecimiento de que para una amplia clase de espacios con ruido la evolución inducida por un SF  $\{\mathbf{X}, w_i\}$  tiene asociada una única medida invariante  $\mu_I$ . A partir del hecho de que  $\mu_I$  es el atractor de la dinámica inducida, resulta posible establecer una generalización del Teorema de Elton [10] para espacios con ruido, la cual nos permite calcular los promedios espaciales de cualquier función real-valuada en nuestro espacio abstracto  $\mathbf{X}$  a través de un sencillo algoritmo [11].

Además de esto último los resultados de este trabajo pueden encontrar aplicaciones en morfología, debido al hecho de que con una adecuada elección de parámetros es posible reproducir (como medida invariante de una dinámica en un espacio con ruido) una estructura autosimilar (quasi-fractal) *hasta un grado prefijado de precisión*, situación que parece más adecuada para modelar sistemas físicos reales que el enfoque según el cual los patrones a cualquier escala se reproducen a escalas arbitrariamente pequeñas.

Otra posible aplicación puede encontrarse en la formulación de una descripción de la evolución con ruido de un autómata celular (CA). En la representación aritmética de un CA [12] se encuentra que las posibles cadenas que lo representan se encuentran inmersas en un espacio fractal, que es el atractor de un respectivo SF asociado [13]. Mediante la aplicación del tratamiento descrito en este trabajo, puede dotarse a este espacio de alguna inestabilidad interna (ruido), encontrándose de esta manera una medida invariante diferente para el espacio subyacente en las cadenas aceptables de la  $v$ -representación, que resultará ser la contraparte de una evolución con ruido para el CA en la  $k$ -representación original.

## APENDICE

El objetivo de este apéndice es demostrar el Teorema 3.1, de crucial importancia para este trabajo. La prueba es un tanto extensa, y por alejarse del tema central hemos optado por presentarla en este apartado independiente. El cuerpo del teorema y los resultados utilizados para su demostración pertenecen a un contexto bastante simple (cálculo elemental), a pesar de lo cual nos fué imposible encontrarla en alguna referencia anterior.

Para demostrar el teorema, desarrollaremos una serie de proposiciones cuyo contenido puede parecer en ciertos casos ajeno a nuestro objetivo central; sin embargo, la existencia de cada una de ellas se encuentra justificada y constituye siempre un paso en dirección a la prueba del Teorema 3.1. Los primeros hechos que estableceremos conciernen un tipo de funciones que nos resultarán de suma utilidad.

A lo largo de toda esta sección, sean  $f, g \in \mathcal{F}([0, 1])$  tales que  $f(0) = g(0) = 0$ . Asimismo,  $b$  denotará un número  $0 < b \leq 1$ .

Definanse  $h_{\text{sup}}(f, b; x) : \mathcal{F}([0, 1]) \times (0, 1) \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $h_{\text{inf}}(f, b; x) : \mathcal{F}([0, 1]) \times (0, 1) \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  de la siguiente manera:

$$h_{\text{sup}}(f, b; x) \equiv \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq f(b) + b/2 \\ -x + b + f(b), & f(b) + b/2 \leq x \leq b \\ x - b + f(b), & b \leq x \leq 1 + f(1) + b - f(b)/2 \\ -x + 1 + f(1), & 1 + f(1) + b - f(b)/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$h_{\text{inf}}(f, b; x) \equiv \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq b - f(b)/2 \\ x - b + f(b), & b - f(b)/2 \leq x \leq b \\ x + b + f(b), & b \leq x \leq b + f(b) + 1 - f(1)/2 \\ x - 1 + f(1), & b + f(b) + 1 - f(1)/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Como se verifica de inmediato, se cumple que  $h_{\text{sup}}(f, b; 0) = h_{\text{inf}}(f, b; 0) = 0$ , y además que  $h_{\text{sup}}(f, b; b) = h_{\text{inf}}(f, b; b) = f(b)$ . También es fácil convencerse de que  $h_{\text{sup}}$  y  $h_{\text{inf}}$  están bien definidas respecto a los intervalos de definición.

## APENDICE

El objetivo de este apéndice es demostrar el Teorema 3.1, de crucial importancia para este trabajo. La prueba es un tanto extensa, y por alejarse del tema central hemos optado por presentarla en este apartado independiente. El cuerpo del teorema y los resultados utilizados para su demostración pertenecen a un contexto bastante simple (cálculo elemental), a pesar de lo cual nos fué imposible encontrarla en alguna referencia anterior.

Para demostrar el teorema, desarrollaremos una serie de proposiciones cuyo contenido puede parecer en ciertos casos ajeno a nuestro objetivo central; sin embargo, la existencia de cada una de ellas se encuentra justificada y constituye siempre un paso en dirección a la prueba del Teorema 3.1. Los primeros hechos que estableceremos conciernen un tipo de funciones que nos resultarán de suma utilidad.

A lo largo de toda esta sección, sean  $f, g \in \mathcal{F}([0, 1])$  tales que  $f(0) = g(0) = 0$ . Asimismo,  $b$  denotará un número  $0 < b \leq 1$ .

Definanse  $h_{\text{sup}}(f, b; x) : \mathcal{F}([0, 1]) \times (0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $h_{\text{inf}}(f, b; x) : \mathcal{F}([0, 1]) \times (0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  de la siguiente manera:

$$h_{\text{sup}}(f, b; x) \equiv \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq f(b) + b/2 \\ -x + b + f(b), & f(b) + b/2 \leq x \leq b \\ x - b + f(b), & b \leq x \leq 1 + f(1) + b - f(b)/2 \\ -x + 1 + f(1), & 1 + f(1) + b - f(b)/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$h_{\text{inf}}(f, b; x) \equiv \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq b - f(b)/2 \\ x - b + f(b), & b - f(b)/2 \leq x \leq b \\ x + b + f(b), & b \leq x \leq b + f(b) + 1 - f(1)/2 \\ x - 1 + f(1), & b + f(b) + 1 - f(1)/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Como se verifica de inmediato, se cumple que  $h_{\text{sup}}(f, b; 0) = h_{\text{inf}}(f, b; 0) = 0$ , y además que  $h_{\text{sup}}(f, b; b) = h_{\text{inf}}(f, b; b) = f(b)$ . También es fácil convencerse de que  $h_{\text{sup}}$  y  $h_{\text{inf}}$  están bien definidas respecto a los intervalos de definición.

A continuación estableceremos algunas propiedades importantes acerca de las funciones  $h_{\text{sup}}$  y  $h_{\text{inf}}$ .

$$i) h_{\text{sup}}, h_{\text{inf}} \in \mathcal{F}([0, 1]).$$

Esto se demuestra aplicando  $h_{\text{sup}}$  (o  $h_{\text{inf}}$ ) a cualesquiera  $x, y \in [0, 1]$  y verificando de manera explícita la desigualdad necesaria. La prueba es muy simple, y por razones de brevedad la omitiremos.

ii)  $h_{\text{sup}}(\cdot, b; x)$  y  $h_{\text{inf}}(\cdot, b; x)$  satisfacen para toda  $f \in \mathcal{F}([0, 1])$  las desigualdades

$$\int_b^1 dx h_{\text{sup}}(f, b; x) - \left(\frac{1}{b} - 1\right) \int_0^b dx h_{\text{inf}}(f, b; x) \leq \frac{1-b}{2} \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{b} - 1\right) \int_0^b dx h_{\text{sup}}(f, b; x) - \int_b^1 dx h_{\text{inf}}(f, b; x) \leq \frac{1-b}{2} \quad (2)$$

Para probar esto, debemos calcular explícitamente algunas integrales. Evaluamos las integrales involucradas en (1) y obtenemos el resultado de que

$$G_b(f(b), f(1)) \equiv \int_b^1 dx h_{\text{sup}}(f, b; x) - \left(\frac{1}{b} - 1\right) \int_0^b dx h_{\text{inf}}(f, b; x)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{f^2(1)}{4} - \frac{b}{4} - \frac{f^2(b)}{4b} + \frac{f(1)}{2} + \frac{f(1)f(b)}{2} - \frac{bf(1)}{2}. \text{ Derivando esta expresión, obtenemos}$$

$$\frac{\partial G_b}{\partial f(b)} = -\frac{f(b)}{2b} + \frac{f(1)}{2},$$

$$\frac{\partial G_b}{\partial f(1)} = -\frac{f(1)}{2} + \frac{f(b)}{2} - \frac{b}{2} + \frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial^2 G_b}{\partial f(1)^2} = -\frac{1}{2} < 0,$$

$$\frac{\partial^2 G_b}{\partial f(b)^2} = -\frac{1}{2b} < 0.$$

De estos hechos y de la forma polinómica de  $G_b$  se sigue que  $G_b$  es máxima si  $f(1) = 1$  y  $f(b) = b$ . Así, se cumple que para todas las posibles  $f(1), f(b)$ ,

$$G_b(f(1), f(b)) \leq G_b(1, b) = \frac{1-b}{2}.$$

Con esto, hemos demostrado finalmente que

$$\int_b^1 dx h_{\text{sup}}(f, b; x) - \left(\frac{1}{b} - 1\right) \int_0^b dx h_{\text{inf}}(f, b; x) \leq \frac{1-b}{2}$$

Ahora sea  $g \equiv -f$ . Es inmediato que  $g \in \mathcal{F}([0, 1])$ . Es entonces válido decir que

$$h_{\text{inf}}(f, b; x) = -h_{\text{sup}}(g, b; x),$$

$$h_{\text{sup}}(f, b; x) = -h_{\text{inf}}(g, b; x).$$

Sustituyendo estas relaciones en (1), se obtiene la desigualdad (2):

$$\left(\frac{1}{b} - 1\right) \int_0^b dx h_{\text{sup}}(f, b; x) - \int_b^1 dx h_{\text{inf}}(f, b; x) \leq \frac{1-b}{2}.$$

iii) Para toda  $f \in \mathcal{F}([0, 1])$ ,  $b \in (0, 1)$ ,  $x \in [0, 1]$ , se tiene que

$$h_{\text{sup}}(f, b; x) \geq f(x) \text{ y } h_{\text{inf}}(f, b; x) \leq f(x),$$

de donde

$$\int_p^q dx f \leq \int_p^q dx h_{\text{sup}}(f, b; x) \text{ y } \int_p^q dx f \geq \int_p^q dx h_{\text{inf}}(f, b; x) \forall p, q \ni 0 \leq p < q \leq 1.$$

Estas desigualdades son fáciles de demostrar, aunque la prueba es tediosa, por lo que no la reproduciremos.

Las propiedades demostradas de las funciones  $h_{\text{sup}}$  y  $h_{\text{inf}}$  resultarán de crucial importancia para la demostración del Teorema 3.1, pues nos permitirán probar la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN(1). Para cualquier  $f \in \mathcal{F}([0, 1])$ ,

$$\left| \int_b^1 dx f - \left(\frac{1}{b} - 1\right) \int_0^b dx f \right| \leq \left| \frac{1-b}{2} \right|.$$

*Demostración.* Por la propiedad (iii),

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{b} - 1\right) \int_0^b dx f &\leq \left(\frac{1}{b} - 1\right) \int_0^b dx h_{\text{sup}}(f, b; x), \text{ y} \\ - \int_b^1 dx f &\leq - \int_b^1 dx h_{\text{inf}}(f, b; x) \end{aligned}$$

De este modo, se verifica la desigualdad

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{b} - 1\right) \int_0^b dx f - \int_b^1 dx f &\leq \left(\frac{1}{b} - 1\right) \int_0^b dx h_{\text{sup}}(f, b; x) - \int_b^1 dx h_{\text{inf}}(f, b; x) \\ &\leq \frac{1-b}{2}, \end{aligned}$$



utilizando (2). Por un procedimiento similar se concluye que

$$\int_b^1 dx f - \left(\frac{1}{b} - 1\right) \int_0^b dx f \leq \frac{1-b}{2}.$$

Conjugando estas últimas desigualdades,

$$\left| \int_b^1 dx f - \left(\frac{1}{b} - 1\right) \int_0^b dx f \right| \leq \left| \frac{1-b}{2} \right|.$$

□

Notemos que

$$\left| \int d\mathcal{L}_{[0,1]} f - \int d\mathcal{L}_{[0,b]} f \right| = \left| \int_b^1 f - \left(\frac{1}{b} - 1\right) \int_0^b f \right| \leq \frac{1}{2} |1-b|. \quad (3)$$

A partir de esta última desigualdad podemos probar fácilmente el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN(2). Sean  $b, c$  tales que  $0 < b, c \leq 1$ . Sea  $f \in \mathcal{F}([0, 1])$ , tal que  $f(0) = 0$ . Se cumple que

$$\left| \int d\mathcal{L}_{[0,c]} f - \int d\mathcal{L}_{[0,b]} f \right| \leq \frac{1}{2} |c-b|.$$

*Demostración.* Sin perder generalidad, sea  $b \leq c$ . Haciendo el cambio de variable  $x \rightarrow cx$  obtenemos que

$$\left| \int d\mathcal{L}_{[0,c]} f - \int d\mathcal{L}_{[0,b]} f \right| = c \left| \int d\mathcal{L}_{[0,1]} h - \int d\mathcal{L}_{[0,b/c]} h \right|,$$

donde  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $h(x) \equiv f(cx)/c$  pertenece a  $\mathcal{F}([0, 1])$ . Utilizando (3),

$$c \left| \int d\mathcal{L}_{[0,1]} h - \int d\mathcal{L}_{[0, \frac{b}{c}]} h \right| \leq \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{b}{c} \right| \leq \frac{1}{2} |c-b|.$$

□

La siguiente proposición explota las simetrías de las funciones de  $\mathcal{F}([0, 1])$ .

PROPOSICIÓN(3). Sean  $b$  y  $c$  tales que  $0 \leq b, c < 1$ . Sea  $f \in \mathcal{F}([0, 1])$ . Entonces

$$\left| \int d\mathcal{L}_{[b,1]} f - \int d\mathcal{L}_{[c,1]} f \right| \leq \frac{1}{2} |c-b|.$$

*Demostración.* Sea  $f(1) = k_0$ . Sea  $g \equiv f - k_0$ . Se verifica de inmediato que

$$\left| \int d\mathcal{L}_{[b,1]}f - \int d\mathcal{L}_{[c,1]}f \right| = \left| \int d\mathcal{L}_{[b,1]}g - \int d\mathcal{L}_{[c,1]}g \right|.$$

Defínase  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  por  $h(x) \equiv g(1 - x)$ . Puede demostrarse que  $h \in \mathcal{F}([0, 1])$  y que

$$\left| \int d\mathcal{L}_{[b,1]}g - \int d\mathcal{L}_{[c,1]}g \right| = \left| \int d\mathcal{L}_{[0,1-b]}h - \int d\mathcal{L}_{[0,1-c]}h \right|.$$

Aplicando (3) a  $h$ , obtenemos de esta última igualdad que

$$\left| \int d\mathcal{L}_{[b,1]}g - \int d\mathcal{L}_{[c,1]}g \right| \frac{1}{2} \leq |(1 - b) - (1 - c)| = \frac{1}{2} \leq |c - b|.$$

□

Tenemos a partir de las proposiciones 2 y 3 la siguiente consecuencia directa.

PROPOSICIÓN(4). Sean  $b$  y  $c$  tales que  $0 < b \leq 1$  y  $0 \leq c < 1$ . Sea  $f \in \mathcal{F}([0, 1])$ ,  $f(0) = 0$ . Entonces se cumple que

$$\left| \int d\mathcal{L}_{[0,b]}f - \int d\mathcal{L}_{[c,1]}f \right| \frac{1}{2} \leq |c + (1 - b)|.$$

*Demostración.* Por las proposiciones 2 y 3,

$$\left| \int d\mathcal{L}_{[0,1]}f - \int d\mathcal{L}_{[0,b]}f \right| \leq \frac{1}{2}|1 - b|, \quad \left| \int d\mathcal{L}_{[0,1]}f - \int d\mathcal{L}_{[c,1]}f \right| \frac{1}{2} \leq |c|.$$

Sumando estas desigualdades y utilizando la del triángulo y la no negatividad de  $c$  y  $1 - b$ , obtenemos

$$\left| \int d\mathcal{L}_{[0,b]}f - \int d\mathcal{L}_{[c,1]}f \right| \frac{1}{2} \leq |c + (1 - b)|.$$

□

En el Teorema 1 se incluye el caso en el cual al menos uno de los intervalos contiene solo un punto. Estableceremos la proposición que formaliza esto, y por razones de brevedad nos limitaremos a demostrarlo para un caso. La prueba para los demás casos se lleva a cabo de manera similar.

PROPOSICIÓN(5). Sea  $f \in \mathcal{F}([0, 1])$ , tal que  $f(0) = 0$ . Sean  $[a, b]$  y  $[c, d]$  subintervalos de  $[0, 1]$ , tales que al menos uno de sus extremos es 0 o 1. Entonces se satisface la desigualdad

$$\left| \int d\mathcal{L}_{[a,b]}f - \int d\mathcal{L}_{[c,d]}f \right| \leq \frac{1}{2}|(d + c) - (a + b)|.$$

*Demostración.* Verificaremos la desigualdad para el caso  $[a, b] = [0, 0]$ ,  $[c, d] = [c, 1]$ , con  $c \neq 1$ . Dado que para todo  $x \in \mathbf{X}$ ,  $-x \leq f(x) \leq x$ ,

$$-\frac{1}{2}(1 - c^2) \leq \frac{1}{1 - c} \int_c^1 dx f \leq \frac{1}{2}(1 - c^2).$$

A partir de esto,

$$\left| \int d\mathcal{L}_{[a,b]}f - \int d\mathcal{L}_{[c,d]}f \right| = \left| \int d\mathcal{L}_{[c,1]}f \right| \leq \frac{1}{2} |(1 + c)(1 - c)| \leq \frac{1}{2} |1 + c|.$$

□

Ahora estamos listos para formular una versión restringida del Teorema 1.

PROPOSICIÓN(6). Sea  $f \in \mathcal{F}([0, 1])$ , y sean  $[a, b]$ ,  $[c, d]$  subintervalos de  $[0, 1]$ , donde  $a = 0 \vee b = 1$  y  $c = 0 \vee d = 1$ . Entonces

$$\left| \int d\mathcal{L}_{[a,b]}f - \int d\mathcal{L}_{[c,d]}f \right| \leq \frac{1}{2} |(a + b) - (c + d)|.$$

*Demostración.* Primero lo demostramos para  $f(0) = 0$ . Evidentemente la prueba debe hacerse por casos. Si  $a = b \vee c = d$ , aplíquese la Proposición 5. Si  $a = 0$  y  $d = 1$ , aplicamos la Proposición 4. Si  $b = 1$  y  $d = 1$ , aplicamos la Proposición 3. El caso  $a = c = 0$  se encuentra demostrado en la Proposición 2. Esto agota todas las posibilidades: el caso  $b = 1$  y  $c = 0$  es exactamente igual al caso  $a = 0$  y  $d = 1$ , de manera que el teorema está probado si  $f(0) = 0$ . Ahora supongamos que  $f(0) \neq 0$ . En tal caso  $f = g - k_0$ , con  $g(0) = 0$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int d\mathcal{L}_{[a,b]}f - \int d\mathcal{L}_{[c,d]}f \right| &\leq \left| \int d\mathcal{L}_{[a,b]}g - \int d\mathcal{L}_{[c,d]}g \right| + \left| \int d\mathcal{L}_{[a,b]}k_0 - \int d\mathcal{L}_{[c,d]}k_0 \right| \\ &\leq \frac{1}{2} |(a + b) - (c + d)|. \end{aligned}$$

□

Esta última proposición admite una generalización englobada por el siguiente teorema.

TEOREMA(1). Sean  $[a, b]$  y  $[c, d]$  cualesquiera intervalos tales que el interior de ninguno está contenido en el otro. Sea  $[A, B]$  el menor intervalo que contiene a ambos intervalos y sea  $f \in \mathcal{F}([A, B])$ . Se satisface la desigualdad

$$\left| \int d\mathcal{L}_{[a,b]}f - \int d\mathcal{L}_{[c,d]}f \right| \leq \frac{1}{2} |(a + b) - (c + d)|.$$

*Demostración.* Es fácil convencerse observando las condiciones del teorema que  $a = A \vee b = B$  y  $c = A \vee d = B$ . Haciendo el cambio de variable  $x \rightarrow \frac{x}{B-A} - \frac{A}{B-A}$ , obtenemos que

$$\left| \int d\mathcal{L}_{[a,b]}f - \int d\mathcal{L}_{[c,d]}f \right| = \left| \int d\mathcal{L}_{\left[\frac{a}{B-A}, \frac{b}{B-A}\right]}g - \int d\mathcal{L}_{\left[\frac{a}{B-A}, \frac{b}{B-A}\right]}g \right|,$$

donde  $g$ , definida por  $g(x) = (B-A)x + A$ , pertenece a  $\mathcal{F}([0, 1])$  (como se verifica fácilmente). Por las observaciones hechas, puede aplicarse la Proposición 6 a la parte derecha de esta igualdad, obteniéndose de esta manera que

$$\begin{aligned} \left| \int d\mathcal{L}_{[a,b]}f - \int d\mathcal{L}_{[c,d]}f \right| &= \left| \int d\mathcal{L}_{\left[\frac{a}{B-A}, \frac{b}{B-A}\right]}g - \int d\mathcal{L}_{\left[\frac{a}{B-A}, \frac{b}{B-A}\right]}g \right| \\ &\leq \frac{1}{2} |(a+b) - (c+d)|. \end{aligned}$$

□

Resta únicamente demostrar un par de resultados para llegar al objetivo de este apéndice. El primero de ellos nos dice que la cota hallada en el teorema anterior vale únicamente para intervalos con la propiedad mencionada.

PROPOSICIÓN(7). Sean  $[a, b]$ ,  $[c, d]$  intervalos tales que uno de ellos está contenido en el interior del otro. Entonces existe  $g \in \mathcal{F}([A, B])$  tal que

$$\left| \int d\mathcal{L}_{[a,b]} - \int d\mathcal{L}_{[c,d]} \right| > \frac{1}{2} |(a+b) - (c+d)|.$$

*Demostración.* Debemos estudiar separadamente dos casos:  $a + b > c + d$  y  $a + b \leq c + d$ . La función  $g : [A, B] \rightarrow \mathbf{R}$  definida por

$$g(x) \equiv \begin{cases} -x + 2c, & a \leq x \leq c \\ x, & c \leq x \leq b \end{cases}$$

pertenece a  $\mathcal{F}([A, B])$ , y

$$\left| \int d\mathcal{L}_{[a,b]} - \int d\mathcal{L}_{[c,d]} \right| = \frac{a+b}{2} - \frac{d+c}{2} + \frac{(a-c)^2}{(d-c)} > \frac{1}{2} ((a+b) - (c+d)).$$

Queda entonces demostrado que

$$\left| \int d\mathcal{L}_{[a,b]} - \int d\mathcal{L}_{[c,d]} \right| > \frac{1}{2} |(a+b) - (c+d)|.$$

□

El siguiente y último paso consiste en probar que la desigualdad involucrada en el Teorema 1 es la más estrecha posible para toda función  $f \in \mathcal{F}([A, B])$ .

PROPOSICIÓN(8). Sean  $[a, b]$  y  $[c, d]$  subintervalos tales que ninguno está contenido en el interior del otro, y sea  $[A, B]$  el menor intervalo que los contiene. Entonces no existe  $r_o < \frac{1}{2}|(a + b) - (c + d)|$  tal que

$$\left| \int d\mathcal{L}_{[a,b]} - \int d\mathcal{L}_{[c,d]} \right| \leq r_o$$

para toda  $f \in \mathcal{F}([A, B])$ .

*Demostración.* La función  $g : [A, B] \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $g(x) \equiv x$  evidentemente pertenece a  $\mathcal{F}([A, B])$ , y como puede verificarse fácilmente,

$$\left| \int d\mathcal{L}_{[a,b]} - \int d\mathcal{L}_{[c,d]} \right| = \frac{1}{2}|(a + b) - (c + d)|.$$

□

Finalmente tenemos todos los elementos para demostrar el teorema objetivo de este apartado.

TEOREMA(2). Sean  $[a, b]$  y  $[c, d]$  subintervalos de  $[A, B]$ . Sea  $f \in \mathcal{F}([A, B])$ . Entonces

$$\left| \int d\mathcal{L}_{[a,b]}f - \int d\mathcal{L}_{[c,d]}f \right| \leq \frac{1}{2}|(a + b) - (c + d)|$$

si y solo si ninguno de los intervalos en cuestión está contenido en el interior del otro. Además, si dos intervalos cumplen con esta última condición, no existe  $r_o < \frac{1}{2}|(a + b) - (c + d)|$  tal que

$$\left| \int d\mathcal{L}_{[a,b]}f - \int d\mathcal{L}_{[c,d]}f \right| \leq r_o$$

para toda función  $f \in \mathcal{F}([A, B])$ .

*Demostración.* La prueba está contenida en el Teorema 1 y las proposiciones 7 y 8. □

## REFERENCIAS

- [1] M. Barnsley. *Fractals Everywhere*. Academic Press. New York (1988).
- [2] J. Hutchinson. *Generating Fractals*. Published in the Proceedings of the International Conference in Chaos & Order 1990, Camberra, Australia. Robert Joshi and John Dewar, editors. World Scientific. Sydney (1990).
- [3] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw Hill.
- [4] S. Parthasarathy. *Probability Measures on Metric Spaces*. Academic Press. New York (1967).
- [5] R. García-Pelayo and W.C. Schieve. *Noisy fractals*. J. Math. Phys. **33** (2), February 1992.
- [6] S. Wolfram, editor. *Theory and applications of cellular automata*. World Scientific. New York (1986).
- [7] P. Talkner and P. Hänggi. *Discrete dynamics perturbed by weak noise*. Published in *Noise in nonlinear dynamical systems*, edited by Frank Moss & P.V.E. McClintock. Cambridge University Press. Cambridge (1989).
- [8] M. Barnsley and S. Demko. *Iterated Function Systems and the Global Construction of Fractals*. Proc. of Roy. Soc. London A399. 1985.
- [9] M. Barnsley and A.D. Sloan. *A better way to compress images*. Byte Magazine, January 1988b.
- [10] J. Elton. *An Ergodic Theorem for Iterated Maps*. Journal of Ergodic Theory and Dynamical Systems, 7:481-488 (1987).
- [11] G. Salazar-Anaya and J. Urías. *Invariant Measure for a SF in a Noisy Space*. Manuscript in preparation.
- [12] J. Urías. *Arithmetic Representations of Cellular Automata*. To appear in Physica D.
- [13] E. Ugalde and J. Urías. *Geometric Aspects of Cellular Automata*. Submitted to Commun. Math. Phys.

EX LIBRIS



SISTEMA DE  
BIBLIOTECAS  
U.A.S.L.P.

No. DE REG.