Hacia una Formulación Universal de la Mecánica

Tesis

que para obtener el Grado de:

Maestro en Ciencias (Física)

presenta:

Fís. Alberto Molgado Ramos

Instituto de Física–**UASLP**

Asesor: Prof. Dr. Adán Rubén Rodríguez Dgz.

Julio 2001

Agradecimientos.

Quisiera expresar mi agradecimiento y respeto hacia el Dr. Adán Rubén Rodríguez por todo lo que aprendí bajo su supervisión, por inducirme por los caminos de la Física-Matemática y por todo el apoyo y dedicación prestada hacia mi persona.

Muy agradecido me encuentro también con el Dr. Antonio Morelos por su apoyo e interés durante mi preparación académica, así como por su invaluable amistad.

Gracias a mis compañeros de generación y al grupo de partículas elementales por los buenos momentos y por considerarme parte de ustedes. De igual manera me encuentro muy agradecido con todo el profesorado del Instituto de Física de la UASLP, y en general a todo el personal del mismo, por ser parte activa en mi formación.

Gracias a mi familia, especialmente a mi Mamá por impulsarme y estar conmigo estos últimos años.

Como siempre, muy agradecido con mi Gaby, así como con mis hermanos José Luis Argüelles, Alejandro Meza, Ricardo

González, Osvaldo Escobedo y Juan Moreno por estar siempre conmigo y compartir tantos buenos momentos.

Gracias a Mary por su sonrisa infinita.

Gracias a *Denver Records* por toda la motivación que recibí de su parte.

Índice General

Capítulo 1

Generalidades

Al hablar de la mecánica clásica nos referimos a la mecánica de Newton, esta mecánica ha resultado con el tiempo grandemente enriquecida al formularse matemáticamente en base a un *principio variacional*, el que nos conduce a las ecuaciones de Euler-Lagrange y finalmente arribamos también a las ecuaciones canónicas de Hamilton. Así han surgido también a través del tiempo ciertas confusiones y nos acostumbramos luego a pensar que la mecánica de Newton es tan arcaica como Newton mismo, que es la mecánica de Hamilton la verdadera mecánica, o bien que cualquier ecuación dinámica puede obtenerse a partir de una cierta función *Lagrangiana mágica*, aún cuando la definición de una función lagrangiana carece de significado físico, o bien que la expresión matemática de un principio variacional sea mucho mas profunda que la aportación newtoniana; finalmente terminamos por no entender, ni saber distinguir entre mecánica y formalismo, ignorando que existe una sóla mecánica, como una sola física, y que los formalismos, en cambio, pueden ser múltiples en la medida que no son plenos; sin embargo, vale la pena contemplar de qué manera lograr arribar a un formalismo universal para una mecánica también universal.

Aceptamos que existen sistemas incapaces de ser descritos por la mecánica clásica, por lo que desde un punto de vista ortodoxo declaramos que la verdadera mecánica es la mecánica cuántica, la cual, en el límite clásico coincide con la mecánica clásica. Sin embargo, sabemos que desde el punto de vista del formalismo matemático y bajo una cierta prescripción de cuantización, como la señalada por Dirac, nos es posible construir ecuaciones dinámicas mecanico-cuánticamente válidas, a partir de las expresiones clásicas. Es el objetivo del presente trabajo mostrar la trascendencia del formalismo de Nambu y de que manera, su aplicación a la mecánica nos lleva hacia una descripción más generalizada de ésta.

Históricamente, el formalismo de Nambu aparece bajo un cimiento de naturaleza matemático y geométrico que también establecemos como punto de partida; hay que señalar sin embargo, que en la física matemática media igualmente un *principio de interpretación*, por lo que los primeros esfuerzos en entender este formalismo no resultaron fructíferos, no es sino con la interpretación de Yamaleev que obtenemos, de este formalismo, su plena trascendencia.

La principal característica de este formalismo es la factorización, misma que nos es conocida de los formalismos espinoriales

$(P_{AA'} = p_a\sigma^a_{AA'} = \pi_A\pi_{A'})$, o bien twistoriales [20], pero la experiencia nos muestra que estos formalismos nos conducen a desarrollos un tanto más escabrosos y poco transparentes para su aplicación e interpretación física. Otro ejemplo de este mismo proceso lo encontramos al definir en el electromagnetismo al llamado vector de Poynting que representa una densidad de impulso o bien de flujo de energía $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$.

Desarrollaremos primeramente algunos elementos esenciales de la dinámica relativista de una manera convencional, luego estableceremos con ellos su conexión con el formalismo de Nambu-Yamaleev.

Dada una partícula libre relativista con masa m y velocidad $\vec{v}$, ubicada en un sitio $x^\mu = (ct, \vec{x})$ del *espacio-tiempo*, definimos el cuadri-impulso relativista P^μ por las expresiones

$$\begin{aligned} P^0 &= \gamma mc = \mathbb{M}c, \\ \vec{P} &= \gamma mc\vec{\beta} = \mathbb{M}c\vec{\beta}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

con $\vec{\beta} = \vec{v}/c$, donde $\gamma = \frac{P^0}{mc} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ representa también la relación entre el tiempo propio y el tiempo coordenado $dt = \gamma\, d\tau$, o bien como regla de la cadena

$$\frac{d}{d\tau} = \gamma\frac{d}{dt} = \frac{P^0}{mc}\frac{d}{dt}, \tag{1.2}$$

a $\mathbb{M} = \gamma\, m$ se le denomina la masa relativista.

La energía de la partícula libre relativista esta dada por $E = \gamma mc^2 = cP^0$.

Teniendo en cuenta la métrica hiperbólica del *espacio-tiempo* $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$, expresamos la invariancia de la norma como

$$\begin{aligned} P^2 &= \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = P^\mu P_\mu = (P^0)^2 - \vec{P}^2 = \gamma^2 m^2 c^2 (1 - \beta^2) \\ &= (mc)^2, \end{aligned} \tag{1.3}$$

la cual admite obviamente la parametrización

$$P^0 = mc \cosh\phi, \qquad |\vec{P}| = mc \sinh\phi. \tag{1.4}$$

De la invariancia de la norma nos es evidente también la relación

$$P^0 \frac{dP^0}{d\tau} = \vec{P} \cdot \frac{d\vec{P}}{d\tau}. \tag{1.5}$$

Entonces se cumple igualmente

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = (\gamma c, \gamma \vec{v}) = \frac{P^\mu}{m}, \tag{1.6}$$

que nos permite escribir la invariancia de la norma directamente en las coordenadas x^μ del espacio tiempo

$$(cdt)^2 - (d\vec{x})^2 = (c\, d\tau)^2. \tag{1.7}$$

Si derivamos nuevamente la ec. (1.6) obtenemos $\frac{dP^\mu}{d\tau} = m\, \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$ lo que podemos considerar como la segunda ley de Newton relativista. Efectivamente, en la dinámica relativista aceptamos esta generalización de la segunda ley de Newton, en otras palabras, la mecánica relativista sigue considerándose como parte de la mecánica clásica. Sin embargo, escribimos más correctamente la segunda ley en términos del impulso, como Newton originalmente la formulara

$$\frac{d}{d\tau}P^{\mu} = K^{\mu}, \tag{1.8}$$

donde K^{μ} es la fuerza relativista; por ejemplo, a esta expresión acostumbramos denominar ecuación de la *fuerza* de Lorentz, cuando el origen de la fuerza es el campo electromagnético $\{\vec{E}, \vec{B}\}$. Esta ecuación la escribimos normalmente para una partícula de masa m y carga q como

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right), \tag{1.9}$$

sin embargo, la expresión completa y covariante es (con las componentes del tensor de campo dadas por $F^0_{\ i} = E_i$, $F^i_{\ j} = \epsilon^i_{\ j}{}^k B_k$)

$$\frac{d}{d\tau}P^{\mu} = \frac{q}{mc}F^{\mu}_{\ \nu}P^{\nu}, \tag{1.10}$$

o equivalentemente

$$\frac{d}{d\tau}P^0 = \frac{q}{mc}\vec{E}\cdot\vec{P}, \quad \frac{d}{d\tau}\vec{P} = \frac{q}{mc}(\vec{E}P_0 + \vec{P}\times\vec{B}).$$

Nos interesa, sin embargo escribir esta ecuación generalizada de Lorentz en componentes, de una manera más explícita.

En la presencia de un potencial espacial $V(\vec{r})$, donde la fuerza convencionalmente no relativista está definida por la expresión $\frac{d\vec{P}}{dt} = -\frac{dV}{d\vec{r}} = -\vec{\nabla}V$, podemos entonces escribir covariantemente

$$\frac{d}{d\tau}\vec{P} = \gamma\frac{d}{dt}\vec{P} = -\left(\frac{P^0}{mc}\right)\vec{\nabla}V = \vec{K}, \qquad (1.11)$$

y con la ayuda de la ec. (1.5) obtenemos

$$\frac{d}{d\tau}P^0 = -\frac{\{\vec{P}\cdot\vec{\nabla}V\}}{mc} = K^0, \qquad (1.12)$$

o bien condensadamente en términos de la fuerza newtoniana $\vec{f} = -\vec{\nabla}V$

$$\frac{d}{d\tau}P^\mu = \frac{1}{mc}(\vec{P}\cdot\vec{f},\, P^0\vec{f}). \qquad (1.13)$$

A estas ecuaciones generalizadas de Lorentz llamaremos también ecuaciones de la dinámica relativista. Hay que reconocer que ellas fueron propuestas previamente a Einstein por Poincaré [30] y Planck [29]. Sin embargo, hay que reconocer también que ellas por sí mismas no determinan la mecánica. Podemos hablar de una mecánica relativista cuando introducimos el factor geométrico, esto es, cuando además las complementamos con las relaciones entre el impulso y la velocidad $\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{P^\mu}{m}$, hablamos entonces de *ecuaciones relativistas del movimiento*

$$\frac{d}{d\tau}\vec{P} = -\left(\frac{P^0}{mc}\right)\vec{\nabla}V = \vec{K}, \qquad (1.14)$$

$$\frac{d}{d\tau}P^0 = -\frac{\{\vec{P}\cdot\vec{\nabla}V\}}{mc} = K^0, \qquad (1.15)$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{\vec{P}}{m} \qquad \frac{dt}{d\tau} = \frac{P^0}{mc}. \qquad (1.16)$$

Es importante tener presente que esta realización simplificada de la dinámica relativista, al menos para sistemas estacionarios, es posible, gracias al tiempo propio, evitando el manejo de potenciales retardados a distancia, cuando la formulación se lleva a cabo en términos del tiempo coordenado.

En este caso, la energía total del sistema está dada por

$$E = cP^0 + V(\vec{r}). \tag{1.17}$$

En general, para una cierta función $f(\vec{r})$ podremos escribir

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{df}{d\vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \vec{\nabla} f \cdot \frac{\vec{P}}{m}, \tag{1.18}$$

entonces, para el caso de un movimiento estacionario, esto es, donde el potencial no depende explícitamente del tiempo escribimos

$$\frac{dV(\vec{r})}{d\tau} = \frac{dV}{d\vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{\vec{P} \cdot \vec{\nabla} V}{m}, \tag{1.19}$$

o bien con la ayuda de la ec. (1.12)

$$\frac{dV(\vec{r})}{d\tau} = -c\frac{dP^0}{d\tau}. \tag{1.20}$$

Esto significa que $\frac{d\{V(\vec{r})+cP^0\}}{d\tau} = 0$, o sea que la energía E, ecuación (1.17), es una constante del movimiento

$$\frac{dE}{d\tau} = 0, \qquad E = cP^0 + V = const. \tag{1.21}$$

Es uno de los objetivos del presente trabajo mostrar que el formalismo de Nambu es un desarrollo matemático que representa toda una gamma de sistemas *de composición* siendo uno de ellos, en particular, equivalente con la dinámica relativista.

Por otro lado hay que señalar también que si bien Einstein concibe la dinámica relativista partiendo de tres postulados fundamentales, a saber, i) la invariancia de la velocidad de la luz vista desde cualquier sistema de referencia, ii) la equivalencia de los sistemas inerciales y iii) la covariancia de las ecuaciones de las leyes físicas, el formalismo matemático de Nambu abarca todos estos principios implícitamente.

Por otro lado, hay que señalar también que la relatividad especial de Einstein fue formulada desde un punto de vista *cinemático* al establecer las relaciones de la física que deben existir entre distintos sistemas inerciales de referencia. No es sino muchos años después, al concebir la Relatividad General, que Einstein acepta que cualquier sistema de referencia, tanto inercial como no inercial debe ser igualmente válido para la formulación de las leyes de la física.

En nuestro formalismo dinámico, nos es posible introducir una parametrización simple en términos de la velocidad del sistema, la cual nos permite apreciar el papel que juega el potencial en la dinámica y de qué manera la métrica del impulso se conserva sin importar que la velocidad del sistema sea variable.

En los capítulos 2 y 3 se desarrolla la formulación geométrica del formalismo de Nambu, siendo el principal interés el dar a conocer un punto de vista generalizado y no pretendiendo de ninguna manera una presentación formal de la geometría diferencial. Dicha formulación permite el estudio de algunos aspectos de la mecánica desde un punto de vista más sencillo y a su vez mucho más general. Así mismo, esta formulación se lleva en total analogía con las ecuaciones para la Mecánica Hamiltoniana sobre variedades simplécticas y se discuten algunas de las limitaciones al considerar espacios fase de dimensión impar. Es de importancia el señalar que a pesar de dichas limitaciones, es posible obtener de una manera muy sencilla las ecuaciones de Nambu al considerar coordenadas locales sobre la variedad, además de conservar el teorema de Liouville, el cual fue la base para el desarrollo de la mecánica de Nambu. A manera de generalización se presenta también la formulación de la mecánica a partir de los brackets de Nambu-Poisson sobre variedades n-dimensionales y se comentan algunas de sus propiedades. Finalmente, en el capítulo 4 damos una aplicación amplia del formalismo de Nambu-Yamaleev, incluyendo el caso de partículas sin masa.

Capítulo 2

Dinámica de Nambu.

En este capítulo se desarrollan los conceptos que sirvieron de base a Yoichiro Nambu [26] para desarrollar una generalización de la dinámica de Hamilton teniendo como base el Teorema de Liouville de la mecánica clásica, el cual es de suma importancia en la solución de sistemas que contienen muchas partículas, por ejemplo en mecánica estadistíca, donde dicho teorema permite hacer predicciones de los promedios de ciertas propiedades al examinar el movimiento de un gran número de sistemas idénticos.

El teorema de Liouville en Mecánica Hamiltoniana [16, 21] se enuncia de la manera siguiente:

Teorema 1 *Sea* $(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$ *el conjunto de coordenadas que definen el espacio fase 2n-dimensional, además sea* $\Gamma \equiv dq^1 \cdots dq^n dp_1 \cdots dp_n$ *el correspondiente elemento de volumen, entonces se cumple*

$$\int \Gamma = cte. \tag{2.1}$$

Dicho de otra forma, lo que el teorema de Liouville indica es el hecho de que el volumen del espacio fase ocupado por un conjunto de sistemas estadísticos es conservado bajo transformaciones canónicas, es decir, bajo aquellas transformaciones de coordenadas en el espacio fase que dejan invariantes las ecuaciones de Hamilton.

Desde el punto de vista estadístico, lo que el teorema de Liouville indica es el hecho de que la densidad de sistemas en la vecindad de un sistema dado en el espacio fase permanece constante en el tiempo. Sean N el número de sistemas estadísticos, V el volumen ocupado por dichos sistemas, y $D \equiv dN/dV$ la densidad de sistemas o estados, entonces se tiene el siguiente corolario del Teorema de Liouville ($dD/dt = 0$),

Corolario 1 *Si D no depende explícitamente del tiempo, es decir hay equilibrio estadístico para la variable D, entonces*

$$[D, H] = 0. \tag{2.2}$$

Esto es una consecuencia del hecho de que en el formalismo de Hamilton la evolución temporal de una variable dinámica, en este caso la densidad D, esta dada por

$$\frac{dD}{dt} = [D, H] + \frac{\partial D}{\partial t},$$

por lo tanto, si el bracket de Poisson para la densidad y el Hamiltoniano es idénticamente cero, entonces para sistemas conservativos se puede tener la seguridad de que se esta cumpliendo el teorema de Liouville. De esta manera D puede ser escogida como cualquier función de la energía. Las características del ensamble estarán determinadas por la elección de la función D, como sucede en el caso de la mecánica estadística.

Considerando que la dinámica Hamiltoniana no es el único formalismo con el cual es posible describir la mecánica estadistíca, ya que cualquier conjunto de ecuaciones que cumplan con el teorema de Liouville en un espacio fase apropiado nos son de utilidad para describirla, entonces se desarrollará a continuación el esquema planteado por Nambu.

Sea $(x, y, z) \equiv \vec{r}$ un triplete de variables dinámicas que generan un espacio fase de tres dimensiones. Este espacio es una generalización del espacio fase convencional generado a partir del par canónico (p, q). Además se introducen dos funciones H y G de (x, y, z), las cuales servirán como un *par de Hamiltonianos* para determinar el movimiento de los puntos en el espacio fase. Teniendo esto en cuenta, se postulan el siguiente conjunto de ecuaciones (ecuaciones de Nambu):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial(H,G)}{\partial(y,z)}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial(H,G)}{\partial(z,x)}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial(H,G)}{\partial(x,y)}, \tag{2.3}$$

o bien, en notación vectorial

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\nabla} H \times \vec{\nabla} G. \tag{2.4}$$

Por lo tanto, para cualquier función $F(x, y, z)$ se cumple

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial(F,H,G)}{\partial(x,y,z)} = \vec{\nabla} F \cdot (\vec{\nabla} H \times \vec{\nabla} G). \tag{2.5}$$

Se define un bracket de Poisson generalizado $[F, H, G]$ como

$$[F, H, G] = \vec{\nabla} F \cdot (\vec{\nabla} H \times \vec{\nabla} G), \tag{2.6}$$

el cual es antisimétrico ante el intercambio de cualquier par de sus componentes. Como resultado de esto se tiene si $H = F$ entonces el bracket de Nambu-Poisson es idénticamente cero, sucediendo lo mismo en el caso $G = F$. Dicho esto, se entiende que tanto H como G son constantes de movimiento.
De la misma manera, para tres operadores arbitrarios A, B, C se define el bracket de Nambu-Poisson como

$$[A, B, C] \equiv \frac{\partial(A, B, C)}{\partial(x, y, z)} \tag{2.7}$$

La ecuación (2.4) muestra que el campo de velocidades $d\vec{r}/dt$ no tiene divergencia, ya que

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} H \times \vec{\nabla} G) \equiv 0, \tag{2.8}$$

lo cual implica que se cumpla el teorema de Liouville en el nuevo espacio fase (Ver el corolario (2.2)).

En el mismo sentido, se puede extender este tipo de generalización a un espacio fase de cualquier dimensión. Para esto se introducen un vector x_i con n-componentes y n-1 *Hamiltonianos* H_k, y se postulan análogamente, en vista de las ecuaciones (2.4) y (2.5), las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \sum_{j,k,\cdots,l \neq i}^{n} \epsilon_{ijk\cdots l} \frac{\partial H_1}{\partial x_j} \frac{\partial H_2}{\partial x_k} \cdots \frac{\partial H_{n-1}}{\partial x_l}, && (2.9) \\ \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial(F, H_1, H_2, \ldots, H_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv [F, H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}], && (2.10) \end{aligned}$$

siendo $\epsilon_{ijk\cdots l}$ el tensor de Levi-Civita y $[F, H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}]$ se define como el bracket de Nambu-Poisson n-dimensional. Se puede checar de manera directa que la ecuación (2.9) cumple con

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = div\frac{dx_i}{dt} = 0,$$

por lo cual, cualquier sistema que obedezca la Mecánica de Nambu, automáticamente satisface el Teorema de Liouville [9, 24].

De está última generalización es fácil ver que el formalismo de Hamilton está contenido en el formalismo de Nambu como un caso especial, es decir, para el caso en que se tiene un espacio fase de dos dimensiones (p, q) y un solo Hamiltoniano H.

Para poder ver la relevancia y aplicabilidad de la generalización de Nambu, se verá a continuación algunos ejemplos de sistemas físicos reales que pueden ser descritos por el formalismo de Nambu. Así mismo, en la literatura se pueden encontrar más casos de sistemas físicos considerarados bajo el formalismo de Nambu, ver por ejemplo [7, 10, 18, 26, 27, 28, 31].

Ejemplo 1 *Las ecuaciones (2.3) no son más que la ecuación de Euler para el cuerpo rígido en $\mathbb{R}^3$, si se identifica a $\vec{r}$ con el momento angular $\vec{L}$, a H_1 y H_2 con la energía cinética total y el cuadrado del momento angular respectivamente en el marco de referencia del cuerpo fijo [16, 26], es decir, si se consideran* *como los Hamiltonianos*

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{L_x^2}{I_x}+\frac{L_y^2}{I_y}+\frac{L_z^2}{I_z}\right), \\ H_2 &= \frac{1}{2}\left(L_x^2+L_y^2+L_z^2\right), \end{aligned}$$

entonces se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dL_x}{dt} &= \left(\frac{1}{I_y}-\frac{1}{I_z}\right)L_yL_z, \\ \frac{dL_y}{dt} &= \left(\frac{1}{I_z}-\frac{1}{I_x}\right)L_zL_x, \\ \frac{dL_z}{dt} &= \left(\frac{1}{I_x}-\frac{1}{I_y}\right)L_xL_y, \end{aligned}$$

donde I_{x_i} *es el correspondiente momento de inercia en la dirección* x_i.

Ejemplo 2 *Si se consideran las dos funciones Hamiltonianas como*

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2), \\ H_2 &= \frac{1}{2}(k^2x_1^2+x_3^2), \end{aligned}$$

siendo k *un parámetro de las ecuaciones que cumple la condición* $0 < k < 1$, *se tienen las ecuaciones de movimiento de Nambu para el sistema* $\{x_i\}$ *dadas por*

$$\dot{x}_1 = x_2x_3, \qquad \dot{x}_2 = -x_3x_1, \qquad \dot{x}_3 = -k^2x_1x_2.$$

Dadas estas ecuaciones de movimiento para el conjunto $\{x_i\}$, *se puede ver que existe un isomorfismo entre este triplete y las funciones elípticas de Jacobi* $sn(\phi|\kappa), cn(\phi|\kappa), dn(\phi|\kappa), (0 < \kappa <$

1), *siendo* κ *un parámetro de la deformación elíptica de las funciones seno-coseno [1], dicho isomorfismo está dado por el siguiente mapeo*

$$x_1 \mapsto sn(\phi|\kappa), \qquad x_2 \mapsto cn(\phi|\kappa), \qquad x_3 \mapsto dn(\phi|\kappa),$$

Es decir, se tiene el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi} sn(\phi|\kappa) &= cn(\phi|\kappa) dn(\phi|\kappa), \\ \frac{d}{d\phi} cn(\phi|\kappa) &= -dn(\phi|\kappa) sn(\phi|\kappa), \\ \frac{d}{d\phi} dn(\phi|\kappa) &= -\kappa sn(\phi|\kappa) cn(\phi|\kappa). \end{aligned}$$

Las funciones elípticas de Jacobi cumplen dos relaciones algebraicas entre sí, a saber,

$$sn^2(\phi|\kappa) + cn^2(\phi|\kappa) = 1, \qquad dn^2(\phi|\kappa) + \kappa sn^2(\phi|\kappa) = 1,$$

y además en el límite $\kappa \to 0$ *obedecen*

$$sn(\phi|\kappa) \to \sin(\phi), \qquad cn(\phi|\kappa) \to \cos(\phi), \qquad dn(\phi|\kappa) \to 1.$$

Estas funciones elípticas serán de utilidad en el Capítulo (4) para establecer una factorización para las ecuaciones de movimiento del 4-momento en el caso del oscilador armónico [36].

Ejemplo 3 *Ahora se considera el caso del oscilador armónico bidimensional. El Hamiltoniano clásico esta dado por* [1]

$$H = \sum_{i=1}^{2} (p_i^2 + q_i^2).$$

[1] En un sistema de coordenadas apropiado.

Entendiendo al conjunto $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$ *como un espacio fase de cuatro dimensiones, entonces siguiendo la formulación de Nambu se necesitan tres invariantes, o bien integrales de movimiento, para obtener las ecuaciones dinámicas para las coordenadas del espacio fase. Tomando en cuenta las cantidades*

$$L_{ij} = q_i p_j - q_j p_i, \qquad A_{ij} = p_i p_j + q_i q_j, \qquad \{i,j\} \to \{1,2\},$$

las cuales son integrales del movimiento; $L_{12} = -L_{21}$ *es el momento angular del sistema, mientras que los* A_{ii} *son las energías de los osciladores unidimensionales por separado, así mismo se puede demostrar que los* $A_{ij}, i \neq j$ *son también integrales de movimiento. Por lo tanto se tienen cuatro integrales de movimiento, explícitamente,*

$$\begin{aligned} H_1 &= p_1^2 + q_1^2, \\ H_2 &= p_2^2 + q_2^2, \\ H_3 &= q_1 p_2 - q_2 p_1, \\ H_4 &= p_1 p_2 + q_1 q_2. \end{aligned}$$

Esto parecería contradecir el número de invariantes necesarios, pero se puede comprobar que existe una relación funcional entre ellos, de hecho se cumple la relación $H_1 H_2 - H_3 - H_4 = 0$*, por lo cual el número de invariantes linealmente independientes se reduce a tres. Siendo así se tiene las ecuaciones de movimiento de la forma (2.9) donde se sustituye el conjunto* $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ *con el conjunto* $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$*, obteniendose las ecuaciones*

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{-1}{H_2}\left(\frac{\partial H_2}{\partial p_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\frac{\partial H_4}{\partial q_2} - \frac{\partial H_2}{\partial q_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\frac{\partial H_4}{\partial p_2} + \frac{\partial H_2}{\partial q_2}\frac{\partial H_3}{\partial p_2}\frac{\partial H_4}{\partial q_1}\right) = -2q_1,$$

$$\begin{aligned}
\frac{dq_1}{dt} &= \frac{-1}{H_2}\left(\frac{\partial H_2}{\partial q_2}\frac{\partial H_3}{\partial p_1}\frac{\partial H_4}{\partial p_2} - \frac{\partial H_2}{\partial p_1}\frac{\partial H_3}{\partial p_2}\frac{\partial H_4}{\partial q_2} + \frac{\partial H_2}{\partial p_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\frac{\partial H_4}{\partial p_1}\right) = +2p_1,\\
\frac{dp_2}{dt} &= \frac{1}{H_1}\left(\frac{\partial H_1}{\partial q_1}\frac{\partial H_4}{\partial q_2}\frac{\partial H_3}{\partial p_1} - \frac{\partial H_1}{\partial q_2}\frac{\partial H_4}{\partial p_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{\partial H_1}{\partial p_1}\frac{\partial H_4}{\partial q_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\right) = -2q_2,\\
\frac{dq_2}{dt} &= \frac{1}{H_1}\left(\frac{\partial H_1}{\partial p_1}\frac{\partial H_4}{\partial p_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_1} - \frac{\partial H_1}{\partial p_2}\frac{\partial H_4}{\partial q_1}\frac{\partial H_3}{\partial p_1} + \frac{\partial H_1}{\partial q_1}\frac{\partial H_4}{\partial p_1}\frac{\partial H_3}{\partial p_2}\right) = +2p_2,
\end{aligned}$$

donde por comodidad se toman en cuenta los tripletes de funciones Hamiltonianas $\{H_2, H_3, H_4\}$ *y* $\{H_1, H_4, H_3\}$ *para los pares de coordenadas* $\{p_1, q_1\}$ *y* $\{p_2, q_2\}$*, respectivamente. Esta elección en los tripletes es permitida debido a la relación existente entre los cuatro invariantes. Además los factores* $1/H_2$ *y* $1/H_1$ *se consideran en ambos casos por normalización.*

Por otro lado, si se definen las funciones

$$S_1 = (A_{12} + A_{21})/2, \qquad S_2 = (A_{22} - A_{11})/2, \qquad S_3 = L_{12}/2,$$

entoces se puede ver que se cumple la relación

$$[S_i, S_j] = \epsilon_{ijk} S_k,$$

que son las relaciones de conmutación que obedece el álgebra de Lie $SU(2)$*. De esta forma queda manifiesta la relación entre los invariantes integrales de un problema físico y un cierto grupo de simetria. Generalizando este resultado se puede examinar en el mismo sentido el caso del oscilador armónico n-dimensional, donde se consideran las integrales de movimiento dadas por*

$$L_{ij} = q_i p_j - q_j p_i, \qquad A_{ij} = p_i p_j + q_i q_j, \qquad \{i,j\} \to \{1, \ldots, n\},$$

los cuales generan, analogamente, las relaciones de conmutación para el álgebra con 2n-1 generadores $SU(n)$ *[7].*

Dados estos ejemplos se justifica el considerar la Mecánica de Nambu como un terreno abierto para explorar los problemas físicos desde este punto de vista, así como una posible dirección en la cúal las Mecánicas, ya sea Clásica o Cuántica [3, 8, 11], podrían ser desarrolladas.

Por otro lado, para incluir sistemas de muchas partículas en este formalismo, se puede considerar de manera más general un conjunto de tripletes canónicos $\vec{r}_n$ $(n = 1, \ldots, N)$, que formen un espacio fase $3N$-dimensional, para el cual se escribirán las ecuaciones de movimiento

$$\frac{dF}{dt} = \sum_n \frac{\partial(F, H, G)}{\partial(x_n, y_n, z_n)}. \tag{2.11}$$

2.1 Transformaciones Canónicas y de Norma.

Se entiende por transformaciones canónicas todo aquel mapeo entre coordenadas $(x, y, z) \mapsto (x', y', z')$ tal que se preserve la estructura de las ecuaciones de Nambu. Dicha invarianza constituye un restricción sobre los posibles mapeos entre coordenadas, por lo cual tomaremos la siguiente definición.

Definición 1 *de* **Transformación Canónica.**. *Al mapeo* $(x, y, z) \mapsto (x', y', z')$ *se le llama Transformación Canónica si*

$$[x', y', z'] = \frac{\partial(x', y', z')}{\partial(x, y, z)} = 1. \tag{2.12}$$

Por lo tanto, bajo transformaciones canónicas, las ecuaciones de Nambu permanecen invariantes (covariantes) si se usa el nuevo sistema de variables, dado que se tiene

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial(F,H,G)}{\partial(x,y,z)} = \frac{\partial(F,H,G)}{\partial(x',y',z')}.$$

En el mismo sentido, se puede ver que una transformación canónica debe dejar invariante también el bracket de Nambu-Poisson (2.7). Si examinamos ahora el caso para varios tripletes de Nambu y se define

$$[A,B,C] \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(A,B,C)}{\partial(x_k,y_k,z_k)} \tag{2.13}$$

como la generalización de (2.7), entonces se cumplen para las variables *canónicas* las siguientes propiedades

$$[x_l, y_m, z_n] = \begin{cases} 1 & si\ l = m = n \\ 0 & otro\ caso \end{cases} \tag{2.14}$$

$$[x_l, x_m, z_n] = [x_l, x_m, x_n] = 0$$

Por otro lado, existen otro tipo de transformaciones que dejan las ecuaciones de Nambu invariantes, las cuales se definen de la siguiente manera

Definición 2 *de* **Transformación de Norma.** *Sean (H,G) y (H',G') dos conjuntos de funciones. Si existe una relación funcional entre estos dos conjuntos, es decir, $H' = h(H,G)$, $G' = g(H,G)$, se dice que existe una transformación de Norma si se cumple*

$$\frac{\partial(H',G')}{\partial(H,G)} = 1. \tag{2.15}$$

De esta manera, el hecho de que en una transformación de Norma se cumpla para cada par

$$\frac{\partial(H',G')}{\partial(x_i,x_j)} = \frac{\partial(H,G)}{\partial(x_i,x_j)},$$

garantiza que las ecuaciones de Nambu se conservan.

Ejemplo 4 *Como un ejemplo de los tipos de transformaciones que hemos visto en este sección, se consideran las transformaciones lineales, o bien en notación matricial* $\vec{r'} = A\vec{r}$. *El hecho de considerar una transformación canónica entre* $\{r'_n\}$ *y* $\{r_n\}$, *implica que la matriz A debe de ser unimodular, es decir,* $\det A = 1$. *Por esta razón, se dice que las transformaciones lineales canónicas forman el grupo* $SL(3,\mathbb{R})$. *Para generar dichas transformaciones podemos tomar H y G como funciones lineal y cuadrática en* $\vec{r}$ *respectivamente*

$$H = \sum_i a_i r_i, \qquad G = \sum_{i,j} \frac{1}{2} r_i B_{ij} r_j,$$

donde B_{ij} *es una matriz simétrica de* 3×3. *Siguiendo las ecuaciones de Nambu, se tiene*

$$\dot{\vec{r}} \equiv \vec{r'} = \vec{a} \times (B\vec{r}),$$

o bien

$$\dot{r}_i = \sum_{j,k,l} \epsilon_{jkl} a_j B_{kl} r_l,$$

con lo cual se tiene

$$A_{ik} = \sum_{j,l} \epsilon_{ijl} a_j B_{lk}.$$

Además el número de parámetros independientes es 3 para H y 6 para G, pero dado que existe una redundancia si consideramos la transformación de norma $H \to \lambda H$, $G \to G/\lambda$, entonces el número de parámetros se reduce a 8, que es el mismo número que para el grupo $SL(3, \mathbb{R})$.

2.2 Partícula libre relativista.

En esta sección se desarrollarán, a manera de ejemplo, las ecuaciones de movimiento para una partícula libre relativista, moviéndose en el espacio de Minkowski. Se encontrará, además, una relación explícita entre los formalismos de Hamilton y de Nambu [19]. En dicha relación, se verá que al considerar las ecuaciones de movimiento de Nambu se obtienen las ecuaciones *canónicas* así como las ecuaciones de ligadura para la partícula libre.

Sean $x^\mu (\mu = 0, \cdots, 3)$ las coordenadas del espacio de Minkowski con métrica $g_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$. Si se considera la densidad Lagrangiana para la partícula libre como

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu, \qquad \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \tag{2.16}$$

en donde τ es el tiempo propio de la partícula y se toma la convención de Einstein para la sumatoria, entonces dentro del formalismo de Hamilton se obtienen el momento conjugado a x^μ y la función Hamiltoniana de la forma

$$p^\mu \;=\; m\dot{x}^\mu, \tag{2.17}$$

$$H = \frac{1}{2m} p^\mu p_\mu. \tag{2.18}$$

Por otro lado, al considerar el esquema de Nambu, se define el triplete de coordenadas canónicas (q_1, q_2, q_3) en función de las coordenadas del espacio de Hamilton (x^μ, p^μ) de la siguiente manera

$$q_1 = \frac{1}{2} p_\mu p^\mu, \qquad q_2 = \frac{1}{2} x_\mu x^\mu, \qquad q_3 = x_\mu p^\mu. \tag{2.19}$$

Dado este mapeo $q_i = q_i(x^\mu, p^\mu)$ se puede considerar al Hamiltoniano H como función de q_i, por lo cual se cumple la relación

$$\frac{dq_i}{d\tau} = [q_i, H]_P = [q_i, q_k]_P \frac{\partial H}{\partial q_k}, \tag{2.20}$$

en donde $[\ ,\ ]_P$ es el bracket de Poisson. Dentro del formalismo de Nambu se tienen las ecuaciones de movimiento (2.9)

$$\frac{dq_i}{d\tau} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial H_1}{\partial q_j} \frac{\partial H_2}{\partial q_k}, \tag{2.21}$$

por lo cual, si se toma $H_2 = H$, se obtiene al comparar estas dos últimas ecuaciones, el resultado

$$[q_i, q_k]_P = \epsilon_{ijk} \frac{\partial H_1}{\partial q_j}. \tag{2.22}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.19) se encuentran las relaciones

$$[q_1, q_2]_P = -q_3, \qquad [q_1, q_3]_P = -q_1, \qquad [q_2, q_3]_P = -q_2,$$

lo cual, al sustituir en (2.22), nos lleva a

$$H_1(q) = \frac{1}{2} q_3^2 - 2 q_1 q_2,$$

por lo tanto, si se consideran el par de *Hamiltonianos* H_1, H_2 como

$$H_1 = \frac{1}{2}q_3^2 - 2q_1q_2 = -\frac{1}{4}M^{\mu\nu}M_{\mu\nu}, \tag{2.23}$$
$$H_2 = \frac{1}{2m}p^{\mu}p_{\mu} = \frac{1}{m}q_1, \tag{2.24}$$

en donde $M_{\mu\nu} \equiv x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu$, se obtienen las ecuaciones de Nambu

$$\frac{dq_1}{d\tau} = 0, \qquad \frac{dq_2}{d\tau} = \frac{1}{m}q_3, \qquad \frac{dq_3}{d\tau} = \frac{2}{m}q_1, \tag{2.25}$$

las cuales pueden ser escritas en términos de las coordenadas (x_μ, p_μ) como

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2}p_\mu p^\mu\right) = \dot{p}^\mu p_\mu = 0, \tag{2.26}$$
$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2}x_\mu x^\mu\right) = \dot{x}^\mu x_\mu = \frac{1}{m}x_\mu p^\mu, \tag{2.27}$$
$$\frac{d}{d\tau}(x_\mu p^\mu) = \dot{x}_\mu p^\mu + x_\mu \dot{p}^\mu = \frac{1}{m}p_\mu p^\mu. \tag{2.28}$$

De la ecuación (2.26) se tiene

$$p_\mu p^\mu = C, \tag{2.29}$$

en donde C es una constante de integración. Por otra parte, si se reescribe la ecuación (2.27) como

$$(p^\mu - m\dot{x}^\mu)x_\mu = 0 \tag{2.30}$$

y se considera que se cumple la relación

$$p^\mu - m\dot{x}^\mu = 0, \tag{2.31}$$

entonces la ecuación (2.29) se transforma en $m^2\dot{x}_\mu\dot{x}^\mu = C$. Dado que se cumple $\dot{x}_\mu\dot{x}^\mu = 1 (c = 1)$, se obtiene la ecuación de ligadura

$$p_\mu p^\mu = m^2. \tag{2.32}$$

De la misma manera, al considerar la ecuación (2.31) en (2.28) se tiene

$$\dot{p}^\mu x_\mu = 0, \tag{2.33}$$

por lo cual las ecuaciones de Nambu llevan directamente a las ecuaciones de movimiento para la partícula relativista libre

$$\dot{p}^\mu = 0. \tag{2.34}$$

De esta forma se concluye que al considerar la formulación de la Mecánica de Nambu para la partícula libre se obtienen tanto las ecuaciones de ligadura (2.32), así como las ecuaciones *canónicas* (2.31) y (2.34), siendo evidente la importancia de considerar el formalismo de Nambu en la resolución de problemas físicos.

Capítulo 3

Formalismo Geométrico de la Dinámica de Nambu.

En este capítulo se desarrolla la formulación intrinseca geométrica de la Mecánica de Nambu en un espacio fase de tres dimensiones con coordenadas $\vec{r} \equiv (x, y, z)$, y se verá, que esta formulación sobre el *Triplete de Nambu* nos permite estudiar desde un punto de vista más simple algunos tópicos de importancia para el desarrollo de dicha mecánica. Especialmente se pone énfasis en el desarrollo de los llamados invariantes integrales. Para llevar a cabo esto, primero se desarrollarán a manera de resumen, algunos conceptos de geometría diferencial que nos serán de utilidad. Se incluye además, a manera de generalización la formulación de la dinámica de Nambu en un espacio fase n-dimesional en términos de los brackets de Nambu-Poisson sobre una variedad. A dicha variedad se le llamará variedad de Nambu-Poisson.

Así mismo cabe notar que todos estos desarrollos se llevan a cabo en completa analogía con la mecánica Hamiltoniana sobre estructuras simplécticas en dimensión par [15]. Como es sabido, la versión geométrica de las ecuaciones de Hamilton construidas sobre una variedad M^{2n} está dada por la ecuación

$$i_X \omega_s = -dH$$

en donde X es un campo vectorial dinámico llamado *Estructura Hamiltoniana*, ω_s es la *Biforma Simpléctica*, i es el producto interno entre X y ω, y H es la función *Hamiltoniana*. Esta ecuación implica que para una vecindad U de un punto con coordenadas locales $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ se cumplan las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

Además, debido a los teoremas de Darboux y Pfaff se tiene que la variedad simpléctica puede ser escrita de la forma canónica $\omega_s = \sum_{k=1}^{n} dp_k \wedge dq^k$, lo cual tiene como consecuencia que se tenga $d\omega_s = 0$, en total acuedo con el *Lema de Poincaré*, $d^2 = 0$.

Comentarios sobre las limitaciones de dicha analogía se pueden ver en la literatura [12, 13, 28].

Sea M^n una variedad diferenciable de dimensión n. Para todo punto $y \in M^n$ se tienen dos espacios duales indistinguibles entre sí, a saber,

$V \equiv$ *Espacio Tangente*; $\qquad \Lambda \equiv$ *Espacio cotangente*, cuyas expresiones locales, dada una base de una vecindad abierta U al punto $y = y(x_1, x_2, \ldots x_n)$, son

$$V = a^i \partial_{x_i},\ (vectores); \qquad \Lambda = b^i d_{x_i},\ (1 - formas).$$

Además, si tomamos en cuenta el producto de Clifford sobre estos espacios es posible generar nuevas estructuras como $\bigwedge^q(V) \equiv$ Espacio de los Multivectores (o bien q-vectores) y $\bigwedge^p(\Lambda) \equiv$ Espacio de las Multiformas (o p-formas), quedando ímplicito de esta forma la riqueza que se tiene en el tratamiento geométrico [15, 23].

Definición 3 *de* **Estructura Simpléctica**. *Sea M^{3n} una variedad de dimensión $3n$. Una Estructura Simpléctica sobre M^{3n} se define como aquella variedad en la cual es posible encontrar una forma diferencial $\omega \in \Lambda^3(M)$, de grado 3 y de clase constante $3n$.*

Definición 4 *A la estructura (M^{3n}, ω) se le llama* **Variedad Simpléctica** *y a ω se le llama* **Forma Simpléctica**.

Si U es un abierto de M^{3n}, entonces $(U, \omega \mid_U)$ es una variedad simpléctica. Además se cumple para todo punto $y \in M^{3n}$ que $(T_y(M), \omega_y)$ es un espacio vectorial simpléctico.

Proposición 1 *Sea ω una forma diferencial de grado 3 sobre M^{3n}. Para que ω sea una forma simpléctica es suficiente y necesario que ω^n sea una forma volumen Γ sobre M^{3n}.*

Sea (M^{3n}, ω) una variedad simpléctica, entonces para todo $\alpha \in \Lambda^2(M)$ se designará como X_α al campo vectorial sobre M^{3n} tal que $\alpha = i_{X_\alpha}\omega$ siendo i el producto interno entre X_α y ω.

Definición 5 *Un* **Sistema Hamiltoniano** *sobre* (M^{3n}, ω) *es un campo vectorial* X *sobre* M^{3n}*, tal que* $i_X\omega$ *sea una biforma de Pfaff.*

Definición 6 *Si* $i_X\omega$ *es una forma exacta, los* **Hamiltonianos de** X *son áquellas funciones diferenciables sobre* M^{3n}*,* H_1 *y* H_2*, tales que* $i_X\omega = dH_1 \wedge dH_2$.

Para que un campo de vectores X sobre (M^{3n}, ω) sea un sistema Hamiltoniano es necesario y suficiente que $\pounds_X\omega = 0$, donde se entiende por $\pounds$ la derivada de Lie de ω con respecto al campo vectorial X.

Considerando lo desarrollado hasta aquí, ahora se busca una 3-forma que nos sirva de candidata como la forma simpléctica ω, que es necesaria para tener una variedad simpléctica y se propone como primer intento, en analogía al caso Hamiltoniano

$$i_X\omega = dH_1 \wedge dH_2 \tag{3.1}$$

como la versión geométrica de las ecuaciones de Nambu.

A continuación se verán algunas razones por las cuales la ecuación (3.1) no es una buena candidata para representar la versión geométrica de las ecuaciones de Nambu. Sean $\{x_i\}, \{y_i\}$

y $\{z_i\}$ una base para el espacio vectorial V y sean $\{dx_i\}, \{dy_i\}$ y $\{dz_i\}$ la correspondiente base para el espacio vectorial Λ. Al conjunto $\{x_i, y_i, z_i\}$ se le llamará sistema de coordenadas canónico.

Una 3-forma ω en un punto $P \in M^{3n}$ puede ser interpretada como el mapeo lineal

$$\omega_P : V_P \to \bigwedge^2(\Lambda_P), \qquad v \mapsto i_v\omega_P \tag{3.2}$$

(V_P es el espacio Tangente en P, $\bigwedge^2(\Lambda_P)$ es el espacio de 2-formas en P). Como en general $\dim V_P < \dim \bigwedge^2(\Lambda_P)$ para $n > 1$, entonces el campo de 2-formas $i_{X_P}\omega_P$ no es general y no puede por lo tanto ser igualado con $dH_1 \wedge dH_2$ sin imponer algunas restricciones tanto en H_1 como en H_2. Sin embargo no se tiene ninguna restricción sobre H_1 o H_2, por lo cual se muestra que esta elección de ω es inconsistente para H_1 y H_2 arbitrarios. También se puede ver que $i_{X_P}\omega_P$ no contiene productos de la forma $dx_a^i \wedge dx_b^j, a \neq b$ mientras que $dH_1 \wedge dH_2$ en general los contiene.

Por otro lado, si escogemos en analogía con la versión Hamiltoniana, la 3-forma $\omega \in \Lambda^3$ como

$$\omega = \sum_i dx_i \wedge dy_i \wedge dz_i, \tag{3.3}$$

Es fácil ver que debido al lema de Poincaré se cumple $d\omega = 0$, siendo esto una caracteristica importante de ω pues nos asegura que ω es cerrada y tiene rango máximo. A pesar de esto (3.3) no es de utilidad en nuestro caso, ya que la 3n-forma

$\omega \wedge \cdots \wedge \omega$, quién sería la única candidata para la forma volumen $\Gamma \equiv dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$, es idénticamente cero debido a las propiedades del producto $\wedge$. Esto esta en contradiccón con el Teorema de Liouville, dado que no existe forma volumen invariante. Por esta razón (3.1), (3.3) no pueden representar la versión geométrica de las ecuaciones de Nambu (2.4) y por lo tanto se propondrá a continuación una nueva versión.

Para esto, primero definamos la derivada exterior parcial (k-ésimo triplete) d_k, $k = 1, \ldots, n$, que opera de la siguiente manera: Si

$$\sigma = \sigma_{j_1 \cdots j_p} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} \equiv \sigma_J dx^J$$

es cualquier p-forma, entonces se tiene

$$d_k \sigma := \sum_i \frac{\partial \sigma_J}{\partial x_k^i} dx_k^i \wedge dx^J \qquad (i = \{x, y, z\} = \{x^1, x^2, x^3\}). \quad (3.4)$$

De esta manera se tiene $d = d_1 + \cdots + d_n$ y además $d_k d_l = -d_l d_k$, por lo cual $d_k^2 = 0$.

Si ahora se definen n 3-formas como

$$\omega_k := dx_k^1 \wedge dx_k^2 \wedge dx_k^3 \qquad (3.5)$$

entonces es fácil demostrar que

$$i_X \omega_k = d_k H_1 \wedge d_k H_2, \qquad k = 1, \ldots, n \qquad (3.6)$$

es equivalente a (2.4) y por lo tanto representa la formulación geométrica de las ecuaciones de Nambu para el k-ésimo triplete.

Considerando (3.6) se puede ver que hemos separado nuestro espacio M^{3n} en tripletes individuales. Además esta definición para nuestra 3-forma ω_k no contradice en nada la Proposición (1), por lo cual podemos tener una forma volumen Γ diferente de cero, a saber,

$$\Gamma \equiv \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k \wedge \cdots \wedge \omega_n. \tag{3.7}$$

Consideremos un sistema coordenado sobre un conjunto abierto $U \in M^{3n}$, por ejemplo $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n)$, tal que se cumpla $\alpha = i_{X_\alpha}\omega_k$ con ω_k dada por la ecuación (3.5), entonces considerando que localmente se tiene $\alpha = \sum_i (a_i dx_i \wedge dy_i + b_i dy_i \wedge dz_i + c_i dz_i \wedge dx_i)$, se puede ver que la expresión para el campo vectorial X_α esta dada por

$$X_\alpha = b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c_i \frac{\partial}{\partial y_i} + a_i \frac{\partial}{\partial z_i} \tag{3.8}$$

Además, para el caso especial en el que $\alpha = d_k H_1 \wedge d_k H_2$, es decir, α cumple la ecuación de Nambu (3.6), entonces la expresión local del sistema hamiltoniano X asociado a α es

$$\begin{aligned} X \;=\; & \left(\frac{\partial H_1}{\partial y_k}\frac{\partial H_2}{\partial z_k} - \frac{\partial H_1}{\partial z_k}\frac{\partial H_2}{\partial y_k}\right)\frac{\partial}{\partial x_i} \\ + & \left(\frac{\partial H_1}{\partial z_k}\frac{\partial H_2}{\partial x_k} - \frac{\partial H_1}{\partial x_k}\frac{\partial H_2}{\partial z_k}\right)\frac{\partial}{\partial y_i} \\ + & \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_k}\frac{\partial H_2}{\partial y_k} - \frac{\partial H_1}{\partial y_k}\frac{\partial H_2}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial z_i}\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

De esto se puede ver, que las curvas integrales de X son las soluciones a las ecuaciones de Nambu

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial y_k}\frac{\partial H_2}{\partial z_k} - \frac{\partial H_1}{\partial z_k}\frac{\partial H_2}{\partial y_k} = \frac{\partial(H_1, H_2)}{\partial(y_k, z_k)},$$

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial z_k}\frac{\partial H_2}{\partial x_k} - \frac{\partial H_1}{\partial x_k}\frac{\partial H_2}{\partial z_k} = \frac{\partial(H_1, H_2)}{\partial(z_k, x_k)}, \tag{3.10}$$
$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial x_k}\frac{\partial H_2}{\partial y_k} - \frac{\partial H_1}{\partial y_k}\frac{\partial H_2}{\partial x_k} = \frac{\partial(H_1, H_2)}{\partial(x_k, y_k)},$$

o bien, en notación vectorial

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\nabla} H_1 \times \vec{\nabla} H_2, \tag{3.11}$$

en total acuerdo con las ecuaciones (2.4). Este resultado nos muestra el poder y lo fundamental de la formulación geométrica, ya que las ecuaciones (2.3), que fueron postuladas por Nambu, aquí se obtienen al considerar la expresión local de nuestro campo vectorial.

Como se ha visto, a diferencia del caso Hamiltoniano, las ecuaciones de Nambu en forma geométrica sólo pueden ser establecidas, como tales, para el k-ésimo triplete, pero esto no es una gran limitación dado que nos es posible seguir estudiando los invariantes integrales, que se comentan a continuación.

3.1 Invariantes Integrales.

En esta sección se desarrollan los invariantes integrales a partir de la formulación geométrica de la dinámica de Nambu (3.6). En especial se verá que contrario al caso Hamiltoniano, no se tiene la serie de invariantes integrales absolutos de Poincaré-Cartan [14, 15], siendo en este caso la forma volumen Γ el único invariante integral de importancia, dado que nos permite establecer el Teorema de Liouville en el espacio fase correspondiente [12].

En el caso de las ecuaciones de Hamilton se tiene la siguiente serie para $\omega_s \equiv \sum_i dp_i \wedge dq_i$

$$\begin{aligned} \pounds_X \omega_s &= 0 \\ &\vdots \\ \pounds_X(\omega_s \wedge \cdots \wedge \omega_s) \equiv \pounds_X \omega_s^n &= 0, \end{aligned} \tag{3.12}$$

que resulta en los invariantes integrales de Poincaré-Cartan [14], definidos sobre una variedad M^{2k} en el espacio fase de la siguiente manera

$$I_{2k} \equiv \int_{M^{2k}} \omega_s^k, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{3.13}$$

Consideremos ahora el caso de la dinámica de Nambu, en donde se tiene

$$\pounds_X \omega_k = i_X(d\omega_k) + d(i_X\omega_k) = d(d_k H_1 \wedge d_k H_2) \neq 0, \tag{3.14}$$

en general, ya que $dd_k \neq 0$, y similarmente para $\omega = \sum_k \omega_k$ (ver (3.3)) se cumple

$$\pounds_X \omega = \sum_{k=1}^{n} d(d_k H_1 \wedge d_k G) \neq 0, \tag{3.15}$$

lo cual significa que ninguna de las siguientes integrales es invariante con respecto a la evolución temporal en el espacio fase

$$(I_3)_k := \int_{M^3} \omega_k, \qquad I_3 := \int_{M^3} \omega.$$

De la misma forma se verifica que ninguno de los productos cuña entre 3-formas, es decir $\omega_k \wedge \omega_l, \omega_k \wedge \omega_l \wedge \omega_j, \ldots$, es invariante, excepto por el último de la serie, o sea Γ:

$$\pounds_X(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k \wedge \cdots \wedge \omega_n) = \pounds_X \Gamma = 0. \tag{3.16}$$

de esta manera se tiene el equivalente al Teorema de Liouville (2.1)

$$I_{3n} := \int_{M^{3n}} \Gamma = cte. \tag{3.17}$$

La conclusión es, por lo tanto, que no existen invariantes integrales para el espacio fase 3n-dimensional, excepto por el elemento de volumen en dicho espacio, lo cual esta en pleno acuerdo con el Teorema de Liouville. Así mismo, es importante recalcar que para un triplete de Nambu dado, digamos el k-ésimo, es posible tener toda la serie de invariantes integrales de Poincaré-Cartan si se considera el subespacio formado por dicho triplete (subconjunto de M^{3n}) como un espacio por derecho propio. En especial, para el caso $n = 1$ se tiene un solo triplete, por lo cual la derivada exterior y su análoga parcial coinciden, por lo cual se tiene dicha serie de invariantes, exactamente como en el caso Hamiltoniano.

3.2 Variedades de Nambu-Poisson.

Como es conocido para el caso de la Mecánica Hamiltoniana el desarrollo dinámico de una función se lleva a cabo por medio de su bracket de Poisson. Análogamente para el caso de la Mecánica de Nambu, se tiene el bracket de Nambu-Poisson n-dimensional (2.10), el cual es el responsable de la dinámica de una función arbitraria. En esta sección se desarrollará la formulación geométrica del bracket de Nambu-Poisson sobre una variedad a la cual se denominará *Variedad de Nambu-Poisson* [2, 7, 8, 11, 34].

En Mecánica Hamiltoniana se les llama *Variedad de Poisson* a una variedad diferenciable X y *Álgebra de observables* al conjunto A de funciones infinitamente diferenciables definidas sobre la variedad X, es decir $A \in C^{\infty}(X)$, si existe un mapeo $[\ ,\ ] : A \otimes A \mapsto A$ tal que se cumplan las siguientes condiciones

1. Antisimetría
$$[f_1, f_2] = -[f_2, f_1].$$
2. Regla de Leibniz (propiedad de derivación)
$$[f_1 f_2, f_3] = f_1[f_2, f_3] + [f_1, f_3]f_2.$$
3. Identidad de Jacobi
$$[f_1, [f_2, f_3]] + [f_2, [f_3, f_1]] + [f_3, [f_1, f_2]] = 0.$$

para toda función $f_1, f_2, f_3 \in A$. A esta operación binaria se le llama *Bracket de Poisson*. El bracket de Poisson juega un papel fundamental en la Mecánica Hamiltoniana, ya que si se tiene un Hamiltoniano H, tal que cumpla la ecuación $i_X \omega_s = -dH$, entonces se cumplen las ecuaciones de movimiento de Hamilton con respecto al parámetro t
$$\frac{df}{dt} = [H, f], \qquad f \in A.$$

El ejemplo típico de una variedad de Poisson está dado por el espacio fase bidimensional $X = I\!R^{2n}$ con coordenadas $(p_1, \ldots, p_n, q^1, \ldots, q^n)$ y el bracket de Poisson dado por

$$[f_1, f_2] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial f_2}{\partial q^i} - \frac{\partial f_1}{\partial q^i} \frac{\partial f_2}{\partial p_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(p_i, q^i)},$$

en donde se tiene $f_1, f_2 \in C^\infty(X)$.

Para el caso de la Mecánica de Nambu es necesario sustituir el bracket de Poisson por una operación n-aria en el álgebra de observables A, y se requiere de n-1 *hamiltonianos* $(H_1, \ldots, H_{n-1})$ para describir la evolución de cualquier función en A, con respecto a cierto parámetro . Para esto se considera la siguiente definición

Definición 7 *de* **Variedad de Nambu-Poisson.** *Una variedad X es llamada Variedad de Nambu-Poisson de orden n (o n-dimensional), si existe un mapeo $[\ ,\ldots,\ ] : A^{\otimes^n} \mapsto A$ tal que obedezca las siguientes propiedades ($\forall f_1, \ldots, f_{2n-1} \in A$)*

1. *Antisimetría*

$$[f_1, \ldots, f_n] = (-1)^{\epsilon(\sigma)} [f_{\sigma(1)}, \ldots, f_{\sigma(n)}],$$

siendo $\sigma \in Symm(n)$ y ϵ es la paridad de la permutación σ [1].

2. *Regla de Leibniz (propiedad de derivación)*

$$[f_1 f_2, f_3, \ldots, f_n] = f_1[f_2, f_3, \ldots, f_n] + [f_1, f_3, \ldots, f_n] f_2.$$

[1] $Symm(n)$ es el grupo de simetría de n elementos.

3. Identidad Fundamental

$$\begin{aligned} & [[f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n], f_{n+1}, \ldots, f_{2n-1}] \\ + \quad & [f_n, [f_1, \ldots, f_{n-1}, f_{n+1}], f_{n+2}, \ldots, f_{2n-1}] \\ + \cdots + \quad & [f_n, \ldots, f_{2n-2}, [f_1, \ldots, f_{n-1}, f_{2n-1}]] \\ = \quad & [f_1, \ldots, f_{n-1}, [f_n, \ldots, f_{2n-1}]]. \end{aligned}$$

Es importante señalar que el bracket de Nambu-Poisson de orden n en un espacio fase X induce, debido a la Identidad Fundamental, una familia de estructuras *subordinadas* de Nambu de orden n-1 y menores, incluyendo la familia de las estructuras de Poisson. Por ejemplo, si se considera el caso n=3 y para $H \in A$ se define el bracket $[\ ,\ ]_H$ en la variedad tridimensional X como

$$[\psi, \phi]_H \equiv [H, \psi, \phi] \qquad \forall \psi, \phi \in A, \tag{3.18}$$

se puede ver que al considerar $f_1 = f_3 = H$ en la Identidad Fundamental, se recupera la identidad de Jacobi para la familia de brackets $[\ ,\ ]_H$ parametrizados por la función H. Es en este sentido como se entiende la *subordinación* de las estructuras de Nambu de menor orden. Así mismo, es posible reproducir estructuras de Nambu de orden n a partir del bracket de Poisson [34]. En el caso más general se tiene $\forall H_1, \ldots, H_{n-k} \in A$ la relación

$$[f_1, \ldots, f_k]_{H_1 \ldots H_{n-k}} = [H_1, \ldots, H_{n-k}, f_1, \ldots, f_k] \tag{3.19}$$

entre el Bracket de Nambu-Poisson de orden n y la estructura de Nambu de orden n-k. Con esto se define una jerarquía de estructuras *subordinadas* de Nambu de dimensionalidades $k = 2, \ldots, n-1$, parametrizadas por los elementos $H_1, \ldots, H_{n-k}$.

Obviamente, todas estas nuevas estructuras satisfacen la Identidad Fundametal, puesto que fueron justificadas a partir de ella.

Por otra parte, de la misma manera que para el caso del bracket de Poisson, la dinámica en la variedad de Nambu-Poisson está determinada por n-1 funciones $H_1, \ldots, H_{n-1}$ (con respecto al parámetro t)

$$\frac{df}{dt} = [H_1, \ldots, H_{n-1}, f], \qquad \forall f \in A. \tag{3.20}$$

Considerando esto se tiene la siguiente definición en términos del bracket de Nambu-Poisson

Definición 8 *de* **Integral de Movimiento.** *Un observable $F \in A$ es llamado integral de movimiento en la variedad de Nambu-Poisson de orden n con hamiltonianos $H_1, \ldots, H_{n-1} \in A$, si*

$$[H_1, \ldots, H_{n-1}, F] = 0. \tag{3.21}$$

Considerando esta definición, se tiene como resultado de la Identidad Fundamental el siguiente corolario

Corolario 2 *El bracket de Nambu-Poisson de n integrales de movimiento es una integral de movimiento.*

La Identidad Fundamental impone fuertes restricciones sobre las posibles formas del bracket de Nambu-Poisson. Por esta razón la estructura de Nambu es más rígida que su contraparte de Poisson. Esto se puede ver por simple comparación de la Identidad Fundamental con la Identidad de Jacobi (el caso de la Identidad Fundamental con n=2). La identidad de Jacobi es una derivación con respecto a todos sus argumentos, imponiendoles una especie de simetría; la Identidad Fundamental es una derivación solamente para los argumentos $f_n, \ldots, f_{2n-1}$, mientras que no lo es para los argumentos $f_1, \ldots, f_{n-1}$, de aquí que en la Identidad Fundamental se haga una distinción entre los dos conjuntos de funciones.

En particular, si se toma $X = I\!R^n$ como el espacio fase, cuyas coordenadas locales están dadas por $x_1, \ldots, x_n$, el bracket de Nambu-Poisson, esta dado por

$$[f_1, \ldots, f_n] = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}, \tag{3.22}$$

donde el lado derecho de la igualdad es el mapeo Jacobiano $f = (f_1, \ldots, f_n) : I\!R^n \mapsto I\!R^n$. Este bracket de Nambu-Poisson coincide con las ecuaciones de movimiento generalizadas de Nambu (2.10).

Capítulo 4

Nambu Relativista.

4.1 Modelo e Interpretación Física de Yamaleev.

Consideremos simplificadamente el sistema de Nambu en el espacio fase tridimensional dado por el triplete $\{x, p, q\}$ bajo la siguiente interpretación: consideraremos que el sistema físico formado por una partícula real *corporal* de masa m ubicada en el sitio dado unidimensionalmente por la coordenada x, corresponde a un *sistema de composición* formado por dos sub-partículas con impulsos p y q, y masas m_p, m_q, respectivamente; la situación es directamente generalizable al espacio tridimensional. Entonces, tendremos dos hamiltonianos de Nambu que postulamos dados por las mismas expresiones clásicas

$$
\begin{aligned}
H_1 = H_p &= \frac{p^2}{2m_p} + V(x), \\
H_2 = H_q &= \frac{q^2}{2m_q} + V(x),
\end{aligned}
$$

por lo que al desarrollar las ecuaciones de Nambu

$$\frac{dq_i}{d\tau} = \epsilon_{ijk}\frac{\partial H_1}{\partial q_j}\frac{\partial H_2}{\partial q_k}, \qquad i,j,k = 1,2,3,$$

obtenemos el sistema de ecuaciones que denominaremos *ecuaciones de Yamaleev*

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\tau} &= -\frac{dV}{dx}\frac{q}{m_q c}, \\ \frac{dq}{d\tau} &= -\frac{dV}{dx}\frac{p}{m_p c}, \\ \frac{dx}{d\tau} &= +\frac{p\,q}{m_p m_q}\frac{1}{c}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

y afirmamos que este sistema de ecuaciones es equivalente a las ecuaciones de movimiento relativistas. La constante c con dimensiones de velocidad es introducida para homologar la dimensionalidad de las otras variables.

Relacionamos el impulso P de la partícula corporal con su velocidad, de la manera habitual

$$P = m\frac{dx}{d\tau}, \tag{4.2}$$

o bien, al comparar con el sistema de Yamaleev

$$P = \frac{p\,q}{2c\sqrt{m_p m_q}}, \qquad m = \sqrt{m_p m_q}/2. \tag{4.3}$$

Es fácil convencernos que contamos con dos constantes del movimiento, a saber

$$E_1 = H_1, \; y \qquad E_2 = H_2, \tag{4.4}$$

por ejemplo

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}E_1 &= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{p^2}{2m_p}+V(x)\right)\\ &= \frac{p}{m_p}\frac{dp}{d\tau}+V_x\frac{dx}{d\tau}=-V_x\left(\frac{pq}{m_pm_q}\frac{1}{c}-\frac{dx}{d\tau}\right)=0.(4.5)\end{aligned}$$

La energía total la definimos como el promedio aritmético

$$\frac{1}{2}(E_1+E_2)=E, \tag{4.6}$$

y obviamente la diferencia de energías es también otra constante del movimiento que identificamos como la masa en reposo

$$\frac{1}{2}(E_2-E_1)=\mathcal{M}c^2, \tag{4.7}$$

o sea

$$E_1=E-\mathcal{M}c^2,$$
$$E_2=E+\mathcal{M}c^2,$$

es importante no confundir esta constante del movimiento $\mathcal{M}$ ni con la masa relativista $I\!M$, ni con el parámetro m de las ecuaciones dinámicas.

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}E_1E_2 &= (E-\mathcal{M}c^2)(E+\mathcal{M}c^2)=E^2-(\mathcal{M}c^2)^2\\ &= \left(\frac{p^2}{2m_p}+V(x)\right)\left(\frac{q^2}{2m_q}+V(x)\right)\\ &= P^2c^2+2(E-V)V+V^2,\end{aligned} \tag{4.8}$$

o sea

$$(E-V)^2=P^2c^2+\mathcal{M}^2c^4, \tag{4.9}$$

o bien

$$E = \sqrt{P^2c^2 + \mathcal{M}^2c^4} + V(x), \tag{4.10}$$

que es la famosa fórmula de la energía relativista. Por tanto dos subpartículas en el formalismo de Nambu son equivalentes con una partícula inercial (corporal) relativista. Más aún, el formalismo es generalizable a partículas de masa cero, concepto que, estrictamente, en la mecánica clásica no existe[4]. De hecho una partícula de masa cero, como el fotón o el neutrino es de naturaleza relativista.

Hay que mencionar también que este sistema relativista de Nambu simultáneamente satisface una pareja de ecuaciones canónicas. Del conjunto de ecuaciones de Yamaleev tenemos

$$\begin{aligned} c\frac{d}{d\tau}(pq) &= -2V_x\left(\frac{p^2}{2m_p} + \frac{q^2}{2m_q}\right) \\ &= -\partial_x(2EV - V^2), \end{aligned} \tag{4.11}$$

o bien

$$\frac{d}{d\tau}P = \frac{-1}{2\mathcal{M}c^2}\partial_x(2EV - V^2) = -\frac{\partial W}{\partial x}, \tag{4.12}$$

o sea

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \tag{4.13}$$

$$\frac{dP}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, \tag{4.14}$$

con $\mathcal{H} = \frac{P^2}{2\mathcal{M}} + W$, $W = (2EV - V^2)/2\mathcal{M}c^2 = (E - \mathcal{M}c^2)(E + \mathcal{M}c^2)/2\mathcal{M}c^2$.

El conjunto de ecuaciones de Yamaleev lo podríamos expresar para el espacio tridimensional como

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{p}}{d\tau} &= -\vec{\nabla}V \times \frac{\vec{q}}{m_q c}, \\
\frac{d\vec{q}}{d\tau} &= -\vec{\nabla}V \times \frac{\vec{p}}{m_p c}, \\
\frac{d\vec{x}}{d\tau} &= +\frac{\vec{p} \times \vec{q}}{m_p m_q}\frac{1}{c}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Posteriormente exploraremos sistemáticamente otras diversas situaciones posibles.

4.2 La Partícula de Masa Cero.

Lo que es importante entender es que las ecuaciones dinámicas son válidas tanto para partículas *masivas* como para partículas *sin masa*. El caso de partículas masivas corresponde a la situación $\mathcal{M} = m \neq 0$, para partículas sin masa tenemos $\mathcal{M} = 0$. En cualquier caso, el parámetro de las ecuaciones dinámicas $m \neq 0$. Obsérvese que $\mathcal{M}$ es una constante del movimiento, no así m que es un parámetro dinámico.

Históricamente es Schrödinger [33] quien encuentra esta duplicidad en el valor de la masa, como constante del movimiento. Dada la ecuación de la geodésica

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds} = 0,$$

se encuentra como primera integral

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = C_1$$

por lo que $C_1 = 0$ para partículas sin masa y $C_1 = 1$ para partículas con masa.

De igual manera, en un campo gravitacional $\phi(r)$, las ecuaciones dinámicas relativistas se transforman en las ecuaciones para la cuadri-velocidad

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{d\tau} &= -\frac{d\phi}{d\vec{r}}\frac{u^0}{c}, & \frac{du_0}{d\tau} &= -\frac{d\phi}{d\vec{r}}\cdot\frac{\vec{u}}{c}, \\ \frac{d\vec{r}}{d\tau} &= \vec{u}, & \frac{cdt}{d\tau} &= u_0, \end{aligned}$$

con la primera integral

$$u_0^2 - \vec{u}^{\,2} = C_1$$

donde se tiene $C_1 = 0$ para las partículas sin masa y $C_1 = 1$ para las partículas masivas.

Ortodoxamente escribimos entonces la ecuación de la métrica del espacio como

$$(cdt)^2 - d\vec{r}^{\,2} = \frac{\mathcal{M}^2}{m^2}(cd\tau)^2. \tag{4.16}$$

Luego, si se toma $\mathcal{M} = m$, la ecuación (4.16) coincide con la definición del cuadrado del intervalo ds^2 en el espacio de Minkowski para partículas masivas. Si se toma $\mathcal{M} = 0$ se obtiene el cuadrado del intervalo para partículas sin masa (luminosas). En cualquier caso $m \neq 0$. De la relación $\mathcal{M}c^2 = \frac{1}{2}(E_q - E_p)$ vemos que la nulidad de la masa se describe también por la condición $m_p = m_q, \quad p^2 = q^2$.

4.3 El Oscilador Armónico Relativista.

Durante mucho tiempo no se pudo resolver la ecuación del oscilador como un sistema relativista. Con el formalismo de Yamaleev, esta solución es inmediata. Consideremos el oscilador unidimensional. La primera expresión que escribimos es la del impulso

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{P}{m}, \tag{4.17}$$

cuya factorización es de la forma $P = \alpha p q$, por lo que arribamos a la siguiente integral (ver [36])

$$\tau - \tau_0 = \int_{x(\tau_0)}^{x(\tau)} \frac{mc\, dx}{\sqrt{(\mathcal{E} - Mc^2 - V(x))(\mathcal{E} + Mc^2 - V(x))}}. \tag{4.18}$$

Para el caso del potencial oscilatorio $V(x) = m\omega^2 x^2/2$, la integral (4.18) se reduce a la integral eliptica

$$\phi - \phi_0 = \int_{y(\phi_0)}^{y(\phi)} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\kappa y^2)}}, \tag{4.19}$$

donde $\phi = \omega(\tau - \tau_0)\sqrt{(\mathcal{E} + Mc^2)/2mc^2}$ y $\kappa = (\mathcal{E} - Mc^2)/(\mathcal{E} + Mc^2)$. De esta integral elíptica se encuentran las soluciones en términos de las funciones elípticas de Jacobi para (4.17) dadas por

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{2(\mathcal{E} - Mc^2)}{m\omega^2}} sn(\phi \mid \kappa), \\ cP &= \sqrt{2\mathcal{E}^2 - (Mc^2)^2} cn(\phi \mid \kappa) dn(\phi \mid \kappa). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Estas soluciones se reducen a las soluciones no-relativistas del oscilador en el límite $c \to \infty$. En este límite se cumple $M = m$ y $\mathcal{E} \to mc^2 + \mathcal{E}_{nr}$, donde $\mathcal{E}_{nr}$ es la energía en el límite no-relativista. De cualquier forma, el límite $c \to \infty$ corresponde a $\kappa = 0$ en las funciones elipticas de Jacobi, las cuales a su vez se reducen en este límite a las funciones *seno-coseno*. Por lo tanto se obtienen las soluciones

$$x = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_{nr}}{mw^2}}\sin(\phi), \qquad p = \sqrt{2\mathcal{E}_{nr}m}\cos(\phi), \qquad \phi = \omega(t - t_0).$$

Como ya habíamos mencionado, las funciones elípticas de Jacobi satisfacen, de manera análoga a las funciones trigonométricas, las identidades

$$cn^2(\phi|k) + sn^2(\phi|k) = 1, \qquad dn^2(\phi|k) + k\, sn^2(\phi|k) = 1, \tag{4.21}$$

además, satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales, que equivalen al conjunto de ecuaciones de Yamaleev para $V = m\omega^2 x^2/2$, por lo que, gracias al formalismo, la solución se obtiene en este caso también por inspección

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi}cn(\phi|k) &= -sn(\phi|k)\, dn(\phi|k), \\ \frac{d}{d\phi}sn(\phi|k) &= dn(\phi|k)\, cn(\phi|k), \\ \frac{d}{d\phi}dn(\phi|k) &= -k\, sn(\phi|k)\, cn(\phi|k). \end{aligned} \tag{4.22}$$

4.4 Otras Perspectivas en la Factorización del Impulso Relativista.

En la sección anterior se restringió el movimiento para el caso unidimensional. En esta sección se desarrollarán las ecuaciones de movimiento para el espacio tridimensional, así como las correspondientes nuevas factorizaciones para el momento relativista. Para poder llevar a cabo este desarrollo será necesario incluir una extensión del par de variables unidimensionales $\{p, q\}$.

Además, se demandará que las ecuaciones para el nuevo sistema de variables extendido $\{p, q\}$ tengan una forma tal que las ecuaciones que cumpla el cuadri-vector de momento P^{α} correspondan a las ecuaciones del movimiento relativista (1.14, 1.15, 1.16). También es *deseable* que la transición de las ecuaciones para $\{p, q\}$ a las ecuaciones para P^{α} se cumplan sin ningúna restricción adicional.

Teniendo esto en cuenta se considerará al par $\{p, q\}$ como dos espacios vectoriales euclidianos de dimension D_p y D_q respectivamente. Se analizarán tres casos: (1) $D_p = 3, D_q = 1$ (vector-escalar); (2) $D_p = 3, D_q = 3$ (vector-vector); (3) $D_p = 4, D_q = 4$ (cuaternión-cuaternión). De estas tres factorizaciones se verá que solamente la última es posible formularla sin traer como consecuencia restricciones adicionales (ver [35, 37]).

Por conveniencia se tomará una nueva escala $p \to \frac{p}{\sqrt{2m_p}}, q \to \frac{q}{\sqrt{2m_q}}$ y se tomarán $c = 1$ y $\vec{U} \equiv -\vec{\nabla}V(r) = -\frac{dV(r)}{d\vec{r}}$, de tal forma que las ecuaciones del impulso resultan ser

$$P_0 = \frac{1}{2}(p^2 + q^2), \qquad \vec{P}^{\,2} = p^2 q^2 + cte. \tag{4.23}$$

Es de notarse que en esta ecuación tanto p^2 como q^2 deben de ser entendidos como los cuadrados de las longitudes de los vectores definidos en los espacios euclidianos D_p y D_q respectivamente, y así mismo se considerará la constante en la segunda ecuación de (4.23) como una constante de integración conveniente.

4.4.1 Factorización vector-escalar.

Comenzemos con el caso $D_p = 3, D_q = 1$, al cual llamaremos *factorización escalar-vector*. En este caso se tiene el par $\{\vec{p}, q\}$ y se postulan las siguientes ecuaciones de Yamaleev

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{d\tau} &= -\vec{U}\frac{q}{2m}, \\ \frac{dq}{d\tau} &= -\vec{U}\cdot\frac{\vec{p}}{2m}, \\ \frac{d\vec{r}}{d\tau} &= \frac{\vec{p}\,q}{m}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

De esta manera el cuadri-momento queda factorizado como

$$P_0 = \frac{1}{2}(\vec{p}^{\,2} + q^2), \qquad \vec{P}^{\,2} = \vec{p}^{\,2}q^2, \tag{4.25}$$

con lo que se tiene $\vec{P} \equiv \vec{p}q$. La correspondencia entre las ecuaciones de Yamaleev (4.24) y las ecuaciones de movimiento relativista (1.14-1.16) está sujeta a la condición auxiliar

$$\vec{U} \times \vec{p} = 0, \tag{4.26}$$

o sea, un movimiento paralelo a la dirección de la fuerza, con lo cual se limita la clase de trayectorias posibles para la partícula relativista, ya que se tiene

$$\frac{dV(r)}{d\vec{r}} \times \vec{P} = -\vec{U} \times \vec{P} = -(\vec{U} \times \vec{p})\,q = 0.$$

4.5 Las Ecuaciones de Maxwell como Ecuaciones de Movimiento.

Lo poderoso del formalismo de Nambu-Yamaleev es que con él podemos representar la dinámica tanto de partículas como de campos (relativistas).

Consideremos ahora el caso $D_p = 3, D_q = 3$, o bien la factorización *vector-vector* del momento. Para este caso se considera el par $\{\vec{p}, \vec{q}\}$ y de la misma manera se postulan las ecuaciones de Yamaleev

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{d\tau} &= -(\vec{U} \times \vec{q})\frac{1}{2m}, \\ \frac{d\vec{q}}{d\tau} &= +(\vec{U} \times \vec{p})\frac{1}{2m}, \\ \frac{d\vec{r}}{d\tau} &= (\vec{p} \times \vec{q})\frac{1}{m}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

De estas ecuaciones es posible encontrar cuatro constantes de movimiento

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2}(\vec{p}^{\,2} - \vec{q}^{\,2}), \qquad C_2 = \vec{p} \cdot \vec{q}. \\ \mathcal{E}_p &= \vec{p}^{\,2} + V(r), \qquad \mathcal{E}_q = \vec{q}^{\,2} + V(r). \end{aligned} \tag{4.28}$$

Por otro lado las ecuaciones (4.23) nos llevan a

$$P_0 = \frac{1}{2}(\vec{p}^{\,2} + \vec{q}^{\,2}), \qquad \vec{P}^{\,2} = \vec{p}^{\,2}\vec{q}^{\,2} - (\vec{p} \cdot \vec{q})^2. \tag{4.29}$$

La elección de la constante en esta ecuación se hace de acuerdo con la ecuación (4.28) y dado que esta elección nos permite utilizar la identidad vectorial $\vec{u}^{\,2}\vec{v}^{\,2} = (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + (\vec{u} \times \vec{v})^2$, entonces se puede definir $\vec{P} \equiv \vec{p} \times \vec{q}$. Además, para obtener las ecuaciones relativistas (1.14-1.16) es necesario utilizar las siguientes condiciones adicionales

$$\vec{U} \cdot \vec{p} = 0, \qquad \vec{U} \cdot \vec{q} = 0. \tag{4.30}$$

Estas condiciones limitan las trayectorias que puede seguir la partícula relativista, ya que

$$\frac{dV(r)}{d\vec{r}} \times \vec{P} = -\vec{U} \times \vec{P} = (\vec{U} \cdot \vec{p})\vec{q} - (\vec{U} \cdot \vec{q})\vec{p} = 0.$$

Concretamente, podemos identificar el conjunto de ecuaciones de Yamaleev (4.27) como las ecuaciones del fotón; para convencernos de ello escribimos a continuación las ecuaciones de Maxwell y establecemos la transformación bajo la cual ambos sistemas de ecuaciones son equivalentes, así como los valores de $P_0, \vec{P}$ y las expresiones para la densidad de energía y de momento (vector de Poynting) del campo electromágnetico. Dicha correspondencia queda manifiesta

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= -(\vec{\nabla} \times \vec{E}), & \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= +(\vec{\nabla} \times \vec{H}), \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0, \\ P_0 &= \frac{1}{2}(\vec{E}^{\,2} + \vec{H}^{\,2}), & \vec{P} &= \vec{E} \times \vec{H}, \\ L &= \frac{1}{2}(\vec{E}^{\,2} - \vec{H}^{\,2}), \end{aligned} \tag{4.31}$$

si, en especial, los campos electromágneticos se factorizan de la siguiente forma

$$\vec{E} = f(r)\vec{p}(t), \qquad \vec{H} = f(r)\vec{q}(t), \tag{4.32}$$

donde $f(r) = \exp(V(r)/2m)$, entonces las ecuaciones de Maxwell (en el caso $\tau = t$) se reducen a las ecuaciones de Nambu y recíprocamente, así como a las integrales de movimiento de dichas ecuaciones.

4.6 Las Ecuaciones del Neutrino como Extensión de las Ecuaciones de Maxwell.

A continuación haremos una extensión de los mapeos ya realizados con el objeto de construir nuestras ecuaciones sobre una base cuaterniónica. Introducimos entonces las siguientes dimensionalidades $D_p = 4, D_q = 4$, o bien el conjunto $\{\vec{p}, p_4; \vec{q}, q_4\}$ y postulamos que nuestro conjunto de variables obedece las siguientes ecuaciones de Yamaleev

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{d\tau} &= -([\vec{U}\times\vec{q}] - \vec{U}q_4)\frac{1}{2m}, & \frac{dp_4}{d\tau} &= -(\vec{U}\cdot\vec{q})\frac{1}{2m}, \\ \frac{d\vec{q}}{d\tau} &= ([\vec{U}\times\vec{p}] - \vec{U}p_4)\frac{1}{2m}, & \frac{dq_4}{d\tau} &= (\vec{U}\cdot\vec{p})\frac{1}{2m}, \\ \frac{d\vec{r}}{d\tau} &= (\vec{p}\times\vec{q} + \vec{p}q_4 - \vec{q}p_4)\frac{1}{m}, & \frac{dr_4}{d\tau} &= (\vec{p}\cdot\vec{q} + p_4q_4)\frac{1}{m}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Estas ecuaciones las identificaremos como las ecuaciones del Neutrino.

Los vectores construídos $(r_4, \vec{r}), (p_4, \vec{p}), (q_4, \vec{q})$ pertenecen obviamente a $I\!R^4$. Como en el caso anterior se tienen cuatro integrales de movimiento, a saber

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2}(\vec{q}^{\,2} + q_4^2 - \vec{p}^{\,2} - p_4^2), \qquad C_2 = \vec{p}\cdot\vec{q} + p_4 q_4. \\ \mathcal{E}_p &= \vec{p}^{\,2} + p_4^2 + V(r), \qquad \mathcal{E}_q = \vec{q}^{\,2} + q_4^2 + V(r). \end{aligned} \tag{4.34}$$

Luego construímos también por factorización nuestras variables relativistas como

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \frac{1}{2}(\vec{p}^{\,2} + p_4^2 + \vec{q}^{\,2} + q_4^2), \\
\vec{P}^{\,2} &= (\vec{p}^{\,2} + p_4^2)(\vec{q}^{\,2} + q_4^2) - (\vec{p}\cdot\vec{q} + p_4 q_4)^2, \qquad (4.35)
\end{aligned}
$$

al introducir a continuación la base cuaterniónica nos quedará claro por qué tenemos congruencia en la siguiente definición $\vec{P} \equiv \vec{p} \times \vec{q} + \vec{p}q_4 - \vec{q}p_4$. En este caso se puede ver que diferenciando P_0 y $\vec{P}$ con respecto al tiempo propio τ y utilizando las ecuaciones (4.33) se encuentran las ecuaciones relativistas (1.14-1.16) sin ninguna condición adicional.

El usar una base cuaterniónica para nuestras variables no es un hecho fortuito, sino que sabemos el papel que juegan los cuaterniones dentro del álgebra geométrica de Clifford y cómo inmersas en esta álgebra se encuentran las álgebras cuánticas de Pauli y de Dirac (Ver apéndices A y B, así como tesis de licenciatura [23]). Tradicional y modernamente fundamentamos estas álgebras en principios de la mecánica cuántica, olvidando su conexión con los principios geométricos.

No nos sorprenderemos entonces que el resultado que obtendremos sea un resultado de la mecánica cuántica. De hecho la mecánica cuántica posee un profundo significado geométrico. De cualquier forma, independientemente de la *prescripción de cuantización* que tomemos, nuestro formalismo adquiere características de universalidad.

Sean entonces $\{Q_p, Q_q\}$ nuestras variables cuaterniónicas, que se definen de la siguiente manera [1]

$$Q_p \equiv p_4 + i(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}), \qquad Q_q \equiv q_4 + i(\vec{\sigma}\cdot\vec{q}), \tag{4.36}$$

utilizando la fórmula $(\vec{A}\vec{\sigma})(\vec{B}\vec{\sigma}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + i(\vec{\sigma}\cdot[\vec{A}\times\vec{B}])$, el sistema (4.33) queda reescrito en la base cuaterniónica como

$$-i\frac{d}{d\tau}Q_p = -(\vec{U}\cdot\vec{\sigma})Q_q\frac{1}{2m}, \qquad -i\frac{d}{d\tau}Q_q = (\vec{U}\cdot\vec{\sigma})Q_p\frac{1}{2m}. \tag{4.37}$$

Introducimos adicionalmente los cuaterniones

$$Q_r \equiv r_4 + i(\vec{\sigma}\cdot\vec{r}), \qquad Q_V \equiv \left\{\frac{\partial}{\partial r_4} + i\left(\vec{\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)\right\}V(r), \tag{4.38}$$

el sistema de ecuaciones toma la forma [2]

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}Q_q &= -\frac{1}{2m}\bar{Q}_V Q_p,\\
\frac{d}{d\tau}\bar{Q}_p &= -\frac{1}{2m}\bar{Q}_q\bar{Q}_V,\\
\frac{d}{d\tau}Q_r &= -\frac{1}{m}Q_p\bar{Q}_q.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Por otro lado, si se definen las derivadas parciales cuaterniónicas como

$$\frac{\partial}{\partial Q_x} \equiv \frac{\partial}{\partial x_4} - \left(\vec{\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\right), \tag{4.40}$$

donde $x \in \{r, p, q\}$, y se consideran las dos integrales de movimiento $\mathcal{E}_p, \mathcal{E}_q$ como las funciones H_p, H_q, respectivamente, entonces las ecuaciones de Yamaleev en esta forma cuaterniónica to-

[1] $\sigma_i \equiv$ Matrices de Pauli.
[2] $\bar{Q} \equiv$ conjugación cuaterniónica.

man nuevamente la estructura cíclica de las ecuaciones de Nambu, a saber,

$$\begin{aligned} \frac{dQ_q}{d\tau} &= \frac{\partial H_p}{\partial Q_r}\frac{\partial H_q}{\partial \bar{Q}_p} - \frac{\partial H_q}{\partial Q_r}\frac{\partial H_p}{\partial \bar{Q}_p} \\ \frac{dQ_r}{d\tau} &= \frac{\partial H_p}{\partial \bar{Q}_p}\frac{\partial H_q}{\partial Q_q} - \frac{\partial H_q}{\partial \bar{Q}_p}\frac{\partial H_p}{\partial Q_q} \\ \frac{d\bar{Q}_p}{d\tau} &= \frac{\partial H_p}{\partial Q_q}\frac{\partial H_q}{\partial Q_r} - \frac{\partial H_q}{\partial Q_q}\frac{\partial H_p}{\partial Q_r}. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Es importante señalar que a diferencia de las ecuaciones de Nambu, estas ecuaciones están escritas en términos de derivadas parciales que no conmutan debido a las propiedades de los cuaterniones.

Así como en el caso del fotón, las ecuaciones de Yamaleev, ecs. (4.27), corresponden a las de Maxwell, ecs. (4.31), ahora nos preguntamos, a qué ecuaciones generalizadas de Maxwell corresponden las ecs. de Yamaleev (4.33)? Efectuando la transformación correspondiente obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= -(\vec{\nabla} \times \vec{E} - \vec{\nabla} E_4), \qquad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = +(\vec{\nabla} \times \vec{H}) - \vec{\nabla} H_4, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= -\frac{\partial H_4}{\partial t}, \qquad\qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \frac{\partial E_4}{\partial t}, \\ P_0 &= \frac{1}{2}(\vec{E}^{\,2} + E_4^2 + \vec{H}^{\,2} + H_4^2), \qquad \vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} + \vec{E} H_4 - \vec{H} E_4, \\ L &= \frac{1}{2}(\vec{E}^{\,2} + E_4^2 - \vec{H}^{\,2} - H_4^2). \end{aligned} \tag{4.42}$$

Estas ecuaciones también podemos escribirlas en formulación cuaterniónica de la siguiente manera

$$\frac{\partial}{\partial t}\{H_4 + i\vec{\sigma} \cdot \vec{H}\} \;=\; i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\{E_4 + i\vec{\sigma} \cdot \vec{E}\}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{E_4 + i\vec{\sigma}\cdot\vec{E}\} \;=\; -i\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\{H_4 + i\vec{\sigma}\cdot\vec{H}\}, \qquad (4.43)$$

o más concisamente como

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_E = i\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}Q_H,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}Q_H = -i\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}Q_E \qquad (4.44)$$

pero esta estructura nos es conocida, es una generalización de las ecuaciones de Weyl que proceden de la ecuación separable de Dirac, $\{\partial_\mu\gamma^\mu + m\}\Psi = 0$, cuando la masa de la partícula es nula. Usando la representación matricial de Dirac

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \qquad (4.45)$$

escribimos entonces $\{\partial_\mu\gamma^\mu\}\Psi = (\gamma_0\partial_0 - \vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla})\Psi = 0$, que corresponde a

$$\begin{pmatrix} \partial_0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla} \\ -\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla} & -\partial_0 \end{pmatrix}\Psi = 0, \qquad (4.46)$$

o bien como ecuación de Weyl

$$\partial_0\Psi_{0,2} = -\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\Psi_{1,3}, \qquad (4.47)$$

para espinores de Pauli de dos componentes.

Por la naturaleza de la ecuación de Dirac, sabemos que la descripción corresponde a partículas sin masa de espín $s = \frac{1}{2}$, tales como el *neutrino*. A la luz de las ecuaciones generalizadas de Maxwell, ecs. (4.41), nos damos cuenta que formalmente y desde un punto de vista matemático, una partícula de espín

$s = \frac{1}{2}$ en $I\!R^3$ es equivalente a una pareja de monopolos, uno eléctrico y otro magnético en un espacio superior, a saber en $I\!R^4$.

Finalmente establecemos la transformación bajo la cual las ecuaciones generalizadas de Maxwell ecs. (4.41) y el conjunto de ecuaciones de Yamaleev, ecs. (4.33), son equivalentes, a saber

$$\begin{aligned} H_4 + i(\vec{\sigma}\cdot\vec{H}) &= [q_4 + i(\vec{\sigma}\cdot\vec{q})]exp\left(\frac{V(r)}{2m}\right), \\ E_4 + i(\vec{\sigma}\cdot\vec{E}) &= [p_4 + i(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})]exp\left(\frac{V(r)}{2m}\right). \end{aligned} \tag{4.48}$$

Capítulo 5

Conclusiones

- Se establecen las bases geométricas y matemáticas bajo las cuales el formalismo de Nambu es equivalente al formalismo de Hamilton.

- Dada esta equivalencia formal matemática, se introduce como caso especial *la interpretación física, modelo y formalismo de Yamaleev* para *sistemas de composición*.

- Se muestra que una partícula relativista es equivalente a dos subpartículas, de manera semejante a la concepción *partícula-antipartícula* de Dirac.

- El formalismo permite también desarrollarse tanto de manera clásica como cuántica, donde la prescripción de cuantización se introduce de manera natural mediante la aplicación de las álgebras geométricas.

- Además, el modelo nos permite también un tratamiento para el caso de *partículas sin masa*, lo cual nos permite vislumbrar una universalidad del formalismo, como la universalidad misma de la mecánica, esto es, de la física.

- Se obtienen en formulación cuaterniónica como generalizaciones de las ecuaciones de Maxwell las ecuaciones para los campos del neutrino, las que coinciden en su estructura con la ecuación de Dirac sin masa y para espín $s = \frac{1}{2}$.
- Este desarrollo nos permite también entender formal y matemáticamente el significado físico análogo del espín $s = \frac{1}{2}$.

Apéndice A

Construcción intuitiva de $C\ell(2)$

A cada espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ es posible asociarle un álgebra de Clifford $C\ell(n)$, es por ello que partiremos del espacio real de dos dimensiones $\mathbb{R}^2$, con una construcción algebraica intuitiva que nos permitirá definir una de las álgebras más simples, el álgebra $C\ell(2)$; teniendo al teorema de Pitágoras como idea fundamental de la *geometría Euclideana*: para $\boldsymbol{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{u}^2 = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}. \tag{A.1}$$

Aplicando el concepto de álgebra, esperaríamos que, dado cualquier par de elementos $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$, podríamos implementar un **producto interno**, que llamaremos *de Clifford*, que defina el álgebra

$$[\mathbf{uv}] \in C\ell(2). \tag{A.2}$$

A continuación introducimos una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ en $\mathbb{R}^2$, supuesta ortonormal, y exigimos la validez de la geometría euclideana Ec. (A.1), tenemos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = \mathbf{u}^2 &= [(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2)(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2)] \\ &= x^2[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1] + y^2[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2] + xy([\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2] + [\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1]), \end{aligned} \tag{A.3}$$

la que se satisface idénticamente, demandando

$$[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1] = [\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2] = 1,$$

pero

$$[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2] = -[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1]. \tag{A.4}$$

Daremos argumentos para mostrar que $[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]$ no es un escalar, por lo cual, la elección trivial acostumbrada, que llamaremos *"de Gibbs"*, $[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2] = 0$, la que de lo contrario sería la única aceptable, no es justificable.

Puesto que se cumple la asociatividad en el producto de Clifford, tenemos

$$\mathbf{e}_1[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2] = [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1]\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2, \tag{A.5}$$

por otro lado

$$[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]\mathbf{e}_1 = [-\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1]\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1] = -\mathbf{e}_2, \tag{A.6}$$

lo que muestra que $[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]$ no es un escalar. Si $[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]$ fuese un vector $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^2$, entonces $\boldsymbol{u}^2 > 0$, pero

$$(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 = [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2][\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2] = -[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1][\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2] = -1. \tag{A.7}$$

Por tanto, $[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]$ no es un vector. Es un **bivector**. Se interpretará $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ como un segmento **orientado de área**, lo cual concuerda muy acordemente con la anticonmutación.

La estructura del álgebra $C\ell(2)$ es entonces la suma directa de tres subespacios lineales

$$C\ell(2) = \Lambda^0 \bigoplus \Lambda^1 \bigoplus \Lambda^2, \tag{A.8}$$

a saber, los escalares, los vectores y los bivectores.

La estructura del producto de *Clifford* podemos apreciarla desarrollando los pasos anteriores para el caso de dos vectores cualesquiera

$$\begin{aligned}
[\mathbf{uv}] &= [(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2)(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2)] \\
&= u_1v_1[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1] + u_2v_2[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2] + u_1v_2[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2] + u_2v_1[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1] \\
&= (u_1v_1 + u_2v_2) + (u_1v_2 - u_2v_1)[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2],
\end{aligned} \tag{A.9}$$

vemos que el producto de *Clifford* consta de una parte escalar, que coincide con el producto escalar acostumbrado, y una parte bi-vectorial, a la que llamaremos **producto cuña**; o mejor dicho **producto exterior**, o bien producto de *Grassmann*, habiendo sido Grassmann [17] un precursor del trabajo de Clifford.

Simbolizamos, por tanto, todo el producto de *Clifford*, de la siguiente manera

$$[\mathbf{uv}] = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}. \tag{A.10}$$

De haber desarrollado el producto en el orden inverso, habríamos tenido

$$[\mathbf{vu}] = (u_1v_1 + u_2v_2) + (v_1u_2 - v_2u_1)[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]$$

$$= \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}, \tag{A.11}$$

lo que de inmediato nos muestra que el producto escalar es simétrico y el producto cuña, antisimétrico

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}\wedge\mathbf{v} = -\mathbf{v}\wedge\mathbf{u};$$

a su vez, somos capaces de expresar ambos productos **escalar** y **cuña** en términos del producto de *Clifford*:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \frac{1}{2}([\mathbf{uv}] + [\mathbf{vu}]), \\ \mathbf{u}\wedge\mathbf{v} &= \frac{1}{2}([\mathbf{uv}] - [\mathbf{vu}]). \end{aligned} \tag{A.12}$$

En su momento daremos una generalización de estos productos para álgebras y números de *Clifford* de graduación mayor y veremos cómo la simetría par (impar) se sucede alternantemente.

En seguida mostramos una tabla que simboliza la cerradura del producto de Clifford en $C\ell(2)$, a nivel de los subespacios involucrados

$[\Lambda,\Lambda]$	Λ^0	Λ^1	Λ^2
Λ^0	Λ^0	Λ^1	Λ^2
Λ^1	Λ^1	$\Lambda^0 \bigoplus \Lambda^2$	Λ^1
Λ^2	Λ^2	Λ^1	Λ^0

Supongamos que consideramos los elementos pares

$$C\ell^+(2) = \Lambda^0 \bigoplus \Lambda^2, \tag{A.13}$$

de la tabla anterior nos es manifiesto que estos elementos constituyen una **subálgebra**; un elemento cualquiera de esta subálgebra es de la forma

$$C\ell^{+}(2) \ni A = a + b\,\mathbf{e}_{12}. \tag{A.14}$$

El bivector $\mathbf{e}_{12}$ satisface la relación $\mathbf{e}_{12}\mathbf{e}_{12} = -1$. Esta álgebra es entonces isomorfa a la del campo de los números complejos $\mathbb{C}$. Sin embargo, es importante observar que se trata de un álgebra geométrica, construída plénamente a partir de los reales, pero con una estructura compleja. Este ejemplo sencillo muestra un comportamiento genérico, a saber, la gran riqueza en su estructura, característica de todas las álgebras de Clifford.

En el siguiente apéndice se desarrolla el álgebra de Clifford del espacio real tridimensional y descubriremos que esta álgebra es una y la misma que el álgebra de Pauli de la mecánica cuántica.

Apéndice B

El Álgebra $C\ell(3)$ equivalente al Álgebra de Pauli

Procediendo en forma análoga al capítulo anterior, llevaremos a cabo la construcción, un tanto pedestre, de $C\ell(3)$, usando los mismos ingredientes ya desarrollados. El material que presentamos está ampliamente documentado en el *clásico* texto sobre el álgebra de Clifford de Gaston Casanova [6].

Partimos del espacio $I\!R^3 = \{\mathbf{x}|\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3, x_i \in I\!R, i = 1, 2, 3\}$, exigiendo que el producto de *Clifford* se satisfaga de la siguiente forma

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = 1,$$
$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i. \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{B.1}$$

A estas relaciones podemos llamarlas *regla de oro* del producto de Clifford, las que podemos compactarlas en una sola, a saber

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j\mathbf{e}_i = 2\delta_{ij}. \tag{B.2}$$

Entonces, llegamos a un álgebra con la siguiente estructura

$$C\ell(3) = \Lambda^0 \bigoplus \Lambda^1 \bigoplus \Lambda^2 \bigoplus \Lambda^3, \tag{B.3}$$

contando cada uno de estos subespacios con los siguientes generadores

$$\begin{array}{lccl} \Lambda^0 & \ni & 1 & \textit{escalares} \\ \Lambda^1 & \ni & \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 & \textit{vectores} \\ \Lambda^2 & \ni & \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 & \textit{bivectores} \\ \Lambda^3 & \ni & \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 & \textit{trivectores} \end{array} \tag{B.4}$$

Es de observarse que la dimensionalidad del álgebra es de 8 elementos. En general se cumple que dim $\mathcal{C}\ell(n) = 2^n$.

Un elemento, en general, del álgebra tendrá la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\ell(3) \ni a_0 &+ a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 + a_{12}\mathbf{e}_{12} + a_{13}\mathbf{e}_{13} + a_{23}\mathbf{e}_{23} \\ &+ a_{123}\mathbf{e}_{123}, \end{aligned} \tag{B.5}$$

donde empleamos por conveniencia la notación

$$\mathbf{e}_{i_1} \cdots \mathbf{e}_{i_n} = \mathbf{e}_{i_1 \cdots i_n}.$$

Nuevamente presentamos la cerradura del álgebra esquemáticamente de a cuerdo a la siguiente tabla.

$[\Lambda, \Lambda]$	Λ^0	Λ^1	Λ^2	Λ^3
Λ^0	Λ^0	Λ^1	Λ^2	Λ^3
Λ^1	Λ^1	$\Lambda^0 \bigoplus \Lambda^2$	$\Lambda^1 \bigoplus \Lambda^3$	Λ^2
Λ^2	Λ^2	$\Lambda^1 \bigoplus \Lambda^3$	$\Lambda^0 \bigoplus \Lambda^2$	Λ^1
Λ^3	Λ^3	Λ^2	Λ^1	Λ^0

De la última línea de esta tabla, es revelador observar cómo el elemento $\mathbf{e}_{123} \in \Lambda^3$ transforma cada uno de los subespacios

Λ entre sí. Llamaremos a cada pareja de subespacios Λ relacionados por $\mathbf{e}_{123}$ subespacios mutuamente *duales*. Este elemento también recibe el nombre de la unidad *pseudoescalar*. puesto que $\mathbf{e}_{123}^2 = -1$, también lo denotaremos por $\mathbf{e}_{123} \equiv I$.

Las siguientes relaciones se determinan de manera directa

$$\begin{aligned} I\mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \\ I\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 \\ I\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \end{aligned} \tag{B.6}$$

o bien

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = I\epsilon^{ijk}\mathbf{e}_k, \tag{B.7}$$

o bien, combinando con la ecuación (B.2) se traduce en

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \delta_{ij} + I\epsilon_{ijk}\mathbf{e}_k. \tag{B.8}$$

Esta es no otra que el álgebra bien conocida con el nombre de *álgebra de Pauli*, en la que los vectores base $\{\mathbf{e}_i\}$, dados en la representación matricial introducida, se simbolizan mas bien por $\{\boldsymbol{\sigma}_i\}$, de manera que la relación anterior se escribe mas popularmente como

$$\boldsymbol{\sigma}_i\boldsymbol{\sigma}_j = \delta_{ij} + i\ \epsilon_{ijk}\boldsymbol{\sigma}_k. \tag{B.9}$$

Toda álgebra de Clifford resulta poseer una estructura muy rica debido al conjunto de endomorfismos de tipo involutivo. Entre los principales destacan *la Involución graduada, la Reversión y la Conjujación.*

Por conveniencia definiremos el siguiente proyector

$$< \ >_k : \Lambda \longrightarrow \Lambda^k \tag{B.10}$$

de manera que un elemento cualquiera de $C\ell(3)$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} C\ell(3) \ni A = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 \\ \text{con} \quad A_k \in \Lambda^k. \end{aligned} \tag{B.11}$$

Entonces definimos la *involución graduada* de la siguiente manera

$$\begin{aligned} C\ell(3) \ni \hat{A} = A_0 - A_1 + A_2 - A_3, \\ \text{esto es} \quad \hat{A}_k = (-)^k A_k. \end{aligned} \tag{B.12}$$

La *Reversión* se define como aquella operación $\tilde{\ }$, tal que para

$$\begin{aligned} C\ell(3) &\ni \tilde{A} = A_0 + A_1 - A_2 - A_3, \\ \text{con} \quad \tilde{A}_k &= (-)^{k(k-1)/2} A_k, \\ \text{o sea, para} \quad A_k &= \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\cdots\mathbf{e}_{i_k}, \\ \tilde{A}_k &= \mathbf{e}_{i_k}\mathbf{e}_{i_{k-1}}\cdots\mathbf{e}_{i_1}. \end{aligned} \tag{B.13}$$

La *Conjugación* puede considerarse como la combinación de la reversión y la graduación, escribimos entonces

$$C\ell(3) \ni \overline{A} = A_0 - A_1 - A_2 + A_3. \tag{B.14}$$

La involución graduada permite introducir el concepto de paridad, de manera que toda álgebra es la suma directa de una parte par y de otra impar

$$C\ell(n) = C\ell^{+}(n) \oplus C\ell^{-}(n), \qquad \text{(B.15)}$$
$$\text{con } C\ell^{\pm}(n) = \{A \in C\ell(n) | \hat{A} = \pm A\}.$$

La tabla de multiplicación siguiente nos muestra que la parte par de toda álgebra de Clifford es siempre una subálgebra

Prod	$C\ell^{+}(n)$	$C\ell^{-}(n)$
$C\ell^{+}(n)$	$C\ell^{+}(n)$	$C\ell^{-}(n)$
$C\ell^{-}(n)$	$C\ell^{-}(n)$	$C\ell^{+}(n)$

Definición 9 *de* **módulo o valor absoluto** *de un elemento de Clifford. El módulo de todo elemento A de Clifford se define de la siguiente manera*

$$||A||^2 = A\tilde{A} = < A\tilde{A} >_0 . \qquad \text{(B.16)}$$

Es de observarse que $\widetilde{(A\,\tilde{A})} = A\,\tilde{A}$, por tanto $A\tilde{A} \in \Lambda^0 \oplus \Lambda^1$, estas componentes vectoriales aparecen sin embargo como productos antisimétricos, por lo que también se cancelan, subsistiendo en el producto sólamente la parte escalar.

Con la definición anterior, de inmediato podemos tambien definir un inverso

Definición 10 *de* **inverso** *de un elemento de Clifford. El inverso de un elemento A de Clifford se define de la siguiente manera*

$$A^{-1} = \tilde{A}/|A|^2. \qquad \text{(B.17)}$$

Definición 11 *de* **Dualidad**. *La relación de dualidad se define entonces más propiamente a través de un operador $*$ llamado de Hodge, de la siguiente manera*

$$*A_k = \tilde{A}_k\, I. \tag{B.18}$$

En particular, por ejemplo, tenemos

$$*\{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\, I = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3, \tag{B.19}$$

esto es, $\mathbf{e}_3$ es el vector dual al bivector $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ que le define su plano perpendicular, y así sucesivamente

$$\begin{aligned} *\{\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\} &= \mathbf{e}_1 \\ *\{\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\} &= \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

El gran error del álgebra de Gibbs, definida a través de un llamado *producto cruz*

$$\begin{aligned} \hat{\imath} \times \hat{\jmath} &= \hat{k} \\ \hat{\jmath} \times \hat{k} &= \hat{\imath} \\ \hat{k} \times \hat{\imath} &= \hat{\jmath} \end{aligned} \tag{B.20}$$

es precisamente el confundir vectores con bivectores, ambos estan relacionados en $I\!R^3$ por una operación de dualidad, pero geométricamente son objetos bien diferentes. Este error se refleja precisamente en la inversión de coordenadas $\{\mathbf{e}_i\} \to \{-\mathbf{e}_i\}$, y todo vector tiene esta propiedad, para $\mathbf{u} \to -\mathbf{u}$, y $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$, el producto cruz de Gibbs no obedece dicha regla

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \longrightarrow +\mathbf{u} \times \mathbf{v}!$$

Clifford permite una **verdadera** definición del producto cruz, sin las contradicciones del producto de Gibbs, como sigue

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = *(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = -I(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}), \tag{B.21}$$

el cual sí satisface el principio de inversión

$$(\text{-}\mathbf{u}) \times (\text{-}\mathbf{v}) = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v}), \tag{B.22}$$

puesto que

$$\widehat{(\mathbf{u} \times \mathbf{v})} = -\hat{I}\widehat{(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})} = - * (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}. \tag{B.23}$$

Puesto que el elemento $I \equiv e_{123}$ conmuta con todos los elementos de la base en $C\ell_3$, al igual que lo hacen los escalares. Por lo tanto, la subálgebra de escalares y 3-vectores

$$\mathbb{R} + \bigwedge^{3} \mathbb{R}^3 = \{a + Ib | a, b \in \mathbb{R}\} \tag{B.24}$$

forman el *centro* de $C\ell_3$. Dado que $I^2 = -1$, el centro de $C\ell_3$ es isomorfo al campo de los complejos $\mathbb{C}$.

Igualmente, como ya dijimos, la parte par de toda álgebra de Clifford es siempre una subálgebra, en particular, la subálgebra

$$\mathcal{C}\ell(3)^+ = \Lambda^0 + \Lambda^2 = \{r + I\, s\mathbf{v}\}, \tag{B.25}$$

en virtud de la ec. (B.7), con $r, s \in \mathbb{R}$, no es otra cosa que el álgebra de los cuaterniones de Hamilton

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\ell(3)^+ &\cong \\ \mathbb{H} &= \{(1, u, v, w) | u^2 = v^2 = w^2 = -1,\ uvw = -1\}, \end{aligned} \tag{B.26}$$

con $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 \equiv u$, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 \equiv v$, $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \equiv w$. Las dos relaciones anteriores son equivalentes a las cíclicas $uv = w$, $vw = u$, $wu = v$, que guardan entre sí las unidades imaginarias.

Es importante notar que los cuaterniones no son piezas de museo, son los verdaderos generadores de las rotaciones en el espacio real tridimensional. Sea $\mathbf{a}$ un vector unitario, $a^2 = 1$ y sea $B = *\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}}I = \mathbf{a}I = I\mathbf{a}$ el correspondiente bivector dual. Tenemos $B^2 = I\mathbf{a}I\mathbf{a} = I^2a^2 = -1$ luego tenemos

$$\begin{aligned} B^{2n} &= (-1)^n \\ B^{2n+1} &= (-1)^n B, \end{aligned}$$

luego se cumple que

$$\exp B\theta = \cos\theta + B\sin\theta \in \Lambda^0 \oplus \Lambda^2 = C\ell^+(3) \qquad \text{(B.27)}$$

es un cuaternión. En particular, $||\exp B\theta|| = \exp B\theta \exp \tilde{B}\theta = \exp B\theta \exp(-B\theta) = 1$.

Sea $\mathbf{v}$ un vector perpendicular a $\mathbf{a}$, esto es $\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = 0$, $\mathbf{av} = -\mathbf{va}$ y $\mathbf{av} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{v}$.

Efectuemos entonces la operación

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= exp(-I\mathbf{a}\theta)\mathbf{v} = (\cos\theta - I\mathbf{a}\sin\theta)\mathbf{v} \\ &= \mathbf{v}\cos\theta - I\mathbf{a}\wedge\mathbf{v}\sin\theta \qquad \text{(B.28)} \\ &= \mathbf{v}\cos\theta + \mathbf{a}\times\mathbf{v}\sin\theta \\ &= \mathcal{R}_{\mathbf{a}}(\theta)\,\mathbf{v}, \end{aligned}$$

vemos que el vector $\mathbf{v}'$ corresponde a la rotación del vector $\mathbf{v}$ por el ángulo θ tomando como eje de rotación el vector $\mathbf{a}$. Hay que notar que se cumple la relación

$$exp(-I\mathbf{a}\theta)\mathbf{v} = \mathbf{v}\, exp(I\mathbf{a}\theta). \tag{B.29}$$

Por otro lado, sea $\mathbf{u}$ un vector paralelo a $\mathbf{a}$, esto es, $\mathbf{au} = \mathbf{ua}$ y $\mathbf{a} \wedge \mathbf{u} = 0$, entonces se cumple

$$exp(-I\mathbf{a}\theta)\mathbf{u} = \mathbf{u}\, exp(-I\mathbf{a}\theta). \tag{B.30}$$

Sea $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ un vector arbitrario, y efectuemos la transformación

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= exp(-I\mathbf{a}\theta/2)\,\mathbf{x}\, exp(I\mathbf{a}\theta/2) = exp(-I\mathbf{a}\theta)\mathbf{v} + \mathbf{u} \\ &= exp(-I\mathbf{a}\theta)\mathbf{x}_\perp + \mathbf{x}_\| \end{aligned} \tag{B.31}$$

por tanto, $\mathbf{x}'$ es el vector que proviene de rotar el vector $\mathbf{x}$ por el ángulo θ sobre el eje $\mathbf{a}$

$$\mathbf{x}' = \mathcal{R}_{\mathbf{a}}(\theta)\,\mathbf{x} = exp(-I\mathbf{a}\theta/2)\,\mathbf{x}\, exp(I\mathbf{a}\theta/2). \tag{B.32}$$

Desarrollando explícitamente, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathcal{R}_{\mathbf{a}}(\theta)\,\mathbf{x} = exp(-I\mathbf{a}\theta)\mathbf{x}_\| + \mathbf{x}_\perp \\ &= (\cos\theta - I\mathbf{a}\sin\theta)(\mathbf{x} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})\mathbf{a}) + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}) \qquad \text{(B.33)} \\ &= \mathbf{x}\cos\theta + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})\mathbf{a}(1-\cos\theta) + (\mathbf{a}\times\mathbf{x})\sin\theta, \end{aligned}$$

o bien desarrollando matricialmente, con $\mathbf{a} = \hat{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$

$$\mathcal{R}_{\hat{n}}(\theta) = \begin{pmatrix} cos(\theta) + \alpha^2(1-\cos\theta) & \alpha\beta(1-\cos\theta) - \gamma\sin\theta & \alpha\gamma(1-\cos\theta) + \beta\sin\theta \\ \alpha\beta(1-\cos\theta) + \gamma\sin\theta & \cos\theta + \beta^2(1-\cos\theta) & \beta\gamma(1-\cos\theta) - \alpha\sin\theta \\ \alpha\gamma(1-\cos\theta) - \beta\sin\theta & \beta\gamma(1-\cos\theta) + \alpha\sin\theta & \cos\theta + \gamma^2(1-\cos\theta) \end{pmatrix}, \tag{B.34}$$

que describe una rotación en $I\!R^3$ por el ángulo θ en torno a un eje arbitrario $\hat{n}$.

Regresando a la expresión para las rotaciones (B.32) vemos que tanto R como $-R$ describen la misma rotación, dado que R aparece tanto a la derecha como a la izquierda de A. Entonces decimos que el grupo $Spin(3)$ es una *doble cobertura* del grupo de rotaciones $SO(3)$, por lo tanto, cada elemento del grupo de rotaciones $SO(3)$ se puede representar en esta forma por dos elementos $\pm R \in Spin(3)$ y se tiene $Spin(3)/\{\pm 1\} \simeq SO(3)$. El grupo de rotaciones $SO(3)$ se obtiene cuando representamos una rotación $v \mapsto v' = Rv\tilde{R} = \mathcal{R}(v)$ a través de una transformación lineal $\mathcal{R}(v)$, es decir, $\mathcal{R}(e_i) = \mathcal{R}_{ij}e_j$. Si definimos $\mathcal{R}_{ij}e_j = Re_i\tilde{R}$, a partir de la ec. (B.32), que generalizamos para una rotación con los parámetros de Euler (ϕ, θ, φ), que corresponde a rotar activa y secuencialmente por el ángulo ϕ con respecto al eje z original, luego girar por el ángulo θ sobre el nuevo eje x y finalmente, rotar nuevamente por el ángulo φ sobre el nuevo eje z resultante; lo cual es enteramente equivalente a rotar sobre los ejes fijos en el orden inverso, como

$$R = e^{-I\phi\mathbf{e}_3/2}e^{-I\theta\mathbf{e}_1/2}e^{-I\varphi\mathbf{e}_3/2}, \tag{B.35}$$

obtenemos la matriz $\{\mathcal{R}_{ij}\}$ (ver Goldstein [16]) de la forma

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\phi - \cos\theta\sin\varphi\sin\phi & -\cos\varphi\sin\phi - \cos\theta\sin\varphi\cos\phi & \sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi\cos\phi + \cos\theta\cos\varphi\sin\phi & \sin\varphi\sin\phi + \cos\theta\cos\varphi\cos\phi & -\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix},$$

representando la transformación de un sistema cartesiano en otro, mediante tres rotaciones sucesivas realizadas de modo determinado, donde los ángulos de Euler corresponden precisamente a esas rotaciones.

B.1 Realización Matricial de $C\ell(3)$

Si utilizamos la representación patrón de las matrices de Pauli en el Álgebra $C\ell(3)$

$$\mathbf{e}_1 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

obtendremos cláramente un isomorfismo con un álgebra de matrices

$$C\ell(3) \equiv \mathcal{M}(2,\mathbb{C}). \tag{B.36}$$

Puesto que$\{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ es una base de esta álgebra, un elemento general A, ecuación (B.5), toma la forma

$$C\ell(3) \ni \mathcal{A} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ z_2 & z_4 \end{pmatrix} \tag{B.37}$$

donde los coeficientes complejos z_i se relacionan con los coeficientes del álgebra,ec. B.5, por las relaciones

$$\begin{aligned} z_1 &= (a + a_3) + i(a_{12} + a_{123}), \\ z_2 &= (a_1 + a_{13}) + i(a_2 + a_{23}), \qquad \text{(B.38)} \\ z_3 &= (a_1 - a_{13}) - i(a_2 - a_{23}), \\ z_4 &= (a - a_3) - i(a_{12} - a_{123}). \end{aligned}$$

(B.39)

Las invloluciones definidas previamente toman la forma

$$C\ell(3) \ni \tilde{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1^* & z_2^* \\ z_3^* & z_4^* \end{pmatrix}, \tag{B.40}$$

$$C\ell(3) \ni \hat{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_4^* & -z_2^* \\ -z_3^* & z_1^* \end{pmatrix}, \tag{B.41}$$

y

$$C\ell(3) \ni \overline{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_4 & -z_3 \\ z_2 & z_1 \end{pmatrix}, \tag{B.42}$$

y por otro lado, si A es un elemento del álgebra par, entonces se cumple

$$C\ell^{+}(3) \ni \tilde{\mathcal{A}}_{+} \equiv \begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix}, \tag{B.43}$$

con $w_1 = a + ia_{12},\ w_2 = a_{13} + ia_{23}$.

El centro de $C\ell_3 \simeq \mathbb{C}$ y la subálgebra par $C\ell_3^{+} \simeq \mathbb{H}$ son suficientes para generar toda el álgebra $\mathcal{M}(2,\mathbb{C})$, o sea, se cumple

$$C\ell_3 \simeq \mathcal{M}(2,\mathbb{C}) \simeq C\ell_3^{+}, \tag{B.44}$$

pero este isomorfismo se cumple únicamente dentro del álgebra de matrices.

El conjunto de los elementos de la forma $\exp B$ con $B \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ forma un grupo al cual se le denomina $Spin(3)$, el cual está dado por

$$Spin(3) = \{R \in C\ell_3^+ \mid \tilde{R} = R^{-1}\}. \tag{B.45}$$

Usando la condición $\tilde{R} = R^{-1}$ y dado que en general, $det\{AB\} = det\{A\}det\{B\}$, tenemos para $\mathcal{M}(2,\mathbb{C})$

$$\begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^* & w_2^* \\ -w_2 & w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{B.46}$$

lo que nos lleva a

$$\mid w_1 \mid^2 + \mid w_2 \mid^2 = \det \begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix} = 1, \tag{B.47}$$

con lo cual establecemos el isomorfismo $Spin(3) \simeq SU(2)$, donde $SU(2)$ es el grupo de matrices unitarias y unimodulares

$$SU(2) = \{U \in \mathcal{M}(2,\mathbb{C}) \mid U^\dagger U = I, \det U = I\} \tag{B.48}$$

B.2 Construcción intuitiva del Espacio Espinorial de Pauli

Con el desarrollo de la sección anterior vemos que con el álgebra $C\ell(3) \equiv \mathcal{M}(2,\mathbb{C})$ obtenemos los endomorfismos de $\mathbb{C}^2$

$$\mathcal{M}(2,\mathbb{C}) : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2. \tag{B.49}$$

A este espacio

$$\mathbb{C}^2 = \{\Psi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + i\, b_1 \\ a_2 + i\, b_2 \end{pmatrix}\} \tag{B.50}$$

se le denomina en mecánica cuántica *espacio de espinores de Pauli*, y la teoría de Pauli fue desarrollada para describir el *momento angular intrínseco del electrón* $\vec{s}$, llamado también **espín**. De esta manera, se establece la relación

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Psi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \tag{B.51}$$

a través de la ecuación de autovalor

$$(\frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \hat{n})\Psi_{\hat{n}}^{\pm} = \pm\frac{1}{2}\Psi_{\hat{n}}^{\pm}, \tag{B.52}$$

donde $\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{\sigma} = |\vec{s}|\hat{n}$, con $|\vec{s}| = \sqrt{3}/2$. El espín se llama *espín 1/2*, porque su proyección sobre cualquier eje de medición (*eje de cuantización*) resulta tener siempre este valor, y son por tanto únicamente dos estados posibles.

Sin embargo, a través de esta descripción conocida de espacio vectorial, no es posible desarrollar un análisis más profundo, ni siquiera precisar el sistema de coordenadas en el cual se está trabajando. Es por ello significativo establecer la estructura de Clifford de un espacio espinorial.

Hay que tener presente, que la concepción del *momento angular* como un ente de naturaleza vectorial, proviene de la mecánica clásica, pero independientemente del formalismo, clásico o cuántico, se trata de una confusión histórica que siempre ha persistido, dadas las malas bases matemáticas en que se ha fundamentado. Por tanto, siendo breves y dado el formalismo que ya hemos desarrollado, vamos a precisar lo que es correcto. Dado un par de vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{p}$ del espacio real tridimensional $\mathbb{R}^3$, podemos construir con ellos un *bivector de momento angular*

$$\mathbb{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}, \tag{B.53}$$

a este bivector le podemos asociar, a través de la operación de *dualidad*, un vector de momento angular

$$\vec{\ell} = *\mathbb{L}, \tag{B.54}$$

esto, sin embargo, no es posible realizar en cualquier espacio; en particular, encontraremos que en el espacio tiempo $\mathbb{R}^{1,3}$ no es posible construir un cuadrivector de momento angular.

B.3 Espinores de Pauli en el Álgebra del Espacio Real.

La forma natural como aparecen los espinores en el álgebra de Clifford es la de un *ideal minimal de izquierda*, idea propuesta originalmente por Riesz en 1947 [32]. Entonces dados dos elementos $a \in \mathcal{A}$ y $b \in \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, y se cumple $ab \in \mathcal{B}$, entonces hablamos de un ideal de izquierda, el que representa de alguna forma todos los multiplos de un cierto elemento del ideal $\mathcal{B}$, que también pertenecen al mismo ideal $\mathcal{A}b \in \mathcal{B}$.

La forma práctica de construir un ideal es a través de un idempotente. Consideremos $C\ell(3)$ y consideremos los idempotentes

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 \pm \mathbf{e}_3), \tag{B.55}$$

los cuales satisfacen, $f_1 + f_2 = 1$, $f_{1,2}^2 = f_{1,2}$, y además son mútuamente excluyentes $\boxed{f_1 f_2 = 0}$ (diríamos que ambos factores son divisores del cero, situación típica de las álgebras y excluyente en el caso de los campos).

Todo elemento de Clifford $\Psi \in C\ell(3)$ es separable en términos de ambos ideales $\Psi = \Psi_+ + \Psi_- = \Psi f_1 + \Psi f_2$, tal que $\Psi_\pm \mathbf{e}_3 = \pm\Psi_\pm$, y además $\Psi_+\Psi_- = 0$; a su vez y de inmediato, esta estructura de espacio nos brinda una representación matricial para los elementos de Clifford

$$\begin{aligned} \Psi_{ij} &= < f_i|\Psi|f_j > \\ \text{con } < f_i|f_j > &= \delta_{ij}, \quad i,j = 1,2, \end{aligned} \tag{B.56}$$

en particular, obtenemos la representación de Pauli para los vectores $\mathbf{e}_i \equiv \sigma_i$, con lo cual recobramos nuevamente el isomorfismo de ambas álgebras, ec. (B.36). Haciendo uso de la ec. (B.43) vemos cláramente el isomorfismo $C\ell(3)\, f_1 \simeq C\ell^+(3)$, pero ya demostramos que $C\ell^+(3) \simeq \mathbb{H}$, o sea, un espinor de Pauli no es otra cosa que un cuaternión de Hamilton, pero precisamente, el trabajo de Hamilton consistió en mostrar el significado geométrico de estos objetos, a saber el de ser generadores de rotaciones y dilataciones.

Es importante mencionar que si bien cualquier dirección de $\mathbb{R}^3$ puede especificarse por una pareja de ángulos $\hat{n} \equiv (\theta, \phi)$, en cambio, para especificar una rotación en $\mathbb{R}^3$ requerimos de tres parámetros (ϕ, θ, φ) los que se denominan ángulos de Euler.

Tomemos pues el siguiente espinor de Pauli

$$C\ell^+(3) \ni \psi = a + a_{12}\mathbf{e}_{12} + a_{13}\mathbf{e}_{13} + a_{23}\mathbf{e}_{23}, \tag{B.57}$$

con módulo

$$\psi\tilde{\psi} = a^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 = \rho^2, \tag{B.58}$$

pero ésta es la ecuación de la esfera S^3 de $\mathbb{R}^4$, lo que nos permite una parametrización en términos de los ángulos de Euler

$$\begin{aligned} a &= \rho cos(\frac{\theta}{2})cos(\frac{\phi+\varphi}{2}), \\ a_{12} &= \rho cos(\frac{\theta}{2})sin(\frac{\phi+\varphi}{2}), \\ a_{13} &= \rho sin(\frac{\theta}{2})sin(\frac{\phi-\varphi}{2}), \\ a_{23} &= \rho sin(\frac{\theta}{2})cos(\frac{\phi+\varphi}{2}), \end{aligned} \tag{B.59}$$

en otras palabras, a los elementos unitarios $C\ell^+(3) \ni R = \psi/|\rho|$, tales que $R\tilde{R} = 1$ llamaremos rotaciones, las que, escritas de manera exponencial y en términos de los parametros de Euler, como ya vimos ec. (B.35), toman la forma

$$\begin{aligned} R &= exp(-I\mathbf{e}_3\phi/2)exp(-I\mathbf{e}_1\theta/2)exp(-I\mathbf{e}_3\varphi/2) \\ R &= exp(-I\mathbf{e}_3\phi/2)exp(-I\mathbf{e}_2\theta/2)exp(-I\mathbf{e}_3\varphi/2). \end{aligned}$$

La operación

$$\psi\mathbf{v}\tilde{\psi} = \rho^2 R\mathbf{v}\tilde{R} \tag{B.60}$$

queda entonces asociada a la combinación de una rotación y una dilatación sobre el vector **v**. La rotación que se indica es plénamente equivalente a la expresión de la ec. (B.32), en la que necesitamos dos parámetros para especificar la dirección del eje $\hat{n}$, mas el parámetro θ de la rotación. O sea, en total, tres parámetros. La conveniencia de usar los ángulos de Euler es que podemos referir dichas rotaciones a los ejes fijos de coordenadas, en la secuencia φ con respecto al eje z, θ con respecto al eje x o y, y ϕ con respecto nuevamente al eje z.

Por otro lado, yendo a $\mathcal{M}(2,\mathbb{C})$, las rotaciones toman la forma[1]

$$R(\phi,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\theta}{2})exp[i(\frac{\phi+\varphi}{2})] & isen(\frac{\theta}{2})exp[i(\frac{\phi-\varphi}{2})] \\ isen(\frac{\theta}{2})exp[-i(\frac{\phi-\varphi}{2})] & cos(\frac{\theta}{2})exp[-i(\frac{\phi+\varphi}{2})] \end{pmatrix} \tag{B.61}$$

por lo que si partimos del autoespinor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en la dirección del eje z, al aplicar la rotación dada por los ángulos de Euler (ϕ, θ, φ) obtenemos de inmediato

$$\psi = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\phi}{2}} \\ i\,\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}}. \tag{B.62}$$

[1] fórmula dada únicamente como resultado en algunos libros de texto. Messiah [22], ec. C.74 nos presenta esta expresión, como un caso especial de una llamada fórmula de Wigner, pero vemos que en Clifford, el resultado es directo.

Bibliografía

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc., New York (1965).

[2] D. Alekseevsky and P. Guha, *On Decomposability of Nambu-Poisson Tensor*, Acta Math. Univ. Comenianae, **LXV**, N. 1, 1 (1996).

[3] H. Awata, M. Li, D. Minic and T. Yoneya, *On the Quantization of Nambu Brackets*, jhep02, 013 (2001).

[4] A. O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*, Dover Publications, Inc., New York (1980).

[5] F. Bayen and M. Flato, *Remarks concerning Nambu's Generalized Mechanics*, Phys. Rev. D, **11**, 3049 (1975).

[6] G. Casanova, *L'Algèbre Vectorielle*, Presses Universitaires de France, (1976).

[7] R. Chatterjee, *Dynamical Symmetries and Nambu Mechanics*, Lett. Math. Phys., **36**, 117 (1996).

[8] R. Chatterjee and L. Takhtajan, *Aspects of Classical and Quantum Nambu Mechanics*, hep-th/9507125 (1995).

[9] S. Codriansky, R. Navarro and M. Pedroza, *The Liouville Condition and Nambu Mechanics*, J: Phys. A: Math. Gen., **29**, 1037 (1996).

[10] M. Crâşmăreanu, *First Integrals Generated by Pseudosymmetries in Nambu-Poisson Mechanics*, J. Nonlinear Math. Phys., **7**, N. 2, 126 (2000).

[11] G. Dito, M. Flato, D. Sternheimer and L. Takhtajan., *Deformation Quantization and Nambu Mechanics*, Comm. Math. Phys., **183**, 1 (1997) [hep-th/96022016].

[12] F. B. Estabrook, *Comments on Generalized Hamiltonian Dynamics*, Phys. Rev. D, **8**, 2740 (1973).

[13] M. Fecko, *On a Geometrical formulation of the Nambu Dynamics*, J. Math. Phys., **33**, 926 (1992).

[14] H. Flanders, *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences* Academic Press, New York (1963).

[15] C. Godbillon, *Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique*, Collection Méthodes, Hermann Paris (1969).

[16] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd. Ed., Addison-Wesley Reading (1980).

[17] H. Grassmann, *Die Ausdehnungslehre* Álgebra Extensiva, (1862).

[18] M. Hirayama, *Realization of Nambu Mechanics: A particle interacting with an SU(2) monopole*, Phys. Rev. D, **16**, 530 (1977).

[19] T. Homma and M. Kadoya, *A Relativistic Particle with Constraints in the Nambu Mechanics*, KEK-preprints 92-3-637 (1991).

[20] J. Keller, A. Rodríguez and R.M. Yamaleev, *An Algebraic Linear Relativistic Equation over Twistor Fields with Confined States*, Adv. Appl. Clifford Algebras, **6**, 275 (1996).

[21] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, 3rd. Ed., Course of Theoretical Physics, Vol. 1, Butterworth Heinemann (1976).

[22] A. Messiah, Quantum Mechanics Vol. II North-Holland Publishing Co., (1975).

[23] A. Molgado, *Estructuras Espinoriales y Álgebras de Clifford*, Tesis de Licenciatura, UASLP (1999).

[24] P. Morando, *Liouville Condition, Nambu Mechanics, and Differential Forms*, J. Phys. A: Math. Gen., **29**, L329 (1996).

[25] N. Mukunda and E. C. G. Sudarshan, *Relation between Nambu and Hamilton Mechanics*, Phys. Rev. D, **13**, 2846 (1976).

[26] Y. Nambu, *Generalized Hamiltonian Dynamics*, Phys. Rev. D, **7**, 2405 (1973).

[27] P. Névir and R. Blender, *A Nambu Representation of Incompressible Hydrodynamics using Helicity and Enstrophy*, J. Phys. A, **26**, L1189 (1994).

[28] S. A. Pandit and A. D. Gangal, *On Generalized Nambu Mechanics*, J. Phys. A: Math. Gen., **31**, 2899 (1998).

[29] M. Planck, *V*erhand. Deutsch. Phys. Ges., **4** (1906), 136.

[30] H. Poincaré, *C*omptes Rendues, **140** (1905) 1504

[31] M. Razavy and F. J. Kennedy, *Generalized Phase Space Formulation of the Hamiltonian Dynamics*, Can. J. Phys., **52**, 1532 (1974).

[32] M. Riesz, Jul. Gjellerups Forlag, Copenhagen, pp 123-148, (1947).

[33] E. Schrödinger, *S*pace-Time Structure, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1950

[34] L. Takhtajan, *On Foundation of the Generalized Nambu Mechanics (second version)*, Comm. Math. Phys., **160**, 295 (1994) [hep-th/9301111].

[35] R.M. Yamaleev, *Relativistic Dynamics in three-dimensional Phase Space*, Proceedings of the International Workshop on Lorentz group, CPT and Neutrinos, 355, A. E. Chubykalo, V. V. Dvoeglazov, D. J. Ernst, V. G. Kadyshevsky and Y. S. Kim Eds., World Scientific (2000).

[36] R.M. Yamaleev, *Generalized Newtonian Equations of Motion*, Ann. of Phys., **277**, 1 (1999).

[37] R.M. Yamaleev, *Relativistic Equations of Motion within Nambu's Formalism of Dynamics*, Ann. of Phys., **285**, 141 (2000).

Índice de Materias