



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ

FACULTAD DE CIENCIAS



INSTITUTO DE FÍSICA

"Manuel Sandoval Vallarta"



LA SIMETRÍA CONFORME EN LOS ESPECTROS DE LOS MESONES
LIGEROS

Tesis Presentada por:

Adrián Pallares Rivera

al

Instituto de Física

como Requisito para Obtener el Grado de

Maestro en Ciencias (Física)

Asesor de Tesis:

Dra. Mariana Kirchbach

San Luis Potosí, S.L.P., 02 de diciembre 2011.

Resumen

We study relevance of conformal symmetry breaking through the dilaton mass on the high-lying spectra of the unflavored mesons. The conformal symmetry is supposed to leave a footprint in those spectra in consequence of the gauge-gravity duality conjecture in combination with the opening of a conformal window in the infrared as recently observed experimentally through the property of the running coupling constant of QCD to approach a fixed point in the limit of a vanishing momentum transfer. The dilaton mass can affect the shape of the metric of the compactified Minkowski space-time, $R^1 \times S^3$, one of the possible conformally invariant topologies embedded by AdS₅ boundary, through a deformation of the S^3 position space by a damping exponential factor.

Towards our purpose, we consider the mesons under investigation as four-dimensional rigid rotators with the quark performing free geodesic motion either on the S^3 ball (unbroken conformal symmetry), or, on the deformed metric (symmetry broken by the dilaton mass). We show that $so(4)$ remains an isometry algebra of the deformed manifold though in a representation unitarily-inequivalent to the one of the conformally invariant S^3 surface. We furthermore demonstrate that the Casimir invariant of the $so(4)$ algebra describing the free motion on the deformed metric is equivalent to a perturbation of the free geodesic motion on S^3 by a harmonic potential there and given by a cotangent function of the second polar angle parametrizing S^3 .

In solving the eigenvalue problem of the $so(4)$ Casimir invariant on the deformed metric, we find same degeneracy patterns as on the undeformed. In this manner, a subtle mode of symmetry breaking has been identified in which the violation of the symmetry at the level of the representation function of the algebra can be opaqued by a conservation of the degeneracy patterns of the unbroken symmetry in the spectra.

Índice general

I Motivación	1
1. Introducción	2
1.1. Elementos básicos sobre la teoría de las interacciones fuertes	2
1.2. Algunas propiedades de los mesones	4
1.3. Principio gravedad-norma y la simetría conforme de QCD	8
1.4. Objetivo de la tesis	16
II Premisas de la investigación	20
2. Elementos básicos del grupo conforme	21
2.1. El grupo conforme $SO(2,4)$	21
3. Movimiento sobre S^3 perturbado por el potencial de "cot χ"	29
3.1. La ecuación de Schrödinger con el potencial de cot χ sobre la hiperesfera S^3 . .	29
III Aportaciones originales de la tesis	35
4. Movimiento libre sobre S^3 deformada	36
4.1. Movimiento cuántico libre y el potencial $\mathcal{V}_{\text{RMt}}(\chi)$ sobre S^3	36
4.2. Descomposición de las funciones de onda del movimiento perturbado	39
4.3. Transformación de similitud del algebra de isometría de $so(4)$ en S^3	43

4.4. Nuevas relaciones de recurrencia entre polinomios de Gegenbauer	46
5. Espectros de los mesones ligeros	52
5.1. Ajuste sobre los parámetros R , μ y B del modelo y una estimación para m_D . .	52
6. Conclusiones	58
IV Apéndices de la tesis	61
A. Ejemplo ilustrativo simple del cálculo de los coeficientes C_ℓ.	62
A.1. Cálculo de los coeficientes para $K = 2$ y $\tilde{\ell} = 0$	62
B. Ejemplo ilustrativo simple del cálculo de una relación de recurrencia.	66
B.1. Formula de recurrencia para $K = 1$	66
V Bibliografía	70

Parte I

Motivación

Introducción

1.1. Elementos básicos sobre la teoría de las interacciones fuertes

La cromodinámica cuántica (QCD¹) es una teoría de campos de norma que describe la interacción fuerte entre *quarks* y *gluones* [1].

En el contexto del *Modelo Estándar* (ME) de la física de las partículas elementales los *quarks* junto con los *leptones* son considerados los constituyentes fundamentales de la materia, que interactúan entre ellos vía el intercambio de partículas de espín entero llamados *bosones*.

Los *leptones* son fermiones² con espín 1/2, que no interactúan fuertemente. Ejemplo de leptones son el electrón y su neutrino, estos constituyen un doblete de partículas en la representación fundamental del grupo $SU(2)_L$ electrodébil. A cada leptón se le asigna un número cuántico llamando *número leptónico* que se conserva en todo proceso electrodébil.

Los quarks también son fermiones de espín 1/2. Existen 6 tipos de quarks, distinguidos por el número cuántico de *sabor*: up (u), down (d), charm (c), strange (s), top (t) y bottom (b). Cada uno de estos quarks posee su correspondiente anti-quark. Los quarks tienen carga eléctrica fraccional ($2e/3$) ó ($-e/3$) dependiendo del sabor. También se les asigna un número cuántico llamado *número bariónico* que se conserva. Otros números cuánticos de los quarks de sabor ligero (u, d y s) se presentan en la tabla (1.2) a continuación.

¹Quantum Electrodynamics

²Los fermiones son partículas con espín semientero (1/2, 3/2,...)

Quarks	Espín	B	Q	I_3	\mathcal{S}	Y
u	1/2	1/3	+2/3	+1/2	0	+1/3
d	1/2	1/3	-1/3	-1/2	0	-1/3
s	1/2	1/3	-1/3	0	1	-2/3

Cuadro 1.1: Aquí se muestran los números cuánticos de los quarks de *sabores ligeros*: up (u), down (d) y strange (s). Cada quark posee espín $S = 1/2$ y número bariónico $B = 1/3$. Estos tienen carga eléctrica Q fraccional, $(2/3)$ ó $(-1/3)$ unidades de carga fundamental (e) dependiendo del sabor. El número cuántico Y es la *hipercarga* y esta dado por $Y = B + \mathcal{S}$, donde \mathcal{S} es el número cuántico de extrañeza. La carga eléctrica Q esta relacionada con la proyección de isoespín I_3 y la hipercarga Y como se muestra en la siguiente expresión, $Q = I_3 + Y/2$. Cada uno de los quarks de sabor ligero posee su *anti-quark* con sus respectivos números cuánticos.

La teoría de la interacción fuerte (QCD) se construye como una teoría de campos de norma y tiene por grupo de norma el grupo de color, $SU_c(3)$. Este grupo de simetría otorga a los quarks el número cuántico denominado carga de *color*, siendo los quarks un triplete de color en la representación fundamental de $SU(3)_c$. Convencionalmente, se han asignado los colores rojo (R), verde (G) y azul (B)³. Experimentalmente aún no se han observado quarks aislados, al parecer estos se encuentran siempre confinados formando partículas más pesadas llamadas *hadrones*, este tipo de partículas ya han sido observadas experimentalmente. Así mismo, estas últimas se clasifican en *bariones* y *mesones*. Dichos estados de confinamiento son neutros respecto de la carga de color.

Los quarks y en consecuencia los bariones y mesones al igual que los leptones también participan en los procesos electrodébiles y en consecuencia, las generaciones de quarks, en paralelo con los leptones son dobletes bajo el grupo $SU(2)_L$ de *isoespín débil*, como se muestra enseguida,

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}, \quad (1.1.1)$$

y

³RGB por sus siglas en inglés

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}. \quad (1.1.2)$$

La teoría que describe las interacciones fuerte y electrodébil de quarks y leptones se conoce como *Modelo Estándar* (ME) de la física de las partículas elementales. En la siguiente sección se muestran algunas propiedades de los estados hadrónicos, específicamente sobre los estados mesónicos, los cuales son de importancia para el entendimiento de la presente tesis.

1.2. Algunas propiedades de los mesones

Como ya se mencionó, los *bariones* y *mesones* son partículas compuestas de quarks y estas en su conjunto constituyen a la familia de los *hadrones*. Y ya que los quarks tienen espín $1/2$, la diferencia entre el número de quarks que constituyen a los bariones y mesones permite clasificar a los bariones como fermiones (espín $1/2$) y a los mesones como bosones (espín entero).

Los *bariones* son estados compuestos por tres quarks, (qqq). El barión fundamental es el *nucleón*, este es el nombre que recibe el doblete de isospín formado por el protón (uud) y neutrón (udd). Sus respectivos estados excitados son las resonancias nucleónicas (bariónicas sin sabor).

Por otro lado, los *mesones* son estados formados por un quark y un antiquark ($q\bar{q}$). Esta tesis se dedica al estudio de los espectros de los mesones pesados compuestos por quarks de sabores ligeros (u y d) y en consecuencia es importante mencionar algunas de las propiedades que exhiben este tipo de partículas.

Así, ya que los mesones están compuestos por un quark y un antiquark, estas partículas se pueden encontrar en estados de espín formando singuletes y tripletes. Un ejemplo de estos últimos estados son los *piones* $\pi^- (d\bar{u})$, $\pi^0 (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$ y $\pi^+ (u\bar{d})$.

Cada tipo de mesón posee su correspondiente antipartícula (antimesón) en la cual los quarks son reemplazados por sus correspondientes antiquarks y viceversa. Por ejemplo, el pión π^+ compuesto por un quark up (u) y un antiquark down (\bar{d}); su correspondiente antimesón es el pión π^- el cual está compuesto por un antiquark up (\bar{u}) y un quark down (d). Dado que los mesones están compuestos por quarks, estas partículas participan en las interacciones débil y fuerte.

Los mesones se clasifican en grupos de acuerdo a sus números cuánticos de isospín (I), momento angular total (J), paridad espacial (P) y otras propiedades como C-paridad, etc.

Para un estado $q\bar{q}$ con momento angular orbital, L , la paridad espacial viene dada como $P = (-1)^{L+1}$. La paridad C bajo conjugación de carga, esta dada como $C = (-1)^{L+S}$ y esta definida sólo para mesones.

El momento angular total de un mesón J es la suma vectorial del momento angular orbital (L) y de espín (S) de sus quarks constituyentes, es decir, $|L - S| \leq J \leq |L + S|$.

Una clasificación para los mesones de acuerdo a su configuración de espín S y momento angular orbital L y por tanto, en multipletes J^{PC} se muestra en la tabla 1.2.

Nombre	S	L	J	P	C	J^{PC}	Mesones
Pseudoescalar	0	0	0	-	+	0^{-+}	π η η' K
Pseudo-vector	0	1	1	+	-	1^{+-}	ρ ω ϕ K^*
Vector	1	0	1	-	-	1^{--}	b_1 h_1 h'_1 K_1
Escalar	1	1	0	+	+	0^{++}	a_0 f_0 f'_0 K_0^*
Vector-axial	1	1	1	+	+	1^{++}	a_1 f_1 f'_1 K_1
Tensores	1	1	2	+	+	2^{++}	a_2 f_2 f'_2 K_2^*

Cuadro 1.2: Los números cuánticos de espín (S), momento angular orbital (L), paridad espacial (P) y momento angular total (J) forman multipletes de mesones J^{PC} . Los estados con $S = 0$ y $L = 0$ se denominan *pseudoescalares* (0^{-+}) y aquellos con $S = 1$ y $L = 0$ se conocen como mesones *vectores* (1^{--}). Los estados excitados con $L = 1$ y $S = 1$, son *escalares* (0^{++}), los *vector-axial* (1^{++}) poseen $L = 1$ y $S = 0$; finalmente aquí se muestran los mesones *tensoriales* (2^{++}).

La tabla 1.2 muestra una clasificación para los mesones en multipletes de la forman J^{PC} de acuerdo con sus números cuánticos de espín (S), momento angular orbital (L), paridad espacial (P) y C-paridad (C).

Los estados con $L = 0^+$ y $S = 0^-$ se denominan *pseudoescalar* (0^{-+}); los estados con $L = 0^+$ y $S = 1^-$ son *vector* (1^{--}). Por otro lado, los estados excitados con $L = 1^-$ son *escalares* (0^{++}), *vectores axial* (1^{++}), *pseudo-vector* (1^{+-}) y los *tensoriales* (2^{++}).

Enseguida se muestran los espectros exhibidos por los mesones dentro del *Modelo de Quarks*

Estándar. Para fines ilustrativos sólo se muestran los mesones *pseudoescalar* y *pseudo-vector*.

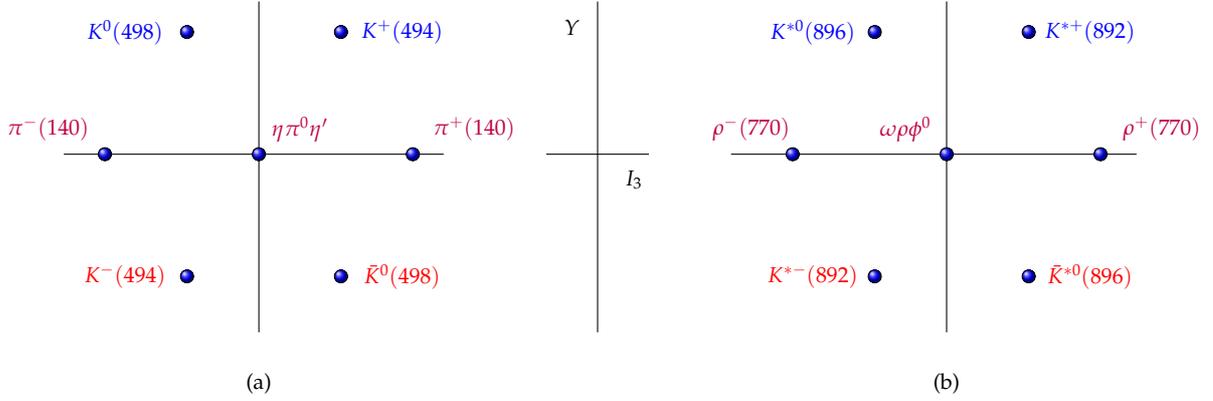


Figura 1.1: En el *Modelo de Quarks Estándar* encontramos multipletes de mesones (J^P) agrupados en el plano de *hipercarga* (Y) - *proyección de isospín* (I_3) esta clasificación está basada en el grupo de simetría $[SU(6)]_{FS} \supset [SU(3)]_F \times [SU(3)]_S$. En el diagrama (a) observamos los *mesones pseudoescalares* (0^{-+}) y en (b) tenemos los *mesones pseudo-vector* (1^{+-}).

La clasificación de la figura 1.1 recibe el nombre de *Modelo de Quarks Estándar* y está basado en el grupo de simetría $[SU(6)]_{FS} \supset [SU(3)]_F \times [SU(3)]_S$, aquí los mesones están agrupados en multipletes (J^{PC}) de partículas de este grupo de simetría para energías por debajo de 1600 MeV.

Nótese que al efectuar una comparación de energías entre un estado *pseudoescalar* (0^{-+}) y un estado *pseudo-vector* (1^{+-}) en el plano (Y, I_3) de coordenadas idénticas se obtienen que $m_\rho - m_\pi \approx 600$ MeV y $m_{a_1} - m_\rho \approx 500$ MeV. Los resultados indican una diferencia significativa del orden de unos cientos de MeV's. Sin embargo, se ha observado que por encima de 1600 MeV esta situación resulta diferente.

La tesis se dedica al análisis de los espectros de los mesones del sector ligero, es decir, partículas compuestas por los quarks u y d . Específicamente se analizan los espectros a energías altas y comparables con las energías de las excitaciones bariónicas N y Δ , esto es, por encima de 1600 MeV. En esta región de excitación se observan degeneraciones que rompen la simetría $SU_{SF}(6)$ de los octetes típicos mostrados en la figura 1.1.

En la siguiente figura 2.1 se muestran las degeneraciones de los niveles exhibidos por los espectros de los mesones ligeros, de acuerdo con los datos experimentales de la colaboración

Cristal Barrel [2].

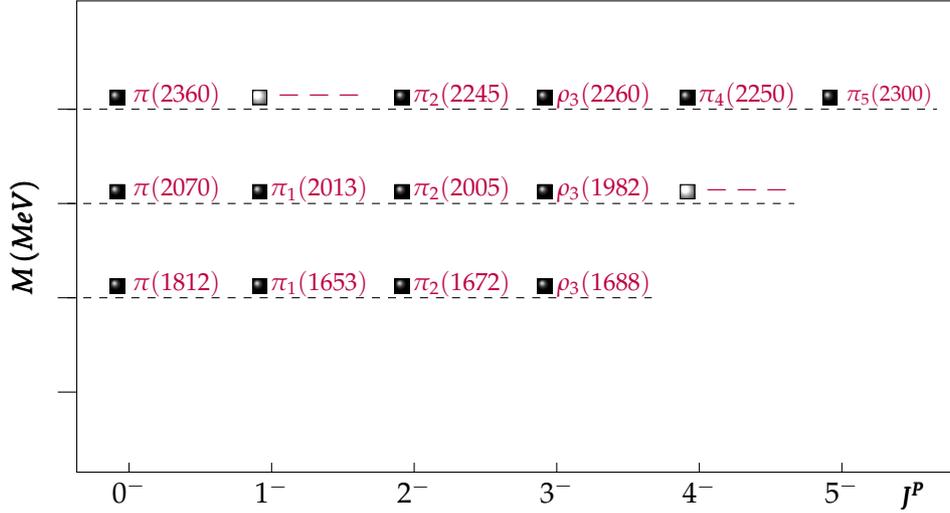


Figura 1.2: Diagrama esquemático de los mesones pesados isovectoriales, $I = 1$, sin extrañeza de acuerdo con los datos de la colaboración Cristal Barrel [2]. Aquí se observamos degeneraciones bien marcadas que resultan distintas a las del Modelo de Quarks Estándar mostradas en la figura 1.1.

De la figura 2.1 notamos que cuando analizamos las diferencias de energías entre estados con (3^-) y los estados con (2^-) en cada uno de los niveles de energía se han observado los siguientes resultados $m_\rho - m_\pi = 15 \text{ MeV}$, $m_\rho - m_\pi = -23 \text{ MeV}$ y $m_\rho - m_\pi = 16 \text{ MeV}$. Estas diferencias resultan significativamente pequeñas en comparación con las del Modelo de Quarks Estándar mostradas en la figura 1.1. El espectro mostrado en la figura 2.1 exhibe degeneraciones bien marcadas a energías por debajo de 1600 MeV que rompen la simetría $[SU(3)]_F \times [SU(3)]_S$ de los octetes típicos mostrados en la figura 1.1. La tesis se dedica al análisis de los espectros mesónicos del sector ligero compuestos por los quarks u y d . Específicamente se analizan los espectros a energías altas y comparables con las energías de las excitaciones bariónicas N y Δ , es decir, por encima de 1600 MeV. Se verá más adelante que las degeneraciones mostradas en la figura 2.1 apuntan a la importancia de la *simetría conforme* en la descripción del sector de los mesones pesados sin sabor. Dicha simetría entra en la dinámica de QCD guiada por la *conjetura de la dualidad gravedad-norma* expresada por Maldacena hacia 1998 [3], la cual establece un enlace entre una teoría de cuerdas y D-branas con las mediciones

en QCD a energías relativamente altas.

1.3. Principio gravedad-norma y la simetría conforme de QCD

Específicamente, a partir de unos trabajos de Maldacena y Witten [4] se empezó a intuir que la *teoría de supercuerdas y D-branas* (la cual es una teoría ubicada en la escala de 10^{-33} cm) puede afectar a la *teoría de la interacción fuerte (QCD)* en la escala de 10^{-16} cm.

Esto no debe sorprendernos ya que la teoría de supercuerdas y D-branas es una teoría superior a QCD que unifica las interacciones *electrodébil, fuerte y gravitacional* en una teoría renormalizable. Por tanto, si la teoría unificada es correcta esta debe predecir algunos aspectos de la interacción fuerte, los cuales se podrían confirmar en QCD.

Aunque, durante los primeros años de su desarrollo, la teoría de supercuerdas y D-branas, no se ha relacionado con los datos experimentales, a partir de los trabajos de Maldacena en 1998 [3], esto cambió. Maldacena estableció el concepto de la *dualidad ó correspondencia* entre una teoría de supercuerdas tipo IIB ubicada sobre la frontera del espacio curvado $AdS_5 \times S^5$ y una teoría de campos conformemente invariante (CFT_4) supersimétrica (SUSY). A esta relación de correspondencia entre este tipo de teoría (antes mencionadas) se le conoce como *dualidad gravedad-norma ó correspondencia AdS_5/CFT_4* .

La teoría de supercuerdas Tipo IIB es una teoría que radica en la frontera de un espacio de 10 dimensiones, para el cual se elige una topología particular como lo es el espacio $AdS_5 \times S^5$.

El subespacio AdS_5 (Anti-de-Sitter⁴) de 5 dimensiones, es un espacio maximamente simétrico definido por la métrica,

$$U^2 + V^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 = L^2, \quad (1.3.1)$$

como un hiperboloide de 5-dimensiones en el espacio \mathbb{R}^{2+4} , el cual satisface las ecuaciones de Einstein. Donde (U, V) son coordenadas temporales y (X_1, X_2, X_3, X_4) son coordenadas espaciales, en tanto que L^2 es una escala.

La ventaja de la topología AdS_5 es que su grupo isométrico $SO(2, 4)$ coincide con el grupo conforme en (1+3) dimensiones del espacio de Minkowski regular donde radica QCD.

⁴Hiperboloide de dos piezas en 5 dimensiones

En $AdS_5 \times S^5$, la parte en S^5 es una superficie hiperesférica de 5-dimensiones dada por la expresión⁵,

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 = R_0^2, \quad (1.3.2)$$

y la cual describe un "fondo gravitacional".

En este trabajo nos interesa abordar el concepto de la dualidad gravedad-norma de Maldacena, para esto, presentamos 2 casos de interés que ubican un espacio de Minkowski en las fronteras de AdS_5 , es decir,

$$U^2 + V^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 = 0, \quad (1.3.3)$$

a este limite se le conoce como el *cono de luz de AdS_5* . Sin entrar en los detalles de la definición precisa de la frontera de AdS_5 , en este trabajo presentamos una idea de como un espacio de Minkowski puede ser parte de dicha frontera. Veamos primero la geometría correspondiente a

- (i) la elección realizada en el trabajo [5] que se puede interpretar en términos de la expresión,

$$V^2 - X_4^2 = U^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 = 0, \quad (1.3.4)$$

donde (X_1, X_2, X_3) y U son coordenadas de espacio-tiempo respectivamente, por tanto, la expresión,

$$U^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 = 0, \quad (1.3.5)$$

es la métrica que define al *cono de luz* del espacio de Minkowski regular (\mathbb{R}^{1+3}). Dicho en otras palabras, la intersección del cono de luz AdS_5 con las superficies $V^2 - X_4^2 = 0$ genera *copias del cono de luz de un espacio de Minkowski plano*.

⁵Una esfera n-dimensional S^n esta definida por la forma cuadrática $X_1^2 + \dots + X_{n+1}^2 = R_0^2$ en un espacio Euclideo (n+1)-dimensional.

Esta elección resulta apropiada para estudios de QCD en el *régimen ultravioleta* (UV) (altas energías). Sin embargo, para propiciar un confinamiento en el espacio plano se emplea una ecuación de Schrödinger en una quinta dimensión excluida denominada *dimensión holográfica* con un potencial de confinamiento del tipo oscilador armónico.

Una solución inmediata a este problema proviene de la posibilidad de reemplazar en la frontera de AdS_5 , el cono de luz del espacio de Minkowski por un espacio de Minkowski compactificado, lo cual se podría ver como,

(ii) la elección desarrollada en el trabajo [6] y que esta dada por,

$$U^2 + V^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = R^2, \quad (1.3.6)$$

donde R se considera constante.

Aquí las coordenadas temporales U y V se enrollan sobre un círculo S^1 dado por la ecuación,

$$U^2 + V^2 = R^2. \quad (1.3.7)$$

En tanto que, el espacio de las posiciones,

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = R^2, \quad (1.3.8)$$

queda como una superficie hiperesférica, S^3 , de volumen finito (R constante).

El espacio resultante $\tilde{\mathbb{R}}^{1+3} = S^1 \times S^3$ es conocido como el *universo cerrado de Einstein* ó el *espacio de Minkowski compactificado*. Esta elección resulta apropiada para estudios de QCD en el *régimen infrarrojo* (IR), porque incorpora de la manera más natural un *confinamiento* requerido por QCD como la restricción de un sistema de quarks y gluones a un volumen finito y que fue ideada por Witten[4]. Es decir, la dimensión excluida queda como un expectador y a diferencia del caso anterior no es indispensable para la descripción del confinamiento.

Además, el espacio de Minkowski compactificado, $\tilde{\mathbb{R}}^{1+3}$, es un espacio conforme, es decir, el grupo isométrico es el grupo $SO(2) \times SO(4)$, el cual es un subgrupo del grupo conforme $SO(2,4)$ del espacio de Minkowski regular (\mathbb{R}^{1+3}), es decir, $SO(2) \times SO(4) \subset SO(2,4)$.

En una escala microscópica se puede establecer una correspondencia uno a uno para todo tipo de observable físicos⁶ sobre $\widetilde{\mathbb{R}}^{1+3}$ y \mathbb{R}^{1+3} , así que el *espacio de Minkowski compactificado* resulta igual de útil que el *espacio de Minkowski regular* (plano) para la descripción de procesos físicos. Más adelante se verá que el espacio compactificado de Minkowski resulta muy apropiado para la descripción del fenómeno de *confinamiento* de QCD.

El concepto de la dualidad gravedad-norma es aplicable a una teoría de cuerdas débilmente acoplada y a una teoría de campos conforme (CFT_4) con acoplamiento fuerte, es decir, de acuerdo con lo postulado por *Maldacena*, una teoría de supercuerdas con acoplamiento débil sobre las fronteras de $AdS_5 \times S^5$ es equivalente a una teoría cuántica de campos (CFT_4) con simetría conforme a temperaturas altas (acoplamiento fuerte). Así, en adelante en esta tesis, CFT_4 será identificada como QCD.

Hasta ahora, el concepto de la dualidad gravedad-norma postulado por Maldacena, genera un escenario de expectativa para que las predicciones sobre algún observable en las fronteras de $AdS_5 \times S^5$ se reflejen en los datos experimentales de QCD. Así, la teoría de cuerdas ofrece una nueva perspectiva en la descripción de los fenómenos de QCD a temperaturas altas.

Por otro lado, recordemos que QCD es una teoría de campos no Abelianas e invariante de norma bajo el grupo de simetría $SU_c(3)$ de color.

El Lagrangiano de QCD esta dado por la siguiente expresión,

$$\mathcal{L} = \sum_q \bar{\psi}_{q,a} \left(i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{ab} - g_s \gamma^\mu t_{ab}^C \mathcal{A}_\mu^C - m_q \delta_{ab} \right) \psi_{q,a} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu}, \quad (1.3.9)$$

donde γ^μ son las matrices de Dirac; $\psi_{q,a}$ son los campos de espinores para un quark de sabor q y masa m_q ; el índice corre sobre los colores, es decir, para $a = 1, \dots, N_c = 3$. La representación del campo de norma \mathcal{A}_μ^C corresponde a los campos de gluones, donde $C = 1, \dots, (N_c)^2 - 1 = 8$ y que es igual al número de elementos en la representación adjunta del grupo de color, $SU_c(3)$; t_{ab}^C son matrices 3×3 correspondientes a los ocho generadores del grupo $SU_c(3)$. En tanto, g_s es la *constante corriente de acoplamiento*⁷ de QCD, esto significa que g_s es una función que depende del cuadrado del momento transferido, Q^2 . Finalmente, $F_{\mu\nu}^A$ es un campo tensorial,

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^A - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^A - g_s f_{ABC} \mathcal{A}_\mu^B \mathcal{A}_\nu^C, \quad [t^A, t^B] = i f_{ABC} t^C, \quad (1.3.10)$$

⁶Observables físicos tales como propagadores, vértices, etc, (Diagramas de Feynman).

⁷running coupling constant

donde f_{ABC} son las constantes de estructura del grupo $SU(3)$.

Del Lagrangiano (1.3.9), se tiene que los parámetros fundamentales de QCD son la *constante corriente de acoplamiento* g_s ó $\alpha_s = g_s^2(Q^2)/4\pi$ y por otro lado, las *masas de los quarks* m_q .

La intensidad con la que interaccionan los quarks y gluones esta dada por la constante corriente de acoplamiento $\alpha_s(Q^2)$,

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{g_s^2(Q^2)}{4\pi} \approx \frac{1}{\beta_0 \log(Q^2/\Lambda^2)}, \quad (1.3.11)$$

donde β_0 es una constante introducida por Wilczek, Gross y Politzer; Λ es una escala con la cual se compara el cuadrado del momento transferido Q^2 y el cual resulta pequeño, en consecuencia, la constante corriente de acoplamiento es grande.

Por otro lado, para valores de Q^2 mayores a Λ^2 , la constante de acoplamiento se considera lo suficientemente pequeña que permite la aplicación de métodos perturbativos. Para $Q^2 \approx \Lambda^2$ no es posible hacer una predicción, ya que quarks y gluones se aglomeran formando estados fuertemente ligados, es decir, dan lugar a estados *hadrónicos*.

De esta manera, Λ señala la frontera entre dos regímenes, uno donde los quarks y gluones son cuasi-libres, a este régimen se le denomina *régimen ultravioleta* (UV) y un segundo régimen para los ya mencionados estados hadrónicos tales como lo son los piones, protones, etc., a este régimen se le conoce como *régimen infrarrojo* (IR).

El régimen ultravioleta ocurre cuando $\alpha_s(Q^2) \rightarrow 0$ y $Q^2 \rightarrow \infty$. Por otro lado, el régimen infrarrojo se presenta cuando $\alpha_s(Q^2) \rightarrow$ fijo y $Q^2 \rightarrow 0$. En la figura 1.4 se muestra el comportamiento de la constante corriente de acoplamiento, $\alpha_s(Q^2)$ en sus dos regímenes ya mencionados.

En lo siguiente, me parece constructivo abrir un paréntesis para resaltar la importancia que desencadena el hecho que QCD haya sido establecida en analogía con la Electrodinámica Cuántica (QED) y sobre el *principio de norma*. Resultado de esto es que QCD es una teoría no Abelian, mientras que QED viene como una teoría Abelian. Enseguida se enlistan algunos aspectos distintivos y de similitud entre ambas teorías:

- QCD opera sobre tres cargas denominadas como cargas de *color*, las cuales ya fueron mencionadas, mientras que QED, siendo una teoría Abelian, opera sobre una sola carga eléctrica. Cada uno de los quarks viene en uno de los tres colores (RGB⁸). El intercambio

⁸Red(rojo),Green (verde) y Blue (azul).

de color es mediada por los ocho *gluones*⁹, de manera similar a la función del fotón¹⁰ en QED.

- Los portadores de la interacción fuerte, los *gluones*, poseen carga de color doble ($R\bar{G}$, $B\bar{R}$), lo que significa que estos pueden interactuar entre sí. En cambio, los fotones, los mediadores de la interacción electromagnética son electricamente neutros y no hay dispersión de luz a luz.
- Cuando la intensidad de la interacción fuerte crece conforme la distancia aumenta entre las partículas, se origina el denominado fenómeno de *confinamiento* de los quarks, esto significa que si uno pudiera entrar en un hadrón e intentar separar sus quarks, encontraríamos que a medida que estos se separan la interacción se incrementa, este fenómeno justifica el hecho que aún no se hayan observado los quarks libres. Este fenómeno es de relevancia para esta tesis.
- En tanto que, cuando la interacción fuerte de QCD es muy débil, es decir, cuando dos quarks se encuentran muy cercanos uno al otro ($\approx 10^{-15}$ m) ocurre la conocida *libertad asintótica*.
- Finalmente, es importante señalar que QED y QCD poseen varias simetrías espaciotemporales en común, como lo son la simetría de Lorentz y bajo ciertas condiciones la *simetría conforme*.

Enseguida estudiaremos las condiciones y consecuencias de la presencia de la simetría conforme en QED y QCD.

Así, es un hecho bien establecido que QED es una teoría conformemente invariante, ya que su Lagrangiano es independiente de las masas de las partículas y su acoplamiento es una constante, $\alpha_{QED} \approx 1/137$, salvo cuando los momentos transferidos Q^2 son extremadamente altos.

Esta propiedad de QED se ve reflejada en el espectro del átomo de hidrógeno. Específicamente, es bien conocido que los niveles del electrón sin espín en el átomo de hidrógeno resultan $(N + 1)^2$ veces degenerados¹¹, donde N es el número cuántico principal. Esta degeneración de los niveles ocurre ya que el momento angular ℓ adquiere valores de $\ell = 0, \dots, N - 1$, mientras que su proyección magnética m_ℓ recorre los valores $m_\ell = -\ell, \dots, \ell$.

⁹Portadores de la interacción fuerte.

¹⁰Portador de la interacción electromagnética.

¹¹Energías iguales.

Estos conjuntos de estados degenerados, es decir, con la misma energía, forman los niveles del átomo de hidrógeno (ver figura 1.3) y sus números cuánticos encajan perfectamente en representaciones irreducibles del grupo $SO(4)$ del tipo $((N - 1)/2, (N - 1)/2)$.

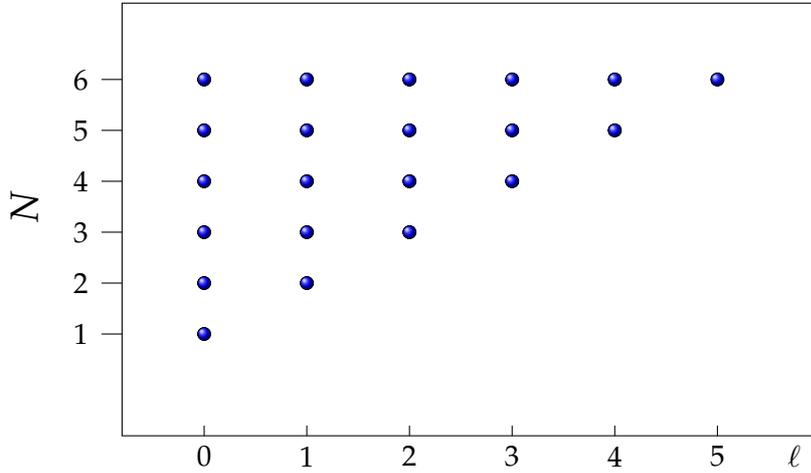


Figura 1.3: Aquí se muestra un diagrama esquemático del espectro conforme del átomo de hidrógeno en el plano de número cuántico principal (N) vs el momento angular (ℓ). Los estados degenerados constituyen los niveles del átomo de hidrógeno y sus números cuánticos (N, ℓ, m_ℓ) encajan perfectamente en representaciones irreducibles del grupo $SO(4)$ del tipo $((N - 1)/2, (N - 1)/2)$. Más adelante veremos que $(N - 1)$ juega el papel del valor del cuadrimomento angular (K), ya que $SO(4)$ es un grupo rotacional en E_4 [7]. La escalera infinita de niveles en el *potencial de Coulomb* y en su totalidad constituye una representación unitaria infinita del grupo conforme. De esta manera la simetría conforme de QED se manifiesta en el átomo de hidrógeno.

Más adelante veremos que $(N - 1)$ juega el papel del valor del cuadrimomento angular (K), ya que $SO(4)$ es un grupo rotacional en E_4 [7]. Y en su totalidad la escalera infinita con eslabones de $SO(4)$ corresponde a una representación unitaria infinita del grupo conforme. Es decir, el espectro del átomo de hidrógeno en su totalidad encaja en una representación unitaria infinita del grupo conforme. De esta manera la simetría conforme de QED se manifiesta en el átomo de hidrógeno.

Por otro lado, en QCD, las condiciones bajo las cuales esta teoría resulta conformemente invariante, vienen dadas por el hecho que la simetría conforme en QCD es posible como una *simetría aproximada* en el sector de sabores ligeros cuando se consideran las siguientes condi-

ciones:

- Las masas de los quarks del sector ligero (u y d), $m_u = 3$ MeV, $m_d = 7$ MeV, resultan ser pequeñas en comparación con las excitaciones mesónicas (≈ 1400 MeV) y por tanto, pueden despreciarse.
- En el régimen (UV) la constante de acoplamiento (α_s) corre hacia valores muy pequeños, es decir, ($\alpha_s \rightarrow 0$), y en dicha región la simetría conforme proporciona una buena aproximación para el cálculo de varios observables. Por otro lado, hay un régimen de QCD donde la simetría conforme tiene relevancia y resulta de interés para esta tesis, este es el régimen infrarrojo (IR) en el cual, α_s corre hacia un valor fijo ($\alpha_s \rightarrow$ fijo), dicha región se conoce con el nombre de *ventanilla conforme*¹² de QCD. En la región restante de α_s la simetría conforme no resulta una buena simetría para QCD véase la figura (1.4).

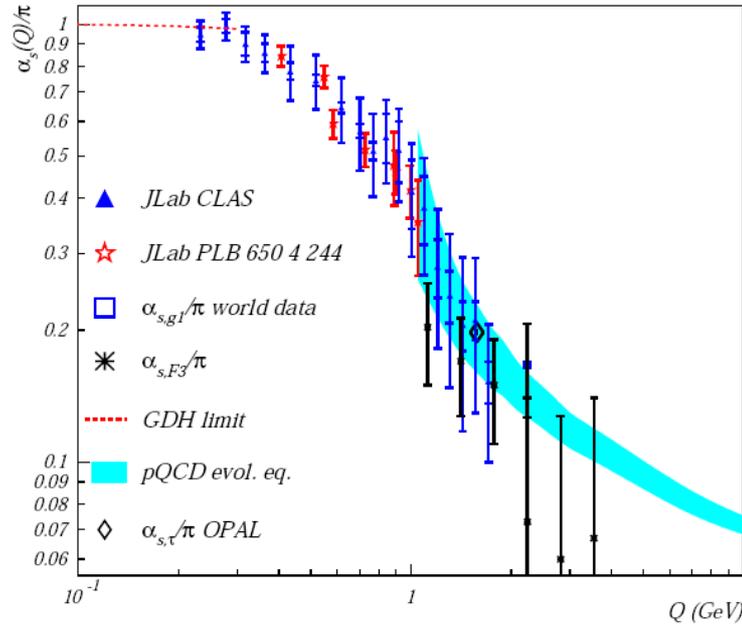


Figura 1.4: La constante corriente de acoplamiento, $\alpha_s(Q^2)$ es una función que depende del cuadrado del momento transferido, Q^2 , de acuerdo con las mediciones del Laboratorio Thomas Jefferson [2]. Es evidente la tendencia de α_s hacia un valor fijo cuando Q^2 esta cerca al origen y así abrir la conocida *ventanilla conforme*.

Finalmente, la única fuente responsable del rompimiento de la simetría conforme será la masa del *dilatón*, m_D .

¹²conformal window.

1.4. Objetivo de la tesis

En este punto nos planteamos la siguiente cuestión, ¿será la simetría conforme de QCD una simetría rota por la masa del dilatón y si este hecho se manifiesta en los espectros de los hadrones?.

En esta tesis se analizarán los espectros de los mesones y se verá que la respuesta resultará afirmativa. En vista que la simetría conforme esta rota por la masa del dilatón, este resultado puede parecer sorprendente. Para abordar este problema sugerimos un modelo simple para el rompimiento de la simetría conforme por la masa del dilatón m_D .

Conjeturamos que el efecto de la masa del dilatón es una deformación del espacio de simetría del grupo $SO(4)$ del tipo

$$(x^2 + y^2 + z^2 + x_4^2) \rightarrow e^{-m_D \chi} (x^2 + y^2 + z^2 + x_4^2), \quad (1.4.1)$$

$$\text{donde } \chi = \cot^{-1} \left(x_4 / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right). \quad (1.4.2)$$

Vease la figura 1.5.

En lo que sigue describiremos los mesones como *rotatores rígidos*, es decir, un sistema de dos cuerpos, quark-antiquark ($q-\bar{q}$), donde el quark (q) traza un movimiento libre sobre una hiperesfera, S^3 , cuando la simetría conforme esta intacta ó sobre una superficie S^3 deformada (S'^3) cuando la simetría conforme es rota por el *dilatón* véase la figura 1.5. El modelo se desarrolla en analogía con el esquema desarrollado para bariones vistos como un sistema quark-diquark ($q-qq$) [6].

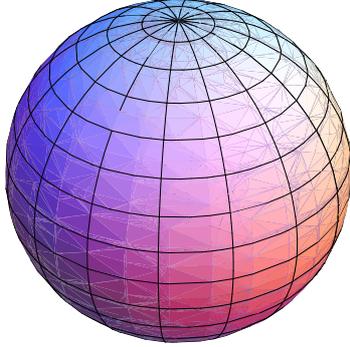
El algebra de isometría de la bola,¹³ S^3 , es bien conocida y es $so(4)$. Por esta razón el movimiento cuántico libre sobre la superficie S^3 esta descrito por la ecuación de eigenvalores,

$$\mathcal{K}^2 Y_{K\ell m}(\bar{\Omega}) = K(K+2) Y_{K\ell m}(\bar{\Omega}), \quad (1.4.3)$$

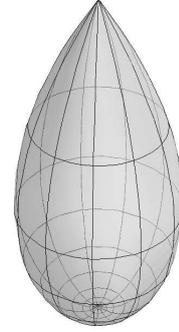
donde $\bar{\Omega} = (\chi, \theta, \varphi)$, $Y_{K\ell m}(\bar{\Omega})$ son los hiperesféricos armónicos¹⁴, θ es un ángulo polar, φ es el ángulo azimutal y χ es un segundo ángulo polar; \mathcal{K}^2 es el operador de cuadrimento angular definido sobre S^3 .

¹³Emplearemos el término *bola* para referirnos a la superficie hiperesférica S^3

¹⁴En analogía con el problema de eigenvalores $L^2 Y_{\ell m} = \ell(\ell+1) Y_{\ell m}$, para el cuadrado del tri-momento, L^2 y los armónicos esféricos, $Y_{\ell m}$.



$$S^3 : x^2 + y^2 + z^2 + x_4^2$$



$$S'^3 : e^{-m_D \chi} (x^2 + y^2 + z^2 + x_4^2)$$

Figura 1.5: Esta figura muestra un diagrama esquemático del movimiento libre geodésico del quark (q) sobre la hipersfera S^3 para el caso de una simetría conforme intacta (izquierda) ó sobre una superficie S'^3 (S^3 deformada) de acuerdo con la ec. (1.4.1) para el caso del rompimiento de la simetría conforme por la masa del dilatón (derecha). Las líneas sólidas representan círculos grandes.

En consecuencia, el movimiento libre del quark (q) sobre S^3 (más bién una partícula efectiva con una masa reducida dada por las masas de q y \bar{q}) revela un espectro que posee números cuánticos idénticos a los del espectro del átomo de hidrógeno (véase capítulo 5).

Para estudiar el movimiento sobre la bola deformada (véase la parte derecha en la figura 1.5) es necesario averiguar el algebra de isometría de esta superficie y resolver el problema de eigenvalores del invariante de Casimir de esta algebra, $\tilde{\mathcal{K}}^2$.

En esta tesis se muestra que el algebra $so(4)$ sigue siendo el algebra de isometría de la supereficie deformada aunque en una representación unitariamente inequivalente a la del algebra de S^3 . Además se muestra que el invariante de Casimir de esta nueva algebra resulta equivalente a una perturbación del movimiento libre sobre S^3 por el potencial de la $cot \chi$. Resolviendo el problema de eigenvalores del invariante,

$$(\mathcal{K}^2 - 2b \cot \chi) \Psi(\bar{\Omega}) = (\tilde{\mathcal{K}}^2 - \frac{\alpha^2}{4}) \Psi(\bar{\Omega}) = \left[K(K+2) - \alpha_K^2/4 \right] \Psi(\bar{\Omega}). \quad (1.4.4)$$

Mostraremos que los espectros de los mesones para el caso de la simetría conforme rota por el dilatón poseen las mismas degeneraciones como en el caso de una simetría conforme intacta. De esta manera se reporta un rompimiento de una simetría en el nivel de las funciones de representación que es opacado por las degeneraciones en los espectros de la simetría intacta.

Es importante señalar que en la literatura se ha ofrecido sólo una explicación sobre la peculiaridad que exhibe la $\cot \chi$ de conservar el patrón de degeneración del movimiento libre sobre S^3 , esta fué efectuada por Higgs en su trabajo del año de 1978 [10]. Ahí Higgs considera la proyección de la hiperesfera sobre un plano tangencial al polo norte de la hiperesfera y muestra que sobre este plano el Hamiltoniano,

$$\mathcal{H} = \mathcal{K}^2 - 2b \cot \chi, \quad (1.4.5)$$

se puede representar como un invariante de un algebra $so(4)$ deformada por términos cúbicos sin que la modificación del algebra afecte las degeneraciones en el espectro. Sin embargo:

- dicha algebra deformada es una algebra dinámica en el sentido que para la construcción de los generadores se requiere el espacio fase en su totalidad (momentos conjugados y coordenadas) ya que una parte de los generadores se construye en términos de un vector de Runge-Lenz,

$$R_i = -L_{ij}P_j + \frac{B}{R} \frac{x_i}{r}; \quad (1.4.6)$$

- de ninguna manera esta algebra se puede relacionar con el rompimiento de la simetría conforme por la masa del dilatón.

En cambio, en esta tesis se muestra que (1.4.5) se comporta como el invariante de Casimir de un algebra geométrica $so(4)$ intacta, construida exclusivamente en el espacio de coordenadas, que deforma la métrica de la hiperesfera S^3 de la misma manera que lo hace la masa del dilatón. La obtención de nuestro resultado fué posible amplificando el esquema para resolver el problema de eigenvalores (1.4.4), el cual por lo general se resuelve utilizando el método de Nikiforov-Uvarov, ya que este reduce la ecuación (1.4.4) a una ecuación diferencial hipergeométrica cuyas soluciones son los *polinomios ortogonales de Jacobi* ó equivalentemente los *polinomios de Romanovski* [11].

En esta tesis, la ecuación (1.4.4) se reduce a una ecuación diferencial hipergeométrica cuyas soluciones son los *polinomios de Gegenbauer* correspondientes al movimiento libre de una partícula sobre S^3 . En consecuencia las funciones de onda del movimiento perturbado se expresan como una combinación de las funciones de onda del movimiento libre amortiguadas por un factor exponencial. De esta manera se encuentra una transformación de similitud entre \mathcal{K}^2 y $(\mathcal{K}^2 - 2b \cot \chi)$. Y se concluye que *la simetría conforme del grupo $SO(2,4)$ se rompe en el nivel de las funciones de onda y se conservan las degeneraciones del espectro.*

*Así, en esta tesis se ha encontrado un nuevo y sutil mecanismo de rompimiento de la simetría conforme que hemos denominado “**rompimiento opacado de simetría**” y concluimos que las degeneraciones no necesariamente implican la presencia de la simetría grupal $SO(4)$ (equivalentemente $SO(2,4)$), pero si del algebra $so(4)$ ($so(2,4)$), es decir, en general, las degeneraciones se atribuyen a un algebra pero no necesariamente a la simetría de un grupo ortogonal.*

La tesis esta estructurada de la siguiente manera. En el capítulo 2 siguiente se presenta un breve resumen sobre los elementos básicos del grupo conforme.

En el capítulo 3 se reducirá el problema de eigenvalores (1.4.4) a una ecuación de Schrödinger en una dimensión. En esta etapa de la tesis esta última ecuación se solucionará aún aplicando el método de Nikiforov-Uvarov [12] el cual permite reducir la ecuación de Schrödinger a una ecuación diferencial hipergeométrica con soluciones polinomiales.

Después en el capítulo 4 se presenta la amplificación del método de Nikiforov-Uvarov [12] al descomponer las funciones de onda del movimiento perturbado sobre S^3 en la base de las funciones de onda del movimiento libre amortiguadas por un factor exponencial. De aquí se concluye una transformación no unitaria tipo dilatacional que conecta los problemas de eigenvalores (4.1.1) y (1.4.4) y que muestra que el movimiento perturbado por la “ $\cot \chi$ ” es equivalente a un movimiento libre sobre una métrica deformada (1.4.1).

En el capítulo 5 se presentan los espectros de los mesones ligeros. La tesis termina con breves conclusiones y dos apéndices.

Parte II

Premisas de la investigación

Elementos básicos del grupo conforme

El grupo $SO(2, 4)$, es un grupo de Lie, de *transformaciones conformes* sobre el espacio de Minkowski, el cual es un espacio pseudo-Euclideo $\mathbb{R}^{1,3}$. Una transformación conforme es aquella que preserva los ángulos entre curvas que se intersectan, es decir,

$$\cos \gamma = \frac{g_{\mu\nu} dx^\mu dy^\nu}{\sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \sqrt{g_{\mu\nu} dy^\mu dx^\nu}}$$

donde dx^μ y dy^ν son los elementos diferenciales de las curvas intersectandose.

En otras palabras, es un grupo de transformaciones de coordenadas que preserva la métrica del espacio de Minkowski inclusive hasta por un factor de escala permitiendo un reescalamiento.

2.1. El grupo conforme $SO(2, 4)$

Las primeras apariciones en la literatura del grupo conforme en la física se deben a Bateman y Cunningham (~1908) que mostraron que las ecuaciones de Maxwell de los campos electromagnéticos son covariantes no solo bajo el grupo de Poincarè sino también bajo transformaciones del *grupo conforme*.

Actualmente, es un hecho establecido que el grupo de Poincarè es un grupo de 10 parámetros, cuya algebra esta constituida por los generadores, \hat{P}_μ , ($\mu = 1, 2, 3, 4$) de *traslaciones* en el espacio-tiempo más los generadores (\hat{L}, \hat{M}) de *rotaciones* y *boost* del grupo de Lorentz homogéneo. Este grupo se puede extender a 15 parámetros sobre el espacio de Minkowski cuyas

transformaciones de coordenadas preservan la invariancia de la forma diferencial¹,

$$ds^2 = (dx_0)^2 - (dx_1)^2 - (dx_2)^2 - (dx_3)^2 = 0 \quad (2.1.1)$$

A este grupo que satisface la condición (2.1.1) se le denomina *grupo conforme* del espacio de Minkowski [7]. El algebra del grupo de Poincarè es una subalgebra de $so(2,4)$ y esta contiene los siguientes elementos adicionales ademas de los elementos del grupo de Poincarè,

1) un generador de *transformaciones de escala* ó *dilataciones*, \hat{D} , es decir,

$$x'^{\mu} \rightarrow \lambda x^{\mu} \quad (\lambda > 0), \quad (2.1.2)$$

2) y los elementos, \hat{K}_{μ} , asociados a unas *transformaciones conformes especiales*.

Estas últimas transformaciones conformes especiales se definen como,

(2a) coordenadas reescaladas por el cuadrado inverso de la longitud,

$$\hat{I}_1 : x'^{\mu} = k^2 x^{\mu} / x^2, \quad (2.1.3)$$

(2b) seguida por una traslación,

$$\hat{T} : x''^{\mu} = x'^{\mu} - a^{\mu}, \quad (2.1.4)$$

(2c) y finalmente un nuevo reescalamiento por el cuadrado inverso de la longitud,

$$\hat{I}_2 : x'''^{\mu} = k^2 x''^{\mu} / (x'')^2. \quad (2.1.5)$$

¹keep the light-like line element

Así, el resultado final es una transformación de la siguiente forma,

$$\hat{K} = \hat{I}_2 \hat{T} \hat{I}_2 : \quad x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} - a^{\mu} x^2}{\sigma(x)} \quad (2.1.6)$$

donde $\sigma(x) = 1 - 2a^{\nu} x_{\nu} + a^2 x^2$ y $a^2 = a_{\nu} a^{\nu}$, $x^2 = x_{\nu} x^{\nu}$.

Desde la perspectiva del grupo $SO(2,4)$, si consideramos las coordenadas $x^0 = ct$ y x^i ($i = 1, 2, 3$) del espacio de Minkowski y extendemos esta espacio agregando 2 nuevas variables, una coordenada espacial x^4 y otra temporal x^5 , la metrica sobre el espacio resultante será

$$\mathbf{g} = \text{diag}(1, -1, -1, -1, -1, 1) \quad (2.1.7)$$

es decir, $g_{00} = g_{55} = 1$ y $g_{ii} = -1$ ($i = 1, \dots, 4$) y el resto de las componentes cero.

De esta manera, los 15 generadores del grupo conforme en su representación diferencial son,

4 Traslaciones: $x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$;	$\hat{P}_{\mu} = i \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$,
6 Transformaciones de Lorentz: $x'^{\mu} = M_{\nu}^{\mu} x^{\nu}$;	$\hat{M}_{\mu\nu} = i \left(x_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} - x_{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right)$,
1 Dilatación: $x'^{\mu} = \alpha x^{\mu}$;	$\hat{D} = i x^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$,
4 Transformaciones especiales conformes: $x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} - a^{\mu} x^2}{\sigma(x)}$;	$\hat{K}_{\mu} = i \left(2x_{\mu} x^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right)$.

Estos satisfacen el algebra siguiente,

$$\begin{aligned}
 [\hat{P}_\lambda, \hat{M}_{\mu\nu}] &= i(g_{\mu\lambda}\hat{P}_\nu - g_{\nu\lambda}\hat{P}_\mu), & [\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu] &= 0, \\
 [\hat{P}_\mu, \hat{K}_\nu] &= 2i(g_{\mu\nu}\hat{D} - \hat{M}_{\mu\nu}), & [\hat{P}_\mu, \hat{D}] &= i\hat{P}_\mu, \\
 [\hat{D}, \hat{K}_\mu] &= i\hat{K}_\mu, & [\hat{D}, \hat{M}_{\mu\nu}] &= 0, \\
 [\hat{K}_\lambda, \hat{M}_{\mu\lambda}] &= i(g_{\mu\lambda}\hat{K}_\nu - g_{\nu\lambda}\hat{K}_\mu), & [\hat{K}_\mu, \hat{K}_\nu] &= 0, \\
 [\hat{M}_{\mu\nu}, \hat{M}_{\sigma\rho}] &= i(g_{\mu\rho}\hat{M}_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}\hat{M}_{\mu\rho} + g_{\mu\sigma}\hat{M}_{\rho\nu} + g_{\nu\rho}\hat{M}_{\sigma\mu}).
 \end{aligned}$$

Introduciendo la nueva base de operadores,

$$\hat{P}_\mu = \hat{L}_{\mu 5} + \hat{L}_{\mu 4}, \quad (2.1.8a)$$

$$\hat{K}_\mu = \hat{L}_{\mu 5} - \hat{L}_{\mu 4}, \quad (2.1.8b)$$

$$\hat{D} = \hat{L}_{54}, \quad (2.1.8c)$$

$$\hat{M}_{\mu\nu} = \hat{L}_{\mu\nu}, \quad \text{con } \mu = 1, 2, 3, 4; \quad (2.1.8d)$$

El algebra del grupo conforme aunque actúa sobre el espacio de Minkowski es un algebra localmente isomorfa al algebra $so(2,4)$ del grupo $SO(2,4)$. Es decir, el grupo conforme del espacio de Minkowski con signatura de la métrica (1,3) es el grupo conforme $SO(2,4)$.

Es posible encontrar una variedad de subgrupos de $SO(2,4)$ cuando se analizan las relaciones de conmutación de los generadores de este grupo. Aquí presentamos una cadena de reducción de relevancia para nuestro trabajo,

$$SO(2,4) \supset SO(1,4) \supset SO(4) \supset SO(3) \supset SO(2). \quad (2.1.9)$$

En este trabajo estamos interesados sobre los generadores del grupo $SO(4)$ expresados de la siguiente manera,

$$\hat{O}_{ij} = -i \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \quad \text{con } (i, j = 1, \dots, 4). \quad (2.1.10)$$

Estos elementos del subalgebra $so(4)$ de $so(2,4)$ estan dados de la siguiente forma,

$$\hat{L}_1 = \hat{M}_1 = i \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \quad \hat{A}_1 = \hat{K}_1 = i \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_4} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_1} \right), \quad (2.1.11a)$$

$$\hat{L}_2 = \hat{M}_2 = i \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \right), \quad \hat{A}_2 = \hat{K}_2 = i \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_4} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad (2.1.11b)$$

$$\hat{L}_3 = \hat{M}_3 = i \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \hat{A}_3 = \hat{K}_3 = i \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} \right). \quad (2.1.11c)$$

Dichos elementos satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:

$$[\hat{M}_i, \hat{M}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{M}_k, \quad [\hat{K}_i, \hat{K}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{M}_k, \quad (2.1.12a)$$

$$[\hat{M}_i, \hat{K}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{K}_k, \quad (2.1.12b)$$

donde hemos identificado $L = M$ y $A = K$.

Así,

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2, \quad (2.1.13)$$

es el operador de Casimir del subálgebra $so(3)$ correspondiente a la cadena de reducción de $so(4)$ en (2.1.9).

Estos operadores se expresan en coordenadas esféricas polares de acuerdo con la siguiente parametrización,

$$x_1 = R \sin \chi \sin \theta \cos \varphi, \quad x_3 = R \sin \chi \cos \theta, \quad (2.1.14a)$$

$$x_2 = R \sin \chi \sin \theta \sin \varphi, \quad x_4 = R \cos \chi, \quad (2.1.14b)$$

donde $\varphi \in [0, 2\pi]$ es un ángulo azimutal; $\theta \in [0, \pi]$ y $\chi \in [0, \pi]$ son ángulos polares; además se impone la restricción del movimiento sobre una superficie S^3 , es decir, consideramos R constante.

De acuerdo con la parametrización en (2.1.14), los generadores de (2.1.11) en su representación de coordenadas esféricas polares están dados por las expresiones siguientes,

$$\hat{L}_1 = i\hat{M}_1 = \cos \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (2.1.15a)$$

$$\hat{L}_2 = i\hat{M}_2 = \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} - \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (2.1.15b)$$

$$\hat{L}_3 = i\hat{M}_3 = -\frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (2.1.15c)$$

$$\hat{A}_1 = i\hat{K}_1 = \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \cot \chi \frac{\partial}{\partial \varphi} - \cos \theta \cos \varphi \cot \chi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \chi}, \quad (2.1.15d)$$

$$\hat{A}_2 = i\hat{K}_2 = -\frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \cot \chi \frac{\partial}{\partial \varphi} - \cos \theta \sin \varphi \cot \chi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \chi}, \quad (2.1.15e)$$

$$\hat{A}_3 = i\hat{K}_3 = -\sin \theta \cot \chi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial \chi}. \quad (2.1.15f)$$

Así, el operador de momento angular ordinario, L^2 , es decir, el operador de Casimir de $so(3)$ es,

$$L^2 = -\left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right). \quad (2.1.16)$$

Y el operador de Casimir, \mathcal{K}^2 , del algebra $so(4)$ es,

$$\mathcal{K}^2 = L^2 + A^2 = -\frac{\partial^2}{\partial \chi^2} - 2 \cot \chi \frac{\partial}{\partial \chi} + \cot^2 \chi L^2 + L^2. \quad (2.1.17)$$

Este último se ha verificado en la tesis y se obtuvo que se puede reescribir de la siguiente manera,

$$\mathcal{K}^2 = -\frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{L^2}{\sin^2 \chi}, \quad (2.1.18)$$

y se concluyó de (2.1.17) que el cuadrado de A esta dado por,

$$A^2 = (iK)^2 = -\frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} + \cot^2 \chi L^2. \quad (2.1.19)$$

El operador, \mathcal{K}^2 , resulta diagonal en la base de las funciones de los armónicos hipersféricos,

$Y_{K\ell m}(\chi, \theta, \varphi)$, y sus eigenfunciones están dadas por,

$$\mathcal{K}^2 Y_{K\ell m}(\chi, \theta, \varphi) = K(K+2) Y_{K\ell m}(\chi, \theta, \varphi) \quad (2.1.20)$$

donde K es el valor del cuadrimomento angular.

Los armónicos hiperesféricos, $Y_{K\ell m}(\chi, \theta, \varphi)$, se definen en términos de los armónicos esféricos ordinarios, $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$, y los polinomios de Gegenbauer, $\mathcal{G}_{K-\ell}^{\ell+1}(\cos \chi)$, como se muestra en la siguiente expresión,

$$Y_{K\ell m}(\chi, \theta, \varphi) = \sin^\ell \chi \mathcal{G}_{K-\ell}^{\ell+1}(\cos \chi) Y_\ell^m(\theta, \varphi). \quad (2.1.21)$$

Finalmente, sin entrar en detalles técnicos notemos que una representación del grupo $SO(2, 4)$ está dada por una escalera infinita cuyos eslabones son representaciones irreducibles del álgebra $so(4)$ [7]. Una representación así se muestra esquemáticamente en la figura 2.1.

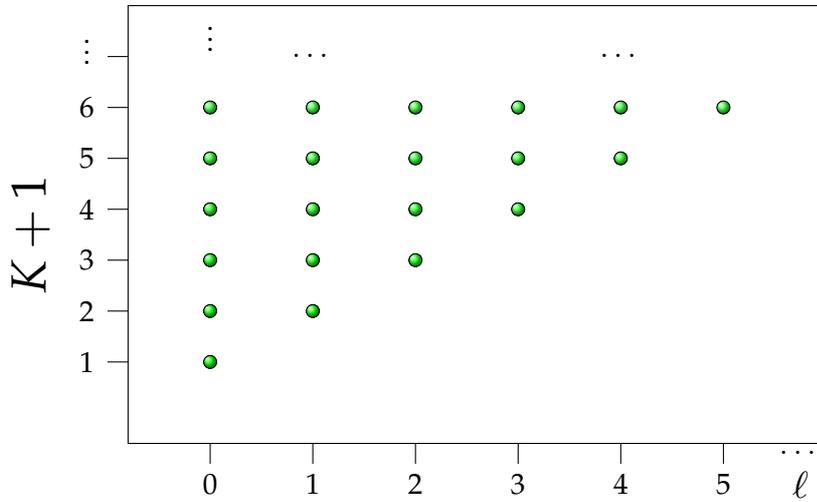


Figura 2.1: Representación infinita unitaria de $so(2,4)$ en el plano momento angular (ℓ) vs el cuadrimomento angular (K). A cada valor de $(K+1)$ corresponde $(K+1)^2$ estados degenerados. Cada familia de estados degenerados encaja en una representación irreducible de $so(4)$ del tipo $(K/2, K/2)$. Notese la similitud de este espectro con el espectro del átomo de hidrógeno en la figura 1.3.

Después de este breve resumen sobre el algebra del grupo $SO(2,4)$ continuamos en el siguiente capítulo con la solución al problema del movimiento perturbado sobre S^3 por el potencial "cot χ " (1.4.4) utilizando el método de Nikiforov-Uvarov [12], el cual permite reducir la ecuación de Schrödinger en una dimensión a una ecuación diferencial hipergeométrica con soluciones polinomiales.

Movimiento sobre S^3 perturbado por el potencial de "cot χ "

3.1. La ecuación de Schrödinger con el potencial de cot χ sobre la hiperesfera S^3

El movimiento cuántico de una partícula efectiva de masa reducida μ sobre la hiperesfera, S^3 , perturbado por un potencial " $(-2B \cot \chi)$ " con intensidad " $(-2B)$ ", puede describirse a través de la ecuación de Schrödinger:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \hat{\square}^2 - 2B \cot \chi \right) \Psi = E \Psi, \quad (3.1.1)$$

donde E es la energía y $\hat{\square}^2$ es el operador de Laplace-Beltrami (L-B) sobre el espacio Euclidiano de 4 dimensiones, E_4 , el cual está descrito en coordenadas hiperesféricas R y $\bar{\Omega} = (\chi, \theta, \varphi)$, de acuerdo con la parametrización de *Robertson-Walker* (2.1.14),

$$\begin{aligned} S^3 : \quad x_4^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= R^2, \quad x_4 = R \cos \chi, \quad r \equiv \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = R \sin \chi, \\ x_1 &= r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

aquí φ es el ángulo azimutal; θ y χ son ángulos polares y R es el radio de la hiperesfera S^3 . Bajo esta parametrización el operador de L-B se expresa como:

$$\hat{\mathcal{O}}^2(R, \bar{\Omega}) = \frac{1}{R^3} \frac{\partial}{\partial R} R^3 \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \hat{\Delta}_{S^3}^2, \quad (3.1.3)$$

donde $\hat{\Delta}_{S^3}^2$ es un operador que depende de las coordenadas angulares $\bar{\Omega} = (\chi, \theta, \varphi)$ y derivadas parciales respecto a las coordenadas angulares,

$$\hat{\Delta}_{S^3}^2 = \frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{1}{\sin^2 \chi \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (3.1.4)$$

Bajo la restricción del movimiento cuántico a un volumen finito, es decir, sobre una hipersfera, S^3 , con un radio (R) constante, la dependencia del operador L-B sobre S^3 se reduce a las coordenadas angulares $\bar{\Omega} = (\chi, \theta, \varphi)$,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{O}}^2(\bar{\Omega}) &= \frac{1}{R^2} \hat{\Delta}_{S^3}^2 \\ &= \frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{1}{\sin^2 \chi \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right). \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Definiendo un operador de cuadrimento angular, \mathcal{K}^2 , en S^3 y considerando el momento angular ordinario (2.1.16), \mathbf{L}^2 ,

$$\mathbf{L}^2 = - \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right). \quad (3.1.6)$$

El operador L-B se reescribe en términos del operador de cuadrimento angular de (2.1.18), \mathcal{K}^2 , y el momento angular ordinario, \mathbf{L}^2 ,

$$\hat{\mathcal{O}}^2(\bar{\Omega}) = -\frac{1}{R^2} (-\hat{\Delta}_{S^3}^2) = -\frac{\mathcal{K}^2}{R^2}; \quad (3.1.7)$$

donde,

$$\mathcal{K}^2 = -\hat{\Delta}_{S^3}^2 = - \left[\frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} - \frac{\mathbf{L}^2}{\sin^2 \chi} \right]. \quad (3.1.8)$$

De esta forma, la ecuación (3.1.1) se reescribirse de la siguiente manera,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu R^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} - \frac{L^2}{\sin^2 \chi} \right) - 2B \cot \chi \right] \Psi(\bar{\Omega}) = E \Psi(\bar{\Omega}). \quad (3.1.9)$$

Efectuando la separación de variables,

$$\Psi(\bar{\Omega}) = \psi(\chi) Y(\theta, \varphi), \quad (3.1.10)$$

y sustituyendo la expresión (3.1.10) en (3.1.9), reconocemos que las funciones, $Y(\theta, \varphi)$ deben ser los armónicos esféricos¹, y de esta manera podemos factorizar la dependencia en θ y φ , lo cual nos lleva a que la ecuación (3.1.9) se reduce a una ecuación en una variable,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu R^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} - \frac{\ell(\ell+1)}{\sin^2 \chi} \right) - 2B \cot \chi \right] \psi(\chi) = E \psi(\chi). \quad (3.1.11)$$

Luego, aplicando el cambio de variable,

$$\psi(\chi) = \frac{U(\chi)}{\sin \chi}, \quad (3.1.12)$$

y definiendo $b = 2\mu R^2 B / \hbar^2$, $\mathcal{E} = E + \hbar^2 / 2\mu R^2$, obtenemos,

$$-\frac{d^2 U(\chi)}{d\chi^2} + \left(\frac{\ell(\ell+1)}{\sin^2 \chi} - 2b \cot \chi \right) U(\chi) = \mathcal{E} U(\chi). \quad (3.1.13)$$

Observese que la ecuación (3.1.13), es una ecuación de Schrödinger unidimensional con un potencial de la forma,

$$\mathcal{V}_{\text{RMt}}(\chi) = -2b \cot \chi + \ell(\ell+1) \csc^2 \chi, \quad (3.1.14)$$

el cual es conocido bajo el nombre de *Rosen-Morse trigonométrico*, (RMt), y cuyos eigenvalores son $\mathcal{E} = E + \hbar^2 / 2\mu R^2$. De esta forma, la ecuación (3.1.13) se reescribe como,

$$-\frac{d^2 U(\chi)}{d\chi^2} + \mathcal{V}_{\text{RMt}}(\chi) U(\chi) - \mathcal{E} U(\chi) = 0, \quad (3.1.15)$$

¹ $L^2 Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$

Para resolver la ecuación (3.1.15) se reproduce el cálculo presentado en [13] donde se utiliza el método de Nikiforov-Uvarov [12], el cual reduce una ecuación del tipo (3.1.15) a una ecuación diferencial tipo hipergeométrica bajo el cambio de variable,

$$U(\chi) = e^{-\alpha\chi/2}F(\chi), \quad (3.1.16)$$

donde α es una constante. Sustituyendo la ecuación (3.1.16) en la expresión (3.1.15) y agrupando términos obtenemos,

$$\frac{d^2 U(\chi)}{d\chi^2} - \alpha \frac{dU(\chi)}{d\chi} + \left[2b \cot \chi - \ell(\ell+1) \csc^2 \chi + \left((\alpha/2)^2 + \mathcal{E} \right) \right] U(\chi) = 0. \quad (3.1.17)$$

Ahora, bajo un nuevo cambio de variable,

$$x = \cot \chi, \quad F \cong f = f(x), \quad (3.1.18)$$

la expresión en (3.1.17), se reescribe en la forma,

$$(1+x^2)^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + 2(1+x^2) \left(\frac{\alpha}{2} + x \right) \frac{df}{dx} + \left[2bx - \ell(\ell+1)(1+x^2) + (\alpha/2)^2 + \mathcal{E} \right] f = 0. \quad (3.1.19)$$

Finalmente, utilizando el ansatz para f ,

$$f = (1+x^2)^{-(1-\beta)/2} R(x), \quad (3.1.20)$$

con β constante. Sustituimos (3.1.20) en (3.1.19) y dividimos entre $(1+x^2)^{(1+\beta)/2}$ para obtener,

$$\left[-\beta(1-\beta) - \ell(\ell+1) + \frac{(-\alpha(1-\beta) + 2b)x + \left((\alpha/2)^2 - (1-\beta)^2 + \mathcal{E} \right)}{(1+x^2)} \right] R(x) \\ + (1+x^2) \frac{d^2 R(x)}{dx^2} + 2 \left(\frac{\alpha}{2} + \beta x \right) \frac{dR(x)}{dx} = 0 \quad (3.1.21)$$

Para que la ecuación en (3.1.21) tenga una solución en términos de polinomios ortogonales, es necesario que se anule el término que contiene el factor $1/(1+x^2)$, lo cual se satisface cuando se cancelan los siguientes términos,

$$-\alpha(1-\beta) + 2b = 0, \quad (3.1.22)$$

$$(\alpha/2)^2 - (1-\beta)^2 + \mathcal{E} = 0. \quad (3.1.23)$$

De esta forma, cuando se satisfacen las relaciones (3.1.22) y (3.1.23), encontramos que (3.1.21) adquiere la forma de una ecuación diferencial hipergeométrica de la siguiente forma,

$$(1+x^2) \frac{d^2 R(x)}{dx^2} + 2 \left(\frac{\alpha}{2} + \beta x \right) \frac{d R(x)}{dx} + \left(-\beta(1-\beta) - \ell(\ell+1) \right) R(x) = 0. \quad (3.1.24)$$

y de acuerdo con [12] se identifica la siguiente relación,

$$-\beta(1-\beta) - \ell(\ell+1) = -n(2\beta+n-1). \quad (3.1.25)$$

Enseguida despejamos β de (3.1.25) y sustituimos en (3.1.22) y (3.1.23) con el fin de encontrar una relación para los parámetros β , α y \mathcal{E} , obteniendo las siguientes expresiones,

$$\beta = -(n+1+\ell) + 1, \quad (3.1.26)$$

$$\alpha = \frac{2b}{n+1+\ell}, \quad (3.1.27)$$

$$\mathcal{E} = (n+1+\ell)^2 - \frac{b^2}{(n+1+\ell)^2}, \quad (3.1.28)$$

para $n \geq 0$.

Por tanto, de acuerdo con (3.1.25), la expresión en (3.1.24) se reescribe de la siguiente forma,

$$(1+x^2) \frac{d^2 R(x)}{dx^2} + 2 \left(\frac{\alpha}{2} + \beta x \right) \frac{d R(x)}{dx} + \left(-n(2\beta+n-1) \right) R(x) = 0. \quad (3.1.29)$$

cuyas soluciones son los polinomios de Romanovski [11], los cuales tienen la siguiente función de peso,

$$w_n^{\alpha,\beta}(x) = (1+x^2)^{-(\beta-1)} e^{-\alpha \operatorname{arccot} x}, \quad (3.1.30)$$

$$s(x) = 1+x^2. \quad (3.1.31)$$

y vienen dados por la formula de Rodrigues [14],

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{w_n^{\alpha,\beta}(x)} \frac{d^n}{d x^n} \left[w_n^{\alpha,\beta}(x) s(x)^n \right]. \quad (3.1.32)$$

Los primeros tres polinomios $R_n^{(\alpha,\beta)}$ resultantes son,

$$R_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1, \quad (3.1.33a)$$

$$R_1^{(\alpha,\beta)}(x) = -2x(1+a) + \frac{2b}{2+a}, \quad (3.1.33b)$$

$$R_2^{(\alpha,\beta)}(x) = 2(1+a)(2a+3)x^2 - \frac{4(2a+3)bx}{3+a} + \left[\frac{4b^2}{(3+a)^2} - 2(1+a) \right]. \quad (3.1.33c)$$

Finalmente, las soluciones a la ecuación de Schrödinger con un potencial "cot χ " sobre un espacio, S^3 , vienen dadas en la siguiente forma,

$$\Psi_{K\ell m}(\chi, \theta, \varphi) = e^{-\alpha\chi/2} \sin^K \chi R_{K-\ell}^{\alpha,\beta}(\cot \chi) Y_{\ell m}(\theta, \varphi). \quad (3.1.34)$$

y su correspondiente espectro de eigenvalores,

$$E_K = \frac{\hbar^2}{2\mu R^2} (K+1)^2 - \frac{2\mu R^2}{\hbar^2} \frac{B^2}{(K+1)^2}. \quad (3.1.35)$$

donde $K = (n + \ell)$ y corresponde al valor del cuadrimomento angular, con su rango de valores es $K \in [0, \infty)$.

En el capítulo siguiente se presenta la descripción de los problemas de eigenvalores del movimiento libre sobre S^3 y del movimiento perturbado por la "cot χ " y sus correspondientes soluciones.

Parte III

Aportaciones originales de la tesis

Movimiento libre sobre S^3 deformada

4.1. Movimiento cuántico libre y el potencial $\mathcal{V}_{\text{RMt}}(\chi)$ sobre S^3

El desarrollo de este capítulo sigue el trabajo en [15]. Iniciamos describiendo el movimiento cuántico de una partícula libre sobre una superficie, el cual sucede a lo largo de una *geodésica*, es decir, a lo largo de la trayectoria mas corta entre dos puntos, por ejemplo, el movimiento libre de una partícula sobre el plano sucede a lo largo de una línea recta. Así, el movimiento cuántico libre de una partícula sobre una *superficie curvada* como la hiperesfera, S^3 , se da a lo largo de sus geodésicas, en el caso particular, a lo largo de trayectorias conocidas como *círculos grandes* (vease la figura 1.5 del capítulo 1).

Así, el movimiento cuántico libre sobre S^3 esta descrito por el problema de autovalores del cuadrado del operador de cuadrimento angular (\mathcal{K}^2) de (3.1.7),

$$\mathcal{K}^2 Y_{K\ell m}(\chi, \theta, \varphi) = K(K+2) Y_{K\ell m}(\chi, \theta, \varphi), \quad (4.1.1)$$

y cuya soluciones $Y_{K\ell m}(\chi, \theta, \varphi)$, son los armónicos hiperesféricos definidos en la ecs. (2.1.21). Por otro lado, como se observa en (3.1.7), las funciones de onda de (3.1.34) también describen al movimiento libre cuando $b = 0$, por tanto, podemos representar los armónicos hiperesféricos, $Y_{K\ell m}(\chi, \theta, \varphi)$, en términos de los polinomios de Romanovski con $b = 0$, $R_{K-\ell}^{0, -(K+1)}$ de (3.1.32),

$$Y_{K\ell m}(\chi, \theta, \varphi) = \sin^K \chi R_{K-\ell}^{0, -(K+1)}(\cot \chi) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi). \quad (4.1.2)$$

En efecto se obtiene la siguiente relación entre polinomios de Gegenbauer y Romanovski,

$$\mathcal{G}_{K-\ell}^{\ell+1}(\cos \chi) = \sin^{K-\ell} \chi R_{K-\ell}^{0, -(K+1)}(\cot \chi). \quad (4.1.3)$$

Por tanto, la expresión en (4.1.2), adquiere la forma equivalente,

$$Y_{K\ell m}(\chi, \theta, \varphi) = \sin^\ell \chi \mathcal{G}_{K-\ell}^{\ell+1}(\cos \chi) Y_\ell^m(\theta, \varphi). \quad (4.1.4)$$

Introduciendo la siguiente abreviación conveniente,

$$\mathcal{S}_K^\ell(\chi) = \sin^K \chi R_{K-\ell}^{0, -(K+1)}(\cot \chi) = \sin^\ell \chi \mathcal{G}_{K-\ell}^{\ell+1}(\cos \chi), \quad (4.1.5)$$

los armónicos hiperesféricos se reescriben en la siguiente forma compacta,

$$Y_{K\ell m}(\chi, \theta, \varphi) = \mathcal{S}_K^\ell(\chi) Y_\ell^m(\theta, \varphi), \quad (4.1.6)$$

para $K \in [0, \infty)$, $\ell \in [0, K]$ y $m \in [-\ell, \ell]$.

Este movimiento libre sobre S^3 se puede perturbar por el potencial “cot χ ” como se vió en (1.4.4),

$$\left(\mathcal{K}^2 - 2b \cot \chi \right) \Psi_{K\tilde{\ell}\tilde{m}}(\chi, \theta, \varphi) = \epsilon_K \Psi_{K\tilde{\ell}\tilde{m}}(\chi, \theta, \varphi). \quad (4.1.7)$$

Recordemos que las soluciones a esta última ecuación fueron dadas en (3.1.34) como,

$$\Psi_{K\tilde{\ell}\tilde{m}}(\chi, \theta, \varphi) = e^{-\alpha_K \chi / 2} \sin^K \chi R_{K-\tilde{\ell}}^{\alpha_K, \beta_K}(\cot \chi) Y_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}(\theta, \varphi) \quad (4.1.8)$$

donde las expresiones en (3.1.26) se reescriben ahora como,

$$-\beta_K = (n + \tilde{\ell}) = K, \quad (4.1.9)$$

$$\alpha_K = 2b / (K + 1), \quad (4.1.10)$$

ya que $K = n + \tilde{\ell}$. A diferencia de (3.1.34) aquí nosotros usamos el símbolo $\tilde{\ell}$ en lugar de ℓ para distinguir entre los eigenvalores de L^2 para el caso libre y el caso con interacción.

Así de esta manera, la ecuación en (4.1.8) se reescribe como,

$$\Psi_{K\tilde{\ell}\tilde{m}}(\chi, \theta, \varphi) = e^{-\alpha_K \chi / 2} \sin^K \chi R_{K-\tilde{\ell}}^{\alpha_K, \beta_{K-\tilde{\ell}}-1}(\cot \chi) Y_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}(\theta, \varphi). \quad (4.1.11)$$

Introduciendo la abreviación,

$$\psi_{\tilde{K}}^{\tilde{\ell}}(\chi) = \sin^K \chi R_{K-\tilde{\ell}}^{\alpha_K, \beta_{K-\tilde{\ell}}-1}(\cot \chi), \quad (4.1.12)$$

la ecuación en (4.1.11) se reescribe nuevamente en la siguiente forma,

$$\Psi_{K\tilde{\ell}\tilde{m}}(\chi, \theta, \varphi) = e^{-\alpha_K \chi / 2} \psi_{\tilde{K}}^{\tilde{\ell}}(\chi) Y_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}(\theta, \varphi). \quad (4.1.13)$$

Cuyo espectro de energía correspondiente a (4.1.13) se obtuvo como,

$$\epsilon_K + 1 = (K + 1)^2 - \frac{b^2}{(K + 1)^2}, \quad (4.1.14)$$

de acuerdo con (3.1.28), solo que ahora $K = n + \tilde{\ell}$ (ver figura 4.1).

En la siguiente sección, en primer lugar haremos una amplificación del método de Nikiforov-Uvarov [12]. Específicamente mostraremos una descomposición finita de las funciones de onda del movimiento perturbado (4.1.11) en la base de los armónicos hiperesféricos (4.1.2) del movimiento libre.

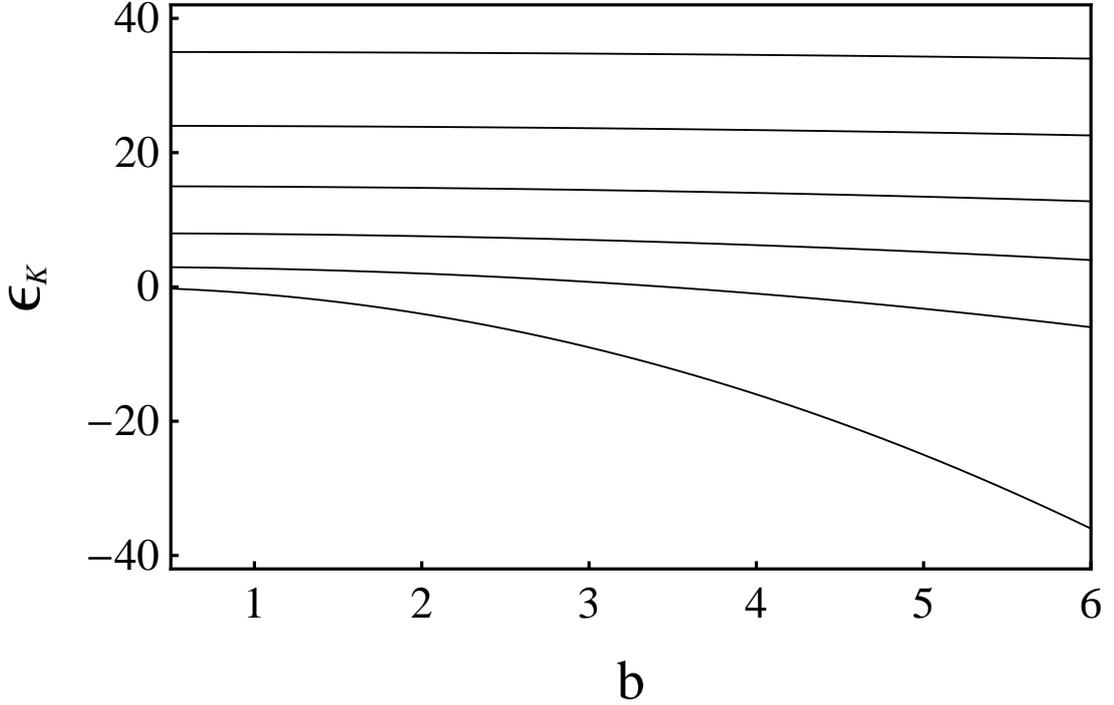


Figura 4.1: Aquí se muestran los niveles de energía, ϵ_K , dada por la ec. (4.1.14), contra la intensidad del parámetro b del potencial de interacción $\cot \chi$. La figura muestra que la interacción de la cotangente ($\cot \chi$) para valores de b moderados, afecta principalmente la separación entre el estado base y el primer nivel excitado.

4.2. Descomposición de las funciones de onda del movimiento perturbado

Empezaremos mostrando que las soluciones dadas en (4.1.13), se descomponen en la base de las funciones de onda del movimiento cuántico libre sobre S^3 descrito en (4.1.4). Para verificar esto, buscamos una expansión para $\psi_K^\ell(\chi)$ de la siguiente forma,

$$\psi_K^\ell(\chi) = \sum_{\tilde{\ell}=\ell}^K C_{\tilde{\ell}} \sin^{\tilde{\ell}} \chi \mathcal{G}_{K-\tilde{\ell}}^{\tilde{\ell}+1}(\cos \chi) = \sum_{\tilde{\ell}=\ell}^K C_{\tilde{\ell}} \mathcal{S}_K^{\tilde{\ell}}(\chi), \quad (4.2.1)$$

y equivalentemente,

$$\psi_K^\ell(\chi) = \sin^K \chi R_{K-\tilde{\ell}}^{2b/(K+1), -(K+1)}(\cot \chi) = \sum_{\tilde{\ell}=\ell}^K C_{\tilde{\ell}} \sin^K \chi R_{K-\tilde{\ell}}^{0, -(K+1)}(\cot \chi). \quad (4.2.2)$$

La expresión en (4.2.2) muestra que para encontrar la descomposición deseada en (4.2.1) hay que encontrar la descomposición¹ de los polinomios de Romanovski que solucionan el movimiento perturbado por la $\cot \chi$, es decir, $R_{K-\tilde{\ell}}^{2b/(K+1), -(K+1)}(\cot \chi)$ en una combinación lineal de los polinomios de Romanovski que solucionan el movimiento libre ($b=0$), $R_{K-\tilde{\ell}}^{0, -(K+1)}(\cot \chi)$. A esto se dedica el apéndice A. En este capítulo se muestran los resultados de la descomposición final. En las tablas 4.1 y 4.2 se muestran los resultados de la expansión en (4.2.1) para los primeros tres valores de K .

¹ $R_{K-\tilde{\ell}}^{2b/(K+1), -(K+1)}(\cot \chi) = \sum_{\ell=\tilde{\ell}}^K C_{\ell} R_{K-\ell}^{0, -(K+1)}(\cot \chi)$

K	$\tilde{\ell}$	$\tilde{\ell} \leq \ell \leq K$	$\psi_{\tilde{K}}^{\tilde{\ell}}(\chi) = \sum_{\ell=\tilde{\ell}}^K C_{\ell} \sin^{\ell} \chi \mathcal{G}_{K-\ell}^{\ell+1}(\cos \chi)$
0	0	0	$\psi_0^0(\chi) = \sin^0 \chi \mathcal{G}_0^1(\cos \chi)$
1	0	0, 1	$\psi_1^0(\chi) = \sin^0 \chi \mathcal{G}_1^1(\cos \chi) + b \sin \chi \mathcal{G}_0^2(\cos \chi)$
1	1	1	$\psi_1^1(\chi) = \sin \chi \mathcal{G}_0^2(\cos \chi)$
2	0	0, 1, 2	$\psi_2^0(\chi) = \sin^0 \chi \mathcal{G}_2^1(\cos \chi) + b \sin \chi \mathcal{G}_1^2(\cos \chi) + \frac{4}{9} b^2 \sin^2 \chi \mathcal{G}_0^3(\cos \chi)$
2	1	1, 2	$\psi_2^1(\chi) = \sin \chi \mathcal{G}_1^2(\cos \chi) + \frac{2}{3} b \sin^2 \chi \mathcal{G}_0^3(\cos \chi)$
2	2	2	$\psi_2^2(\chi) = \sin^2 \chi \mathcal{G}_0^3(\cos \chi)$
3	0	0, 1, 2, 3	$\psi_3^0(\chi) = \sin^0 \chi \mathcal{G}_3^1(\cos \chi) + \frac{9}{10} b \sin \chi \mathcal{G}_2^2(\cos \chi) + \frac{b^2}{2} \sin^2 \chi \mathcal{G}_1^3(\cos \chi) + \left(\frac{b^2}{8} - \frac{2}{5} \right) b \sin^3 \chi \mathcal{G}_0^4(\cos \chi)$
3	1	1, 2, 3	$\psi_3^1(\chi) = \sin \chi \mathcal{G}_2^2(\cos \chi) + \frac{5}{6} b \sin^2 \chi \mathcal{G}_1^3(\cos \chi) + \frac{b^2}{4} \sin^3 \chi \mathcal{G}_0^4(\cos \chi)$
3	2	2, 3	$\psi_3^2(\chi) = \sin^2 \chi \mathcal{G}_1^3(\cos \chi) + \frac{b}{2} \sin^3 \chi \mathcal{G}_0^4(\cos \chi)$
3	3	3	$\psi_3^3(\chi) = \sin^3 \chi \mathcal{G}_0^4(\cos \chi)$

Cuadro 4.1: En la tabla se muestra la descomposición de $\psi_{\tilde{K}}^{\tilde{\ell}}(\chi)$ en (4.1.12) como una combinación de los polinomios de Gegenbauer correspondientes al movimiento libre en (4.1.1).

K	$\tilde{\ell}$	$\tilde{\ell} \leq \ell \leq K$	$\psi_K^{\tilde{\ell}}(\chi) = \sum_{\ell=\tilde{\ell}}^K C_\ell \mathcal{S}_K^\ell(\chi)$
0	0	0	$\psi_0^0(\chi) = \mathcal{S}_0^0(\chi)$
1	0	0, 1	$\psi_1^0(\chi) = \mathcal{S}_1^0(\chi) + b \mathcal{S}_1^1(\chi)$
1	1	1	$\psi_1^1(\chi) = \mathcal{S}_1^1(\chi)$
2	0	0, 1, 2	$\psi_2^0(\chi) = \mathcal{S}_2^0(\chi) + b \mathcal{S}_2^1(\chi) + \frac{4}{9}b^2 \mathcal{S}_2^2(\chi)$
2	1	1, 2	$\psi_2^1(\chi) = \mathcal{S}_2^1(\chi) + \frac{2}{3}b \mathcal{S}_2^2(\chi)$
2	2	2	$\psi_2^2(\chi) = \mathcal{S}_2^2(\chi)$
3	0	0, 1, 2, 3	$\psi_3^0(\chi) = \mathcal{S}_3^0(\chi) + (9b/10) \mathcal{S}_3^1(\chi) + (b^2/2) \mathcal{S}_3^2(\chi) + (b^2/8 - 2/5)b \mathcal{S}_3^3(\chi)$
3	1	1, 2, 3	$\psi_3^1(\chi) = \mathcal{S}_3^1(\chi) + (5b/6) \mathcal{S}_3^2(\chi) + (b^2/4) \mathcal{S}_3^3(\chi)$
3	2	2, 3	$\psi_3^2(\chi) = \mathcal{S}_3^2(\chi) + (b/2) \mathcal{S}_3^3(\chi)$
3	3	3	$\psi_3^3(\chi) = \mathcal{S}_3^3(\chi)$

Cuadro 4.2: Aquí se muestran la expansión de $\psi_K^{\tilde{\ell}}(\chi)$ en (4.1.12) en la base de $\mathcal{S}_K^\ell(\chi)$ en (4.1.5).

4.3. Transformación de similitud del algebra de isometría de $so(4)$ en S^3

En la sección anterior se mostró que la función $\psi_K^{\tilde{\ell}}(\chi)$ que depende exclusivamente del segundo ángulo polar χ se descompone en una combinación de $S_K^{\tilde{\ell}}(\chi)$ definidas en (4.2.1) y que corresponden al movimiento libre. La descomposición final resultante se muestra en la tabla 4.2.

Para las funciones $S_K^{\tilde{\ell}}(\chi)$, salvo por una constante de normalización, se puede escribir la siguiente identidad,

$$S_K^{\tilde{\ell}}(\chi) \equiv \frac{e^{-im\varphi}}{P_{\tilde{\ell}}^m(\cos\theta)} Y_{K\ell m}(\chi, \theta, \varphi), \quad (4.3.1)$$

donde $P_{\tilde{\ell}}^m(\cos\theta)$ son los *polinomios asociados de Legendre* [14]. Y de acuerdo con (4.3.1), tenemos que las funciones de onda del movimiento perturbado (4.1.13) se reescriben de manera equivalente como,

$$\Psi_{K\tilde{\ell}\tilde{m}}(\chi, \theta, \varphi) = e^{-\frac{\alpha_K \chi}{2}} \sum_{\ell=\tilde{\ell}}^K C_{\ell} \frac{e^{-im\varphi}}{P_{\tilde{\ell}}^m(\cos\theta)} Y_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}(\theta, \varphi) Y_{K\ell m}(\chi, \theta, \varphi). \quad (4.3.2)$$

Al introducir la nueva noción de unos armónicos hiperesféricos amortiguados, $\tilde{Y}_{K\ell m}(\chi, \theta, \varphi)$ definidos como,

$$\tilde{Y}_{K\ell m}(\chi, \theta, \varphi) = e^{-\frac{\alpha_K \chi}{2}} Y_{K\ell m}(\chi, \theta, \varphi), \quad (4.3.3)$$

se concluye que (4.3.2) se reescribe como,

$$\Psi_{K\tilde{\ell}\tilde{m}}(\chi, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=\tilde{\ell}}^K C_{\ell} \frac{e^{-im\varphi}}{P_{\tilde{\ell}}^m(\cos\theta)} Y_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}(\theta, \varphi) \tilde{Y}_{K\ell m}(\chi, \theta, \varphi). \quad (4.3.4)$$

Ahora, notamos que cuando la expresión en (4.1.7) se combina con (4.1.14) cuando $K = 0$, esta describe el estado base del movimiento perturbado, es decir,

$$\left(\mathcal{K}^2 - 2b \cot \chi \right) Y_{000}(\chi, \theta, \varphi) = -\frac{\alpha_0^2}{4} Y_{000}(\chi, \theta, \varphi) \quad (4.3.5)$$

Simultáneamente, será obvio que la expresión anterior se puede reescribir como,

$$\left(e^{-\alpha_0 \chi/2} \mathcal{K}^2 e^{\alpha_0 \chi/2} - \frac{\alpha_0^2}{4} \right) e^{-\alpha_0 \chi/2} Y_{000}(\chi, \theta, \varphi) = -\frac{\alpha_0^2}{4} e^{-\alpha_0 \chi/2} Y_{000}(\chi, \theta, \varphi), \quad (4.3.6)$$

y esta es equivalente a,

$$\left(\tilde{\mathcal{K}}^2 - \frac{\alpha_0^2}{4} \right) e^{-\frac{\alpha_0 \chi}{2}} Y_{000}(\chi, \theta, \varphi) = -\frac{\alpha_0^2}{4} e^{-\frac{\alpha_0 \chi}{2}} Y_{000}(\chi, \theta, \varphi), \quad (4.3.7)$$

donde se ha definido,

$$\tilde{\mathcal{K}}^2 \equiv e^{-\alpha_0 \chi/2} \mathcal{K}^2 e^{\alpha_0 \chi/2}. \quad (4.3.8)$$

Dado que \mathcal{K}^2 es el invariante de Casimir del algebra de isometría $so(4)$ en S^3 , así tendremos que $\tilde{\mathcal{K}}^2$ resulta ser el invariante de Casimir del algebra de isometría $so(4)$ en la superficie deformada y obtenida por amortiguación de S^3 . Todo indica que el movimiento cuántico libre sobre la superficie amortiguada será equivalente al movimiento sobre S^3 perturbado por la $\cot \chi$ (vease la figura 4.2). El resto de la tesis se dedica a probar esta afirmación.

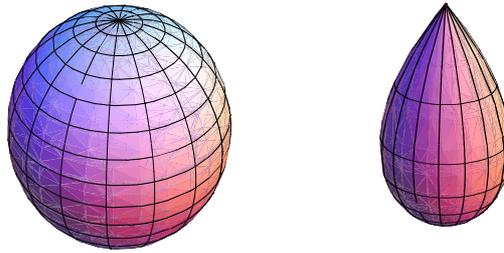


Figura 4.2: A la izquierda se muestra la métrica de S^3 , $|Y_{000}(\chi, 0, \varphi)| = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$, versus la métrica deformada escalada por un factor exponencial, $|\tilde{Y}_{000}(\chi, 0, \varphi)| = e^{-\frac{\alpha_0 \chi}{2}} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = e^{-\frac{\alpha_0 \chi}{2}}$ a la derecha. La comparación con (1.4.1) permite interpretar el parámetro $\alpha_0/2 = b$ como la masa del dilatón, es decir, $b = m_D$.

Así la ecuación en (4.3.2) brinda la posibilidad de encontrar una transformación matricial entre los espacios invariantes de \mathcal{K}^2 y $\tilde{\mathcal{K}}^2$. En otras palabras, en la siguiente sección se dará la prueba de que los vectores \mathbf{X}_K satisfacen (4.3.7), estos se definen para $K \neq 0$ de la siguiente forma,

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \Psi_{100}(\chi, \theta, \varphi) \\ \Psi_{11\tilde{m}_1}(\chi, \theta, \varphi) \end{pmatrix} = e^{-\frac{\alpha_1 \chi}{2}} \mathbf{A}_1(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} Y_{100}(\chi, \theta, \varphi) \\ Y_{111}(\chi, \theta, \varphi) \end{pmatrix}, \quad (4.3.9a)$$

$$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} \Psi_{200}(\chi, \theta, \varphi) \\ \Psi_{21\tilde{m}_1}(\chi, \theta, \varphi) \\ \Psi_{22\tilde{m}_2}(\chi, \theta, \varphi) \end{pmatrix} = e^{-\frac{\alpha_2 \chi}{2}} \mathbf{A}_2(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} Y_{200}(\chi, \theta, \varphi) \\ Y_{211}(\chi, \theta, \varphi) \\ Y_{222}(\chi, \theta, \varphi) \end{pmatrix}, \quad (4.3.9b)$$

$$\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} \Psi_{300}(\chi, \theta, \varphi) \\ \Psi_{31\tilde{m}_1}(\chi, \theta, \varphi) \\ \Psi_{32\tilde{m}_2}(\chi, \theta, \varphi) \\ \Psi_{33\tilde{m}_3}(\chi, \theta, \varphi) \end{pmatrix} = e^{-\frac{\alpha_3 \chi}{2}} \mathbf{A}_3(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} Y_{300}(\chi, \theta, \varphi) \\ Y_{311}(\chi, \theta, \varphi) \\ Y_{322}(\chi, \theta, \varphi) \\ Y_{333}(\chi, \theta, \varphi) \end{pmatrix}. \quad (4.3.9c)$$

Los vectores en (4.3.9) se han obtenido bajo la elección $m = \ell$ en las ecs. (4.3.1) y (4.3.2).

Las expresiones explícitas para las matrices $\mathbf{A}_K(\theta, \varphi)$ correspondientes a valores pequeños de K se pueden extraer directamente de las tablas 4.2 y resultan como,

$$\mathbf{A}_1(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{be^{-i\varphi}}{P_1^1} \\ 0 & \frac{e^{i(\tilde{m}_1-1)\varphi} P_1^{\tilde{m}_1}}{P_1^1} \end{pmatrix}, \quad (4.3.10)$$

$$\mathbf{A}_2(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & b \frac{e^{-i\varphi}}{P_1^1} & \frac{(2b)^2 e^{-2i\varphi}}{3^2 P_2^2} \\ 0 & \frac{e^{i(\tilde{m}_1-1)\varphi} P_1^{\tilde{m}_1}}{P_1^1} & \frac{2b e^{i(\tilde{m}_1-2)\varphi} P_1^{\tilde{m}_1}}{3 P_2^2} \\ 0 & 0 & \frac{e^{i(\tilde{m}_2-2)\varphi} P_2^{\tilde{m}_2}}{P_2^2} \end{pmatrix}, \quad (4.3.11)$$

$$\mathbf{A}_3(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{9be^{-i\varphi}}{10P_1^1} & \frac{b^2e^{-i2\varphi}}{2P_2^2} & \left(\frac{b^2}{8} - \frac{2}{5}\right)\frac{be^{-i3\varphi}}{P_3^3} \\ 0 & \frac{e^{i(\tilde{m}_1-1)\varphi}P_1^{\tilde{m}_1}}{P_1^1} & \frac{5be^{i(\tilde{m}_1-2)\varphi}P_1^{\tilde{m}_1}}{6P_2^2} & \frac{b^2e^{i(\tilde{m}_1-3)\varphi}P_1^{\tilde{m}_1}}{2^2P_3^3} \\ 0 & 0 & \frac{e^{i(\tilde{m}_2-2)\varphi}P_2^{\tilde{m}_2}}{P_2^2} & \frac{be^{i(\tilde{m}_2-3)\varphi}P_2^{\tilde{m}_2}}{2P_3^3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e^{i(\tilde{m}_3-3)\varphi}P_3^{\tilde{m}_3}}{P_3^3} \end{pmatrix}. \quad (4.3.12)$$

4.4. Nuevas relaciones de recurrencia entre polinomios de Gegenbauer

En esta sección se mostrará que la ecuación en (4.3.5), la cual esta escrita en la representación trivial de $so(4)$ se puede generalizar a cualquier representación en virtud de *nuevas relaciones de recurrencia entre polinomios de Gegenbauer* que se obtendrán en esta sección.

Para esto, se analiza la expresión dada en (4.1.7) la cual es equivalente a,

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{\mathbf{L}^2}{\sin^2 \chi} - 2b \cot \chi \right] e^{-\alpha_K \chi / 2} \psi_K^{\tilde{\ell}}(\chi) \\ & = \left(K(K+2) - \frac{\alpha_K^2}{4} \right) e^{-\alpha_K \chi / 2} \psi_K^{\tilde{\ell}}(\chi), \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

donde $\psi_K^{\tilde{\ell}}(\chi) = \sum_{\ell=\tilde{\ell}}^K C_\ell \mathcal{S}_K^\ell(\chi)$. Cuando el factor exponencial es extraído de derecha a izquierda en (4.4.1), se obtiene la siguiente ecuación,

$$\begin{aligned} e^{-\alpha_K \chi / 2} & \left[\left(-\frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{\mathbf{L}^2}{\sin^2 \chi} - \frac{\alpha_K^2}{4} \right) + \left(\alpha_K \frac{\partial}{\partial \chi} + \alpha_K \cot \chi - 2b \cot \chi \right) \right] \psi_K^{\tilde{\ell}}(\chi) \\ & = \left(K(K+2) - \frac{\alpha_K^2}{4} \right) e^{-\alpha_K \chi / 2} \psi_K^{\tilde{\ell}}(\chi). \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Haciendo uso de la definición dada en (2.1.18) del operador de cuadrimento angular, \mathcal{K}^2 ,

$$\mathcal{K}^2 = \left(-\frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{L^2}{\sin^2 \chi} \right), \quad (4.4.3)$$

y la expresión en (4.1.9), $\alpha_K = 2b/(K+1)$; definimos un operador diferencial \mathbf{D}_K como,

$$\mathbf{D}_K = \left(\frac{\partial}{\partial \chi} - K \cot \chi \right). \quad (4.4.4)$$

Así se obtuvo que la expresión en (4.4.2) puede reescribirse en forma compacta de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} e^{-\alpha_K \chi / 2} \left[-\frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{\tilde{\ell}(\tilde{\ell}+1)}{\sin^2 \chi} - \frac{\alpha_K^2}{4} + \alpha_K \mathbf{D}_K \right] \sum_{\ell=\tilde{\ell}}^K C_\ell \mathcal{S}_K^\ell(\chi) \\ = \left(K(K+2) - \frac{\alpha_K^2}{4} \right) e^{-\alpha_K \chi / 2} \sum_{\ell=\tilde{\ell}}^K C_\ell \mathcal{S}_K^\ell(\chi). \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Además, se ha tomado en cuenta que la aplicación de L^2 sobre las eigenfunciones genera un eigenvalor $\ell(\ell+1)$.

En esta tesis se verificó que para $\tilde{\ell} = K$, el operador \mathbf{D}_K en (4.4.4), juega el papel de un "operador de escalera" del algebra $so(4)$ y este nulifica los estados de peso máximo en $\mathcal{S}_K^K(\chi) \sim \sin^K \chi$, es decir, se satisface que,

$$\mathbf{D}_K \mathcal{S}_K^K(\chi) = 0. \quad (4.4.6)$$

Para este caso específico, $\tilde{\ell} = K$, la expresión dentro del paréntesis cuadrado en (4.4.5) se reduce a la siguiente forma,

$$e^{-\alpha_K \chi / 2} \left(\mathcal{K}^2 - \frac{\alpha_K^2}{4} \right) \mathcal{S}_K^K(\chi) = \left(K(K+2) - \frac{\alpha_K^2}{4} \right) e^{-\alpha_K \chi / 2} \mathcal{S}_K^K(\chi). \quad (4.4.7)$$

Lo anterior nos permite escribir la relación para este caso particular entre (4.4.1) y (4.4.5) y que más adelante se generalizará,

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{K}^2 - 2b \cot \chi) e^{-\alpha_K \chi / 2} \psi_K^K(\chi) &= e^{-\alpha_K \chi / 2} \left(\mathcal{K}^2 - \frac{\alpha_K^2}{4} \right) e^{\alpha_K \chi / 2} e^{-\alpha_K \chi / 2} \psi_K^K(\chi) \\
 &= \left(K(K+2) - \frac{\alpha_K^2}{4} \right) e^{-\alpha_K \chi / 2} \psi_K^K(\chi), \quad (4.4.8)
 \end{aligned}$$

observase que $\psi_K^K(\chi) = \mathcal{S}_K^K(\chi) \sim \sin^K \chi$. Ahora, multiplicando por la derecha la expresión anterior por $Y_K^{\tilde{m}}(\theta, \varphi)$ tenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{K}^2 - 2b \cot \chi) e^{-\alpha_K \chi / 2} \psi_K^K(\chi) Y_K^{\tilde{m}}(\theta, \varphi) &= e^{-\alpha_K \chi / 2} \left(\mathcal{K}^2 - \frac{\alpha_K^2}{4} \right) e^{\alpha_K \chi / 2} e^{-\alpha_K \chi / 2} \psi_K^K(\chi) Y_K^{\tilde{m}}(\theta, \varphi) \\
 &= \left(K(K+2) - \frac{\alpha_K^2}{4} \right) e^{-\alpha_K \chi / 2} \psi_K^K(\chi) Y_K^{\tilde{m}}(\theta, \varphi), \quad (4.4.9)
 \end{aligned}$$

y reconociendo que,

$$\Psi_{KK\tilde{m}}(\chi, \theta, \varphi) = e^{-\alpha_K \chi / 2} \psi_K^K(\chi) Y_K^{\tilde{m}}(\theta, \varphi)$$

obtenemos la representación de la función de onda cuando $\tilde{\ell} = K$, de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{K}^2 - 2b \cot \chi) \Psi_{KK\tilde{m}}(\chi, \theta, \varphi) &= \left[e^{-\frac{\alpha_K \chi}{2}} \left(\mathcal{K}^2 - \frac{\alpha_K^2}{4} \right) e^{\frac{\alpha_K \chi}{2}} \right] \Psi_{KK\tilde{m}}(\chi, \theta, \varphi) \\
 &= \left(K(K+2) - \frac{\alpha_K^2}{4} \right) \Psi_{KK\tilde{m}}(\chi, \theta, \varphi). \quad (4.4.10)
 \end{aligned}$$

La expresión en (4.4.10) generaliza a la ecuación (4.3.7) para $\tilde{\ell} = K$ y cualesquiera K y muestra que bajo una transformación no unitaria y salvo una constante aditiva, el problema de autovalores del movimiento de una partícula en presencia de un potencial "cot χ " sobre S^3 (vease (4.1.11)) resulta equivalente al problema de autovalores para el movimiento cuántico libre sobre S^3 amortiguado por un factor exponencial.

Cuando $\tilde{\ell} \neq K$, la expresión en (4.4.5) aún sigue válida en virtud de que el operador D_K provoque las siguientes relaciones de recurrencia entre las funciones $\mathcal{S}_K^{\tilde{\ell}}(\chi)$,

$$\begin{aligned}
 D_1 \mathcal{S}_1^0(\chi) &= 2 \csc^2 \chi \mathcal{S}_1^1(\chi), & D_2 \mathcal{S}_2^1(\chi) &= 4 \csc^2 \chi \mathcal{S}_2^2(\chi), \\
 D_2 \mathcal{S}_2^0(\chi) &= 2 \csc^2 \chi \mathcal{S}_2^1(\chi), & D_3 \mathcal{S}_3^2(\chi) &= 6 \csc^2 \chi \mathcal{S}_3^3(\chi), \\
 D_K \mathcal{S}_K^K(\chi) &= 0, \quad \forall K, \text{ etc.}, & \mathcal{S}_K^\ell(\chi) &= \sin^\ell \chi \mathcal{G}_{K-\ell}^{\ell+1}(\cos \chi). \quad (4.4.11)
 \end{aligned}$$

Las relaciones mostradas en (4.4.11) se traducen en *relaciones de recurrencia* entre los polinomios de Gegenbauer (vease [15]). En el apéndice (B) se presenta la manera de obtención de las ecuaciones (4.4.11) y se muestra un ejemplo ilustrativo.

Vale notar que las relaciones de recurrencia en (4.4.11) garantizan la validez de la siguiente condición,

$$\left[\frac{\tilde{\ell}(\tilde{\ell}+1)}{\sin^2 \chi} + \alpha_K D_K \right] \sum_{\ell=\tilde{\ell}}^{\ell=K} C_\ell \mathcal{S}_K^\ell = \sum_{\ell=\tilde{\ell}}^{\ell=K} \frac{\ell(\ell+1)}{\sin^2 \chi} C_\ell \mathcal{S}_K^\ell. \quad (4.4.12)$$

Así, en virtud de las relaciones de recurrencia en (4.4.11) se cumple la condición en (4.4.12), y se concluye la generalización de (4.4.10) y (4.3.7) para cualesquiera valores de K y $\tilde{\ell}$ en una representación matricial,

$$(\mathcal{K}^2 - 2b \cot \chi) \mathbf{X}_K(\chi, \theta, \varphi) = \left[e^{-\frac{\alpha_K \chi}{2}} \mathbf{A}_K(\theta, \varphi) \left(\mathcal{K}^2 - \frac{\alpha_K^2}{4} \right) e^{\frac{\alpha_K \chi}{2}} \mathbf{A}_K^{-1}(\theta, \varphi) \right] \mathbf{X}_K(\chi, \theta, \varphi) \quad (4.4.13)$$

con

$$\mathbf{X}_K(\chi, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \Psi_{K00}(\chi, \theta, \varphi) \\ \Psi_{K1\tilde{m}_1}(\chi, \theta, \varphi) \\ \dots \\ \Psi_{KK\tilde{m}_K}(\chi, \theta, \varphi) \end{pmatrix}. \quad (4.4.14)$$

De manera equivalente,

$$(\mathcal{K}^2 - 2b \cot \chi) \mathbf{X}_K(\chi, \theta, \varphi) = \left(\tilde{\mathcal{K}}^2 - \frac{\alpha_K^2}{4} \right) \mathbf{X}_K(\chi, \theta, \varphi) \quad (4.4.15)$$

donde se utilizó la siguiente notación,

$$\tilde{\mathcal{K}}^2 \equiv \mathbf{F}(\chi, \theta, \varphi) \mathcal{K}^2 \mathbf{F}^{-1}(\chi, \theta, \varphi), \quad (4.4.16)$$

$$\mathbf{F}(\chi, \theta, \varphi) \equiv e^{-\frac{\alpha_K \chi}{2}} \mathbf{A}_K(\theta, \varphi), \quad (4.4.17)$$

$$\mathbf{F}^{-1}(\chi, \theta, \varphi) \equiv e^{\frac{\alpha_K \chi}{2}} \mathbf{A}_K^{-1}(\theta, \varphi), \quad (4.4.18)$$

donde algunas de las matrices $\mathbf{A}_K(\theta, \varphi)$ están dadas por las ecs. en (4.3.10),(4.3.11) y (4.3.12).

La ecuación (4.4.15) muestra que el problema de eigenvalores del movimiento cuántico perturbado por el potencial de la $\cot \chi$ sobre S^3 puede representarse como el problema de eigenvalores donde el operador de Casimir, \mathcal{K}^2 , del algebra $so(4)$ es sometido a una *transformación de similitud* ($\mathbf{F} \mathcal{K}^2 \mathbf{F}^{-1}$) más una constante, dicha transformación de similitud es no unitaria dentro del espacio de representación de interés.

Finalmente, en las figuras 4.3 y 4.4, mostramos con un propósito ilustrativo, la forma de los armónicos hiperesféricos regulares versus los armónicos hiperesféricos amortiguados correspondientes al caso mostrado en (B.1.3).



Figura 4.3: Armónicos hiperesféricos regulares $|Y_{100}(\chi, 0, \varphi)|$ (izquierda) versus los armónicos hiperesféricos amortiguados $|\tilde{Y}_{100}(\chi, 0, \varphi)|$ (derecha) para valores de $b=0.45$.



Figura 4.4: Armónicos hiperesféricos regulares $|Y_{100}(\chi, 0, \varphi)|$ (izquierda) versus los armónicos hiperesféricos amortiguados $|\tilde{Y}_{100}(\chi, 0, \varphi)|$ (derecha) para valores de $b=2$.

Espectros de los mesones ligeros

En este capítulo se investigan los espectros de los mesones *isoescalares* e *isovectoriales* con masas por encima de 1400 MeV donde esperamos observar una huella de la *ventanilla conforme*. Los mesones se consideran como un sistema de dos cuerpos $(q - \bar{q})$, de tal forma que la partícula efectiva de masa reducida, μ , describe un movimiento perturbado sobre la hipersfera S^3 , dicho movimiento es perturbado por un potencial tipo “cot χ ”.

Como se ha comentado en capítulos anteriores este *movimiento perturbado* es equivalente a un *movimiento cuántico libre* sobre una superficie S^3 deformada (vease la figura 4.2 en combinación con la ecuación (1.4.4)), una superficie equivalente a la obtenida por la deformación de la métrica por la masa del dilatón (cuyo campo es lineal en χ es decir, $\Phi = m_D \chi$). Así que el movimiento libre sobre la superficie deformada permite relacionar el rompimiento del algebra conforme con la masa del dilatón.

En este capítulo empleamos los datos de las masas de los mesones medidas por una misma colaboración, la de *Cristal Barrel*, evitando utilizar los promedios mundiales enlistados en [16]. Esta estrategia resulta interesante ya que minimiza los errores en las mediciones, los cuales podrían opacar las degeneraciones en los espectros. De aquí en adelante utilizaremos los datos de Cristal Barrel como fueron compilados por *Afonin* en [2].

5.1. Ajuste sobre los parámetros R , μ y B del modelo y una estimación para m_D

Los datos experimentales reportados en [2] son representados en las figuras 5.1 y 5.2, estos exhiben rasgos bien definidos que se pueden resumir como sigue,

- los mesones en cuestión se distribuyen sobre *representaciones irreducibles* del tipo $(K/2, K/2)$ del algebra conforme, $so(2, 4)$;
- estos representaciones irreducibles forman niveles que presentan un doblamiento respecto a las paridades de sus estados, $P = \pm 1$, es decir, para cada estado observamos un segundo estado con aproximadamente la misma masa y con paridad opuesta, así formando una pareja de *niveles quirales*. En efecto, el algebra no es simplemente $so(2, 4)$ sino $o(2, 4)$;
- la separación entre niveles con $\Delta K = 1$ se encontró que es aproximadamente constante respecto al rango de energía de interés.

Las figuras siguientes muestran los espectros correspondientes a los niveles con $K = 3, 4$ y 5. La figura 5.1 muestra los datos correspondientes a los estados excitados con isoespín, $I = 0$.

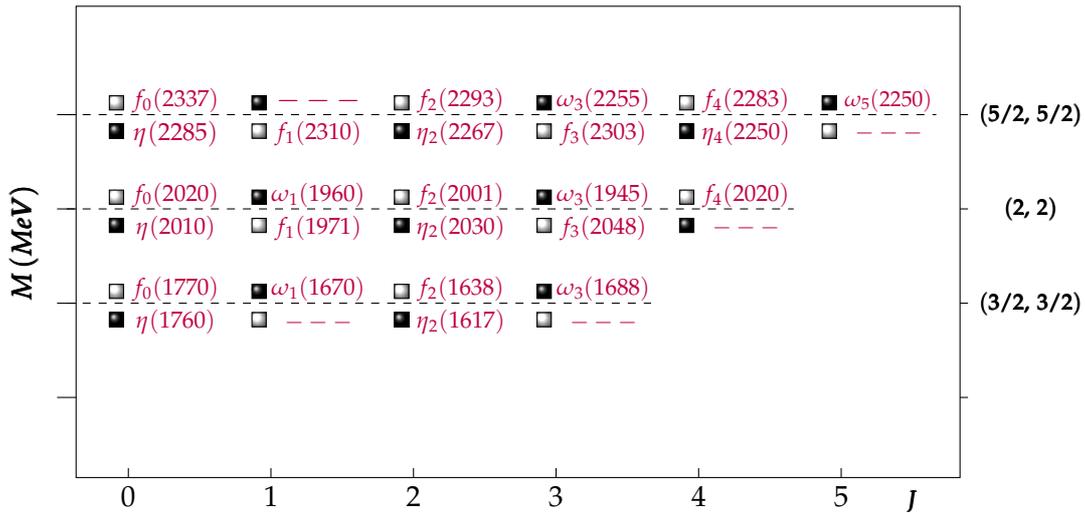


Figura 5.1: Diagrama esquemático de los mesones pesados isoescalares, $I = 0$, sin extrañeza de acuerdo con los datos de la colaboración Cristal Barrel compilados en [2]. Se observan degeneraciones bien marcadas que resultan distintas a las del modelo de quarks convencional mostradas en la figura 1.1. Se ve claramente el doblamiento de cada momento angular total J^P en dos paridades opuestas, $P = \pm$, así formando parejas quirales.

La figura 5.2 se muestran los datos para los estados excitados con isoespín, $I = 1$.

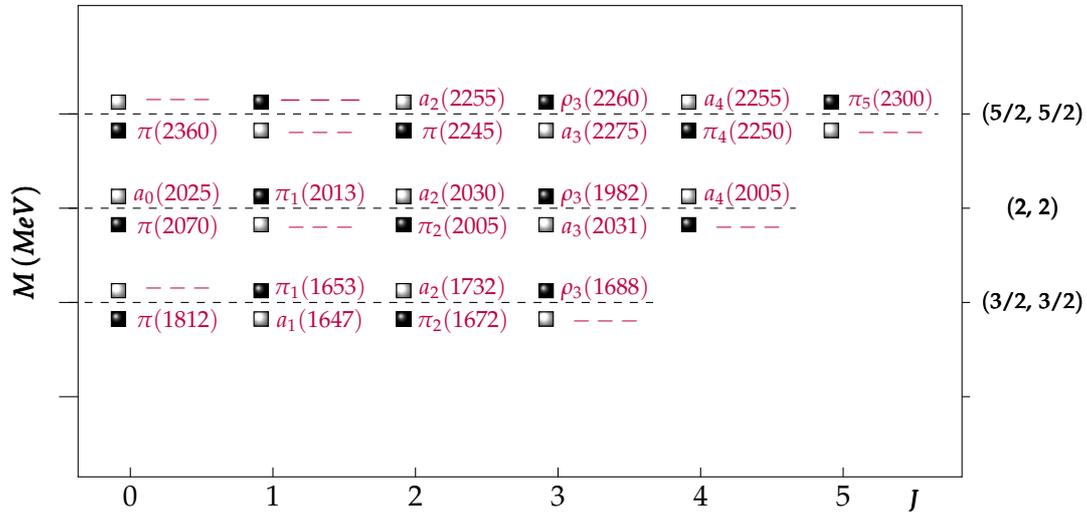


Figura 5.2: Diagrama esquemático de los mesones pesados isovectoriales, $I = 1$, sin extrañeza de acuerdo con los datos de la colaboración Cristal Barrel compilados en [2]. Se observan degeneraciones bien marcadas que resultan distintas a las del modelo de quarks convencional mostradas en la figura 1.1. Se ve claramente el desdoblamiento de cada momento angular total J^P en dos paridades opuestas, $P = \pm$, así formando parejas quirales.

Realizando un ajuste a los parámetros del Hamiltoniano de las ecs. (3.1.1) y (3.1.35), los datos experimentales en [2] permiten una interpretación a los parámetros del modelo, como el radio, R , de la hiperesfera S^3 , la masa reducida μ , el parámetro B y por ende la masa del dilatón, m_D .

Como se comentó en la descripción de la figura 4.2, para un modelo simple, la masa del dilatón puede ser interpretada como,

$$B = m_D. \quad (5.1.1)$$

Con el fin de estimar un valor numérico para los parámetros μR^2 y B , y de este último concluir un valor numérico para m_D , partimos de los datos experimentales de la colaboración Cristal Barrel [2] que exhiben patrones típicos de una simetría conforme mostrados en 5.1 y 5.2, ajustamos las masas de los mesones pesados a la expresión para la energía dada en (3.1.35) como,

$$E_K = \frac{\hbar^2}{2\mu R^2}(K+1)^2 - \frac{2\mu R^2}{\hbar^2} \frac{B^2}{(K+1)^2}. \quad (5.1.2)$$

Introduciendo los parámetros f_1 y f_2 ,

$$f_1 = \frac{\hbar^2}{2\mu R^2}, \quad (5.1.3)$$

$$f_2 = \frac{2\mu R^2}{\hbar^2} B^2, \quad (5.1.4)$$

la expresión en (5.1.2) se reescribe como,

$$E_K = f_1(K+1)^2 - \frac{f_2}{(K+1)^2}. \quad (5.1.5)$$

Ahora calculamos el promedio para cada una de las parejas de niveles quirales ($K = 5, 4, 3$) y determinamos las separaciones entre ellos, estas son mostrada en las tablas 5.1,

Mesones isoescalares ($I = 0$)	
K	Promedio por nivel (MeV)
3	1687
4	2000.6
5	2283.3

Mesones isovectoriales ($I = 1$)	
K	Promedio por nivel (MeV)
3	1700.7
4	2020.1
5	2275

Cuadro 5.1: Aquí mostramos los promedios calculados para cada uno de los niveles quirales mostrados en las figuras 5.1 y 5.2.

Es decir, calculamos para $I = 0$,

$$\Delta E_1 = E_{K=5} - E_{K=4} = 282,7 \text{ MeV}, \quad (5.1.6)$$

y

$$\Delta E_2 = E_{K=4} - E_{K=3} = 313,5 \text{ MeV}, \quad (5.1.7)$$

lo cual resulta en un sistema de dos ecuaciones para las incógnitas f_1 y f_2 . Resolviendo estas ecuaciones se obtienen los siguientes valores:

$$I = 0 : \quad f_1 = 18,4 \text{ MeV}, \quad f_2 = 6577,6 \text{ MeV}. \quad (5.1.8)$$

De manera análoga, también calculamos para $I = 1$,

$$\Delta E_1 = E_{K=5} - E_{K=4} = 254,9 \text{ MeV}, \quad (5.1.9)$$

y

$$\Delta E_2 = E_{K=4} - E_{K=3} = 319,5 \text{ MeV}, \quad (5.1.10)$$

y de igual forma al caso anterior se resuelve el sistema de dos ecuaciones para las incógnitas f_1 y f_2 ; y se obtienen los siguientes valores:

$$I = 1 : \quad f_1 = 13,3 \text{ MeV}, \quad f_2 = 8873,9 \text{ MeV}. \quad (5.1.11)$$

La expresión obtenida para B es,

$$B^2 = f_1 f_2. \quad (5.1.12)$$

De esta forma encontramos los siguientes valores para B en dependencia del isoespín de los mesones,

$$I = 0 : \quad B = 347,9 \text{ MeV}; \quad (5.1.13)$$

y

$$I = 1 : \quad B = 343,7 \text{ MeV}. \quad (5.1.14)$$

En efecto la masa del dilatón se estima como,

$$I = 0 : \quad B = m_D = 347,9 \text{ MeV}; \quad (5.1.15)$$

y

$$I = 1 : \quad B = m_D = 343,7 \text{ MeV}. \quad (5.1.16)$$

Nuestro análisis favorece un dilatón ligero y su orden de magnitud parece razonable porque cae en el rango de la masa del dilatón de $57 \text{ MeV} < m_D < 700 \text{ MeV}$ obtenida de los datos de quarkonia pesados tipo $(c\bar{c})$ y $(b\bar{b})$ (vease [17] y referencias internas de este mismo para el limite inferior) ó [18] para limite superior.

Es notorio que nuestro parámetro interpretado como la masa del dilatón no depende del isoespín, así este se presenta como una constante universal del rompimiento de la simetría conforme.

Conclusiones

El primer objetivo de la tesis fué investigar la propiedad del potencial de $\cot \chi$ sobre S^3 de conservar las degeneraciones típicas para el espectro del movimiento libre geodésico. Esta propiedad es de hecho muy peculiar porque la “ $\cot \chi$ ” no conmuta con el cuadrado del cuadrimomento angular, el cual es el invariante de Casimir del algebra de isometría de $so(4)$ de la hiperesfera S^3 . El potencial de la “ $\cot \chi$ ” no es el único potencial con una peculiaridad así.

La mecánica cuántica supersimétrica (SUSYQM) maneja varios potenciales exactamente solubles tales que sus espectros encajan en representaciones irreducibles de ciertas algebras de Lie, por ejemplo, el potencial de la “ $\coth \eta + 1/\sinh^2 \eta$ ” es conocido que tiene la simetría $so(2,2)$ ó $so(2,1)$. Las algebras de simetrías de los potenciales de SUSYQM se conocen bajo el nombre de *algebras potenciales* [19]. Especialmente los Hamiltonianos con los potenciales hiperbólicos de Eckart, Rosen-Morse, Pöschl-Teller, etc. han sido presentados como invariantes de Casimir del algebra $so(2,2)$. Sin embargo, los potenciales trigonométricos, como *Rosen-Morse trigonométrico* han quedado prácticamente fuera de este desarrollo.

Hasta donde sabemos, el *algebra potencial con la cotangente* ha sido considerada únicamente por Higgs [10]. Sin embargo, el enfoque principal de Higgs fué construir dicha algebra para un potencial central, es decir, “ $\cot r$ ”, lo cual se hizo proyectando S^3 sobre el plano tangencial al polo norte y construyendo el algebra en términos de un vector de Runge-Lenz por costumbre y en analogía con el átomo de hidrógeno.

En el escenario de Higgs la hiperesfera juega un papel intermediario y auxiliar, y el algebra obtenida sobre el plano proyectivo resulta en un algebra $so(4)$ que es deformada por términos cúbicos.

En cambio en esta tesis a la hiperesfera S^3 se le otorga el papel principal y aquí se ha encontra-

do una transformada de similitud que lleva el movimiento cuántico libre al movimiento perturbado por la cotangente, esta transformada se construyó en la sección 4.3. Se obtuvo un álgebra geométrica intacta $so(4)$, pero operando sobre una superficie deformada. De esta manera el concepto de un álgebra potencial adquiere la nueva interpretación sobre,

- *un rompimiento de la simetría grupal en el nivel de las funciones de representación causada por un factor de escala que deforma la métrica de la superficie.*

Este tipo de rompimiento no afecta las degeneraciones en el espectro y se denominará como *rompimiento de simetría opacado por degeneraciones*.

Cabe mencionar que el potencial de la cotangente tiene la misma propiedad sobre la esfera regular, S^2 , donde dicho potencial conserva las degeneraciones $(2\ell + 1)$ -múltiples típicas para \hat{L}^2 , esto se ha mostrado en [20]. Es probable que la cotangente tiene esta propiedad sobre S^D para cualquier D .

Desde un punto de vista técnico dicha propiedad se debe a la descomposición finita de (4.2.2), es decir,

$$\psi_{\tilde{K}}^{\tilde{\ell}}(\chi) = \sin^K \chi R_{K-\tilde{\ell}}^{2b/(K+1), -(K+1)}(\cot \chi) = \sum_{\ell=\tilde{\ell}}^K C_{\ell} \sin^{\ell} \chi \mathcal{G}_{K-\ell}^{\ell+1}(\cos \chi).$$

Nótese que los polinomios de Romanovski no permiten una descomposición finita en la base de los polinomios de Gegenbauer, tampoco lo permiten las funciones de onda totales $\Psi_{K\ell m}(\chi, \theta, \varphi)$ en (4.1.13) (que contienen el factor exponencial) en la base de los armónicos hiperesféricos. Una descomposición así se ha analizado en [21] y se ha mostrado ser una descomposición infinita.

Como un resultado intermedio en esta tesis se han encontrado nuevas relaciones de recurrencia entre los polinomios de Gegenbauer mostradas en (4.4.11).

En efecto, se ha podido mostrar que el movimiento sobre, S^3 , perturbado por la cotangente, resultó equivalente al movimiento libre sobre una superficie S^3 deformada por el factor $e^{-b\chi}$. Todo este desarrollo se ha efectuado con el fin de entender mejor el *rompimiento de la simetría grupal* $SO(2, 4)$ conforme por la masa del dilatón. Dentro del escenario conjeturado en la ecuación (1.4.1) al igualar $b = m_D$ y al obtener un valor para m_D razonable se ha justificado que el dilatón sí podría romper la simetría conforme del grupo $SO(2, 4)$ deformando la métrica de S^3 por un factor de escala, $e^{-m_D \chi}$.

Recordemos que S^3 fue el espacio de simetría del grupo $SO(4)$ el cual es el grupo compacto máximo del grupo conforme $SO(2,4)$.

Se ha mostrado que el algebra de isometría de la superficie deformada sigue siendo $so(4)$ y se concluyó que,

el movimiento libre sobre la superficie deformada describe el efecto del rompimiento de la simetría conforme por la masa del dilatón.

Dicho rompimiento se notó exclusivamente en el nivel de las funciones de onda, provocando que las funciones $\Psi_{\ell m}(\chi, \theta, \varphi) \neq Y_{\ell m}(\chi, \theta, \varphi)$ pero sin afectar las degeneraciones.

De esta manera se ha explicado la presencia de las degeneraciones conformes en los espectros de los mesones pesados sin extrañeza y observados en la colaboración de Cristal Barrel [2].

Se realizó una estimación de la masa del dilatón como una constante universal, es decir, independiente del isospín y la cual concuerda con la masa del dilatón obtenida en los análisis de $c\bar{c}$ y $b\bar{b}$ [17].

Perspectivas.

- Para obtener un ajuste más fino de las distribuciones de masa de los mesones bajo investigación se tendría que emplear la ecuación de Klein-Gordon ó la ecuación de Dirac sobre S^3 en un futuro.
- Para mejorar el esquema propuesto será necesario investigar el comportamiento de factores de forma a altas energías.

Parte IV

Apéndices de la tesis

Ejemplo ilustrativo simple del cálculo de los coeficientes C_ℓ .

Enseguida se presenta un ejemplo ilustrativo sobre la descomposición de las funciones de onda perturbadas por el potencial $\cot \chi$ como combinación de las funciones de onda del movimiento libre. Por simplicidad empezamos con la expresión,

$$R_{K-\tilde{\ell}}^{2b/(K+1), -(K+1)}(\cot \chi) = \sum_{\ell=\tilde{\ell}}^K C_\ell R_{K-\ell}^{0, -(K+1)}(\cot \chi). \quad (\text{A.0.1})$$

A.1. Cálculo de los coeficientes para $K = 2$ y $\tilde{\ell} = 0$.

Aquí, estudiamos el caso para $K = 2$ y $\tilde{\ell} = 0$, es decir, buscamos los coeficientes $\ell = 0, 1, 2$; sustituyendo estos valores en la ecuación (A.0.1) resulta,

$$R_2^{2b/3, -3}(\cot \chi) = C_0 R_2^{0, -3}(\cot \chi) + C_1 R_1^{0, -3}(\cot \chi) + C_2 R_0^{0, -3}(\cot \chi), \quad (\text{A.1.1})$$

donde C_0 , C_1 y C_2 son constantes a determinar. De acuerdo con (3.1.33) se obtuvo que,

$$R_2^{2b/3,-3}(\cot \chi) = 6 \cot^2 \chi - 4b \cot \chi + \frac{4}{9}b^2 - 2, \quad (\text{A.1.2a})$$

$$R_2^{0,-3}(\cot \chi) = 6 \cot^2 \chi - 2, \quad (\text{A.1.2b})$$

$$R_1^{0,-3}(\cot \chi) = -4b \cot \chi, \quad (\text{A.1.2c})$$

$$R_0^{0,-3}(\cot \chi) = 1. \quad (\text{A.1.2d})$$

Sustituyendo las expresiones de (A.1.5) en (A.1.1) y de acuerdo con el *ansatz*,

$$\psi_{\tilde{\ell}}^{\tilde{\ell}}(\chi) = \sin^K \chi R_{K-\tilde{\ell}}^{\alpha_{K,-(K+1)}}(\cot \chi) = \sum_{\ell=\tilde{\ell}}^K C_\ell \sin^K \chi R_{K-\ell}^{0,-(K+1)}(\cot \chi), \quad (\text{A.1.3})$$

obtuvimos que,

$$\begin{aligned} \psi_2^0(\chi) &= \sin^2 \chi R_2^{2b/3,-3}(\cot \chi) \\ &= \sin^2 \chi R_2^{0,-3}(\cot \chi) + b \sin^2 \chi R_1^{0,-3}(\cot \chi) + \frac{4}{9}b^2 \sin^2 \chi R_0^{0,-3}(\cot \chi). \end{aligned} \quad (\text{A.1.4})$$

Equivalentemente de acuerdo con (4.2.1),

$$\psi_2^0(\chi) = \sin^0 \chi \mathcal{G}_2^1(\cos \chi) + b \sin^1 \chi \mathcal{G}_1^2(\cos \chi) + \frac{4}{9}b^2 \sin^2 \chi \mathcal{G}_0^3(\cos \chi). \quad (\text{A.1.5})$$

Finalmente, se presenta una tabla que reporta los coeficientes para los diferentes valores de K , $\tilde{\ell}$ y ℓ y la descomposición de los polinomios de Romanovski que solucionan el movimiento perturbado por la $\cot \chi$ como una combinación lineal de los polinomios de Romanovski que solucionan el movimiento cuántico libre ($b=0$).

K	$\tilde{\ell}$	$\tilde{\ell} \leq \ell \leq K$	$R_{K-\tilde{\ell}}^{\alpha_{K,\tilde{\ell}}-(K+1)}(\cot \chi) = \sum_{\ell=\tilde{\ell}}^K C_\ell R_{K-\ell}^{0,-(K+1)}(\cot \chi)$
0	0	0	$R_0^{2b,-1}(\cot \chi) = R_0^{0,-1}(\cot \chi)$
1	0	0, 1	$R_1^{b,-2}(\cot \chi) = R_1^{0,-2}(\cot \chi) + b R_0^{0,-2}(\cot \chi)$
1	1	1	$R_0^{b,-2}(\cot \chi) = R_0^{0,-2}(\cot \chi)$
2	0	0, 1, 2	$R_2^{2b/3,-3}(\cot \chi) = R_2^{0,-3}(\cot \chi) + b R_1^{0,-3}(\cot \chi) + \frac{4b^2}{9} R_0^{0,-3}(\cot \chi)$
2	1	1, 2	$R_1^{2b/3,-3}(\cot \chi) = R_1^{0,-3}(\cot \chi) + \frac{2b}{3} R_0^{0,-3}(\cot \chi)$
2	2	2	$R_0^{2b/3,-3}(\cot \chi) = R_0^{0,-3}(\cot \chi)$
3	0	0, 1, 2, 3	$R_3^{b/2,-4}(\cot \chi) = R_3^{0,-4}(\cot \chi) + \frac{9b}{10} R_2^{0,-4}(\cot \chi) + \frac{b^2}{2} R_1^{0,-4}(\cot \chi) + \frac{b^3}{8} R_0^{0,-4}(\cot \chi)$
3	1	1, 2, 3	$R_1^{b/2,-4}(\cot \chi) = R_2^{0,-4}(\cot \chi) + \frac{5b}{6} R_1^{0,-4}(\cot \chi) + \frac{b^2}{4} R_0^{0,-4}(\cot \chi)$
3	2	2, 3	$R_1^{b/2,-4}(\cot \chi) = R_1^{0,-4}(\cot \chi) + \frac{b}{2} R_0^{0,-4}(\cot \chi)$
3	3	3	$R_0^{b/2,-4}(\cot \chi) = R_0^{0,-4}(\cot \chi)$

Cuadro A.1: Aquí se muestran los polinomios de Romanovski que solucionan la ec. (4.1.7) con un potencial “ $\cot \chi$ ”, los cuales se expresan en la base de los polinomios de Romanovski que solucionan el movimiento libre en (4.1.2) ($b=0$).

K	$\tilde{\ell}$	$\tilde{\ell} \leq \ell \leq K$	$\psi_K^{\tilde{\ell}}(\chi) = \sum_{\ell=\tilde{\ell}}^K C_\ell \sin^K \chi R_{K-\ell}^{0, -(K+1)}(\cot \chi)$
0	0	0	$\sin^0 \chi R_0^{2b, -1}(\cot \chi) = \sin^0 \chi R_0^{0, -1}(\cot \chi)$
1	0	0, 1	$\sin^1 \chi R_1^{b, -2}(\cot \chi) = \sin^1 \chi R_1^{0, -2}(\cot \chi) + b \sin^1 \chi R_0^{0, -2}(\cot \chi)$
1	1	1	$\sin^1 \chi R_0^{b, -2}(\cot \chi) = \sin^1 \chi R_0^{0, -2}(\cot \chi)$
2	0	0, 1, 2	$\sin^2 \chi R_2^{2b/3, -3}(\cot \chi) = \sin^2 \chi R_2^{0, -3}(\cot \chi) + b \sin^2 \chi R_1^{0, -3}(\cot \chi) + \frac{4b^2}{9} \sin^2 \chi R_0^{0, -3}(\cot \chi)$
2	1	1, 2	$\sin^2 \chi R_1^{2b/3, -3}(\cot \chi) = \sin^2 \chi R_1^{0, -3}(\cot \chi) + \frac{2b}{3} \sin^2 \chi R_0^{0, -3}(\cot \chi)$
2	2	2	$\sin^2 \chi R_0^{2b/3, -3}(\cot \chi) = \sin^2 \chi R_0^{0, -3}(\cot \chi)$
3	0	0, 1, 2, 3	$\sin^3 \chi R_3^{b/2, -4}(\cot \chi) = \sin^3 \chi R_3^{0, -4}(\cot \chi) + \frac{9b}{10} \sin^3 \chi R_2^{0, -4}(\cot \chi) + \frac{b^2}{2} \sin^3 \chi R_1^{0, -4}(\cot \chi) + \frac{b^3}{8} \sin^3 \chi R_0^{0, -4}(\cot \chi)$
3	1	1, 2, 3	$\sin^3 \chi R_1^{b/2, -4}(\cot \chi) = \sin^3 \chi R_1^{0, -4}(\cot \chi) + \frac{5b}{6} \sin^3 \chi R_0^{0, -4}(\cot \chi) + \frac{b^2}{4} \sin^3 \chi R_0^{0, -4}(\cot \chi)$
3	2	2, 3	$\sin^3 \chi R_2^{b/2, -4}(\cot \chi) = \sin^3 \chi R_2^{0, -4}(\cot \chi) + \frac{b}{2} \sin^3 \chi R_0^{0, -4}(\cot \chi)$
3	3	3	$\sin^3 \chi R_0^{b/2, -4}(\cot \chi) = \sin^3 \chi R_0^{0, -4}(\cot \chi)$

Cuadro A.2: Aquí se muestran las descomposiciones de las funciones de onda sólo dependiente de χ en (4.1.12) en la base de (4.1.5).

Ejemplo ilustrativo simple del cálculo de una relación de recurrencia.

Con el propósito de ilustrar la forma en que se obtuvieron las nuevas relaciones de recurrencia reportadas en (4.4.11), presentamos un ejemplo simple.

B.1. Formula de recurrencia para $K = 1$.

Desarrollamos el caso simple para $K = 1$ y $\tilde{\ell} = 0$, así, $\ell = 0, 1$. Partimos de las ecuación presentadas anteriormente en el desarrollo de la tesis, estas expresiones son las siguientes,

$$\begin{aligned}
 \psi_{\tilde{K}}^{\tilde{\ell}}(\chi) &= \sin^K \chi R_{K-\tilde{\ell}}^{2b/(K+1), -(K+1)}(\cot \chi) \\
 &= \sum_{\ell=\tilde{\ell}}^K C_{\ell} \sin^K \chi R_{K-\ell}^{0, -(K+1)}(\cot \chi) \\
 &= \sum_{\ell=\tilde{\ell}}^K C_{\ell} \mathcal{S}_K^{\ell}(\chi),
 \end{aligned} \tag{B.1.1}$$

y sustituyendo en estas los valores $K = 1$ y $\tilde{\ell} = 0$ tenemos,

$$\begin{aligned}
 \psi_1^0(\chi) &= \sin^1 \chi R_1^{b/2, -2}(\cot \chi) \\
 &= \sum_{\ell=0}^1 C_\ell \sin^1 \chi R_1^{0, -2}(\cot \chi) \\
 &= \sum_{\ell=0}^1 C_\ell \mathcal{S}_1^\ell(\chi),
 \end{aligned} \tag{B.1.2}$$

De acuerdo con la tabla A.2 y 4.2 la expresión en (B.1.2) se escribe como,

$$\begin{aligned}
 \psi_1^0(\chi) &= \sin^1 \chi R_1^{0, -2}(\cot \chi) + b \sin^1 \chi R_0^{0, -2}(\cot \chi) \\
 &= \mathcal{S}_1^0(\chi) + b \mathcal{S}_1^1(\chi),
 \end{aligned} \tag{B.1.3}$$

donde las expresiones explícitas para $\mathcal{S}_1^0(\chi)$ y $\mathcal{S}_1^1(\chi)$ de acuerdo con (4.1.5) son las siguientes,

$$\mathcal{S}_1^0(\chi) = -2 \sin \chi \cot \chi, \quad \mathcal{S}_1^1(\chi) = \sin \chi. \tag{B.1.4}$$

Ahora que ya podemos reconocer la forma explícita de la función, $\psi_1^0(\chi)$, investiguemos ahora la acción de $(\mathcal{K}^2 - 2b \cot \chi)$ para esta función bajo la factorización efectuada en (4.4.1) y (4.4.5).

Es decir estudiaremos la siguiente ecuación,

$$\begin{aligned}
 &\left[-\frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{\tilde{\ell}(\tilde{\ell} + 1)}{\sin^2 \chi} - \frac{\alpha_K^2}{4} + \alpha_K \mathbf{D}_K \right] \sum_{\ell=\tilde{\ell}}^K C_\ell \mathcal{S}_K^\ell(\chi) \\
 &= \left(K(K + 2) - \frac{\alpha_K^2}{4} \right) \sum_{\ell=\tilde{\ell}}^K C_\ell \mathcal{S}_K^\ell(\chi).
 \end{aligned} \tag{B.1.5}$$

Sustituyendo (B.1.3) en (4.4.2) y haciendo uso explícito de (4.4.5) obtuvimos,

$$\begin{aligned}
 &\left[-\frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{0(0 + 1)}{\sin^2 \chi} - \frac{\alpha_1^2}{4} + \alpha_1 \mathbf{D}_1 \right] \left(\mathcal{S}_1^0(\chi) + b \mathcal{S}_1^1(\chi) \right) \\
 &= \left(1(1 + 2) - \frac{\alpha_1^2}{4} \right) \left[\mathcal{S}_1^0(\chi) + b \mathcal{S}_1^1(\chi) \right],
 \end{aligned} \tag{B.1.6}$$

de esta última expresión estudiamos la acción del operador sobre las funciones, de esta forma tenemos,

$$\begin{aligned}
 & \left[-\frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{0(0+1)}{\sin^2 \chi} - \frac{\alpha_1^2}{4} + \alpha_1 \mathbf{D}_1 \right] \left(\mathcal{S}_1^0(\chi) + b\mathcal{S}_1^1(\chi) \right) \\
 = & \left[-\frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{0(0+1)}{\sin^2 \chi} - \frac{\alpha_1^2}{4} \right] \left(\mathcal{S}_1^0(\chi) + b\mathcal{S}_1^1(\chi) \right) + \alpha_1 \mathbf{D}_1 \left(\mathcal{S}_1^0(\chi) + b\mathcal{S}_1^1(\chi) \right)
 \end{aligned} \tag{B.1.7}$$

De esta expresión analizamos el primer término del lado derecho en (B.1.7),

$$\begin{aligned}
 & \left[-\frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{0(0+1)}{\sin^2 \chi} - \frac{\alpha_1^2}{4} \right] \left(\mathcal{S}_1^0(\chi) + b\mathcal{S}_1^1(\chi) \right) \\
 & = \left[-\frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{0(0+1)}{\sin^2 \chi} - \frac{\alpha_1^2}{4} \right] \mathcal{S}_1^0(\chi) \\
 & + \left[-\frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{0(0+1)}{\sin^2 \chi} + \frac{1(1+1)}{\sin^2 \chi} - \frac{1(1+1)}{\sin^2 \chi} - \frac{\alpha_1^2}{4} \right] b\mathcal{S}_1^1(\chi) \\
 & = \left[1(1+2) - \frac{\alpha_1^2}{4} \right] \left(\mathcal{S}_1^0(\chi) + b\mathcal{S}_1^1(\chi) \right) - \frac{1(1+1)}{\sin^2 \chi} b\mathcal{S}_1^1(\chi)
 \end{aligned} \tag{B.1.8}$$

Así, retomando la expresión (B.1.7) y con el resultado en (B.1.8) obtuvimos,

$$\begin{aligned}
 & \left[-\frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{0(0+1)}{\sin^2 \chi} - \frac{\alpha_1^2}{4} + \alpha_1 \mathbf{D}_1 \right] \left(\mathcal{S}_1^0(\chi) + b\mathcal{S}_1^1(\chi) \right) \\
 = & \left[1(1+2) - \frac{\alpha_1^2}{4} \right] \left(\mathcal{S}_1^0(\chi) + b\mathcal{S}_1^1(\chi) \right) - \frac{1(1+1)}{\sin^2 \chi} b\mathcal{S}_1^1(\chi) + \alpha_1 \mathbf{D}_1 \left(\mathcal{S}_1^0(\chi) + b\mathcal{S}_1^1(\chi) \right)
 \end{aligned} \tag{B.1.9}$$

Ahora estudiando el último término en la ecuación anterior,

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 \mathbf{D}_1 \left(\mathcal{S}_1^0(\chi) + b\mathcal{S}_1^1(\chi) \right) & = \alpha_1 \left(\frac{\partial}{\partial \chi} - \cot \chi \right) \left(\mathcal{S}_1^0(\chi) + b\mathcal{S}_1^1(\chi) \right) \\
 & = \frac{1(1+1)}{\sin^2 \chi} \left(b\mathcal{S}_1^1(\chi) \right),
 \end{aligned} \tag{B.1.10}$$

donde se tomó la expresión dada en (4.4.4) y los valores explícitos de (B.1.4). De (B.1.10) se encontraron las nuevas relaciones de recurrencia,

$$\mathbf{D}_1 \mathcal{S}_1^0(\chi) = 2 \csc^2 \chi \mathcal{S}_1^1(\chi), \quad (\text{B.1.11})$$

$$\mathbf{D}_1 \mathcal{S}_1^1(\chi) = 0. \quad (\text{B.1.12})$$

Observese que en las ecs. (B.1.11) el término $\mathbf{D}_1 \mathcal{S}_1^0(\chi)$ produce el término centrífugo requerido por $b \mathcal{S}_1^1(\chi)$, de esta manera hemos verificado que se satisface la ecuación,

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{0(0+1)}{\sin^2 \chi} - \frac{\alpha_1^2}{4} + \alpha_1 \mathbf{D}_1 \right] \left(\mathcal{S}_1^0(\chi) + b \mathcal{S}_1^1(\chi) \right) \\ & = \left(1(1+2) - \frac{\alpha_1^2}{4} \right) \left[\mathcal{S}_1^0(\chi) + b \mathcal{S}_1^1(\chi) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.1.13})$$

en virtud de las relaciones de recurrencia obtenidas y reportadas en (B.1.11).

Parte V

Bibliografia

Bibliografía

- [1] Francis Halzen, Alan D. Martin, *Quarks and Leptones: An introduction course in modern particle physics* (John Wiley-Sons, New York, 1984).
- [2] S. S. Afonin, *Light meson spectra and classical symmetries of QCD*, Eur. Phys. J. A **29**, 327-335 (2006).
- [3] J. Maldacena, *Wilson loops in large N field theories*, Phys. Rev. Lett. **80**, 4859-4862 (1998).
- [4] Edward Witten, *Anti de Sitter space and holography*, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 233-291 (1998).
- [5] Stanley J. Brodsky, Guy F. de Téramond, *Hadronic spectra and light-front wave functions in holographic QCD*, Phys. Rev. Lett. **96**, 201601 (2006);
Stanley J. Brodsky, Guy F. de Téramond, *AdS/CFT and light front QCD*, arXiv: 0802.0514.
- [6] M. Kirchbach, C. B. Compean, *Conformal symmetry and light flavor baryon spectra*, Phys. Rev. D **82**, 034008 (2010).
- [7] Brian G. Wybourne, *Classical Groups for Physicists* (Wiley-Interscience, New York, 1974).
- [8] A. Deur, V. Burkert, J.P. Chen, W. Korsch, *Determination of the effective strong coupling constant $\alpha(Q)$ from CLAS spin structure function data*, Phys. Lett. B **665**, 349-351 (2008).
- [9] Barton Zwiebach, *A First Course in string theory* (Cambridge University Press, 2009).
- [10] P. W. Higgs, *Dynamical symmetries in a spherical geometry*, J. Phys A: Math. Gen. **12**, 309-323 (1979).
- [11] A. Raposo, H-J. Weber, D. E. Alvarez-Castillo, M. Kirchbach, *Romanovski polynomials in selected physics problems*, C. Eur. J. Phys. **5**, 253-284 (2007).

- [12] A. F. Nikiforov, V. B. Uvarov, *Special functions of mathematical physics*, (Birkhäuser Verlag, Basel, 1988).
- [13] Clifford B. Compean, *La dinámica de quarks y gluones con un potencial de confinamiento exactamente soluble con rasgos de QCD*. PhD thesis, IF-UASLP, México (2009).
- [14] Renato Alvarez Nodarse, *Las funciones especiales y la física matemática*, Departamento de análisis matemático, Universidad de Sevilla e Instituto "Carlos I" de física teórica y computacional, Universidad de Granada, España.
- [15] A. Pallares, M. Kirchbach, *Symmetry and degeneracy of the curved Coulomb potential on the S^3 ball*, J. Phys. A: Math. Theor. **44**, 445302 (2011).
- [16] Particles Data Group, *Review of particles physics*, Phys. Lett. B **667** (2008).
- [17] Mohamed Chabab, *The dilaton as dark matter candidate: An estimate of the dilaton mass from quarkonium spectra*. Identification of Dark Matter, July 26-30 (2010) University of Montpellier 2, Montpellier, France. <http://pos.sissa.it/>
- [18] B.-Y. Park, M. Rho, and V. Vento, Nucl. Phys A **807**, 28 (2008)
- [19] M. Englefield, C. Quesne, *Dynamical potential algebras for Gendenshtein and Morse potentials*, J. Phys. A: Math. Gen. **24**, 35557-3574 (1991).
- [20] D. E. Alvarez-Castillo, C. B. Compean, M. Kirchbach, *Rotational symmetry and degeneracy: a cotangent perturbed rigid rotator of unperturbed level multiplicity*, Mol. Phys. **109**, 1477-1483 (2011).
- [21] V. N. Pervushin, G. S. Pogosyan, A. N. Sissakian, S. I. Vinitsky, *Equation for quasiradial functions in momentum representation on a three-dimensional sphere*, Phys. Atom. Nucl. **5b**, 1027-1034 (1993).