UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ

Facultad de Economía

Caracterización de Soluciones en Juegos Cooperativos Utilizando el Axioma de Consistencia

TESIS

que para obtener el grado de

Maestría en Economía Matemática

P R E S E N T A:

Yaritsa de Jesús Barenca Vázquez

Director de tesis:

Dr. Joss Erick Sánchez Pérez

009 San Luis Potosí, S.L.P., México, Abril 2015.

Agradecimientos

Primero que nada quiero agradecer a mis padres y hermanos, por haberme proporcionado la mejor educación y por cada día hacerme ver la vida en forma diferente y confiar en mis decisiones.

A mi asesor el Dr. Joss Sánchez que sin su ayuda y conocimiento no hubiese sido posible realizar este proyecto.

A mis compañeras y amigas Adriana, Judith y Miriam, quienes sin esperar nada a cambio compartieron su conocimiento, alegrías y tristezas, viviendo grandes momentos junto a ellas y a todas aquellas personas y amigos que siguen estando cerca de mí y que durante estos dos años estuvieron a mi lado apoyándome a que este sueño se haga realidad.

A mis sinodales el Dr. William Olvera y el Dr. Julio Macias, por las sugerencias, contribuciones, por el tiempo y la paciencia dedicado a este trabajo.

A la institución por la formación que recibí durante estos dos años en la Universidad Autónoma de San Luis Potosí(UASLP), gracias a todos los profesores que contribuyeron en mi formación. Agradezco también al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), que a través de la beca de estudios, contribuyo a la posibilidad de que dedicara por tiempo completo a los estudios.

Índice general

Agradecimientos III

Índice general 1

Introducción 3

1. Preliminares 5
1.1. Juegos cooperativos 6

2. El Axioma de Consistencia 13
2.1. Consistencia en el valor de Shapley 14
2.2. Consistencia en el valor de Banzhaf 17
2.3. Otra forma de caracterizar el valor de Banzhaf 19

3. Resultados 21
3.1. Caracterizaciones 21
3.1.1. Consistencia en soluciones de división de excesos 21
3.1.2. Consistencia en la solución dual de división de excesos 26

Comentarios finales 31

Bibliografía 33

Introducción

Los problemas de asignación en la vida cotidiana admiten generalmente una descripción matemática y estos se pueden modelar utilizando gran variedad de técnicas, entre ellos a la teoría de juegos cooperativos, pero para que se lleve a cabo esto pediremos que cumpla con algunas características o propiedades.

Entre las distintas situaciones que se puedan presentar, está la manera de distribuir un bien o reparto de costos, ya sea algún tipo de beneficio, de alguna inversión o algún tipo de servicio comunes. Los individuos quieren soluciones donde todos estén de acuerdo con lo que reciben, es decir, que mejoren el pago que pudieran obtener individualmente; el problema será indicar cómo efectuar este reparto para obtener una distribución justa o razonable para todos los individuos.

Por ello, debemos encontrar algún método de distribución justa de ganancias o de costos para todos los individuos, todo depende si los individuos aceptan o no las soluciones propuestas, la teoría de juegos puede proporcionar varias soluciones que se pueden aplicar al mismo problema. La solución que es mejor no depende sólo de la descripción matemática de la situación, sino también del tipo de problema que se lleve a cabo. En este trabajo se mostrarán ejemplos de varias situaciones que pudieran ocurrir y estudiaremos varias soluciones, entre ellas el valor de Shapley, la solución Banzhaf y la solución de división de excesos.

Sin embargo, ¿qué pasa cuando algún individuo o un grupo de ellos decide dejar la situación? lo que se espera para los individuos que decidieron quedarse es que no les afecte en su manera de pago de acuerdo a la solución que se planteó en el problema original, es decir, que cada uno gane lo que originalmente le fue asignado, entonces surge el problema de cómo repartir el pago ahora con esta nueva situación que queda después de que un grupo de individuos decide irse. Es aquí cuando surge la idea de *juegos reducidos*, siendo el juego que se define después de que algunos jugadores se han ido, llevándose su pago de acuerdo a la solución del juego original. El axioma de consistencia nos asegura que para cada jugador que no abandonó el juego, obtenga el mismo pago para el juego reducido asociado de acuerdo al juego original; es decir, una solución es consistente si obtenemos los mismos beneficios en el juego reducido que en el problema original. Para esto necesitamos un nuevo juego para los individuos que decidieron quedarse, es decir, cada coalición tiene que volver a estimar su valía en términos de una regla relacionada con el juego original.

Una de las propiedades importantes al caracterizar soluciones en juegos cooperativos es el axioma de consistencia. Por ello uno de los objetivos de esta tesis es caracterizar soluciones utilizando el axioma de consistencia además de encontrar juegos reducidos para algunas situaciones en los que un grupo de agentes decidió salir del juego. Probaremos que las soluciones de acuerdo al juego reducido con respecto a la solución de división de excesos y la solución dual de éste sean consistentes: para esto hay que probar la existencia de υ_S^ϕ (un juego reducido). En general, una caracterización para cada juego sería lo más deseable, sin embargo, incluso en los ejemplos más simples, pueden surgir diferentes maneras de caracterizar los juegos reducidos, entonces todo depende de la manera en que caracterizamos a υ_S^ϕ.

En la literatura, consistencia fue introducida por primera vez en Hart y Mas-Colell [2] donde se propuso un juego asociado con respecto al valor de Shapley y se demostró que este valor es consistente con respecto a tal juego. También en Driessen [1] se analizan varias caracterizaciones axiomáticas del valor de Shapley con la propiedad de consistencia. En [8] se caracterizan juegos reducidos para la solución de división de excesos y el dual de esta solución, además de la combinación convexa de ambas.

El trabajo se organiza de la siguiente manera. En el Capítulo 1 introducimos algunas definiciones y conceptos sobre teoría de juegos cooperativos y se fija la notación que será utilizada más adelante.

En el Capítulo 2, se estudian varios juegos reducidos con respecto a las soluciones vistas en el Capítulo 1, además se mostrarán ejemplos y que estas soluciones cumplen con la propiedad de solución estándar para el juego de dos jugadores.

En el Capítulo 3 se mostrarán algunos juegos reducidos con respecto a la solución de división de excesos y la solución dual de división de excesos. Si bien no es única la manera de representar un juego reducido para estas soluciones, veremos que éstas soluciones en relación a los juegos reducidos cumplen con el axioma de consistencia y además cumple con la propiedad de solución estándar para el juego de dos jugadores. Por último, se presentan ejemplos donde se verá la aplicación de estos resultados.

Capítulo 1

Preliminares

Como motivación, planteamos dos situaciones:

1) Supongamos que hay tres agentes económicos; cada uno de los agentes invierte para la creación de una fábrica las siguientes cantidades: el agente 1 invierte la cantidad de $ 100 000, el agente 2 invierte $ 400 000 y el agente 3 invierte la cantidad de $200 000. Los agentes están tratando de llegar a un acuerdo mutuo para que todos reciban el mayor beneficio posible de la ganancia obtenida, ¿cómo se debe de repartir la dicha ganancia entre los tres agentes?. En este problema queremos analizar de qué manera se repartirá la ganancia que obtendrán de dicha inversión, buscando que todos los agentes estén de acuerdo con ella.

2) Un médico ha sido requerido para una consulta en cuatro comunidades distantes. Además de sus honorarios de consulta que son fijos, se espera una compensación por viajar. Pero ya que estas cuatro comunidades están relativamente cerca, los gastos de viaje se pueden reducir en gran medida si los realiza en un sólo viaje. El problema es decidir cómo deben dividirse los gastos del viaje entre sus anfitriones en las cuatro comunidades. Los gastos de viaje son solo de ida entre estas cuatro comunidades $c1$, $c2$, $c3$, $c4$.

La teoría de juegos cooperativos analiza este tipo de problemas, donde se tiene la asignación de algunos recursos (o costos, ganancias, etc.) entre n agentes. Los distintos agentes pueden decidir cooperar entre ellos de modo que se logren ventajas para cada uno y conseguir un mayor beneficio. Dicha cooperación puede presentarse entre dos o más agentes que participen en el problema o puede presentarse el caso no exista cooperación. Una vez determinado el beneficio (o costo) total de llevar a cabo alguna de las situaciones planteadas, el problema será de qué manera debe distribuirse el mismo entre todos los agentes que participan. Esta situción se puede modelar con los juegos cooperativos en forma de función característica, definidos a continuación.

1.1. Juegos cooperativos

Un juego cooperativo de utilidad transferible en forma de función característica es una pareja (N, υ) donde $N = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$, con $n \in \mathbb{N}$, es el conjunto finito no vacío de jugadores y υ es una función

$$\upsilon : 2^N \to \mathbb{R} \text{ con } \upsilon(\varnothing) = 0,$$

donde una coalición, S, es definida como un subconjunto de N; $S \subseteq N$, 2^N denota el conjunto de todos los subconjuntos o coaliciones y $\upsilon(S)$, la valía conjunta de la coalición S.

En adelante, para referirnos a un juego (N, υ), lo haremos únicamente con la función característica υ si el conjunto de jugadores es N.

Se denotará por G^N al espacio de todos los juegos con conjunto finito de jugadores N, i.e.,

$$G^N = \{\upsilon : 2^N \to \mathbb{R} | \upsilon(\varnothing) = 0\}.$$

El conjunto N también es llamado la gran coalición. Se denotará la cardinalidad de un conjunto por su correspondiente letra minúscula, $|N| = n$, $|S| = s$, $|T| = t$, etcétera .

Dados $\upsilon, w \in G^N$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos la suma y producto por escalar, $\upsilon + w$ y $\lambda\upsilon$ en G^N, en la forma usual; i.e.,

$$(\upsilon + w)(S) = \upsilon(S) + w(S) \ \text{ y}$$

$$(\lambda\upsilon)(S) = \lambda\upsilon(S) \text{ para todo } S \subseteq N$$

respectivamente.

Un juego $\upsilon \in G^N$ se dice *superaditivo* si para todo $S, T \subseteq N$ tal que $S \cap T = \varnothing$ se cumple $\upsilon(S \cup T) \geq \upsilon(S) + \upsilon(T)$. Se dice *subaditivo* si la desigualdad se cumple en el otro sentido. Se denomina *aditivo* si $\upsilon(S \cup T) = \upsilon(S) + \upsilon(T)$ para todo $S, T \subseteq N$ tal que $S \cap T = \varnothing$.

Definición 1. Un juego $\upsilon \in G^N$, se dice *simple* si $\upsilon(S) \in \{0, 1\}$ para todo $S \subseteq N$.

Definición 2. Si un juego $\upsilon \in G^N$ es *simple*,

- $S \subseteq N$ es ganadora si $\upsilon(S) = 1$
- $S \subseteq N$ es perdedora si $\upsilon(S) = 0$
- $i \in N$ se dice vetador si está en toda coalición ganadora.

Definición 3. Un juego $\upsilon \in G^N$ se dice *monótono* si para todo $S, T \subseteq N$ tal que $S \subseteq T$ se cumple:

$$\upsilon(S) \leq \upsilon(T).$$

Ejemplo 1. Ahora con las situaciones planteadas en la sección anterior y usando los conceptos vistos hasta el momento, podemos obtener la función característica para cada uno de los problemas; entonces se describirán posibilidades que nos servirán como punto de referencia en la negociación, donde las valías tienen que estar ajustadas al problema.

Para la primera situación planteada se requiere llegar aun acuerdo entre los inversionistas. Sea $N = \{1, 2, 3\}$ el conjunto de agentes que invirtió en este juego, además se desea repartir una ganancia que se obtuvo por invertir en dicha fabrica de \$800 000 tomando en cuenta el capital aportado de los inversionistas en la fábrica; de manera que todos los inversionistas estén de acuerdo con lo que recibirá cada uno, donde las ganancias están expresadas en cientos de miles de pesos. La siguiente función característica es una manera de valorar las ganancias conjuntas de cada grupo de agentes:

$$\begin{array}{lll} \upsilon(\{1\}) = 1 & \upsilon(\{1,2\}) = 6 & \\ \upsilon(\{2\}) = 4 & \upsilon(\{1,3\}) = 4 & \upsilon(\{1,2,3\}) = 8 \\ \upsilon(\{3\}) = 2 & \upsilon(\{2,3\}) = 8 & \end{array}$$

Ahora consideremos la situación del medico. Los gastos de viaje son solo de ida entre estas cuatro comunidades $c1$, $c2$, $c3$, $c4$, se dan de la siguiente manera:

$$\begin{array}{llll} & \upsilon(\{c1,c2\}) = 18 & & \\ \upsilon(\{c1\}) = 10 & \upsilon(\{c1,c3\}) = 30 & \upsilon(\{c1,c2,c3\}) = 32 & \\ \upsilon(\{c2\}) = 10 & \upsilon(\{c1,c4\}) = 40 & \upsilon(\{c1,c2,c4\}) = 48 & \\ \upsilon(\{c3\}) = 20 & \upsilon(\{c2,c3\}) = 26 & \upsilon(\{c1,c3,c4\}) = 52 & \upsilon(\{c1,c2,c3,c4\}) = 60 \\ \upsilon(\{c4\}) = 30 & \upsilon(\{c2,c4\}) = 40 & \upsilon(\{c2,c3,c4\}) = 52 & \\ & \upsilon(\{c3,c4\}) = 44 & & \end{array}$$

Donde ya vienen incluidos los honorarios de consulta. En el caso en que la comunidad $c1$ y $c2$ decidieran unirse para que el medico haga un solo viaje el costo del viaje es de 18 unidades.

Definición 4. El *juego dual* (N, υ^*) de un juego (N, υ), se define como

$$(\upsilon^*)(S) = \upsilon(N) - \upsilon(N \backslash S) \text{ para todo } S \subseteq N$$

es decir, es el juego que asigna a cada coalición $S \subseteq N$ la perdida de la gran coalición N si la coalición S deja N.

Ahora veremos las posibles propiedades de un acuerdo sobre la distribución justa o razonable, que sea estable en el sentido de que ninguna coalición debe tener el deseo y el poder para alterar el acuerdo.

Un vector de pagos para $\upsilon \in G^N$ es un vector $X \in \mathbb{R}^n$. Si X es un vector de pagos asociados a $\upsilon \in G^N$

(i) X se dice *racional individual* si $X_i \geq \upsilon(\{i\})$ para todo $i \in N$.

(ii) X se dice *racional de grupo* si $X(S) \geq \upsilon(S)$ para todo $S \subseteq N$, donde $X(S) := \sum_{i \in S} X_i$.

(iii) X es eficiente si $X(N) = \upsilon(N)$

(iv) X se dice *imputación* si X es racional individual y eficiente. $I(\upsilon)$ denota el conjunto de imputaciones de υ

$$I(\upsilon) = \{X \in \mathbb{R}^n | X_i \geq \upsilon(\{i\}) \ \ \forall i, \ \ X(N) = \upsilon(N)\}.$$

En la literatura podemos hallar muchas maneras de plantear una solución para los juegos cooperativos en forma de función característica, la solución más adecuada para cada juego dependerá de las características que se busca para la solución de dicho problema. La existencia de relaciones entre los conceptos de solución es un tema importante para la teoría de juegos cooperativos (por ejemplo, el problema de asignación de costos o de bienes). En esta parte veremos algunas soluciones conocidas en la literatura.

Definición 5. Una *solución* para un juego (N, υ) es una función

$$\phi : G^N \to \mathbb{R}^n$$

donde la i-ésima coordenada es el pago $\phi_i(\upsilon) \in \mathbb{R}$ que recibe el jugador i en el juego υ.

Axioma 1. (Linealidad.) *Una solución $\phi : G^N \to \mathbb{R}^n$ se dice lineal si*

(i) $\phi(c\upsilon) = c\phi(\upsilon)$.

(ii) $\phi(\upsilon + w) = \phi(\upsilon) + \phi(w)$

para todo $\upsilon, w \ \in \ G^N$ *y* $c \in \mathbb{R}$.

El axioma de linealidad significa que los beneficios (o los costos) que obtiene cada jugador en la suma de dos juegos es exactamente lo mismo que la suma de lo que obtiene en cada uno de los juegos por separado. Así mismo, la distribución no depende de la unidad utilizada para medir los beneficios (o costos).

Definición 6. Para cada $\upsilon \in G^N$ y $\theta \in S_n$, donde $S_n = \{\theta : N \longrightarrow N | \theta \text{ es biyectiva }\}$, definimos un nuevo juego permutado $(\theta\upsilon)$, como:

$$(\theta\upsilon)(S) = \upsilon(\theta^{-1}(S)) \ \text{ para cada } S \subseteq N$$

donde

$$\theta(S) = \{\theta(i) | i \in S\}$$

y

$$\theta^{-1}(S) = \{j \in N | \theta(j) \in S\}.$$

Axioma 2. (Simetría.) *Una solución* $\phi : G^N \to \mathbb{R}^n$ *se dice simétrica si*

$$\phi(\theta \upsilon) = \theta\phi(\upsilon)\ \forall \upsilon \in G^N, \quad \textit{para cada } \theta \in S_n.$$

El axioma de simetría es una propiedad de anonimato, es decir, el valor que obtenga cada jugador en el juego permutado es lo que obtenía el jugador por el cual cambia. Esto significa que el pago que reciben los jugadores no depende de su nombre.

Axioma 3. (Eficiencia.) *Una solución* $\phi : G^N \to \mathbb{R}^n$ *se dice eficiente si*

$$\sum_{i \in N} \phi_i(\upsilon) = \upsilon(N)$$

para todo $\upsilon \in G^N$*.*

El axioma de eficiencia nos dice que la suma total del pago de los jugadores debe ser exactamente el valor de la gran coalición.

Definición 7. Sea $i \in N$ y $\upsilon \in G^N$; i se dice *jugador nulo* en υ si

$$\upsilon(S \cup \{i\}) = \upsilon(S) \ \text{ para cada } S \subseteq N \setminus \{i\}.$$

Axioma 4. (Nulidad.) *Una solución* $\phi : G^N \to \mathbb{R}^n$ *satisface el axioma de nulidad si*

$$\phi_i(\upsilon) = 0$$

para todo $i \in N$ *jugador nulo en* $\upsilon \in G^N$*.*

El axioma del jugador nulo en υ se asegura de que un jugador sin ninguna influencia sobre los pagos de cualquier coalición no deba recibir ni pagar nada, es decir, participe como observador en el juego.

Existen varias soluciones propuestas para juegos de utilidad transferible entre las cuales se encuentra el valor de Shapley y el valor de Banzhaf, donde la diferencia de estas dos soluciones es que el valor de Shapley cumple con el axioma de eficiencia mientras que el valor de Banzhaf cumple con el axioma amalgamiento que se presenta mas adelante.

Teorema 1. (Shapley, 1953.) *Existe una única solución* $Sh : G^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *que satisface los axiomas de linealidad, simetría, eficiencia y nulidad, y está dada por:*

$$Sh_i(\upsilon) = \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[\upsilon(S \cup \{i\}) - \upsilon(S)] \ \textit{para todo } i \in N.$$

Ejemplo 2. Resolviendo los problemas de la primera sección con respecto al valor de Shapley, donde la solución para el primer juego es:

$$Sh(\upsilon) = \left(1, \frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

El valor de Shapley que obtenemos para el problema de medico es:

$$Sh(\upsilon) = \left(\frac{26}{3}, 8, \frac{46}{3}, 28\right).$$

El primer vector de pago nos representa la manera en que se hará el reparto de la ganancia obtenida para los inversionistas. El segundo vector de pagos nos dice la manera de repartir los gastos entre las cuatro comunidades por la consulta del medico, notemos que si cooperan todas la comunidades el pago que realice cada una por requerir la consulta va a hacer menos que si cada comunidad paga el viaje del medico. De esta manera estamos repartiendo costos o beneficios de manera eficiente para cada situación sin pedir condiciones a los jugadores, el problema de esta solución está en que si los jugadores la aceptan o no.

También veremos otra solución, caracterizada por Lehrer [3], que cumple con tres axiomas anteriores con una propiedad más (axioma de amalgamamiento).

El *Valor de Banzhaf* β corresponde a cada $\upsilon \in G^N$ un vector $\beta(\upsilon) \in \mathbb{R}^n$. $\beta(\upsilon)$ es definido por

$$\beta_i(\upsilon) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq N} [\upsilon(S \cup \{i\}) - \upsilon(S)] \text{ para todo } i \in N$$

El valor de Banzhaf en juegos de votación es la proporción de coaliciones en los que el jugador i es fundamental (*índice de poder de votación*). Es decir, si υ en un juego simple y monótono con n jugadores, $2^{n-1}\beta_i(\upsilon)$ cuenta el número de coaliciones perdedoras que se convierten en ganadora después de que i se une a ellos.

Definición 8. Juego amalgamado. Dados $\upsilon \in G^N$ y $T \subseteq N$, si lo jugadores en T se amalgaman en $\bar{T}$, podemos construir el juego $((N \setminus T) \cup \{\bar{T}\}, \upsilon_T)$ como:

$$\upsilon_T(S) = \begin{cases} \upsilon(S) & \forall\ S \subseteq N \setminus \bar{T}, \\ \upsilon(S \cup T) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Axioma 5. (Amalgamiento). *Una solución $\phi : G^N \to \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de amalgamiento si*

$$\phi_i(N, \upsilon) + \phi_j(N, \upsilon) \leq \phi_{\bar{T}}(N \setminus \{i, j\} \cup \{\bar{T}\}, \upsilon_T) \text{ si } \bar{T} = \{i, j\} \tag{1.1.1}$$

El axioma de amalgamamiento nos dice que si una coalición se amalgama a otra este proceso no perjudica a la coalición a la que se une, es decir al menos conseguirá lo que conseguiría por separado.

Teorema 2. (Lehrer, 1988). *Existe una única solución $\phi : G^N \to \mathbb{R}$, que satisface simetría, linealidad, nulidad y amalgamiento si y solo si*

$$\phi = \beta$$

En muchas ocasiones, la propiedad de eficiencia en un juego es natural ya que se trata de repartir beneficios (costos), pero por ejemplo en el contexto de juegos de votación, no existe un beneficio a repartir, ya que el objetivo del juego es medir el poder, no distribuirlo.

Ejemplo 3. Resolviendo los problemas de la primera sección con esta nueva solución, donde el valor de Banzhaf para el primer juego es:

$$\beta(v) = \left(\frac{5}{4}, \frac{19}{4}, \frac{11}{4}\right).$$

El valor de Banzhaf para el problema del pago por la consulta del medico para las cuatro comunidades:

$$\beta(v) = \left(\frac{17}{2}, 9, \frac{15}{2}, \frac{55}{2}\right).$$

Notemos que esta solución no es eficiente y es aquí donde para cada problema se debe identificar el tipo de solución que le conviene utilizar y eso va a depender de las características que se buscan para la solución en el contexto del problema.

Capítulo 2

El Axioma de Consistencia

El problema que abordamos aquí es ¿qué pasa cuando algún jugador o un grupo de jugadores decide dejar el juego? entonces se tiene que analizar la manera de repartir esta nueva asignación solo con los jugadores que decidieron quedarse. Dos cuestiones importantes surgen y estas son las ganancias esperadas por las partes involucradas, y la reorganización de las valías que determina en gran medida la distribución de los beneficios.

El juego reducido se juega después de que un jugador haya dejado el juego. Entonces tenemos que encontrar una manera de estimar las valías para este nuevo juego con los jugadores que decidieron quedarse.

La consistencia tiene que ver con la posibilidad de renegociación entre un grupo de individuos, cada vez que se enfrentan a la deserción de un solo individuo o a un grupo de ellos. Si algunos individuos se van, llevándose con ellos sus pagos asignados de acuerdo a la situación planteada, lo mas justo sería que para los individuos que se quedan no cambien sus resultados utilizando una nueva regla de asignación sobre el problema reducido. Si esto se cumple decimos que la solución cumple con *consistencia*.

La forma de presentar el axioma de consistencia se debe al artículo de Hart y Mas-Colell [2], donde consistencia puede ser descrita informalmente de la siguiente forma : sea ϕ una función que asocia un pago a cada jugador en cada juego. Para cada grupo de jugadores en un juego, se define un juego reducido entre ellos, dando al resto de los jugadores pagos de acuerdo a ϕ. Entonces ϕ se dice ser consistente si, cuando es aplicado a cada juego reducido, conserva los mismos pagos que en el juego original.

Formalmente, sea ϕ una solución. Denotamos a $\phi_j(N,\nu)$ el pago para cada jugador $j \in N$.

Definición 9. Una solución $\phi : G^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$, (N, υ) es *consistente* con respecto al *juego reducido* (S, υ_S^{ϕ}) si, para todo $\upsilon \in G^N$ y para toda coalición no vacía $S \subsetneq N$,

$$\phi_i(N,\upsilon) = \phi_i(S, \upsilon_S^{\phi}) \ \ \forall i \ \in S$$

donde υ_S^{ϕ} denota el juego reducido de S.

Notemos que una solución es consistente con respecto a distintos juegos reducidos, todo dependerá en la forma de definir las valías para coaliciones de S, cuando un grupo de jugadores $N \setminus S$ decide salirse del juego.

En adelante, se caracterizarán soluciones empleando las propiedades de consistencia y la propiedad de solución estándar para el juego de dos jugadores, donde esta propiedad reparte el excedente equitativamente entre los dos jugadores.

Definición 10. Una función solución ϕ es estándar para juegos de dos jugadores si

$$\phi_k(\{i,j\},\upsilon) = \upsilon(\{k\}) + \frac{1}{2}[\upsilon(\{i,j\}) - \upsilon(\{i\}) - \upsilon(\{j\})]$$

para todo $k \in \{i,j\}$.

Donde $[\upsilon(\{i,j\}) - \upsilon(\{i\}) - \upsilon(\{j\})]$ es el excedente después de darle a cada jugador su valía original y es dividido equitativamente entre los dos jugadores.

2.1. Consistencia en el valor de Shapley

Definición 11. Sea $\phi : G^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una solución, (N,υ) un juego, y $S \subset N$. Definimos un juego reducido (S, υ_S^{ϕ}) como sigue

$$\upsilon_S^{\phi}(T) = \upsilon(T \cup S^c) - \sum_{i \in S^c} \phi_i(T \cup S^c, \upsilon), \quad \text{para todo } T \subset S, \tag{2.1.1}$$

donde $S^c = N \setminus S$.

Interpretación : Dada una función solución ϕ, un juego (N,υ) y una coalición $S \subset N$, los miembros de S (o, más preciso, cada subcoalición de S) se necesita considerar el pago total restante después de pagar a $N \setminus S$ de acuerdo a ϕ. Para calcular la valía de la coalición $T \subset S$ (en el juego reducido), suponemos que los miembros de $S \setminus T$ no están presentes; en otras palabras, se considera el juego $(T \cup S^c, \upsilon)$, en el que los pagos son distribuidos según ϕ. Lo apropiado de esta definición de juego reducido depende, por supuesto, en la situación particular que se esté modelando.

Teorema 3. ***(Hart y Mas-Colell, 1989)*** *Sea ϕ una función solución. Entonces:*

(i) ϕ es consistente; y

(ii) ϕ es estándar para el juego de dos jugadores; si y sólo si ϕ es el valor de Shapley.

Por otra parte, los juegos reducidos no necesariamente comparten algunas de los propiedades del juego original; por ejemplo, aditividad.

Ejemplo 4. Regresando a los problemas de la primera sección. Supongamos que uno de los inversionistas decide retirarse el juego llevándose consigo su pago por invertir en dicha fabrica, digamos el inversionista 3, entonces aplicando el juego reducido (2.1.1) para los jugadores que no se salieron, es decir, para v_S^ϕ donde $S = \{1, 2\}$ obtenemos: Entonces estimando las nuevas valías con respecto al juego reducido (2.1.1) obtenemos:

$$\begin{array}{ll} v(\{1\}) = 3/2 & \\ & v(\{1,2\}) = 11/2. \\ v(\{2\}) = 5 & \end{array}$$

Ahora aplicando el valor de Shapley para estas nuevas valías obtenemos:

$$Sh(v_S^\phi) = \left(1, \frac{9}{2}\right).$$

Para el segundo ejemplo supongamos que la comunidad $c1$ ya no requiere la consulta del medico. Entonces estimando las nuevas valías con respecto al juego reducido (2.1.1) obtenemos:

$$\begin{array}{lll} v(\{c2\}) = 9 & v(\{c2,c3\}) = 71/3 & \\ v(\{c3\}) = 20 & v(\{c2,c4\}) = 39 & v(\{c2,c3,c4\}) = 154/3 \\ v(\{4c\}) = 30 & v(\{c3,c4\}) = 128/3 & \end{array}$$

Aplicando el valor de Shapley para este nuevo juego obtenemos

$$Sh(v_S^\phi) = \left(8, \frac{46}{3}, 28\right).$$

Además, notemos que a los agentes que decidieron quedarse no les afectó la salida del inversionista 1, es decir, obtuvieron lo mismo que en el juego original.

Podemos definir otro juego reducido (ver Sobolev [7]), que también cumple consistencia en el valor de Shapley.

Definición 12. Dado un juego (N, v), con $n \geq 3$ y un jugador $i \in N$, y su pago $\phi_i \in \mathbb{R}$, hay un juego reducido asociado $(N \setminus \{i\}, v_{N\setminus\{i\}}^\phi)$ con un conjunto de jugadores $N \setminus \{i\}$ para todo $N \setminus \{i\} \subseteq S$ definido por

$$v_{N\setminus\{i\}}^\phi(S) = \frac{s[v(S \cup \{i\}) - \phi_i(N, v)] + (n - s - 1)v(S)}{n - 1}. \qquad (2.1.2)$$

Interpretación: Para la valía de cualquier coalición en el juego reducido se obtiene como una combinación convexa del pago de la coalición en el juego original y el valor original de la coalición menos el pago ϕ_i del jugado i que se lleva por su participación en el juego.

Ejemplo 5. Solo analizaremos el caso del pago de las consultas del medico. Analizando de la misma manera que el ejemplo anterior, supongamos la comunidad $c1$ decide salirse y ya no pagar por las consultas entonces tenemos que encontrar las nuevas valías para este juego reducido, aplicando el juego reducido (2.1.2) para υ_S^ϕ donde $S = \{c2, c3, c4\}$, obtenemos:

$$\begin{array}{lll} \upsilon_S^\phi(\{c2\}) = 88/9 & \upsilon_S^\phi(\{c2, c3\}) = 218/9 & \\ \upsilon_S^\phi(\{c3\}) = 184/9 & \upsilon_S^\phi(\{c2, c4\}) = 356/9 & \upsilon_S^\phi(\{c2, c3, c4\}) = 154/3. \\ \upsilon_S^\phi(\{c4\}) = 274/9 & \upsilon_S^\phi(\{c3, c4\}) = 392/9 & \end{array}$$

Aplicando el valor de Shapley para este nuevo juego, obtenemos

$$Sh(\upsilon_S^\phi) = \left(8, \frac{46}{3}, 28\right).$$

Donde la solución de los agentes 2, 3 y 4 es igual al obtenido en el juego original entonces esta es otra manera de definir un juego reducido donde el valor de Shapley es consistente con respecto a este juego reducido.

A continuación, enunciamos un tercer tipo de juegos reducidos donde se cumple el axioma de consistencia para el valor de Shapley.

Definición 13. Dado un juego (N, υ), con $n \geq 3$ y un jugador $i \in N$, y su pago $\phi_i \in \mathbb{R}$, hay un juego reducido asociado $(N \setminus \{i\}, \upsilon_{N\setminus\{i\}}^\phi)$ con un conjunto de jugadores $N \setminus \{i\}$ para todo $N \setminus \{i\} \subseteq S$ definido por

$$\upsilon_{N\setminus\{i\}}^\phi(S) := \begin{cases} 0 & \text{si } S = \varnothing, \\ \upsilon(N) - \phi_i(N, \upsilon) & \text{si } S \subseteq N \setminus \{i\}, \\ \dfrac{(n-s-1)[\upsilon(S) - \upsilon(N \setminus S)] - s\phi_i(N, \upsilon)}{n-1} & \text{otro caso.} \end{cases} \tag{2.1.3}$$

donde $T \subset S$. Donde ϕ es la solución del juego original del jugador i.

Ejemplo 6. Regresando al ejemplo de las comunidades y las consultas del medico. Analizando de la misma manera que el ejemplo anterior aplicando el juego reducido (2.1.3) para υ_S^ϕ, donde $S = \{2, 3, 4\}$, obtenemos:

$$\begin{array}{lll} \upsilon_S^\phi(\{c2\}) = -278/9 & \upsilon_S^\phi(\{c2, c3\}) = -94/9 & \\ \upsilon_S^\phi(\{c3\}) = -194/9 & \upsilon_S^\phi(\{c2, c4\}) = -22/9 & \upsilon_S^\phi(\{c2, c3, c4\}) = 154/3. \\ \upsilon_S^\phi(\{c4\}) = -38/9 & \upsilon_S^\phi(\{c3, c4\}) = 26/9 & \end{array}$$

Aplicando el valor de Shapley para este nuevo juego, obtenemos

$$Sh(v_S^{\phi}) = \left(8, \frac{46}{3}, 28\right)$$

donde obtenemos el mismo pago para los jugadores que decidieron quedarse.

2.2. Consistencia en el valor de Banzhaf

En Sánchez Pérez [5], se demuestran resultados de consistencia para el Valor de Banzhaf con respecto al siguiente juego reducido:

Definición 14. Dada una solución $\varphi : G^N \to \mathbb{R}^n$, un juego (N, v)(con $n \geq 3$) y $k \in \mathbb{R}$. El juego reducido $(N \setminus \{k\}, v^{\varphi}_{N\setminus\{k\}})$ se define como

$$v^{\varphi}_{N\setminus\{k\}}(S) := \begin{cases} \frac{1}{2}[v(N) + v(N \setminus \{k\}) - v(\{k\})] & \text{si } S = N \setminus \{k\}, \\ \frac{1}{2}[v(N) - v(N \setminus S)] & \text{si } \varnothing \neq S \subset N \setminus \{k\} \\ 0 & \text{si } S = \varnothing, \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Proposición 2.1. *El Valor de Banzhaf es una solución consistente con respecto al juego reducido* (2.2.1).

Demostración. Aplicamos el valor al juego reducido $(N \setminus \{k\}, v^{\beta}_{N\setminus\{k\}})$.

Para un jugador $i \in N \setminus \{k\}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\beta_i(N \setminus \{k\}, v^{\beta}_{N\setminus\{k\}}) &= \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{S\subset N\setminus\{i,k\}} \left[v^{\beta}_{N\setminus\{k\}}(S \cup \{i\}) - v^{\beta}_{N\setminus\{k\}}(S)\right] \ (\forall i \ \in N) \\
2^{n-2}\beta_i(N \setminus \{k\}, v^{\beta}_{N\setminus\{k\}}) &= \sum_{S\subset N\setminus\{i,k\}} \left[v^{\beta}_{N\setminus\{k\}}(S \cup \{i\}) - v^{\beta}_{N\setminus\{k\}}(S)\right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{S\subset N\setminus\{i,k\}} [v(S \cup \{i\}) - v(N \setminus (S \cup \{i\})) - v(S) + v(N \setminus S)] + \\
&\quad \frac{1}{2}[v(N) - v(N \setminus \{k\}) - v(\{k\}) - v(N \setminus \{k\})] \\
&\quad \frac{1}{2}[-v(N \setminus \{i,k\}) + v(\{i,k\})] \\
2^{n-1}\beta_i(N \setminus \{k\}, v^{\beta}_{N\setminus\{k\}}) &= \sum_{S\subseteq N\setminus\{i,k\}} [v(S \cup \{i\}) - v(S) + v(N \setminus S) - v(N \setminus (S \cup \{i\}))] \\
&= \sum_{S\subseteq N\setminus\{i,k\}} [v(S \cup \{i\}) - v(S)] + \sum_{\substack{S \subseteq N\setminus\{i\}, \\ S \ni \{k\}}} [v(S \cup \{i\}) - v(S)] \\
\beta_i(N \setminus \{k\}, v^{\beta}_{N\setminus\{k\}}) &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} [v(S \cup \{i\}) - v(S)] \\
&= \beta_i(N, v)
\end{aligned}$$

■

Teorema 4. *Sea φ una función solución. Entonces:*

(i) φ es consistente con respecto al juego reducido (2.2.1)*; y*

(ii) φ es estándar para juegos de dos jugadores;

si y sólo si φ es el Valor de Banzhaf.

Demostración. La proposición anterior demuestra que el axioma de consistencia se satisface, solo falta revisar la propiedad de solución estándar para el juego de dos jugadores.
Sea $N = \{i, j\}$

$$\begin{aligned}
\beta_i(\{i,j\}, \upsilon) &= \frac{1}{2^{2-1}} \sum_{S \subseteq \{i,j\}} [\upsilon(S \cup \{i\}) - \upsilon(S)] \\
&= \frac{1}{2} [\upsilon(\{i\}) + \upsilon(\{i\}) - \upsilon(\{i\}) + \upsilon(\{i,j\}) - \upsilon(\{j\})] \\
&= \upsilon(\{i\}) + \frac{1}{2}[\upsilon(\{i,j\} - \upsilon(\{i\}) - \upsilon(\{j\}))]
\end{aligned}$$

La otra implicación.supongamos que φ satisface $i)$ y $ii)$, la demostración se sigue por inducción sobre el número de jugadores. Notemos que cuando $n = 2$ la solución satisface solución estándar, i.e, $\varphi = \beta$ cuando $n = 2$.

Supongamos que φ y β coinciden en todos los juegos con $n - 1$ jugadores. Consideramos los juegos reducidos para dos jugadores $(\{i, j\}, \upsilon^{\varphi})$ y $(\{i, j\}, \upsilon^{\beta})$ coinciden ya que $\upsilon^{\varphi}_{\{i,j\}}(S) = \upsilon^{\beta}_{\{i,j\}}(S)$ para todo $S \subseteq \{i, j\}$. Por $i)$ se tiene que $\varphi_k(\{i, j\}) = \beta_k(\{i, j\})$.

Entonces al usar el juego reducido en cada paso de la inducción provoca que la solución se extiende al siguiente caso, es decir, en cada paso se considera un jugador mas entonces por $ii)$ se sigue que

$$\varphi_k(N, \upsilon) = \varphi_k(\upsilon^{\varphi}_{\{i,j\}}) = \beta_k(\upsilon^{\beta}_{\{i,j\}}) = \beta_k(N, \upsilon).$$

Aplicando esto a cualquier par de jugadores se obtiene $\varphi_k(N, \upsilon) = \beta_k(N, \upsilon)$ para todo $i \in N$). ■

2.3. Otra forma de caracterizar el valor de Banzhaf

Otra manera de ver consistencia del valor de Banzhaf es como lo demuestran en [4], donde la caracterización es vía consistencia (con respecto a un juego reducido w_s^{ϕ}) y solución estandar para dos jugadores que mantiene una relacion paralela con la definida por Hart y Mas-Colell en [2].

Definición 15. Dada una solución $\varphi : G^N \to \mathbb{R}^n$, un juego (N, υ), y una coalición $S \subset N$; el juego reducido (S, w_S^{φ}) se define como

$$w_S^{\varphi}(T) := \begin{cases} 0 & \text{si } T = \varnothing, \\ \phi_T(\{T\} \cup (N \setminus S), \upsilon^T), & \text{si } T \neq \varnothing, \end{cases}$$

donde υ^T representa el subjuego entre coaliciones cuyos jugadores son: por un lado la coalición T como un solo jugador y por el otro lado las $n - s$ coaliciones formadas por los jugadores individuales de $N \setminus S$ (es decir $n - s + 1$) jugadores en total. Tal que

$$\upsilon^T(Q) := \begin{cases} \upsilon(Q) & \text{si } Q \subset N \setminus S \quad (\text{ i.e } T \notin Q), \\ \upsilon(T \cup (Q \setminus \{T\})) & \text{si } T \subset Q, \end{cases}$$

Interpretación : Como en el juego reducido de Hart y Mas-Colell el supuesto principal es que los jugadores en $N \setminus S$ aceptan la solución ϕ; sin embargo en este caso los jugadores en cualquier coalición $T \subset S$ suponen que si ellos aceptan la solución ϕ, y también lo hacen los jugadores en $N \setminus S$, lo que corresponde a su coalición T como grupo es lo que ϕ asigna a T en el subjuego entre esta coalición como un solo jugador y los jugadores en $N \setminus S$ como jugadores individuales. Entonces la única diferencia con el juego reducido de Hart y Mas-Colell, es que, ahí lo jugadores en T juegan el subjuego como jugadores individuales y T obtiene la suma de los pagos de los jugadores que lo componen; sin embargo, los jugadores en T juegan el subjuego como un grupo unificado no como jugadores individuales.

Ejemplo 7. Retomemos el ejemplo anterior de las consultas del medico a las cuatro comunidades y haciendo que la comunidad $c1$ ya no quiera seguir pagando por la consulta, entonces tenemos que

Q	$\upsilon^{\{2\}}(Q)$	$\upsilon^{\{3\}}(Q)$	$\upsilon^{\{4\}}(Q)$	$\upsilon^{\{2,3\}}(Q)$	$\upsilon^{\{2,4\}}(Q)$	$\upsilon^{\{3,4\}}(Q)$	$\upsilon^{\{2,3,4\}}(Q)$
$\{T\}$	10	20	30	26	40	44	52
$\{1\}$	10	10	10	10	10	10	10
$\{T, 1\}$	18	30	40	32	48	52	60

Cuadro 2.1: $\upsilon^T(Q)$

T	$w_S^{\phi}(T)$
$\{2\}$	9
$\{3\}$	20
$\{4\}$	30
$\{2,3\}$	24
$\{2,4\}$	39
$\{3,4\}$	43
$\{2,3,4\}$	51

Cuadro 2.2: Juego reducido para w_S^{ϕ}

Aplicando el valor de Banzhaf a este juego reducido obtenemos:

$$\beta_i(w_S^{\phi}) = \left(\frac{15}{2}, 15, \frac{55}{2}\right)$$

Notemos que el pago que tienen que realizar las comunidades que decidieron no salir del juego, es decir, pagar la consulta del medico para que realice el viaje a solo esas comunidades es el mismo que en el juego original y no les afecto la salida de $c1$.

Capítulo 3

Resultados

Es este capítulo estudiaremos una clase de soluciones para juegos de utilidad transferible que en cierto sentido se podría llamar igualitario, en el sentido que asigna a cada jugador algún pago inicial y reparte el resto de la valía de la gran coalición $v(N)$ en partes iguales para todo los jugadores, ejemplo de estas soluciones son la solución CIS y $ENSC$.

La solución CIS (Centro de gravedad del valor del conjunto de Imputaciones) corresponde a una igualdad de pérdida entre todos los jugadores si la solución se ve desde el punto de costos, o si la regla igualitaria reparte un beneficio pueden ser vistos como una ganancia igualitaria. De aquí definimos un tipo especial de solución para los juegos cooperativos, como la solución dual de división de excesos, llamado el valor de contribución Igualitario no separable (se conoce con el nombre de valor-$ENSC$). La solución $ENSC$ asigna a cada jugador en el juego su contribución marginal como un miembro de la gran coalición y divide el resto de $v(N)$ por igual entre todos los jugadores.

En este capítulo veremos diferentes juegos reducidos para la solución de división de excesos y su dual y se estudian diferentes propiedades que satisfacen estas soluciones (el axioma de consistencia y la propiedad solución estándar para dos jugadores).

3.1. Caracterizaciones

3.1.1. Consistencia en soluciones de división de excesos

Primero estudiaremos la soluciones de división de excesos. La solución le asigna a cada jugador su valía individual y reparte el resto de $v(N)$ por igual.

La solución está dada por

$$CIS_i(N,v) = v(\{i\}) + \frac{1}{n}\left[v(N) - \sum_{j\in N} v(\{j\})\right] \text{ para todo } i \in N. \tag{3.1.1}$$

Ejemplo 8. Continuando con el ejemplo para la primera situación, la solución con respecto a la división de excesos la solución de división de excesos para los inversionistas es:

$$CIS(N, v) = (4/3,\ 13/3,\ 7/3)$$

Y para el ejemplo de la consulta del medico a las cuatro comunidades:

$$CIS(N, v) = (7.5,\ 7.5,\ 17.5,\ 27.5)$$

Con la solución de división de excesos podemos encontrar juegos reducidos para cuando uno o varios jugadores deciden irse del juego llevándose su pago, como se muestra a continuación.

Definición 16. Sea ϕ una función solución, (N, v) un juego y $S \subset N$. Definimos el juego reducido (S, v_S^{ϕ}) como

$$v_S^{\phi}(T) = \begin{cases} 0 & \text{si } S = \varnothing, \\ v(T) - \displaystyle\sum_{i \in N \setminus S} [\phi_i(N, v) - v(\{i\})] & \text{si } \varnothing \neq T \subset S \\ v(N) - \displaystyle\sum_{i \in N \setminus S} \phi_i(N, v) & \text{si } T = S, \end{cases} \tag{3.1.2}$$

donde T es una coalición de S y ϕ_i es el pago del jugador i en el juego original.

Interpretación. Para cada coalición $T \subset S$ es necesario considerar la valía de su coalición menos la diferencia del pago que recibieron los jugadores que se fueron con respecto a su valía individual y al pago de cada miembro de $N \setminus S$ de acuerdo a ϕ, es decir, la pérdida de la parte del excedente para cada coalición $T \subset S$ en el juego reducido.

Proposición 3.1. *La solución CIS es una función solución consistente con respecto al juego reducido* (3.1.2).

Demostración. Usando la solución en el juego reducido (S, v_S^{ϕ}).

Para cada jugador $k \in S$ le corresponde

$$
\begin{aligned}
CIS_k(v_S^{CIS}) &= v_S^{CIS}(\{k\}) + \frac{1}{s}\left[v_S^{CIS}(S) - \sum_{j\in S} v_S^{CIS}(\{j\})\right] \\
&= v(\{k\}) - \sum_{i\in N\setminus S}[\phi_i(N,v) - v(\{i\})] \\
&\quad + \frac{1}{s}\left[v(N) - \sum_{i\in N\setminus S}\phi_i(N,v) - \sum_{j\in S}\left(v(\{j\}) - \sum_{i\in N\setminus S}[\phi_i(N,v) - v(\{i\})]\right)\right] \\
&= v(\{k\}) - \sum_{i\in N\setminus S}\left[v(\{i\}) + \frac{1}{n}\left(v(N) - \sum_{j\in N} v(\{j\})\right) - v(\{i\})\right] \\
&\quad + \frac{1}{s}\left[v(N) - \sum_{i\in N\setminus S}\left(v(\{i\}) + \frac{1}{n}\left(v(N) - \sum_{j\in N} v(\{j\})\right)\right)\right] \\
&\quad - \frac{1}{s}\left[\sum_{j\in S}\left(v(\{j\}) - \frac{(n-s)}{n}\left(v(N) - \sum_{j\in N} v(\{j\})\right)\right)\right] \\
&= v(\{k\}) + \frac{1}{n}\left[v(N) - \sum_{r\in N} v(\{r\})\right] \\
&= CIS_k(v).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto tenemos que $CIS_k(v) = CIS_k(v_S^{CIS})$ ■

Teorema 5. *Sea* $\phi : G^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una solución entonces:*

i) ϕ *es estándar para el juego de dos jugadores,*

ii) ϕ *es consistente con respecto al juego reducido* (3.1.2)

si y sólo si $\phi = CIS$

Demostración. Por la Proposición 3.1, la solución CIS es consistente y es fácil verificar que se cumple la solución estándar para juego de dos jugadores.

Ahora la otra implicación. Sea $\phi : G^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y supongamos que satisface *i)* y *ii)*. Usando inducción sobre el número los jugadores. Nótese que cuando $n = 2$ la solución del juego coincide con la solución estándar. i.e, $\phi = CIS$ si $n = 2$.

Supongamos que ϕ y CIS coinciden en todos los juegos con $n-1$ jugadores. Consideramos los juegos reducidos para dos jugadores $(\{i,j\}, v^{\phi})$ y $(\{i,j\}, v^{CIS})$ coinciden ya que $v^{\phi}_{\{i,j\}}(S) = v^{CIS}_{\{i,j\}}(S)$ para todo $S \subseteq \{i,j\}$.

Entonces por $i)$ $\phi_i(\upsilon^{\phi}_{\{i,j\}}) = CIS_i(\upsilon^{CIS}_{\{i,j\}})$ y por $ii)$.

$$\phi_i(N,\upsilon) = \phi_i(\upsilon^{\phi}_{\{i,j\}}) = CIS_i(\upsilon^{CIS}_{\{i,j\}}) = CIS_i(N,\upsilon).$$

Aplicando esto a cualquier par de jugadores se obtiene $\phi_i(N,\upsilon) = CIS_i(N,\upsilon)$ $(\forall i \in N)$. ■

Ejemplo 9. Si alguna de las comunidades decide dejar el juego, digamos que el que decide salirse la comunidad 1, entonces ya con solo tres comunidades podemos definir la función característica para el nuevo juego reducido υ^{ϕ}_{S} en el ejemplo 3.1.1; obtenemos:

$$\begin{array}{lll}
\upsilon^{CIS}_{\{2,3,4\}}(\{c2\}) = 12.5 & \upsilon^{CIS}_{\{2,3,4\}}(\{c2,c3\}) = 28.5 & \\
\upsilon^{CIS}_{\{2,3,4\}}(\{c3\}) = 22.5 & \upsilon^{CIS}_{\{2,3,4\}}(\{c2,c4\}) = 42.5 & \upsilon^{CIS}_{\{2,3,4\}}(\{c2,c3,c4\}) = 52.5. \\
\upsilon^{CIS}_{\{2,3,4\}}(\{c4\}) = 32.5 & \upsilon^{CIS}_{\{2,3,4\}}(\{c3,c4\}) = 46.5 &
\end{array}$$

Aplicando la solución 3.1.1 de para este nuevo juego obtenemos

$$CIS(\upsilon^{CIS}_{\{2,3,4\}}) = (7.5,\ 17.5,\ 27.5).$$

Ahora con respecto a la primera situación, si el inversionista 3 decide salirse del juego, es decir, si el inversionista decide que ya no quiere participar más en la inversión de la fabrica, entonces las nuevas valías para este nuevo juego están dadas por:

$$\begin{array}{ll}
\upsilon^{CIS}_{\{1,2\}}(\{1\}) = 2/3 & \\
 & \upsilon^{CIS}_{\{1,2\}}(\{1,2\}) = 17/3. \\
\upsilon^{CIS}_{\{1,2\}}(\{2\}) = 11/3 &
\end{array}$$

El pago para los dos inversionistas que decidierón quedarse es:

$$CIS(\upsilon^{CIS}_{\{1,2\}}) = (4/3, 13/3).$$

Notemos que esta solución lo que propone es que si algún agente no quiere pagar por algún servicio o simplemente se quiere retirar del juego y llevarse la solución que le corresponde, los otros agentes no tienen por que ser afectado.

El siguiente resultado es otra manera de caracterizar un juego reducido de forma mas natural que el anterior.

Definición 17. Sea ϕ una función solución, (N,υ) un juego y $S \subset N$. Definimos el juego reducido (S,υ^{ϕ}_{S}) como

$$\upsilon^{\phi}_{S}(T) = \begin{cases} 0 & \text{si } S = \varnothing, \\ \upsilon(T) & \text{si } \varnothing \neq T \subset S \\ \upsilon(N) - \displaystyle\sum_{i \in N\setminus S} \phi_i(N,\upsilon) & \text{si } S = T, \end{cases} \tag{3.1.3}$$

Donde T es una coalición de S y $\phi_i(\upsilon)$ es el pago del jugador i en el juego original.

Interpretación. Para cada coalición $T \subset S$ se considera solo el pago con respecto a la valía original después de que los jugadores que decidieron irse y obtuvieron su pago de acuerdo a ϕ, es decir, la pérdida que sufre la gran coalición cuando S^c deciden salirse del juego original. Y para $T = S$ el valor de la gran coalición, es la pérdida que tiene la gran coalición con respecto al pago de los individuos que decidieron salir del juego.

Proposición 3.2. *La solución CIS es una función solución consistente con respecto al juego reducido* (3.1.3)*.*

Demostración. Sea (N, υ) el juego. Usando la solución en el juego reducido (S, υ_S^{CIS}).

Para cada jugados $k \in S$ le corresponde

$$\begin{aligned}
CIS_k(\upsilon_S^{CIS}) &= \upsilon_S^{CIS}(\{k\}) + \frac{1}{s}\left[\upsilon_S^{CIS}(S) - \sum_{j\in S}\upsilon_S^{CIS}(\{j\})\right] \\
&= \upsilon(\{k\}) + \frac{1}{s}\left[\upsilon(N) - \sum_{i\in N\setminus S}\phi_i(N,\upsilon) - \sum_{j\in S}\upsilon(\{j\})\right] \\
&= \upsilon(\{k\}) + \frac{1}{s}\left[\upsilon(N) - \sum_{i\in N\setminus S}\left(\upsilon(\{i\}) + \frac{1}{n}\left(\upsilon(N) - \sum_{j\in N}\upsilon(\{j\})\right)\right) - \sum_{j\in S}\upsilon(\{j\})\right] \\
&= \upsilon(\{k\}) + \frac{1}{s}\left[\upsilon(N) - \sum_{i\in N\setminus S}(\upsilon(\{i\})) - \frac{1}{n}\sum_{i\in N\setminus S}\left(\upsilon(N) - \sum_{j\in N}\upsilon(\{j\})\right) - \sum_{j\in S}\upsilon(\{j\})\right] \\
&= \upsilon(\{k\}) + \frac{1}{s}\left[\upsilon(N) - \frac{n-s}{n}\left(\upsilon(N) - \sum_{j\in N}\upsilon(\{j\})\right) - \sum_{r\in N}\upsilon(\{r\})\right] \\
&= \upsilon(\{k\}) + \frac{1}{s}\left[\frac{s}{n}\upsilon(N) - \frac{s}{n}\sum_{r\in N}\upsilon(\{r\})\right] \\
&= \upsilon(\{k\}) + \frac{1}{n}\left[\upsilon(N) - \sum_{r\in N}\upsilon(\{r\})\right] \\
&= CIS_k(\upsilon).
\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que $CIS_k(\upsilon) = CIS_k(\upsilon_S^{\phi})$ ■

Teorema 6. *Sea $\phi : G^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una solución en G^N entonces:*

i) ϕ es estándar para el juego de dos jugadores,

ii) ϕ es consistente con respecto al juego reducido (3.1.3)

si y sólo si $\phi = CIS$

Demostración. La Proposición 3.2 se demuestra que el axioma de consistencia se satisface, solo falta demostrar la propiedad de solución estándar para el juego de dos jugadores.
Sea $N = \{i, j\}$

$$\begin{aligned} CIS_i(\{i,j\},v) &= v(\{i\}) + \frac{1}{2}\left[v(\{i,j\}) - \sum_{k\in\{i,j\}} v(\{k\})\right] \\ &= v(\{i\}) + \frac{1}{2}\left[v(\{i,j\}) - (v(\{i\}) + v(\{k\}))\right] \\ &= v(\{i\}) + \frac{1}{2}[v(\{i,j\} - v(\{i\}) - v(\{j\}))] \end{aligned}$$

■

La otra implicación.supongamos que ϕ satisface $i)$ y $ii)$, la demostración se sigue por inducción sobre el número de jugadores. Notemos que cuando $n = 2$ la solución satisface solución estándar, i.e, $\phi = CIS$ cuando $n = 2$.

Supongamos que ϕ y CIS coinciden en todos los juegos con $n-1$ jugadores. Consideramos los juegos reducidos para dos jugadores $(\{i,j\}, v^{\phi})$ y $(\{i,j\}, v^{CIS})$ coinciden ya que $v^{\phi}_{\{i,j\}}(S) = v^{CIS}_{\{i,j\}}(S)$ para todo $S \subseteq \{i,j\}$. Por $i)$ se tiene que $\phi_k(\{i,j\}) = CIS_k(\{i,j\})$.

Entonces al usar el juego reducido en cada paso de la inducción provoca que la solución se extiende al siguiente caso, es decir, en cada paso se considera un jugador mas entonces por $ii)$ se sigue que

$$\phi_k(N,v) = \phi_k(v^{\phi}_{\{i,j\}}) = CIS_k(v^{CIS}_{\{i,j\}}) = CIS_k(N,v).$$

Aplicando esto a cualquier par de jugadores se obtiene $\phi_k(N,v) = CIS_k(N,v)$ para todo $i \in N$).

3.1.2. Consistencia en la solución dual de división de excesos

También podemos definir una solución consistente con respecto a la solución dual de división de excesos

Entonces el valor $ENSC$ asigna a cada juego (N,v) el valor dual CIS, es decir,

$$ENSC_i(N,v) = CIS_i(N,v^*)$$

esto es,

$$ENSC_i(N,v) = -v(N\backslash\{i\}) + \frac{1}{n}\left[v(N) + \sum_{j\in N} v(N\backslash\{j\})\right] \tag{3.1.4}$$

Así, el valor $ENSC$ asigna a cada jugador en el juego su contribución marginal a la gran coalición y distribuye el resto (positivo, negativo o cero) en partes iguales entre los jugadores.

Ejemplo 10. Retomando el ejemplo tenemos que para esta nueva solución para las comunidades es:

$$ENSC(N, v) = (9,\ 9,\ 13,\ 29)$$

Y la solución para los inversionistas es:

$$ENSC(N, v) = (2/3,\ 14/3,\ 8/3).$$

Definición 18. Sean ϕ una función solución, (N, v) un juego y $S \subset N$. Definimos el juego reducido (S, v_S^{ϕ}) como

$$v_S^{\phi}(T) = \begin{cases} 0 & \text{si } S = \varnothing, \\ v(T \cup S^c) - \sum\limits_{i \in S^c} \phi_i(N, v) & \text{si } \varnothing \neq T \subset S \\ v(N) - \sum\limits_{i \in S^c} \phi_i(N, v) & \text{si } S = T, \end{cases} \tag{3.1.5}$$

donde $S^c = N \backslash S$, T es una coalición de S y $\phi_i(v)$ es el pago del jugador i en el juego original.

Interpretación. Dada una función solución $\phi(N, v)$ en un juego (N, v) y sea $S \subset N$ los individuos que no salieron del juego, entonces para calcular la valía de cada coalición T, se debe considerar a los miembros de $N \backslash S$ (Los miembros que no están presentes en el juego reducido), es decir, consideramos los miembros que se fueron y el pago total restante después de pagarle a cada miembro de S^c de acuerdo a $\phi(N, v)$.

Proposición 3.3. *La solución $ENSC$ es una función solución consistente con respecto al juego reducido* (3.1.5)*.*

Demostración. Sea (N, v) el juego. Usando la solución en el juego reducido (S, v_S^{ENSC}).

Para cada jugador $k \in S$ le corresponde

$$\begin{aligned}
ENSC_k(\upsilon_S^{ENSC}) &= -\upsilon_S^{ENSC}(S\backslash\{k\}) + \frac{1}{s}\left[\upsilon_S^{ENSC}(S) + \sum_{j\in S}\upsilon_S^{ENSC}(S\backslash\{j\})\right] \\
&= -\upsilon(N\backslash\{k\}) + \sum_{i\in N\backslash S}\phi_i(N,\upsilon) \\
&\quad +\frac{1}{s}\left[\upsilon(N) - \sum_{i\in N\backslash S}\phi_i(N,\upsilon) + \sum_{j\in S}\left(\upsilon(N\backslash\{j\}) - \sum_{i\in N\backslash S}\phi_i(N,\upsilon)\right)\right] \\
&= -\upsilon(N\backslash\{k\}) + \sum_{i\in N\backslash S}\left(-\upsilon(N\backslash\{i\}) + \frac{1}{n}\left[\upsilon(N) + \sum_{j\in N}\upsilon(N\backslash\{j\})\right]\right) \\
&\quad +\frac{1}{s}\left[\upsilon(N) - \sum_{i\in N\backslash S}\left(-\upsilon(N\backslash\{i\}) + \frac{1}{n}\left[\upsilon(N) + \sum_{j\in N}\upsilon(N\backslash\{j\})\right]\right)\right] \\
&\quad +\frac{1}{s}\sum_{j\in S}\left[\upsilon(N\backslash\{j\}) - \sum_{i\in N\backslash S}\left(-\upsilon(N\backslash\{i\}) + \frac{1}{n}\left[\upsilon(N) + \sum_{j\in N}\upsilon(N\backslash\{j\})\right]\right)\right] \\
&= -\upsilon(N\backslash\{k\}) + \sum_{i\in N\backslash S}(-\upsilon(N\backslash\{i\})) + \frac{n-s}{n}\left[\upsilon(N) + \sum_{j\in N}\upsilon(N\backslash\{j\})\right] \\
&\quad +\frac{1}{s}\upsilon(N) - \frac{1}{s}\sum_{i\in N\backslash S}(-\upsilon(N\backslash\{i\})) - \frac{n-s}{sn}\left[\upsilon(N) + \sum_{j\in N}\upsilon(N\backslash\{j\})\right] \\
&\quad +\frac{1}{s}\sum_{j\in S}\upsilon(N\backslash\{j\}) - \sum_{r\in N\backslash S}(-\upsilon(N\backslash\{r\}) - \frac{n-s}{n}\left[\upsilon(N) + \sum_{j\in N}\upsilon(N\backslash\{j\})\right] \\
&= -\upsilon(N\backslash\{k\}) + \frac{1}{n}\left[\upsilon(N) + \sum_{r\in N}\upsilon(N\backslash\{r\})\right] \\
&= ENSC_k(\upsilon).
\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que $ENSC_k(\upsilon) = ENSC_k(\upsilon_S^{\phi})$ para toda $k \in S$ ■

Teorema 7. *Sea ϕ una solución en G^N entonces:*

i) ϕ es estándar para el juego de dos jugadores,

ii) ϕ es consistente con respecto al juego reducido de la Definición 3.1.5

si y sólo si $\phi = ENSC$

Demostración. Por la Proposición 3.3 una implicación ya está dada, sólo falta verificar que se cumpla el axioma de solución estándar para $ENSC$.
Nótese que

$$\begin{aligned} ENSC_i(\{i,j\},\upsilon) &= -\upsilon(N\backslash\{i\}) + \frac{1}{n}\left[\upsilon(N) + \sum_{j\in N}\upsilon(N\backslash\{j\})\right] \\ &= -\upsilon(\{j\}) + \frac{1}{2}\left[\upsilon(\{i,j\}) + \upsilon(\{i\}) + \upsilon(\{j\})\right] \\ &= \upsilon(\{i\}) + \frac{1}{2}[\upsilon(\{i,j\}) - \upsilon(\{i\}) - \upsilon(\{j\})] \end{aligned}$$

Para finalizar la otra implicación. Sea ϕ una solución y supongamos que cumple con el axioma de consistencia y la propiedad de solución estándar para dos jugadores. Usando inducción sobre el número de los jugadores. Nótese que cuando $n = 2$ la solución del juego dual coincide con la solución estándar. i.e. $\phi = ENSC$ si $n = 2$.

Supongamos que ϕ y $ENSC$ coinciden en todos los juegos con $n-1$ jugadores. Consideramos los juegos reducidos para dos jugadores $(\{i,j\},\upsilon^{\phi})$ y $(\{i,j\},\upsilon^{ENSC})$ coinciden ya que $\upsilon^{\phi}_{\{i,j\}}(S) = \upsilon^{ENSC}_{\{i,j\}}(S)$ para todo $S \subseteq \{i,j\}$.
Entonces por cumplir con solución estándar para dos jugadores $\phi_i(\upsilon^{\phi}_{\{i,j\}}) = ENSC_i(\upsilon^{ENSC}_{\{i,j\}})$.
Y por ser consistente con el juego reducido (3.1.5)

$$\phi_i(N,\upsilon) = \phi_i(\upsilon^{\phi}_{\{i,j\}}) = ENSC_i(\upsilon^{ENSC}_{\{i,j\}}) = ENSC_i(N,\upsilon).$$

Aplicando esto a cualquier par de jugadores se obtiene $\phi_i(N,\upsilon) = ENSC_i(N,\upsilon^*)$ $(\forall i \in N)$. ■

Ejemplo 11. Ahora siguiendo con el Ejemplo 9, en el caso de las comunidades, tomamos el mismo ejemplo y suponemos que la comunidad $c1$ se llevándose con el su pago, entonces las nuevas valías para este juego reducido son:

$$\begin{array}{lll} \upsilon^{ENSC}_{\{2,3,4\}}(\{c2\}) = 9 & \upsilon^{ENSC}_{\{2,3,4\}}(\{c2,c3\}) = 23 & \\ \upsilon^{ENSC}_{\{2,3,4\}}(\{c3\}) = 21 & \upsilon^{ENSC}_{\{2,3,4\}}(\{c2,c4\}) = 39 & \upsilon^{ENSC}_{\{2,3,4\}}(\{c2,c3,c4\}) = 51. \\ \upsilon^{ENSC}_{\{2,3,4\}}(\{c4\}) = 31 & \upsilon^{ENSC}_{\{2,3,4\}}(\{c3,c4\}) = 43 & \end{array}$$

Aplicando la solución 3.1.4 en relación de las valías anteriores obtenemos

$$ENSC(\upsilon^{ENSC}_{\{2,3,4\}}) = (9,\ 13,\ 29)$$

Retomemos el caso en el que el inversionista 3 decide dejar el juego, entonces las nuevas valías para este nuevo juego esta dada por:

$$\begin{array}{ll} \upsilon^{ENSC}_{\{1,2\}}(\{1\}) = 4/3 & \\ & \upsilon^{ENSC}_{\{1,2\}}(\{1,2\}) = 16/3 \\ \upsilon^{ENSC}_{\{1,2\}}(\{2\}) = 16/3 & \end{array}$$

Aplicando la solución 3.1.4 de para este nuevo juego obtenemos

$$ENSC(\upsilon^{ENSC}_{S}) = (2/3,\ 14/3).$$

Notemos que ambas soluciones son consistentes con respecto a la solución $ENSC$.

Comentarios finales

En este trabajo se estudiaron diversas soluciones de juegos cooperativos con utilidad transferible en el contexto de juegos reducidos. Se propusieron definiciones de juegos reducidos para la solución de división de excesos(valor-CIS) y la solución dual de ésta (valor-$ENSC$). Además se caracterizaron ambas soluciones utilizando como referencia los axiomas de consistencia y solución estándar para juegos de dos jugadores.

Algunas de estas soluciones ya habían sido estudiadas en otros trabajos y lo que se proponen son nuevos juegos reducidos para diversas situaciones donde las soluciones coinciden con la solución del juego original respecto a la situación planteada para el valor- CIS y el valor-$ENSC$. Notemos que las soluciones estudiadas en este trabajo sólo dependen de los jugadores que no abandonaron el juego, es decir, para coaliciones de tamaño $n - s$ y no se restringe solo al caso de que sea un único jugador el que sale del juego, incluso el juego depende de las aportaciones que obtuvieron al hacer coaliciones.

Aunque no hay una única manera de representar un juego reducido para una determinada solución, en este trabajo se caracterizaron con el axioma de consistencia y la propiedad de solución estándar para el juego de dos jugadores.

Bibliografía

[1] Driessen Theo S. H.. (1991), "A Survey of Consistency Propierties in Cooperative Game Theory". *Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol 33* **1**, 43–59.

[2] Hart Sergiu, Mas-colell Andreu. (1989), "Potential, Value and Consistency" *Econometrica, Vol 57* **3**, 589–614.

[3] Lehrer Ehud.(1988), "An Axiomatization of the Banzhaf Value", *International Journal of Game Theory, Vol. 17* **Issue 2**, 89–99.

[4] Ruiz Luis M..(1999),"On the Consistency of the Banzhaf Semivalue", *Sociedad de Estadística e Investigación Operativa, Vol 7* **1**, 163–168.

[5] Sánchez Pérez J.(2010),"Characterization of the Banzhaf Value using a Consistency Axiom". *CUBO, A Mathematical Journal*, **12(1)** , 01–06.

[6] Sánchez Sánchez Francisco.(1993), "Introducción a la mátematica de los juegos". *Siglo ventiuno editores* , 102–105.

[7] A. I. Sobolev, Yukihiko Funaki.(2009), "The functional equations that give the payoffs of the players in an n-person game". *In Advances in Game Theory*, 151–153.

[8] René Van Den Brink, Yukihiko Funaki.(1973), "Axiomatizations of a class of equal surplus Sharing solutions for TU-games". *Theory and Decision, Vol 67* (2009), 303–340.