UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ

Facultad de Economía

Soluciones axiomáticas para un problema de distribución de costos con consumo sin rivalidad

TESIS

que para obtener el grado de

Maestra en Economía Matemática

P R E S E N T A:

Adriana Navarro Ramos

Director de tesis:

Dr. William Olvera López

Abril, 2015. San Luis Potosí, S.L.P., México.
No. 010. Maestra en Economía Matemática.

Agradecimientos

En principio, quiero dar un sincero agradecimiento a mi asesor de tesis, el Dr. William Olvera, por su dedicación y su entrega para la elaboración de esta tesis. Su gran apoyo y orientación han sido fundamentales para lograr con éxito la conclusión de esta travesía. Gracias por siempre creer en mi y brindarme tu amistad.

Agradezco a mis padres y hermanas por su apoyo y amor incondicional todos estos años. A toda mi familia, por estar conmigo siempre, por ser el pilar fundamental de lo que soy.

A mis compañeros y amigos, Judith, Miriam, Yaritza, Brunilda, Leandro. Su grandiosa amistad me ha impulsado, no solo ha culminar este trabajo, sino a seguir buscando mi superación personal. A Gaby, quien me dio el empuje para estudiar la maestría y quien nunca ha permitido que dude de mi misma. Gracias por estar a mi lado.

Doy las gracias a todos mis profesores por sus enseñanzas. Gracias a mis sinodales, el Dr. Joss Sánchez y el Dr. Julio Macías por su tiempo y sus valiosos comentarios y sugerencias.

Finalmente, agradezco a las instituciones que han hecho posible la realización de este trabajo: a la Facultad de Economía de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí y al programa de posgrado; al Consejo de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado durante mis estudios.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Ante el escenario de un grupo de agentes que se unen en la búsqueda de un beneficio común, el encontrar una manera "justa" o "equitativa" de repartir el costo en el que incurren (o los beneficios que obtienen) tomando en cuenta todo el contexto de la situación, es uno de los factores cruciales para que la cooperación se lleve a cabo. Así, el objetivo es asociar a cada problema una *regla*, es decir, una asignación del beneficio o costo común entre los agentes involucrados.

Existen diversos enfoques o maneras de abordar el problema, entre los cuales se encuentran el *enfoque directo*, el *enfoque de teoría de juegos* y el *enfoque axiomático*. En el enfoque directo, se define una regla de manera directa por medio de una fórmula, un algoritmo o un sistema de ecuaciones que tengan un significado (o que surjan de un proceso) intuitivo. El enfoque de teoría de juegos asocia a cada problema un juego cooperativo, el cual se resuelve y la regla de asignación para el problema es la solución del juego correspondiente. Finalmente, el enfoque axiomático se basa en proponer propiedades deseables que una regla debería cumplir bajo el contexto en el que se desarrolla el problema; estas propiedades se establecen formalmente como *axiomas*, es decir, mediante expresiones matemáticas que reflejan la idea de la propiedad y finalmente se determina de manera única, si es posible, una regla que los cumpla. Si este es el caso, se dice que dichos axiomas caracterizan la solución.

El problema de asignación de costos abordado en este trabajo es una versión simplificada del siguiente problema general: considérese a un grupo finito de agentes N quienes consumen cierta cantidad de cada uno de los m bienes distintos dentro de un conjunto finito M. Entonces, cada agente tiene un vector de demanda $M_i \in \mathbb{R}^m$ donde la j-ésima entrada representa la cantidad que desea consumir el agente i del bien $j \in M$. Así, se tienen diferentes perfiles de consumo los cuales tienen asociada una función de costos. El problema consiste en distribuir el costo de la cantidad total de bienes demandados por los agentes. En la literatura existen varias soluciones propuestas a este problema. Por ejemplo, el método de precios de Aumann-Shapley que consiste en construir un juego cooperativo donde cada unidad consumida por cada uno de los agentes es considerada un jugador y la función característica refleja el costo de proveer el perfil que representa cada coalición. Al calcular el valor de Shapley a este juego, se determina un precio por cada unidad de consumo, para finalmente asignar a cada agente la suma de las unidades que consume. Entre otras propuestas de soluciones se pueden mencionar a [Moulin, 1995], [Samet & Tauman, 1982] y [Wang & Zhu, 2002].

También se han realizado estudios para el caso *discreto*, donde los agentes pueden demandar a lo más, una unidad de cada bien. El método de precios de Aumann-Shapley opera bajo el mismo razonamiento. Existen dos caracterizaciones de esta solución dadas por [Calvo & Santos, 2000] y [Sprumont, 2005]. La primera se basa en la idea de *contribuciones balanceadas* de [Myerson, 1980], mientras que Sprumount hace dos caracterizaciones para la versión discreta del problema cuando solo existe un bien y una más para un caso extendido, es decir, para cuando los agentes consumen más de un bien.

Las soluciones propuestas en este trabajo son para la versión discreta extendida pero tomando en cuenta una característica esencial: el consumo sin rivalidad. Esto es, se considera que el bien o servicio que demandan los agentes puede ser consumido por todos a la vez. Existe una solución axiomatizada en la literatura [Macias-Ponce & Olvera-Lopez, 2013] la cual se presenta de manera extensiva en el Capítulo 2. Adicionalmente, en este capítulo se presentan las nociones básicas de Teoría de Juegos Cooperativos y el planteamiento del problema de manera formal.

En el Capítulo 3 se muestran los resultados de esta tesis. El primero es una caracterización axiomática de una solución que consiste en una combinación convexa entre la solución de Macías y Olvera y la igualitaria. La siguiente es una axiomatización de la solución que propone que los agentes que no demandan nada no paguen nada y que el resto del costo se distribuya el costo por partes iguales. La tercera es otra caracterización de la anterior pero restringida a los problemas donde todos los agentes demandan al menos un servicio. La última solución tiene un enfoque de teoría de juegos: se propone un juego cooperativo de utilidad transferible que capture los costos en que incurrirían los agentes si se formaran coaliciones y solo se satisficiera la demanda de los agentes en esa coalición. Se realiza la caracterización de la solución asociada al valor de Shapley de dicho juego. También se estudian propiedades que cumplen las asignaciones propuestas, adicionales a los axiomas. Finalmente, se presentan las expresiones de dos grupos de soluciones que cumplen ciertos axiomas anteriormente utilizados.

Capítulo 2

Definiciones y nociones básicas

En este capítulo se recopilan las definiciones y conceptos básicos de la teoría utilizada, tanto para el planteamiento del problema que se va a abordar como la utilizada en la caracterización de las soluciones.

2.1. Juegos cooperativos

Un *juego cooperativo de utilidad transferible* (o simplemente juego) es un par (N, v) donde $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, con $n \in \mathbb{N}$ representa el conjunto de jugadores y $v : 2^N \to \mathbb{R}$ es la *función característica* del juego asignada a cada coalición $S \subseteq N$, con $v(\emptyset) = 0$. El valor de la función característica representa el beneficio (o el costo) que obtiene una coalición. Normalmente, las propiedades que tenga la función característica v correspondiente a un juego (N, v) son las que cualifican y dan nombre al juego. Para fines de simplificación de la notación, se denotará la cardinalidad de un conjunto por la letra minúscula correspondiente (por ejemplo $|N| = n, |Q| = q$, etc).

El espacio de funciones características sobre N, denotado por

$$G_N = \{v : 2^N \to \mathbb{R} \mid v(\emptyset) = 0\},$$

es un espacio vectorial sobre el campo de los reales, con la suma y el producto por un escalar definidos como sigue:

- $(v_1 + v_2)(S) = v_1(S) + v_2(S)$, para cualesquiera $v_1, v_2 \in G_N$ y para todo $S \subseteq N$
- $(\alpha v)(S) = \alpha v(S)$, para todo $v \in G_N$, todo $S \subseteq N$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$

Una *asignación* es un vector $x \in \mathbb{R}^n$ donde x_i representa la cantidad otorgada al jugador i. El conjunto de *imputaciones* $I(N, v)$ del juego (N, v) se define como

$$I(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x(N) = v(N) \text{ y } x_i \geq v(\{i\}), \forall i \in N\}$$

donde $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$, $\forall S \subseteq N$. Este conjunto agrupa las asignaciones que son *eficientes*, es decir, que reparten exactamente $v(N)$ entre todos los agentes y donde la asignación correspondiente a cada jugador es al menos lo que él obtendría por cuenta propia.

Cuando la función característica representa beneficios, una imputación es deseable ya que en ésta, un jugador sale más beneficiado con la cooperación que actuando solo. Sin embargo, si se habla de costos, una imputación no es deseable ya que todos los jugadores tendrían que pagar una cantidad mayor a la que pagarían individualmente, por lo que no se estaría promoviendo la cooperación. Bajo este razonamiento, se define el conjunto de *anti-imputaciones* de (N, v) como sigue:

$$AI(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x(N) = v(N) \text{ y } x_i \leq v(\{i\}), \forall i \in N\}.$$

El *núcleo* de (N, v) consiste en todas las imputaciones donde cualquier coalición $S \subseteq N$ sale beneficiada con la cooperación, ya que lo que le asigna la imputación es al menos su valía $v(S)$. Esto es:

$$C(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x(N) = v(N) \text{ y } x(S) \geq v(S), \forall S \subseteq N\}.$$

Similarmente, la contraparte del núcleo es el *anti-núcleo*, que consiste en las asignaciones eficientes tales que cada coalición paga a lo más su valía:

$$AC(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x(N) = v(N) \text{ y } x(S) \leq v(S), \forall S \subseteq N\}.$$

Un juego (N, v) puede tener las siguientes propiedades:

- *No decreciente*: La valía de una coalición que está contenida en otra es a lo más la valía de la segunda. Esto es, si $A \subseteq B \subseteq N$, entonces $v(A) \leq v(B)$.

- *Superaditivo*: Para dos coaliciones disjuntas, la valía de juntarse en una coalición más grande es al menos la valía de mantenerse separadas. Esto es, para todo $S, T \subseteq N$, con $S \cap T = \emptyset$ se cumple que

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$$

- *Convexo*: La contribución marginal de un jugador a una coalición grande es mayor que su contribución marginal a una coalición más pequeña. Es decir, para todo $i \in N$, si $S \subseteq T \subseteq N \backslash \{i\}$ se tiene que

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T)$$

De manera similar a las definiciones de imputación y núcleo, se define la contraparte de algunas propiedades:

- *Subaditivo*: Para todo $S, T \subseteq N$, con $S \cap T = \emptyset$ se cumple que

$$v(S) + v(T) \geq v(S \cup T)$$

- *Cóncavo*: Para todo $i \in N$ y todo $S \subseteq T \subseteq N \backslash \{i\}$ se tiene que

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq v(T \cup \{i\}) - v(T)$$

Una *solución* para el juego (N, v) es una función

$$\phi : G_N \to \mathbb{R}^n$$

que recibe como información la función característica del juego y arroja una asignación. La i-ésima coordenada de $\phi(v)$, $\phi_i(v)$, representa la cantidad que le corresponde recibir (o pagar) al jugador i según la solución ϕ.

El *valor de Shapley* es una de las soluciones más conocidas en teoría de juegos. A continuación se presenta una caracterización de esta solución, así como algunas propiedades interesantes que cumple.

Axioma 1 (Eficiencia)**.** *Una solución $\phi : G_N \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de eficiencia si*

$$\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$$

para todo $v \in G_N$.

Las soluciones que son eficientes reparten en su totalidad la valía de la gran coalición N. Por ejemplo, tanto las imputaciones como los elementos del núcleo son eficientes.

Axioma 2 (Linealidad)**.** *Una solución $\phi : G_N \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de linealidad si*

- $\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2)$
- $\phi(\alpha v_1) = \alpha \phi(v_1)$

para todo $v_1, v_2 \in G_N$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Este axioma indica que la solución es una función lineal bajo el espacio vectorial G_N.

Sea $S_n = \{\pi : N \to N \mid \pi \text{ es biyectiva}\}$ el conjunto de permutaciones del conjunto de jugadores. Este conjunto actúa sobre $2^N \backslash \emptyset$ y sobre $\mathbb{R}^n$ como sigue:

- $\pi(S) = \{\pi(i) \mid i \in S\}$, para todo $S \subseteq N$
- $\pi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_{\pi^{-1}(1)}, x_{\pi^{-1}(2)}, \ldots, x_{\pi^{-1}(n)})$, para todo $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Además, para cada $\pi \in S_n$ y $v \in G_N$ se define el juego $\pi \cdot v$ como

$$(\pi \cdot v)(S) = v(\pi^{-1}S), \quad \forall S \subseteq N.$$

Axioma 3 (Simetría). *Una solución $\phi : G_N \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de simetría si*

$$\phi(\pi \cdot v) = \pi\phi(v)$$

para todo $v \in G_N$ y todo $\pi \in S_n$.

Este axioma simplemente pide que los nombres o papeles de los jugadores no tengan un rol determinante en la solución, es decir, si los jugadores intercambian de cierta forma sus lugares, la solución intercambiará de la misma manera sus asignaciones. En particular, una solución que cumple el axioma de simetría otorga la misma asignación a los agentes que sean tratados idénticamente por la función característica.

Definición 1. Un jugador $i \in N$ se dice *nulo* en el juego (N, v) si

$$v(S \cup \{i\}) = v(S), \quad \forall S \subseteq N\backslash\{i\}.$$

Un jugador nulo es aquel que no contribuye a cualquier coalición. Una solución que cumple el siguiente axioma, asigna cero a este tipo de jugadores.

Axioma 4 (Nulidad). *Una solución $\phi : G_N \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de nulidad si*

$$\phi_i(v) = 0$$

para todo jugador nulo i en (N, v), con $v \in G_N$.

Teorema 1 (Shapley, 1953). *Existe una única solución $Sh : G_N \to \mathbb{R}^n$ que satisface los axiomas de eficiencia, linealidad, simetría y nulidad. Más aún, tiene la siguiente formulación:*

$$Sh_i(v) = \sum_{\substack{S \ni i \\ S \subseteq N}} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}[v(S) - v(S\backslash\{i\})], \quad \forall i \in N.$$

Esta solución otorga a cada jugador el valor esperado del siguiente proceso: con distribución uniforme discreta, se elige primero la cardinalidad de una coalición para después elegir una coalición con esa cardinalidad que contenga al jugador i y finalmente se le otorga al jugador su contribución marginal a esa coalición. El valor de Shapley también se puede plantear si se consideran las coaliciones que no contienen al jugador i y se le otorga su contribución marginal ponderada al unirse a cada una de estas coaliciones bajo el mismo proceso planteado anteriormente, resultando en la siguiente expresión:

$$Sh_i(v) = \sum_{\substack{S \not\ni i \\ S \subseteq N}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v(S \cup \{i\}) - v(S)], \quad \forall i \in N.$$

El valor de Shapley es una de las soluciones más aceptadas debido a que siempre existe y además, es única bajo estos axiomas. Adicionalmente, cumple las siguientes propiedades:

Propiedad 1. *Si (N, v) es no decreciente, entonces*

$$Sh_i(v) \geq 0, \quad \forall i \in N.$$

Propiedad 2. *Si (N, v) es superaditivo, entonces $Sh(v) \in I(N, v)$. Si es subaditivo, $Sh(v) \in AI(N, v)$.*

Propiedad 3. *Si (N, v) es convexo, entonces $Sh(v) \in C(N, v)$. Si es cóncavo, $Sh(v) \in AC(N, v)$.*

2.2. Planteamiento del problema

Consideremos la siguiente situación, como motivación del problema: En un fraccionamiento privado, el servicio público de recolección de basura solo acude un día a la semana, lo que provoca inconformidad entre algunos de los habitantes. Se tiene la posibilidad de contratar un servicio privado. La empresa que proporciona el servicio puede hacer el recorrido una vez al día, de lunes a jueves y sus costos no dependen de la cantidad de casas que debe atender, sino solo de los días que debe hacer recorrido en el fraccionamiento. Entonces, es razonable pensar que los habitantes se pongan de acuerdo y contraten el servicio para que acuda todos los días. Así, se cubren las necesidades de todos y se incurre en un solo costo. Ahora, el problema es encontrar un método para repartir este costo entre los habitantes.

El problema abordado consiste en un conjunto finito de agentes $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ y un conjunto finito de servicios $Q = \{1, 2, \ldots, q\}$, con $n, q \in \mathbb{N}$. De aquí en adelante, se considera que N y Q están dados y son fijos. Cada agente $i \in N$ requiere ciertos servicios en Q y estos requerimientos son denotados por un *conjunto demanda* $M_i \subseteq Q$; el vector $M = (M_1, M_2, \ldots, M_n)$ es el *vector de demandas*. Se considera que no hay rivalidad por los servicios, es decir, varios agentes pueden demandar el mismo servicio ya que éste puede ser proporcionado a todo agente que lo requiera. Cabe notar que un agente $i \in N$ puede no requerir ningún servicio y por lo tanto $M_i = \emptyset$. Se hace el supuesto de que todos los servicios son requeridos por al menos un agente. Esta condición restringe el conjunto los posibles vectores de demandas al conjunto

$$E(Q) = \{M \in 2^Q \times \cdots \times 2^Q \mid \forall j \in Q, \exists i \in N \text{ con } j \in M_i\}.$$

Para un vector de servicios $M \in E(Q)$, se define para cada $S \subseteq N$ y $T \in Q$ el conjunto

$$S_T(M) = \{i \in S \mid \exists j \in T \text{ tal que } j \in M_i\}$$

que representa el subconjunto de agentes en S que requieren algún servicio en T, de acuerdo al vector de servicios M.

Además, existe una *función de costos* $c : 2^Q \to \mathbb{R}$, con $c(\emptyset) = 0$, que asigna un número real (es decir, el costo asociado) a cada posible subconjunto de servicios de Q. Dado un conjunto de servicios Q, el conjunto de todas las posibles funciones de costos se denota por

$$G_Q = \{c : 2^Q \to \mathbb{R} \mid c(\emptyset) = 0\},$$

el cual es un espacio vectorial real con la suma y el producto por un escalar definidos de la misma manera que en el espacio de funciones características.

Formalmente, un *problema de reparto de costos discretos* (o problema, por simplicidad) es un par (c, M), con $c \in G_Q$ y $M \in E(Q)$. Una *solución* es una función

$$\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$$

donde la i-ésima entrada de la solución, $\varphi_i(c, M)$, indica la cantidad que debe pagar el agente $i \in N$ por el conjunto de servicios que requiere, de acuerdo a la función de costos c y el vector de demandas M.

Ejemplo 1. *Considere que en la situación planteada al inicio de la sección, la empresa tiene la siguiente función de costos:*

$$\begin{array}{rrr}
c(\{1\}) = 30 & c(\{1,3\}) = 41 & c(\{1,2,3\}) = 50 \\
c(\{2\}) = 28 & c(\{1,4\}) = 36 & c(\{1,2,4\}) = 55 \\
c(\{3\}) = 25 & c(\{2,3\}) = 48 & c(\{1,3,4\}) = 53 \\
c(\{4\}) = 26 & c(\{2,4\}) = 39 & c(\{2,3,4\}) = 60 \\
c(\{1,2\}) = 35 & c(\{3,4\}) = 42 & c(\{1,2,3,4\}) = 64
\end{array}$$

Hay 3 casas en la privada: la primera casa quiere que se recoja la basura los días lunes y jueves; la segunda casa, el lunes, martes y jueves y la tercera, el martes, miércoles y jueves. Siguiendo la notación anterior, se tiene $N = \{1, 2, 3\}$, $Q = \{1, 2, 3, 4\}$ *y*

$$M_1 = \{1, 4\} \quad M_2 = \{1, 2, 4\} \quad M_3 = \{2, 3, 4\}.$$

Nótese que el problema está bien definido ya que todos los días son demandados por al *menos un agente. Además, es más conveniente para los habitantes contratar el servicio de lunes a jueves y repartirse el costo final que contratar individualmente, ya que incurrirían en un gasto mayor.*

2.3. Antecedentes

A continuación se estudiará la única solución que se encuentra en la literatura para este problema en específico. Se presentan los axiomas que la caracterizan y su interpretación. Para más detalles sobre la demostración de la unicidad y existencia de esta solución, se puede consultar [Macias-Ponce & Olvera-Lopez, 2013].

Axioma 5 (Aditividad)**.** *Una solución* $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ *satisface el axioma de aditividad si*

$$\varphi(c_1 + c_2, M) = \varphi(c_1, M) + \varphi(c_2, M)$$

para todo c_1*,* $c_2 \in G_Q$*.*

Supóngase, por ejemplo, que el costo de los servicios se puede dividir en meses. Entonces sería deseable que el pago que haga un agente en el problema original sea el mismo que si se aplica la solución en cada uno de los meses para luego sumar los montos que le corresponden en cada periodo.

Axioma 6 (Eficiencia)**.** *Una solución* $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ *satisface el axioma de eficiencia si*

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(c, M) = c(Q)$$

para todo problema (c, M)*.*

Una solución es eficiente si el costo de contratar el conjunto total de servicios se reparte en su totalidad entre los agentes.

Definición 2. El agente $i \in N$ se dice *agente dummy* en un vector de demandas $M \in E(Q)$, si $M_i = \emptyset$.

Axioma 7 (Agente *dummy*)**.** *Una solución* $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ *satisface el axioma de agente dummy si*

$$\varphi_i(c, M) = 0$$

para todo problema (c, M) *y para cada agente dummy* $i \in N$ *en* M*.*

Una solución que cumple con este axioma otorga un pago de cero a los agentes que no requieren ningún servicio.

Definición 3. Dado $S \subseteq Q$, se define el *problema S-reducido* $(c|_{Q\setminus S}, M|_{Q\setminus S}) \in G_{Q\setminus S} \times E(Q\setminus S)$ como:

$$(c|_{Q\setminus S})(T) = c(T), \quad \forall T \subseteq Q\setminus S$$
$$(M|_{Q\setminus S})_i = M_i \cap (Q\setminus S), \quad \forall i \in N.$$

En un problema S-reducido, los servicios en S son eliminados, tanto de la función de costos como del vector de demandas.

Definición 4. Dado $(c, M) \in G_Q \times E(Q)$, el conjunto de servicios $S \subseteq Q$ es *gratuito* en c si:

$$c(T) = 0, \quad \forall T \subseteq S$$
$$c(T \cup P) = c(P), \quad \forall T \subseteq S \text{ y } \forall P \subseteq Q\setminus S.$$

Axioma 8 (Reducción)**.** *Una solución $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de reducción si*

$$\varphi(c, M) = \varphi(c|_{Q\setminus S}, M|_{Q\setminus S})$$

para todo $S \subseteq Q$ gratuito en c, con $(c, M) \in G_Q \times E(Q)$.

Este axioma nos dice que una solución no debería de verse afectada si se reduce el problema original, descartando los servicios gratuitos.

Definición 5. Dos agentes $i, j \in N$ se dicen *equivalentes* en $M \in E(Q)$ si $M_i = M_j$.

Axioma 9 (Agentes equivalentes)**.** *Una solución $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de agentes equivalentes si*

$$\varphi_i(c, M) = \varphi_j(c, M)$$

para cada par de agentes equivalentes $i, j \in N$ en M, con $(c, M) \in G_Q \times E(Q)$.

Si dos agentes son equivalentes, demandan exactamente lo mismo, por lo que una solución que satisface el axioma anterior asigna la misma cantidad a pagar a ambos.

Definición 6. Dos servicios $h, k \in Q$ son *sustitutos* en $c \in G_Q$, si para cada $S \subseteq Q\setminus\{h, k\}$ se cumple $c(S \cup \{h\}) = c(S \cup \{k\})$. Un problema (c, M) es *sustituto* si todos sus servicios son sustitutos en M.

Axioma 10 (Problema sustituto trivial)**.** *Una solución $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de problema sustituto trivial si*

$$\varphi_i(c, M) = 0, \quad \forall i \in N$$

para todo problema sustituto (c, M), con $c(Q) = 0$.

En un problema sustituto, todos los servicios son indistinguibles entre sí con respecto a la función de costos, por lo que se puede considerar que todos contribuyen de igual manera al costo total. El axioma anterior indica que si se tiene un problema sustituto, donde además el costo total es cero, entonces todos los agentes pagan cero.

Teorema 2 (Macias-Ponce & Olvera-Lopez, 2013)**.** *Existe una única solución $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ que satisface los axiomas de aditividad, eficiencia, agente dummy, reducción, agentes equivalentes y problema sustituto trivial. Más aún, tiene la siguiente formulación:*

$$\varphi_i(c, M) = \sum_{j \in M_i} \frac{Sh_j(Q, c)}{|N_{\{j\}}(M)|}, \quad \forall i \in N, \tag{2.1}$$

donde $Sh_j(Q, c)$ es el valor de Shapley del juego determinado por (Q, c), para todo $j \in Q$.

Esta solución consiste en dos pasos: primero, se calcula el precio de cada servicio con respecto a c considerando cuánto contribuye individualmente al costo total mediante el valor de Shapley en el juego (Q, c); después se distribuye este precio de manera igualitaria entre los agentes que requieren el servicio. Sumando sobre cada servicio en su conjunto demanda, se obtiene la cantidad a pagar por cada agente según la solución (2.1).

Por ejemplo, considérese el problema planteado en el Ejemplo 1, calculando el valor del Shapley del juego cooperativo (Q, c) se tiene

$$Sh(Q, c) = (13\tfrac{2}{3}, 17, 16\tfrac{5}{6}, 16\tfrac{1}{2}).$$

Este vector representa los precios de cada día que se provee el servicio, considerando toda la información de costos. Nótese que este precio es menor que el costo de contratar cada día por separado. Calculando la solución (2.1) se obtiene

$$\varphi(c, M) = (12\tfrac{1}{3}, 20\tfrac{5}{6}, 30\tfrac{5}{6}).$$

Nuevamente, se puede observar que el pago que debe realizar cada agente es menor que en el incurrirían si cada uno contratara los servicios que requiere por separado.

Capítulo 3

Resultados

En este capítulo se caracterizan tres nuevas propuestas de soluciones para el problema de reparto de costos discretos y se estudian diferentes propiedades que éstas satisfacen. Adicionalmente, se presenta un trabajo en proceso sobre una familia de soluciones.

3.1. Caracterizaciones

Existen ciertas situaciones donde sería razonable pedir a los agentes *dummy* cierta cantidad para contribuir en el costo total. Supóngase en el ejemplo del fraccionamiento privado, que el servicio incluye la recolección de la basura en las áreas comunitarias. Por esta razón, se les podría pedir a todos los agentes una cuota mínima de cooperación, incluyendo a los agentes que no requieren nada. El siguiente axioma establece lo anterior.

Axioma 11 (Pago *dummy*)**.** *Una solución $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de pago dummy con respecto a $\alpha \in \left(0, \frac{1}{n}\right]$ si*

$$\varphi_i(c, M) = \alpha c(Q)$$

para todo $i \in N$ agente dummy en M, con $(c, M) \in G_Q \times E(Q)$.

Teorema 3. *Para todo $\alpha \in \left(0, \frac{1}{n}\right]$, existe una única solución $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ que satisface los axiomas de aditividad, eficiencia, pago dummy con respecto a α, agentes equivalentes, reducción y problema sustituto trivial. Más aún, tiene la siguiente formulación:*

$$\varphi_i(c, M) = \alpha c(Q) + (1 - \alpha n) \sum_{j \in M_i} \frac{Sh_j(Q, c)}{|N_{\{j\}}(M)|}, \quad \forall i \in N. \tag{3.1}$$

Demostración. Primero se demostrará la unicidad de la solución. Como se muestra en [Macias-Ponce & Olvera-Lopez, 2013] definiendo para cada $S \subseteq Q$, los números reales

$\delta_\emptyset = 0$ y
$$\delta_S = c(S) - \sum_{T \subsetneq S} \delta_T,$$
cualquier función de costos $c \in G_Q$ puede escribirse como:
$$c = \sum_{S \subseteq Q} \delta_S u_S$$
donde cada $u_S \in G_Q$ son las *funciones de costos de unanimidad* definidas como:
$$u_S(T) = \begin{cases} 1, \text{ si } S \subseteq T \\ 0, \text{ otro caso.} \end{cases}$$

Sea $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ una solución que satisface los axiomas. Entonces, por el axioma de aditividad, se tiene
$$\varphi_i(c, M) = \sum_{S \subseteq Q} \varphi_i(\delta_S u_S, M).$$

Basta demostrar la unicidad de la solución en cada función de costos de unanimidad. Dado $S \subseteq Q$, los servicios en $Q \backslash S$ son gratuitos en u_S, ya que $u_S(T) = 0$, $\forall T \subseteq Q \backslash S$ y para todo $P \subseteq Q \backslash (Q \backslash S) = S$ se tienen dos casos:

- Si $P \subset S \Rightarrow S \nsubseteq T \cup P \Rightarrow u_S(T \cup P) = 0 = u_S(P)$
- Si $P = S \Rightarrow S \subseteq T \cup P \Rightarrow u_S(T \cup P) = 1 = u_S(S) = u_S(P)$.

Entonces, por el axioma de reducción
$$\varphi_i(\delta_S u_S, M) = \varphi_i(\delta_S u_S|_S, M|_S).$$

Para todo $j \in Q$ y $r \in \mathbb{R}$, se definen dos funciones de costos $c_r^j, \widehat{c}_r \in G_Q$ como:
$$c_r^j(T) = \begin{cases} r, \text{ si } j \in T; \\ 0, \text{ otro caso,} \end{cases} \qquad \widehat{c}_r(T) = \begin{cases} rt, \text{ si } T \neq Q; \\ 0, \quad \text{otro caso,} \end{cases}$$
para todo $T \subseteq Q$. Entonces, tomando $r = 1/s$, para cada $S \subseteq Q$ se puede hacer la siguiente descomposición:
$$\delta_S u_S|_S = \sum_{j \in S} \delta_S c_{1/s}^j - \delta_S \widehat{c}_{1/s}$$
con $c_{1/s}^j, \widehat{c}_{1/s} \in G_S$ para todo $j \in S$. Nuevamente, por el axioma de aditividad
$$\varphi_i(\delta_S u_S|_S, M|_S) = \sum_{j \in S} \varphi_i(\delta_S c_{1/s}^j, M|_S) - \varphi_i(\delta_S \widehat{c}_{1/s}, M|_S).$$

Nótese que $(\delta_S\widehat{c}_{1/s}, M|_S)$ es un problema sustituto, ya que para cualesquiera $h,k \in S$ y para todo $T \subseteq S\backslash\{h,k\}$

$$\delta_S\widehat{c}_{1/s}(T \cup \{h\}) = \frac{t+1}{s} = \delta_S\widehat{c}_{1/s}(T \cup \{k\}).$$

Además, $\widehat{c}_{1/s}(S) = 0$; entonces, por el axioma del problema sustituto trivial $\varphi_i(\widehat{c}_{1/s}(S), M|_S) = 0$, $\forall i \in N$. Adicionalmente, veamos que en cada problema $(\delta_S c^j_{1/s}, M|_S)$, los servicios $S\backslash\{j\}$ son gratuitos: para todo $T \subseteq S\backslash\{j\}$, $c^j_{1/s}(T) = 0$ (ya que $j \notin T$). Entonces por el axioma de reducción

$$\varphi_i(\delta_S u_S|_S, M|_S) = \sum_{j\in S} \varphi_i(\delta_S c^j_{1/s}|_{\{j\}}, M|_{\{j\}}).$$

El problema $(\delta_S c^j_{1/s}|_{\{j\}}, M|_{\{j\}})$ consiste en un problema discreto de servicios con un solo servicio $\{j\}$. En este problema existen solo 2 tipos de agentes, los que demandan el servicio y los que no. La cantidad de agentes que requieren j es $|N_{\{j\}}(M)|$ y los que no, $n-|N_{\{j\}}(M)|$. Los segundos son agentes *dummy*, por lo que les corresponde pagar a cada uno $\frac{\alpha\delta_S}{s}$. Ya que la solución es eficiente, a los agentes restantes se les debe distribuir $\delta_S c^j_{1/s}(\{j\} - (n - |N_{\{j\}}(M)|)\frac{\alpha\delta_S}{s} = \frac{\delta_S}{s} - (n-|N_{\{j\}}(M)|)\frac{\alpha\delta_S}{s}$. Además los agentes son equivalentes, por lo que deben pagar lo mismo. Por lo tanto,

$$\varphi_i(\delta_S c^j_{1/s}|_{\{j\}}, M|_{\{j\}}) = \begin{cases} \dfrac{\delta_S}{s}\left(\alpha + \dfrac{1-\alpha n}{|N_{\{j\}}(M)|}\right), \text{ si } j \in M_i \\ \dfrac{\alpha\delta_S}{s}, \quad \text{otro caso.} \end{cases}$$

Así, se ha determinado la solución de manera única en cada problema reducido. Esto demuestra la unicidad de la solución φ. A continuación, se demuestra la existencia comprobando que la solución (3.1) cumple los axiomas. Sean $c, c_1, c_2 \in G_Q$ y $M \in E(Q)$:

- Aditividad.

$$\varphi_i(c_1+c_2, M) = \alpha(c_1+c_2)(Q) + (1-\alpha n)\sum_{j\in M_i}\frac{Sh_j(c_1+c_2,Q)}{|N_{\{j\}}(M)|}, \quad \forall i \in N.$$

Recordando que el valor de Shapley es aditivo en juegos cooperativos, se tiene

$$\varphi_i(c_1+c_2, M) = \alpha c_1(Q) + \alpha c_2(Q) + (1-\alpha n)\sum_{j\in M_i}\left(\frac{Sh_j(c_1,Q)}{|N_{\{j\}}(M)|} + \frac{Sh_j(c_2,Q)}{|N_{\{j\}}(M)|}\right)$$

$$= \alpha c_1(Q) + (1-\alpha n)\sum_{j\in M_i}\frac{Sh_j(c_1,Q)}{|N_{\{j\}}(M)|} + \alpha c_2(Q) + (1-\alpha n)\sum_{j\in M_i}\frac{Sh_j(c_2,Q)}{|N_{\{j\}}(M)|}$$
$$= \varphi_i(c_1, M) + \varphi_i(c_2, M), \quad \forall i \in N.$$

- Eficiencia.

$$\begin{aligned}\sum_{i\in N}\varphi_i(c,M) &= \sum_{i\in N}\left[\alpha c(Q)+(1-\alpha n)\sum_{j\in M_i}\frac{Sh_j(c,Q)}{|N_{\{j\}}(M)|}\right]\\ &= \alpha n c(Q)+(1-\alpha n)\sum_{i\in N}\sum_{j\in M_i}\frac{Sh_j(c,Q)}{|N_{\{j\}}(M)|}\end{aligned}$$

  Ya que la solución (2.1) es eficiente, $\sum_{i\in N}\sum_{j\in M_i}\frac{Sh_j(c,Q)}{|N_{\{j\}}(M)|}=c(Q)$, entonces

$$\sum_{i\in N}\varphi_i(c,M)=\alpha n c(Q)+(1-\alpha n)c(Q)=c(Q).$$

- Reducción. Sea $S\subseteq Q$ gratuito en (c,M), entonces

$$\varphi_i(c,M)=\alpha c(Q)+(1-\alpha n)\left[\sum_{j\in(M_i\cap S)}\frac{Sh_j(c,Q)}{|N_{\{j\}}(M)|}+\sum_{j\in(M_i\setminus S)}\frac{Sh_j(c,Q)}{|N_{\{j\}}(M)|}\right]$$

  Nótese que $j\in S$ es nulo en el juego (Q,c), por lo tanto $Sh_j(Q,c)=0$ y

$$\varphi_i(c,M)=\alpha c(Q)+(1-\alpha n)\sum_{j\in(M_i\setminus S)}\frac{Sh_j(c,Q)}{|N_{\{j\}}(M)|}$$

  Además,

$$\varphi_i(c|_{Q\setminus S},M|_{Q\setminus S})=\alpha c(Q\setminus S)+(1-\alpha n)\sum_{j\in(M_i\setminus S)}\frac{Sh_j(c,Q)}{|N_{\{j\}}(M)|}$$

  Recordando que $c(Q)=c(Q\setminus S)$ se tiene que $\varphi_i(c|_{Q\setminus S},M|_{Q\setminus S})=\varphi_i(c,M),\forall i\in N$.

- Problema sustituto trivial. Supóngase que (c,M) es un problema sustituto con $c(Q)=0$. Todos los servicios son simétricos en el juego (Q,c) por lo que $Sh_j(Q,c)=0$, para todo $j\in Q$. Así, $\varphi_i(c,M)=0$, $\forall i\in N$.

Los axiomas de pago *dummy* y agentes equivalentes son inmediatos. Con esto, queda demostrada la existencia. ■

Esta solución puede ser vista como una combinación convexa entre la solución (2.1) y la igualitaria, es decir, aquella donde el costo total se divide por igual entre todos los agentes.

La idea tras esta caracterización es que todos los agentes paguen una cuota mínima; la solución (3.1) cumple esta propiedad bajo cierto tipo de función de costos: las funciones de costos no decrecientes. En este tipo de problemas, es razonable pensar que el costo de un conjunto de servicios se va incrementando entre más servicios se demandan.

Propiedad 4 (α-cuota mínima)**.** *Para un* $\alpha \in \left(0, \frac{1}{n}\right]$, *una solución* $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ *satisface* α*-cuota mínima si* $\varphi_i(c, M) \geq \alpha c(Q)$ *para todo* $i \in N$, *cuando la función de costos* c *es no decreciente.*

La solución (3.1) cumple con esta propiedad. En la sección siguiente se presenta la demostración.

Ejemplo 2. *Considere la misma función de costos del ejemplo anterior, con los mismos conjuntos demanda pero ahora existe otro agente cuya demanda es nula. Entonces se tiene el vector de demandas*

$$M = (\{1,4\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \emptyset)$$

y supongamos que la cuota que se les pedirá a los agentes es un $10\,\%$ *del costo total, es decir,* $\alpha = 1/10$. *Entonces, calculando (3.1) se tiene*

$$\varphi(c, M) = (13\tfrac{4}{5}, 18\tfrac{9}{10}, 24\tfrac{9}{10}, 6\tfrac{2}{5}).$$

Se puede observar que el agente dummy paga exactamente $\alpha c(Q) = 32/5$.

Las siguientes soluciones son básicas, las que intuitivamente pensamos al momento de dar solución a un problema de distribución de costos en la vida cotidiana: repartir de manera igualitaria el costo total. La primera de ellas considera a los agentes que no demandan nada y no les asigna pago alguno, mientras que la segunda es una restricción de la primera.

Axioma 12 (Irrelevancia ante costo nulo)**.** *Una solución* $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ *satisface el axioma de irrelevancia ante costo nulo si*

$$\varphi_i(c, M) = 0, \quad \forall i \in N$$

para todo problema (c, M), *con* $c(Q) = 0$.

Este axioma pide que si el costo a repartir es cero, nadie pague nada, sin importar el tipo de agente o el vector de demandas. La idea es relajar el axioma de problema sustituto trivial y no exigir que necesariamente los servicios sean sustitutos para que nadie pague nada.

Definición 7. Dos agentes $i, j \in N$ tienen *costos equivalentes* en $(c, M) \in G_Q \times E(Q)$, si $c(M_i) = c(M_j)$.

Axioma 13 (Costos equivalentes)**.** *Una solución* $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ *satisface el axioma* *de costos equivalentes si*

$$\varphi_i(c, M) = \varphi_j(c, M)$$

para cada par de agentes $i, j \in N$ con costos equivalentes en M tales que $M_i, M_j \neq \emptyset$, con $(c, M) \in G_Q \times E(Q)$.

Este axioma simplemente indica que si dos agentes no *dummy* tienen conjuntos demanda cuyo costo es el mismo, la solución les otorga el mismo pago.

Teorema 4. *Existe una única solución $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ que satisface los axiomas de aditividad, eficiencia, agente dummy, irrelevancia ante costo nulo y costos equivalentes. Más aún, tiene la siguiente formulación*

$$\varphi_i(c, M) = \begin{cases} \dfrac{c(Q)}{n-d}, & \text{si } M_i \neq \emptyset \\ 0, & \text{otro caso,} \end{cases} \tag{3.2}$$

donde $d = |D_M|$ con $D_M = \{j \in N \mid M_j = \emptyset\}$.

Demostración. La existencia es inmediata, ya que es fácil ver que la solución (3.2) cumple los cuatro axiomas. A continuación se demuestra la unicidad. Definiendo, para cada $S \subseteq Q$, los números reales $\delta^*_\emptyset = 0$ y

$$\delta^*_S = c(S) - \sum_{T \supsetneq S} \delta^*_T,$$

cualquier función de costos $c \in G_Q$ puede escribirse como:

$$c = \sum_{S \subseteq Q} \delta^*_S u^*_S$$

donde cada $u^*_S \in G_Q$ se define como:

$$u^*_S(T) = \begin{cases} 1, \text{ si } T \subseteq S \\ 0, \text{ otro caso.} \end{cases}$$

para todo $T \subseteq Q$. El conjunto de juegos u^*_S es otra base para funciones de costo y se conoce como *base dual*.

Sea $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ una solución que satisface los axiomas. Entonces, por el axioma de aditividad, se tiene

$$\varphi_i(c, M) = \sum_{S \subseteq Q} \varphi_i(\delta^*_S u^*_S, M).$$

Para todo $S \subsetneq Q$, $\delta^*_S u{*}_S(Q) = 0$, entonces por el axioma de irrelevancia ante costo nulo $\varphi_i(\delta^*_S u^*_S, M) = 0$, $\forall i \in N$. Así, $\varphi_i(c, M) = \varphi_i(\delta^*_Q u^*_Q, M) = \varphi_i(c(Q) u^*_Q, M)$. En el problema

$(c(Q)u_Q^*, M)$ hay dos grupos de agentes con costos equivalentes, los agentes *dummy* y los $i \in N$ tales que $M_i \neq \emptyset$; los primeros pagan cero, por el axioma de agente *dummy* mientras que los $n - d$ restantes deben repartirse de manera igualitaria $c(Q)u_Q^*(Q) = c(Q)$. ■

Ahora, consideremos los problemas donde todos los agentes demandan al menos un servicio. Es decir, solo se consideran vectores de demandas en el conjunto

$$\overline{E}(Q) = \{M \in E(Q) \mid M_i \neq \emptyset, \forall i \in N\}.$$

Teorema 5. *Existe una única solución $\varphi : G_Q \times \overline{E}(Q) \to \mathbb{R}^n$ que satisface los axiomas de aditividad, eficiencia, irrelevancia ante costo nulo y costos equivalentes. Más aún, tiene la siguiente formulación:*

$$\varphi_i(c, M) = \frac{c(Q)}{n}, \quad \forall i \in N. \tag{3.3}$$

Demostración. Como en el caso de la solución (3.2), la existencia es inmediata. Para demostrar la unicidad se sigue de la misma manera que la demostración de la solución anterior. Recordemos que una solución que cumple con los axiomas de aditividad, eficiencia e irrelevancia ante costo nulo se reduce a la expresión:

$$\varphi_i(c, M) = \varphi_i(c(Q)u_Q^*, M).$$

Ahora, debido a que $M \in \overline{E}(Q)$, en el problema $(c(Q)u_Q^*, M)$ todos los agentes tienen costos equivalentes y por lo tanto se reparten $c(Q)u_Q^*(Q) = c(Q)$ de manera igualitaria, lo que nos da la expresión de la solución (3.3). ■

Ejemplo 3. *Consideremos el mismo problema del Ejemplo 1. Nótese que este problema existe en $G_Q \times \overline{E}(Q)$, por lo que podemos calcular la (3.3), que coincide con la (3.2):*

$$\varphi = (21\tfrac{1}{3}, 21\tfrac{1}{3}, 21\tfrac{1}{3}).$$

Si ahora consideramos el vector de demandas del Ejemplo 2 (es decir, el que contiene un agente dummy) ya no es posible calcular la solución dada por (3.3), pero si la (3.2), la cual es:

$$\varphi = (21\tfrac{1}{3}, 21\tfrac{1}{3}, 21\tfrac{1}{3}, 0).$$

Finalmente, la última solución presentada se basa en el enfoque de teoría de juegos, en el cual a cada problema (c, M) se le asocia un juego cooperativo que tenga una interpretación intuitiva y se resuelve el juego para proponer una solución al problema original. También se hace la caracterización axiomática de esta solución.

Definición 8. Dado $(c, M) \in G_Q \times E(Q)$, un agente $i \in N$ se dice *nulo* si

$$c\left(\bigcup_{k \in S} M_k\right) = c\left(\bigcup_{k \in S \cup \{i\}} M_k\right), \quad \forall S \subseteq N \backslash \{i\}.$$

La demanda de un agente nulo no afecta el costo de las demandas del resto de los agentes.

Observación 1. *Todo agente dummy es agente nulo.*

Axioma 14 (Agente nulo)**.** *Una solución $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de agente nulo si*

$$\varphi_i(c, M) = 0$$

para todo $i \in N$ agente nulo en (c, M), con $(c, M) \in G_Q \times E(Q)$.

Debido a que la demanda de un agente nulo no afecta a los demás agentes, una solución que satisface este axioma otorga a este tipo de agentes un pago de cero.

Definición 9. Dos agentes $i, j \in N$ tienen *demandas simétricas* en $(c, M) \in G_Q \times E(Q)$, si

$$c\left(\bigcup_{k \in S \cup \{i\}} M_k\right) = c\left(\bigcup_{k \in S \cup \{j\}} M_k\right), \quad \forall S \subseteq N \backslash \{i, j\}.$$

Un par de agentes tienen demandas simétricas si sus conjuntos demanda son indistinguibles entre sí con respecto a cuánto contribuyen en costos.

Observación 2. *Los agentes equivalentes tienen demandas simétricas. Si dos agentes tienen demandas simétricas, entonces tienen costos equivalentes.*

Axioma 15 (Demandas simétricas)**.** *Una solución $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de demandas simétricas si*

$$\varphi_i(c, M) = \varphi_j(c, M)$$

para cada par de agentes $i, j \in N$ con demandas simétricas en (c, M), con $(c, M) \in G_Q \times E(Q)$.

Cualquier par de agentes cuyas demandas sean simétricas, pagan lo mismo en una solución que cumple el axioma anterior.

Teorema 6. *Existe una única solución $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ que satisface los axiomas de aditividad, eficiencia, agente nulo y demandas simétricas. Más aún, tiene la siguiente* *formulación:*

$$\varphi_i(c,M) = Sh_i(N, w_{(c,M)}), \quad \forall i \in N \tag{3.4}$$

donde $w_{(c,M)} \in G_N$ *es el juego definido como*

$$w_{(c,M)}(S) = c\left(\bigcup_{k\in S} M_k\right), \quad \forall S \subseteq N.$$

Demostración. Primero se demuestra la unicidad de la solución. Como en la demostración de las soluciones (3.2) y (3.3), se descompone la función de costos de la siguiente manera:

$$c = \sum_{S\subseteq Q} \delta_S^* u_S^*.$$

Sea $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ una solución que cumple con los axiomas. Se define el conjunto

$$Q_M = \{\emptyset \neq S \subseteq Q \mid M_k \subseteq S, \text{ para algún } k \in N\},$$

el cual agrupa los subconjuntos de Q que contienen el conjunto demanda de al menos un agente.

Notemos que todos los agentes tienen demandas simétricas en $(\delta_S^* u_S^*, M)$ cuando $S \notin Q_M$ y además, $u_S^*(Q) = 0$. Entonces, por eficiencia y demandas simétricas $\varphi_i(\delta_S^* u_S^*, M) = 0$, para todo $i \in N$ si $S \notin Q_M$. Por lo anterior y por aditividad, se tiene

$$\varphi_i(c,M) = \sum_{S\in Q_M} \varphi_i(\delta_S^* u_S^*, M).$$

Si $S \in Q_M$, hay tres grupos de agentes en $(\delta_S^* u_S^*, M)$:

- $j \in N$ tales que $\emptyset \neq M_j \subseteq S$
- $j \in N$ tales que $\emptyset \neq M_j \nsubseteq S$
- $j \in N$ tales que $M_j = \emptyset$

cuyas demandas son simétricas. Por los axiomas de demandas simétricas y agente nulo existen λ_S, $\mu_S \in \mathbb{R}$ para todo $S \in Q_M$ tales que:

$$\varphi_i(\delta_S^* u_S^*, M) = \begin{cases} \lambda_S, \text{ si } \emptyset \neq M_i \subseteq S \\ 0, \quad \text{si } M_i = \emptyset \\ \mu_S, \text{ otro caso.} \end{cases}$$

Para todo T,$R \subseteq Q$, se definen las funciones de costo:

$$\widehat{c}_T(R) = \begin{cases} 1, \text{ si } T \cap R \neq \emptyset \\ 0, \text{ otro caso.} \end{cases}$$

Para cada $Q \neq S \in Q_M$, con $M_i \subseteq S$, existe un único $T \subseteq Q \setminus M_i$ tal que $S = Q \setminus T$; además, $\delta_S^* u_S^* = \delta_S^*(u_Q^* - \widehat{c}_T)$. Por aditividad y eficiencia,

$$\varphi_i(\delta_S^* u_S^*, M) = \varphi_i(\delta_S^* u_Q^*, M) - \varphi_i(\delta_S^* \widehat{c}_T, M) = \frac{\delta_S^*}{n-d} - \varphi_i(\delta_S^* \widehat{c}_T, M)$$

donde d denota a la cantidad de agentes *dummy* en M.

Ahora, $i \in N$ es nulo en $(\delta_S^* \widehat{c}_T, M)$. Entonces, por el axioma de agente nulo, $\varphi_i(\delta_S^* \widehat{c}_T, M) = 0$. Así, para todo $Q \neq S \in Q_M$ con $M_i \subseteq S$, se tiene :

$$\lambda_S = \frac{\delta_S^*}{n-d}.$$

Para cada $S \in Q_M$ y cada $P \subseteq N$ se denota por

$$P^S(M) = \{j \in P \mid M_j \subseteq S\}$$

al conjunto de agentes en P tales que su demanda está contenida en S. Finalmente, por los axiomas de eficiencia y agente nulo, $(|N^S(M)| - d)\lambda_S + (n - |N^S(M)|)\mu_S = 0$, para todo $Q \neq S \in Q_M$ y

$$\varphi_i(\delta_S^* u_S^*, M) = \begin{cases} \dfrac{\delta_S^*}{n-d}, & \text{si } \emptyset \neq M_i \subseteq S \\ 0, & \text{si } M_i = \emptyset \\ \dfrac{-\delta_S^*(|N^S(M)| - d)}{(n-d)(n - |N^S(M)|)}, & \text{otro caso} \end{cases}$$

lo que determina la solución de manera única.

Para demostrar la existencia, solo es necesario recordar los axiomas que caracterizan al valor de Shapley. La eficiencia y la aditividad se heredan directamente de la eficiencia y linealidad del valor de Shapley; un agente nulo en (c, M) es un jugador nulo en el juego $(N, w_{(c,M)})$ por lo que paga cero, y si $i, j \in N$ tienen demandas simétricas en M, entonces tienen contribuciones marginales iguales en el juego $(N, w_{(c,M)})$, por lo que $Sh_i(N, w_{(c,M)}) = Sh_j(N, w_{(c,M)})$. ■

La interpretación del juego asociado $(N, Sh_{(c,M)})$ es simple: cada agente representa un jugador y la función característica $w_{(c,M)}(S)$ representa el costo en el que se incurre si un grupo de agentes $S \subseteq N$ se ponen de acuerdo y contratan el mínimo paquete de servicios que cubra sus demandas conjuntas.

Ejemplo 4. *Sigamos considerando el problema planteado en el Ejemplo 1, con el vector de demandas* $M = (\{1,4\},\{1,2,4\},\{2,3,4\})$. *Entonces, la función característica del juego asociado* $(N, w_{(c,M)})$ *es:*

S	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	N
$w_{(c,M)}$	36	55	60	55	64	64	64

Calculando el valor de Shapley para este juego, se tiene la solución (3.4):

$$\varphi(c,M) = Sh(N, w_{(c,M)}) = (12\tfrac{2}{3}, 22\tfrac{1}{6}, 29\tfrac{1}{6}).$$

3.2. Propiedades adicionales

Propiedad 5 (Monotonía)**.** *Una solución* $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ *es monótona si para cualesquiera* $i,k \in N$ *tales que* $M_i \subseteq M_k$ *se tiene que* $\varphi_i(c,M) \leq \varphi_k(c,M)$ *para toda función de costos* c *no decreciente.*

Observación 3. *La definición de una función de costos no decreciente es equivalente a la planteada en el Capítulo 2 para juegos cooperativos.*

Esta propiedad nos indica que si un agente k demanda al menos los mismos servicios que un agente i, entonces el pago del agente k debe ser mayor o igual que el del agente i si la función de costos es no decreciente.

Definición 10. Una función de costos c es *cóncava* si

$$c(S) + c(T) - c(S \cap T) \geq c(S \cup T),$$

para todo $S, T \subseteq Q$.

Así que en una función cóncava, contratar dos conjuntos por separado es más costoso que contratarlos como un solo conjunto, por lo que es rentable contratar el conjunto total de servicios.

Propiedad 6 (Racionalidad individual)**.** *Una solución* $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ *es individualmente racional si* $\varphi_i(c,M) \leq c(M_i)$ *para todo* $i \in N$ *cuando la función de costos* c *es cóncava.*

Si la función de costos es cóncava y la solución es individualmente racional, un agente paga a lo más lo que le costaría contratar directamente los servicios que él requiere; en otras palabras, ningún agente se ve perjudicado con la cooperación.

Dado $M \in E(Q)$, $k \in N$ y $h \in Q$, se define el vector de demanda $(M + k_h) \in E(Q)$ como

$$(M + k_h)_i = \begin{cases} M_i \cup \{h\}, & \text{si } i = k \\ M_i, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

En este nuevo vector de demandas, el agente k está incrementando su demanda en un solo servicio h, mientras que el resto de conjuntos demanda se mantiene igual.

Propiedad 7 (Independencia ante incremento de demanda). *Una solución $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ es independiente ante incremento de demanda si*

$$\varphi_i(c, M) = \varphi_i(c, M + k_h), \quad \textit{si } h \notin M_i, \quad \forall i \in N \backslash \{k\}.$$

Si una solución cumple esta propiedad, el pago de un agente no debe verse afectado si otro aumenta su demanda en un servicio que el primero no requiere.

Dado $M \in E(Q)$, se le asocia un nuevo vector de demandas M_{-D} tal que

$$(M_{-D})_i = M_i \quad \forall i \in N \backslash D_M.$$

Este vector de demandas es el mismo que el anterior, pero se quitan los agentes *dummy*.

Propiedad 8 (Reducción *dummy*). *Una solución $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ cumple reducción dummy si*

$$\varphi_i(c, M) = \varphi_i(c, M_{-D}), \quad \forall i \in N \backslash D_M.$$

Lo que nos dice esta propiedad es que una solución no se ve afectada si los agentes *dummy* se descartan del problema.

Proposición 1 (Macias-Ponce & Olvera-Lopez, 2013). *La solución $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ dada por (2.1) satisface (a) monotonía, (b) racionalidad individual e (c) independencia ante incremento de demanda.*

Observación 4. *La solución (2.1) también cumple con reducción dummy.*

Proposición 2. *La solución $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ dada por (3.1) satisface (a) α-cuota mínima, (b) monotonía e (c) independencia ante incremento de demanda.*

Demostración.

(a) Debido a que se considera que la función de costos c es no decreciente, el valor de Shapley del juego (N, c) es no negativo. Así, $\varphi_i(c, M) \geq \alpha c(Q)$.

(b) Sean $i, h \in N$ tales que $M_i \subseteq M_h$, por la Proposición 1, sabemos que

$$\sum_{j \in M_i} \frac{Sh_j(Q, c)}{|N_{\{j\}}(M)|} \leq \sum_{j \in M_h} \frac{Sh_j(Q, c)}{|N_{\{j\}}(M)|}$$

por lo que de inmediato se sigue que $\varphi_i(c, M) \leq \varphi_k(c, M)$.

(c) Sea $k \in Q$ y $h \in N$. Sea $i \in N$ tal que $k \notin M_i$, sabemos que en la solución (2.1) el agente i no se ve afectado con el incremento, como tampoco se afecta $c(Q)$, la demostración es inmediata. ■

Proposición 3. *La solución $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ dada por (3.2) satisface (a) agentes equivalentes, (b) reducción, (c) problema sustituto trivial (d) demandas simétricas, (e) monotonía y (f) reducción dummy.*

Demostración.

(a) Sean $i, k \in N$ tales que $M_i = M_k$. La solución solo depende de si el conjunto demanda es vacío o es no vacío. Como los agentes tienen exactamente el mismo conjunto demanda, se sigue que $\varphi_i(c, M) = \varphi_k(c, M)$.

(b) Sea $S \subseteq Q$ gratuito en c, entonces si $M_i \neq \emptyset$,

$$\varphi_i(c, M) = \frac{c(Q)}{n-d} = \frac{c(Q \backslash S)}{n-d} = \varphi_i(c|_{Q\backslash S}, M|_{Q\backslash S})$$

y si $M_i = \emptyset$ paga cero en ambos problemas. Por lo tanto $\varphi_i(c, M) = \varphi_i(c|_{Q\backslash S}, c|_{Q\backslash S})$, para todo $i \in N$.

(c) En un problema sustituto trivial $c(Q) = 0$, entonces $\varphi_i(c, M) = 0$ para todo $i \in N$.

(d) Sean $i, k \in N$ dos agentes con demandas simétricas. La Observación 2 nos dice que entonces tienen costos equivalentes. Como la solución cumple el axioma de costos equivalente, entonces $\varphi_i(c, M) = \varphi_k(c, M)$.

(e) Sean $i, k \in N$ tales que $M_i \subseteq M_k$. Si $M_i = M_k$ se tiene la igualdad. Si $\emptyset \neq M_i \subset M_k$, ambos pagan $c(Q)/(n-d)$. Si $\emptyset = M_i \subset M_k$ entonces

$$\varphi_i = 0 \leq \frac{c(Q)}{n-d} = \varphi_k(c, M)$$

ya que $c(Q) \geq 0$ porque se considera que la función de costos es no decreciente. Por lo tanto, $\varphi_i(c, M) \leq \varphi_k(c, M)$.

(f) Al salir del problema los agentes *dummy*, la cantidad total de agentes es $n-d$ y todos pagan lo mismo, así que si $M_i \neq \emptyset$, entonces $\varphi_i(c, M) = \frac{c(Q)}{n-d} = \varphi_i(c, M_{-D})$. ■

Proposición 4. *La solución $\varphi : G_Q \times \overline{E}(Q) \to \mathbb{R}^n$ dada por (3.3) satisface (a) agentes equivalentes, (b) problema sustituto trivial (c) cuota mínima, (d) demandas simétricas, (e) monotonía e (f) independencia ante incremento de demanda.*

Demostración. Como en el caso de la solución (3.2), esta solución solo depende de $c(Q)$, así que la demostración del cumplimiento de las propiedades (a)-(f) es trivial. ■

Proposición 5. *La solución $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ dada por (3.4) satisface (a) agente dummy, (b) reducción, (c) agentes equivalentes, (d) monotonía, (e) racionalidad individual y (f) reducción dummy.*

Demostración.

(a) Sea $M_i = \emptyset$. Recordando la Observación 1, un agente *dummy* es nulo, entonces como la solución satisface el axioma de agente nulo, $\varphi_i(c, M) = 0$.

(b) Sea $S \subseteq Q$ gratuito en c, entonces $c(M_i) = c(M_i \cap (Q \backslash S))$ para todo $i \in N$. Así,

$$c\left(\bigcup_{i \in S} M_i\right) = c\left(\bigcup_{i \in S} [M_i \cap (Q \backslash S)]\right) = c\left(\bigcup_{i \in S} M_i|_{Q \backslash S}\right)$$

por lo que $\varphi_i(c, M) = \varphi(c|_{Q \backslash S}, M|_{Q \backslash S})$.

(c) La Observación 2 nos dice que si dos agentes son equivalentes, entonces tienen demandas simétricas. Así, por el axioma de demandas simétricas si $M_i = M_k$ para $i, k \in N$, entonces $\varphi_i(c, M) = \varphi_k(c, M)$.

(d) Sean $i, k \in N$ tales que $M_i \subseteq M_k$ y c no decreciente. Denotando por $\gamma_s = \dfrac{(n-s)!(s-1)!}{n!}$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\varphi_i(c, M) &= \sum_{\substack{S \ni i \\ S \subseteq N}} \gamma_s [w_{(c,M)}(S) - w_{(c,M)}(S \backslash \{i\})] \\
&= \sum_{\substack{S \ni i \\ S \subseteq N}} \gamma_s \left[c\left(\bigcup_{j \in S} M_j\right) - c\left(\bigcup_{j \in S \backslash \{i\}} M_j\right)\right].
\end{aligned}$$

Notemos que si $\{i,k\} \subseteq S$

$$\bigcup_{j\in S} M_j = \bigcup_{j\in S\setminus\{i\}} M_j,$$

ya que $M_i \subseteq M_k$ .Además si $S \not\ni k$, entonces

$$c\left(\bigcup_{j\in S} M_j\right) \leq c\left(\bigcup_{j\in S\cup\{k\}} M_j\right) = c\left(\bigcup_{j\in (S\setminus\{i\})\cup\{k\}} M_j\right),$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\varphi_i(c,M) &= \sum_{\substack{S\ni i\\ S\subseteq N\setminus\{k\}}} \gamma_s \left[c\left(\bigcup_{j\in S} M_j\right) - c\left(\bigcup_{j\in S\setminus\{i\}} M_j\right)\right] \\
&\leq \sum_{\substack{S\ni i\\ S\subseteq N\setminus\{k\}}} \gamma_s \left[c\left(\bigcup_{j\in S\cup\{k\}} M_j\right) - c\left(\bigcup_{j\in S\setminus\{i\}} M_j\right)\right] \\
&= \sum_{\substack{S\ni i\\ S\subseteq N\setminus\{k\}}} \gamma_s \left[c\left(\bigcup_{j\in (S\setminus\{i\})\cup\{k\}} M_j\right) - c\left(\bigcup_{j\in S\setminus\{i\}} M_j\right)\right].
\end{aligned}$$

Sea $T = S\setminus\{i\}$, entonces

$$\varphi_i(c,M) \leq \sum_{\substack{T\not\ni k\\ T\subseteq N\setminus\{i\}}} \gamma_{t+1} \left[c\left(\bigcup_{j\in T\cup\{k\}} M_j\right) - c\left(\bigcup_{j\in T} M_j\right)\right].$$

Finalmente, por ser c no decreciente, $w_{(c,M)}(T\cup\{k\}) - w_{(c,M)}(T) \geq 0$ para todo $T \subseteq N\{k\}$ con $T \ni i$, así

$$\begin{aligned}
\varphi_i(c,M) \leq& \sum_{\substack{T\not\ni k\\ T\subseteq N\setminus\{i\}}} \gamma_{t+1} \left[c\left(\bigcup_{j\in T\cup\{k\}} M_j\right) - c\left(\bigcup_{j\in T} M_j\right)\right] \\
&+ \sum_{\substack{T\ni i\\ T\subseteq N\setminus\{k\}}} \gamma_{t+1} \left[c\left(\bigcup_{j\in T\cup\{k\}} M_j\right) - c\left(\bigcup_{j\in T} M_j\right)\right] \\
&= \sum_{\substack{T\not\ni k\\ T\subseteq N}} \frac{t!(n-t-1)!}{n!}[w_{(c,M)}(T\cup\{k\}) - w_{(c,M)}(T)] \\
&= Sh_k(N, w_{(c,M)}) = \varphi_k(c,M).
\end{aligned}$$

(e) Basta notar que al ser c cóncava, el juego $(N, w_{(c,M)})$ es cóncavo. Sea $i \in N$ y $S \subseteq T \subseteq N \backslash \{i\}$ entonces denotemos por

$$A = \bigcup_{j \in S \cup \{i\}} M_j \quad y \quad B = \bigcup_{j \in T} M_j,$$

entonces como c es cóncava $c(A) + c(B) - c(A \cap B) \geq c(A \cup B)$. Veamos que

$$A \cap B = \left(\bigcup_{j \in S \cup \{i\}} M_j \right) \bigcap \left(\bigcup_{j \in T} M_j \right) = \bigcup_{j \in S} M_j$$

ya que $S \subseteq T \subseteq N \backslash \{i\}$. Por la misma razón,

$$A \cup B = \left(\bigcup_{j \in S \cup \{i\}} M_j \right) \bigcup \left(\bigcup_{j \in T} M_j \right) = \bigcup_{j \in T \cup \{i\}} M_j,$$

entonces

$$c\left(\bigcup_{j \in S \cup \{i\}} M_j \right) + c\left(\bigcup_{j \in T} M_j \right) - c\left(\bigcup_{j \in S} M_j \right) \geq c\left(\bigcup_{j \in T \cup \{i\}} M_j \right),$$

o equivalemntemente,

$$c\left(\bigcup_{j \in S \cup \{i\}} M_j \right) - c\left(\bigcup_{j \in S} M_j \right) \geq c\left(\bigcup_{j \in T \cup \{i\}} M_j \right) - c\left(\bigcup_{j \in T} M_j \right)$$

$$\Rightarrow w_{(c,M)}(S \cup \{i\}) - w_{(c,M)}(S) \geq w_{(c,M)}(T \cup \{i\}) - w_{(c,M)}(T),$$

lo que demuestra que $(N, w_{(c,M)})$ es cóncavo y entonces $Sh(w_{(c,M)}) \in AC(w_{(c,M)})$, en específico, $Sh_i(w_{(c,M)}) \leq w_{(c,M)}(\{i\}) = c(M_i)$.

(f) Un agente dummy en M es un agente nulo en $(N, w_{(c,M)})$ por lo que el valor de Shapley no se ve afectado si se retira del juego. ■

El cuadro (3.1) muestra tanto los axiomas como las propiedades anteriormente mencionadas e indica cuáles son cumplidas por las soluciones estudiadas ($\star$ indica que la solución cumple la propiedad; $-$ indica que la propiedad no aplica a esa solución).

Propiedad	**(2.1)**	**(3.1)**	**(3.2)**	**(3.3)**	**(3.4)**
Aditividad	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆
Eficiencia	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆
Agente *dummy*	⋆		⋆	–	⋆
Reducción	⋆	⋆	⋆	–	⋆
Agentes equivalentes	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆
Problema sustituto trivial	⋆	⋆	⋆	⋆	
Pago *dummy*		⋆		–	
α-cuota mínima		⋆		⋆	
Irrelevancia ante costo nulo			⋆	⋆	
Costos equivalentes			⋆	⋆	
Agente nulo					⋆
Demandas simétricas			⋆	⋆	⋆
Monotonía	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆
Racionalidad individual	⋆				⋆
Independencia ante incremento de demanda	⋆	⋆		⋆	
Reducción *dummy*	⋆		⋆	–	⋆

Cuadro 3.1: Propiedades de las soluciones

3.3. Familia de soluciones

Una pregunta natural que surge al hacer una caracterización es qué ocurre si se considera que uno o más de los axiomas utilizados no es necesariamente cumplido. Esta idea se desarrolla en [Sanchez-Sanchez et al, 2008] para soluciones de juegos cooperativos de utilidad transferible; se presenta una expresión que define a todas las soluciones que cumplen linealidad, eficiencia y simetría, es decir, el conjunto de axiomas que cumple el valor de Shapley con excepción del axioma de agente *dummy*. Se aplica esta misma idea para la solución que viene dada por (3.4). Primero se presenta un expresión de todas las soluciones que cumplen los axiomas de aditividad, eficiencia y demandas simétricas y una más que cumple las tres anteriores más el axioma de agente *dummy*.

Proposición 6. *Una solución $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ satisface los axiomas de aditividad, eficiencia y demandas simétricas si es de la siguiente forma:*

$$\varphi_i(c, M) = \frac{c(Q)}{n} + \sum_{\substack{Q \neq S \in Q_M \\ S \supseteq M_i}} \frac{\beta_S \delta_S^*}{|N^S(M)|} - \sum_{\substack{S \in Q_M \\ S \not\supseteq M_i}} \frac{\beta_S \delta_S^*}{n - |N^S(M)|} \tag{3.5}$$

para ciertos números $\{\beta_S\}_{Q \neq S \in Q_M}$ y donde δ_S^* son los coeficientes de la base dual.

Demostración. Consideremos una solución $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ que cumpla con los axiomas de aditividad, eficiencia y demandas simétricas. Considerando que cualquier función de costos $c \in G_Q$ puede escribirse como $c = \sum_{S \subseteq Q} \delta_S^* c_S^*$ donde cada $c_S^* \in G_Q$ se define como:

$$c_S^*(T) = \begin{cases} 1, \text{ si } T \subseteq S \\ 0, \text{ otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, como en la demostración de la solución (3.4), se tiene

$$\varphi_i(c, M) = \sum_{S \in Q_M} \varphi_i(\delta_S^* c_S^*, M),$$

además, si $S \in Q_M$, hay dos tipos de agentes en $(\delta_S^* c_S^*, M)$:

- $j \in N$ tales que $M_j \subseteq S$
- $j \in N$ tales que $M_j \nsubseteq S$

por lo que existen λ_S, $\mu_S \in \mathbb{R}$ para todo $S \in Q_M$ tales que:

$$\varphi_i(\delta_S^* c_S^*, M) = \begin{cases} \lambda_S, \text{ si } M_i \subseteq S \\ \mu_S, \text{ otro caso.} \end{cases}$$

Por eficiencia, $|N^S(M)|\lambda_S + (n - |N^S(M)|)\mu_S = 0$, para todo $Q \neq S \in Q_M$ y

$$\varphi_i(c, M) = \frac{c(Q)}{n} + \sum_{\substack{Q \neq S \in Q_M \\ S \supseteq M_i}} \lambda_S \delta_S^* + \sum_{\substack{S \in Q_M \\ S \nsupseteq M_i}} \mu_S \delta_S^*$$

$$= \frac{c(Q)}{n} + \sum_{\substack{Q \neq S \in Q_M \\ S \supseteq M_i}} \lambda_S \delta_S^* - \sum_{\substack{S \in Q_M \\ S \nsupseteq M_i}} \frac{|N^S(M)|\lambda_S \delta_S^*}{n - |N^S(M)|}$$

Tomando $\beta_S = |N^S(M)|\lambda_S$, se tiene la expresión (3.5). ■

Esta expresión puede interpretarse por medio de transferencias como sigue: primero, el costo total de todos los servicios $c(Q)$ se divide de manera igualitaria entre los agentes, luego los los agentes que tiene su demanda contenida en $S \in Q_M$ se dividen una porción del costo de S entre ellos por partes iguales y esto se transfiere a los agentes que no tienen su demanda contenida en S.

Proposición 7. *Una solución $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ satisface los axiomas de aditividad, eficiencia, demandas simétricas y agente dummy si es de la siguiente forma:*

$$\varphi_i(c, M) = \begin{cases} \dfrac{c(Q)}{n-d} + \displaystyle\sum_{\substack{Q \neq S \in Q_M \\ S \supseteq M_i}} \frac{\beta_S \delta_S^*}{|N^S(M)| - d} - \sum_{\substack{S \in Q_M \\ S \nsupseteq M_i}} \frac{\beta_S \delta_S^*}{n - |N^S(M)|}, & \text{si } M_i \neq \emptyset \\ 0, & \text{otro caso,} \end{cases} \tag{3.6}$$

para ciertos números $\{\beta_S\}_{Q\neq S\in Q_M}$ *y donde* δ_S^* *son los coeficientes de la base dual.*

Demostración. Sea $\varphi : G_Q \times E(Q) \to \mathbb{R}^n$ que cumpla con los axiomas. La demostración sigue de la misma manera a la del Teorema 6. Existen λ_S, $\mu_S \in \mathbb{R}$ para todo $S \in Q_M$ tales que:

$$\varphi_i(\delta_S^* u_S^*, M) = \begin{cases} \lambda_S, \text{ si } \emptyset \neq M_i \subseteq S \\ 0, \quad \text{si } M_i = \emptyset \\ \mu_S, \text{ otro caso.} \end{cases}$$

por lo que se tiene la siguiente expresión:

$$\varphi_i(c, M) = \frac{c(Q)}{n-d} + \sum_{\substack{Q\neq S\in Q_M \\ S\supseteq M_i}} \lambda_S \delta_S^* + \sum_{\substack{S\in Q_M \\ S\not\supseteq M_i}} \mu_S \delta_S^*.$$

Por eficiencia, $(|N^S(M)|-d)\lambda_S+(n-|N^S(M)|)\mu_S = 0$, para todo $Q \neq S \in Q_M$, despejando μ_S, sustituyendo en la expresión anterior y tomando $\beta_S = (|N^S(M)| - d)\lambda_S$, se tiene la forma (3.6). ∎

La interpretación de la expresión (3.6) es muy similar a la de la familia de soluciones (3.5), solo que en este caso, como los agentes *dummy* no pagan nada, las transferencias se llevan a cabo entre el resto de los agente.

Ya que tanto N como Q son conjuntos dados, la cantidad de coeficientes β_S para ambas familias de soluciones depende completamente del vector de demandas M. En especial depende de la cardinalidad del conjunto Q_M ya que existe un coeficiente por cada $S \in Q_M$, excepto en el caso de $S = Q$. Así que se tienen $|Q_M| - 1$ coeficientes.

Recordando que el conjunto Q_M se define como

$$Q_M = \{\emptyset \neq S \subseteq Q \mid M_k \subseteq S, \text{ para algún } k \in N\},$$

se sabe que al menos tiene un elemento: Q. Este es el caso cuando $M_i = Q$ para todo $i \in N$, así el único subconjunto de servicios S que cumple que $M_k \subseteq S$ para algún $k \in N$ es exactamente $S = Q$. Ahora considérese el caso cuando $q \leq n$, es decir, cuando se tienen al menos tantos agentes como servicios y el siguiente tipo de conjunto demanda: $M_k = \{h\}$, para algún $h \in Q$ y $\forall k \in N$ con $\bigcup_{i\in N} M_i = Q$ para que el problema esté bien definido. En este caso, $|Q_M| = 2^Q - 1$. Bajo este razonamiento, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1. *Dado un problema* $(c, M) \in G_Q \times E(Q)$*, toda solución de la forma (3.5) o (3.6) tiene* $0 \leq |\{\beta_S\}_{Q\neq S\in Q_M}| \leq 2^Q - 1$.

Por ejemplo, las constantes β_S en la familia (3.5) para la solución (3.4) son

$$\beta_S = \frac{|N^S(M)| - d}{n - d}, \quad \forall Q \neq S \in Q_M,$$

mientras que para la solución (3.2), $\beta_S = 0, \quad \forall Q \neq S \in Q_M$.

Capítulo 4

Conclusiones

Existen una infinidad de posibles formas de resolver éste o cualquier tipo de problema de distribución de costos, por lo que es imposible decir que el problema ha quedado resuelto. Sin embargo, el proponer una solución formalmente requiere que ésta sea razonable y atractiva para los agentes involucrados.

Para realizar una caracterización, lo más importante es proponer "buenos" axiomas. Así, si los agentes los aceptan, la solución que se propone será la única que los cumple, lo que representa una gran ventaja. En el caso del enfoque de teoría de juegos, lo principal es que el juego asociado tenga un sentido lógico y real en el contexto en el que se está trabajando. De esta manera, las propiedades de la solución del juego cooperativo (en este caso, el valor de Shapley) pueden ser adaptadas e interpretadas de manera natural al problema de costos, lo que ayuda a plantear sencillamente axiomas razonables.

La ventaja de las soluciones propuestas en este trabajo, es que las propiedades que las caracterizan son muy naturales e interpretables, además de que la unicidad está formalmente demostrada. A lo largo de este trabajo de investigación, distintas ideas de propiedades dieron resultado a las primeras tres soluciones y se logró caracterizar una solución derivada de un juego cooperativo muy intuitivo, además de un par de expresiones interesantes de una familia de soluciones.

Para finalizar este trabajo, se presentan una serie de preguntas que se desprenden de los resultados presentados, las cuales podrían dan lugar a distintas direcciones de futura investigación:

- El axioma de aditividad es de gran utilidad debido a que permite utilizar bases y descomponer los problemas en otros más sencillos de analizar. Sin embargo, es interesante realizar caracterizaciones sin considerar este axioma.

- Debido a su importancia en la Teoría de Juegos, el valor de Shapley es el primer candidato para definir los precios de los servicios en la solución que se encuentra en la literatura [Macias-Ponce & Olvera-Lopez, 2013] y para resolver el juego asociado definido en este trabajo. Es inmediato pensar qué otras asignaciones en un juego cooperativo se podrían aplicar en ambos casos y qué propiedades interesantes caracterizarían a las soluciones que éstas definirían.

- Los coeficientes de las dos familias de soluciones presentadas en este trabajo dependen completamente del vector de demandas, lo que hace que, de problema a problema, la dimensión de estas expresiones varíe considerablemente. ¿Existe otra manera de expresarlas en la cual la dimensión de los coeficientes no dependa de el vector de demandas, sino solo de la cardinalidad de los subconjuntos de servicios, por ejemplo?

- Como ya se ha mencionado con anterioridad, el hecho que las funciones de costos sean no decrecientes para este tipo de problemas es sumamente razonable. ¿Es posible realizar estas caracterizaciones cuando el espacio de funciones de costos de interés se restringe a solo las no decrecientes?

Bibliografía

[1] Aumann, RJ; Shapley, LS. Values of non-atomic games. Princeton: Princeton University Press, 1974.

[2] Calvo, E; Santos, JC. A value for multichoice games. Mathematical Social Sciences, 2000, vol. 40, no 3, p. 341-354.

[3] Hernández-Lamoneda, L; Sánchez-Pérez, J; Sánchez-Sánchez, F. Cooperative Games with Minimum Payoffs. Applied Mathematical Sciences, 2011, vol. 5, no 26, p. 1271-1286.

[4] Hougaard, JL. An introduction to allocation rules. Springer Science & Business Media, 2009.

[5] Macias-Ponce, J; Olvera-Lopez, W. A characterization of a solution based on prices for a discrete cost sharing problem. Economics Bulletin, 2013, vol. 33, no 2, p. 1429-1437.

[6] Myerson, RB. Conference structures and fair allocation rules. International Journal of Game Theory, 1980, vol. 9, no 3, p. 169-182.

[7] Moulin, H. On additive methods to share joint costs. Japanese Economic Review, 1995, vol. 46, no 4, p. 303-332.

[8] Moulin, H. Axiomatic cost and surplus sharing. Handbook of social choice and welfare, 2002, vol. 1, p. 289-357.

[9] Plata-Pérez, L; Sánchez-Pérez, J. Convexity and marginal contributions in bankruptcy games. EconoQuantum, 2011, vol. 8, no 1-2, p. 61-72.

[10] Roth, AE. (ed.). The Shapley value: essays in honor of Lloyd S. Shapley. Cambridge University Press, 1988.

[11] Ruiz, LM; Valenciano, F; Zarzuelo, JM. The family of least square values for transferable utility games. Games and Economic Behavior, 1998, vol. 24, no 1, p. 109-130.

[12] Sanchez-Sanchez, F; Juarez, R; Hernandez-Lamoneda, L. Solutions without dummy axiom for TU cooperative games. Economics Bulletin, 2008, vol. 3, no 1, p. 1-9.

[13] Samet, D; Tauman, Y. The determination of marginal cost prices under a set of axioms. Econometrica: Journal of the Econometric Society, 1982, p. 895-909.

[14] Shapley LS. A value for n-person games. Contributions to the Theory of Games, Kuhn H; Tucker A (ed.), 1953, vol. 2, p. 307-317.

[15] Sprumont Y. On the discrete version of the Aumann–Shapley costsharing method. Econometrica, 2005, vol. 73, no 5, p. 1693-1712.

[16] Thomson W. Cost allocation and airport problems. Rochester Center for Economic Research, Working Paper, 2007, no 538.