Desempeño Económico y Democracia en el Modelo Besley-Coate.

Agustín Aguilar Resendiz

Julio 2014

Índice general

Agradecimientos

Primero que nada quisiera agradecer al Dr. Leobardo Pedro Plata Pérez por su invaluable apoyo para la elaboración de este trabajo además de su infinita paciencia para conmigo.

También debo agradecer a la Facultad de Economía de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí y más específicamente al posgrado en Economía Matemática por permitirme complementar mi formación como Economista.

Por último pero no menos importantes a mis amigos, compañeros y demás profesores del posgrado quienes contribuyeron como revisores previos y sinodales de la tesis; entre ellos destacan el Dr. Samuel Gil Martín, el Dr. Elvio Accinelli Gamba, el Dr. Pedro Isidoro González Ramírez y el Dr. Joss Erick Sánchez Pérez.

Introducción

La teoría de elección pública se refiriere al estudio de la toma de decisiones en el contexto de un sistema democrático y tiene como objetivo determinar la preferencia social, ya sea en el seno de una democracia directa o una democracia representativa. Así mismo, en la teoría de elección pública se analizan procedimientos sobre la toma de decisiones colectivas en toda sociedad, donde se considera que estas deben reflejar las preferencias de todos los individuos que la conforman; es decir, estudia el proceso de agregación de las preferencias individuales en una preferencia social. La teoría de elección social es un campo interdisciplinar, el cual ha sido un tema estudiado no solo por politólogos, sino también por economistas, filósofos y matemáticos, en donde se propone basar las decisiones colectivas en las preferencias de los individuos sobre las distintas alternativas donde cada individuo uno puede tener diferentes valoraciones u opiniones.

En el ámbito matemático, así como en economía, el estudio abstracto de los problemas de agregación de preferencias se presta de manera natural al análisis formal, existe amplia literatura en la teoría de juegos cooperativos como el índice de poder de Shapley-Shubik (1954) y el índice de poder de Banzhaf (1965); el índice de poder de Shapley-Shubik fue formulado por Lloyd Shapley y Martin Shubik para medir las competencias de los jugadores en un juego de votación. Así, los componentes de un sistema de votación, tales como órganos legislativos, ejecutivos, accionistas, legisladores individuales, y así sucesivamente, se pueden ver como los participantes en un juego de n jugadores, donde los jugadores con las mismas preferencias forman coaliciones. A cualquier coalición que cuenta con suficientes votos para aprobar un proyecto de ley o de elegir a un candidato se le llama ganadora, y a las demás se las denomina perdedoras. Basándose en el valor de Shapley, Shapley y Shubik concluyeron que el poder de una coalición no era simplemente proporcional a su tamaño, sino que se mide por la fracción de las posibles secuencias de voto en las que la coalición emite el voto decisivo, es decir, el primer voto que garantiza el éxito o el fracaso. Por otra parte el valor de Banzhaf, llamado así por el activista estadounidense John F. Banzhaf III, corresponde al número de coaliciones en que un jugador es crítico en un juego cooperativo dado.

Uno de los principales logros de la economía neoclásica es el estudio riguroso del desempeño de los mercados. Sin embargo, para el tema del sector público no se cuenta aun con un marco teórico satisfactorio para el análisis de las políticas públicas en una democracia representativa. Si bien es cierto que el tema de elección publica ha sido ampliamente estudiado, no existe un consenso claro en el que una democracia representativa produzca resultados eficientes. Por una parte se encuentran los escritores de la escuela de Chicago tales como George Stigler (1982), Gary Becker (1985) y Donald Wittman (1989), quienes concuerdan que la competencia política traerá consigo políticas públicas eficientes. Por otra parte están los escritores de la escuela de Virginia tales como James M. Buchanan (1962) y Gordon Tullock (1962) quienes en su obra The Calculus of Consent: Logical Foundations of Constitutional Democracy, presentan los principios básicos de la teoría de la elección pública; en dicha obra Buchanan y Tullock sostienen que sólo los cambios constitucionales, que se pueda demostrar que convienen a los intereses de todas las partes interesadas pueden ser juzgados como "mejoras", por lo tanto consideran que la unanimidad conceptual como la única regla de toma de decisiones legítimas y llegan a la conclusión de que las decisiones con costes externos potencialmente altos deberían exigir la unanimidad.

En este trabajo se presenta un modelo que muestra la existencia de ineficiencia en una democracia representativa en el sentido utilitarista, dicho modelo incorpora impuestos, redistribución e inversión pública en el cual mediante un juego en forma extensiva con dos periodos; en el primer periodo los agentes deciden por si mismos si convertirse o no en candidatos, una vez que se ha establecido el conjunto de candidatos, los agentes emiten su voto por los autoproclamados candidatos, una vez emitidos los votos se establece un ganador o planificador de políticas públicas[1] quien establecerá las políticas públicas de su preferencia. El proceso para el segundo periodo es análogo al primero. Las políticas públicas elegidas por el planificador de políticas públicas serán aquellas que le generen mas utilidad al mismo. Así pues, se trata de un juego con información perfecta debido que los agentes conocen las preferencias sobre las políticas públicas de los demás agentes y votan acorde a las mismas. Así, un agente votara por un candidato cuyas políticas públicas preferidas sean similares a las suyas, en consecuencia los candidatos potenciales prevén este comportamiento y deciden si declararse a sí mismos candidatos o no.

Se buscara caracterizar un equilibrio perfecto en subjuegos, el método para determinar los equilibrios perfectos en subjuegos para el caso de un juego finito con información perfecta será el de inducción hacia atrás; se consideraran primero las últimas acciones del juego y a partir de ahí se determinaran las acciones que los jugadores deben tomar en cada nodo del juego para maximizar su utilidad. En este proceso se eliminaran las ramas que impliquen que cualquier jugador realiza un movimiento que no es creíble[2] para algún nodo determinado y así hasta que alcanzar el nodo inicial. Así mismo, se discute mediante proposiciones que según el modelo en cuestión, la realización de política pública es potencialmente una mejora de Pareto[3]. Se plantea también un caso con dos tipos de agentes en el cual la realización de inversión pública, siendo esta técnicamente factible y constituyendo además una mejora de pareto, no se lleva a cabo; es decir se caracteriza un equilibrio perfecto en subjuegos en donde no se lleva a cabo la inversión publica lo cual trae con sigo lo que luego se definirá como *"fallo en políticas públicas"*. Las causas de dichos fallos pueden ser diversas, en este contexto y para el caso tratado se puede mencionar que la compensación futura pudiera no ser suficiente para generar una mejora de pareto dado que los agentes maximizan su utilidad en el primer periodo sobre unas políticas públicas observables establecidas por algún hacedor de política pública en particular. Sin embargo, la identidad del futuro hacedor de política pública se desconoce y por tanto se desconocen también las futuras políticas públicas. Así, los agentes simplemente maximizan su utilidad esperada teniendo en cuenta los costos actuales de llevar a cabo la inversión pública y requiriendo compensaciones futuras las cuales pudieran no ser suficientes para sufragar dichos costos, en este caso, el hacedor de política pública del primer periodo quien también es un agente maximizador de utilidad no llevara a cabo la inversión pública.

El presente trabajo se encuentra ordenado de la siguiente forma; en el primer capítulo, se comenzara por comentar respecto del sector público Mexicano y describir el contexto del modelo Besley-Coate, en el segundo capítulo se describe a detalle el juego mediante el cual se elige al hacedor de política pública, en el tercer capítulo se presentan los resultados del modelo Besley-Coate en una democracia representativa, en el cuarto capítulo se desarrolla la contribución original de este trabajo que consiste en desarrollar un caso particular del modelo Besley-Coate para el caso en que la economía se forma con dos tipos de agentes, los altamente habilitados y los de habilitación baja, suponiendo la misma cantidad en ambos grupos, en el cual el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos resulta ineficiente en el sentido de que no hay una mejora paretiana del equilibrio. Por último, en el quinto capítulo se resumirán los resultados obtenidos, así como también los alcances y opciones para dar continuidad al trabajo.

[1] Policy maker.

[2] Porque no es óptimo

[3] La eficiencia de Pareto es una noción mínima de la eficiencia y no necesariamente da por resultado una distribución socialmente deseable de los recursos. No se pronuncia sobre la igualdad, o sobre el bienestar del conjunto de la sociedad.

Capítulo 1

Antecedentes

El tema de la corrupción es sin lugar a dudas uno de los aspectos que más ineficiencias genera sobre todo en países de América Latina, hoy en día, la corrupción se ha convertido en el peor flagelo de la sociedad, en México, lamentablemente se han vivido tiempos críticos en términos político-electorales y también de credibilidad; la imagen de algunas instituciones y quienes la representan generalmente se deteriora cuando no se cuida el manejo honesto de los recursos públicos. Desde el exterior y desde dentro del país se le imprime el sello de la corrupción en la administración pública, en los poderes públicos, en los tres niveles de gobierno y no se escapan algunos organismos electorales y de procuración de justicia electoral. Como país de leyes e instituciones México, cuenta a nivel federal y en los estados, con órganos de fiscalización que tienen como misión, mejorar la administración pública federal y de los estados de la República, abatir los niveles de corrupción y dar absoluta transparencia a la gestión y al desempeño de quienes representan a las instituciones. Sin embargo, dichos órganos muchas de las veces solo "simulan"llevar a cabo su tarea y ellos mismos están inmersos en la corrupción.

Para entrar en el contexto del modelo Besley-Coate, puede mencionarse el denominado .Año de Hidalgo", el cual no se trata de que es un año dedicado a honrar la memoria del insurgente Miguel Hidalgo y Costilla, Padre de la Patria; sino que es una expresión que en nuestro país tiene un significado muy especial; se refiere al último año de gobierno de una administración federal, estatal o municipal, la cual no debe dejar nada y tienen que gastarse todo el dinero que queda pendiente de ejercerse en los presupuestos, o bien disponer de los recursos públicos hasta donde se pueda, ya que se desconoce la identidad próximo gobernante y de sus colaboradores. Este trabajo contribuye a explicar este tipo de fenómenos desde la teoría económica.

1.1. Contexto del Modelo de Besley-Coate.

Suponemos que hay un numero finito $n < \infty$ de ciudadanos o agentes. Así, la economía consistirá de n agentes $i \in n = \{1, ..., n\}$ y abarcara dos periodos $\tau \in \{1, 2\}$.

Cada agente está dotado con una unidad de trabajo para cada periodo y existe un único bien de consumo[1] denotado como $x_{\tau i}$, el cual se produce utilizando únicamente el factor trabajo el cual se denota como $\ell_{\tau i}$. Así mismo, los bienes de consumo se producen de forma competitiva con rendimientos iguales a las habilidades para cada agente.

La utilidad del agente i en el periodo τ se denota como $u_{\tau i}(x_{\tau i}, \ell_{\tau i})$, $u(\cdot)$ es continua, estrictamente cuasi-cóncava, creciente en $x_{\tau i}$, y no creciente en $\ell_{\tau i}$. La utilidad del segundo periodo no es descontada.

[1] $x_{\tau i}$, No es almacenable, es decir, en este modelo no existe ahorro.

Se denota como $l_{\tau i}$ el tiempo dedicado al ocio, la variable $\ell_{\tau i}$ está comprendida entre 0 y un máximo $M_{\tau i}$ de tiempo disponible.[2] Dada una elección de tiempo de ocio $l_{\tau i}$, la diferencia $M_{\tau i}- l_{\tau i} = \ell_{\tau i}$, indica el tiempo que el individuo destina a trabajar a cambio un ingreso $y_{\tau i} = a_{\tau i}\ell_{\tau i}$, en donde $a_{\tau i}$ es su habilidad[3] en el periodo τ.

Notese que las variables $l_{\tau i}$ y $\ell_{\tau i}$ satisfacen las siguientes restricciones:

$$0 \leq l_{\tau i} \leq M_{\tau i},\ 0 \leq \ell_{\tau i} \leq M_{\tau i},\ l_{\tau i} + \ell_{\tau i} = M_{\tau i}.$$

Dado que cada agente está dotado con una unidad de trabajo para cada periodo, entonces podemos expresar las restricciones anteriores como:

$$0 \leq l_{\tau i} \leq 1,\ 0 \leq \ell_{\tau i} \leq 1,$$

$$l_{\tau i} + \ell_{\tau i} = 1.$$

$$\ell_{\tau i} = M_{\tau i} - l_{\tau i}$$

Así pues, $L_{\tau i}$ representara una dotación inicial de tiempo que el agente deberá repartir entre ocio y trabajo.

El planificador de políticas públicas para cada periodo en cuestión selecciona los parámetros de un impuesto lineal al ingreso que se denotara como $t_\tau \in [0, 1]$ y una transferencia $T_\tau \in \mathbb{R}$. de esta forma dados, t_τ y T_τ, de este modo el consumo del agente i estará dado por:

$$x_{\tau i} = (1 - t_\tau)a_{\tau i}(M_{\tau i} - l_{\tau i}) + T_\tau,$$

o bien:

$$x_{\tau i} = (1 - t_\tau)a_{\tau i}\ell_{\tau i} + T_\tau.$$

En este modelo la habilidad $a_{\tau i}$, se considerara como el salario del agente i, además de que las decisiones de ocio–consumo estarán en función de los parámetros t_τ, T_τ.y de $a_{\tau i}$. Por tanto, la utilidad del agente i estara dada por:

$$v_{\tau i}(t_\tau, T_\tau, a_i) = u_{\tau i}((1 - t_\tau)a_{\tau i}\ell_{\tau i}(t_\tau, T_\tau, a_i) + T_\tau).$$

En el primer periodo el planificador de políticas publicas debe elegir si debe o no comprometerse a una inversión publica discreta, la cual se denota mediante g[4],donde $g \in \{1, 0\}$; tal que si $g = 1$ se realizo la inversión, y si $g = 0$ en caso contrario. La inversión tiene un costo K en unidades de bienes de consumo además, dicha inversión se espera que incremente las habilidades de los individuos en el segundo periodo. Así, si $a_{2i} = a_{2i}(g)$, entonces $a_{2i}(1) \geq a_{2i}(0)$.

[2] Pueden ser 24 horas,o bien el tiempo de vigilia del agente.

[3] La habilidad de cada agente es exógena al modelo y se encuentra determinada por el azar. Así cada agente poseen una a habilidad determinada y el vector de habilidades es de la forma: $(a_{\tau 1}, ..., a_{\tau n})$

[4] Esta inversión publica pude representar educación o infraestructura productiva

Capítulo 2

El Modelo de Besley-Coate.

A continuación se plantea el siguiente juego en forma extensiva con información perfecta representado en forma estratégica o normal:

$$G(\Gamma) = \left\{ n, \left\{ \left\{ Z_\tau^i \right\}_{i=1}^n \right\}_{\tau=1}^2, \left\{ V_i \right\}_{i=1}^n \right\}.$$

Donde:

n denota a los agentes $i \in n = \{1, ..., n\}$.

$Z_1 = \cup_{i=1}^n Z_1^i$ es el conjunto de todas las alternativas de políticas públicas para los agentes $\{t_{1i}, T_{1i}, g_i\}$; para el primer periodo las cuales deben cumplir la siguiente restriccion[1]:

$$t_1 \sum_{i=1}^n a_{1i} \ell_{1i}(t_1, T_1, a_{1i}) - nT_1 = Kg,$$

$Z_2 = \cup_{i=1}^n Z_2^i$ es el conjunto de todas las alternativas de políticas públicas para los agentes $\{t_{2i}, T_{2i}\}$; para el segundo periodo las cuales deben cumplir la siguiente restricción:

$$t_2 \sum_{i=1}^n a_{2i} \ell_{2i}(t_2, T_2, a_{2i}(g)) - nT_2 = 0.$$

$V_i : Z_1^1 \times ... \times Z_1^n \times Z_2^1 \times ... \times Z_2^n \to \mathbb{R}$ son las funciones de pagos bajo una secuencia de políticas públicas[2]:

$$V_i = v_{1i}(t_1, T_1, a_{1i}) + \sum_{\{t_2, T_2\} \in \triangle(\pi_2)} \pi_2(t_2, T_2) v_{2i}(t_2, T_2, a_{2i}(g)),$$

donde $\triangle(\cdot)$ denota el soporte de la distribución de probabilidad; i.e., el conjunto $\{t_2, T_2\}$ que se selecciona con probabilidad positiva.

[1] $t_1 \sum_{i=1}^n y(t_1, T_1, a_{1i}) - nT_1$ son los ingresos por los impuestos y Kg son los gastos públicos.

[2] Una secuencia de políticas públicas es un par $\{\{t_1, T_1, g\}, \pi_2\}$, el cual consiste de unas políticas públicas determinadas para primer periodo $\{t_1, T_1, g\} \in Z_1$ y una distribución de probabilidad sobre las políticas públicas del dado $g \in \{0, 1\}$ para el segundo periodo $\pi_2 : Z_2(g) \to [0, 1]$.

El esquema del juego es el siguiente:

$$G(\Gamma) = \begin{cases} \textbf{Primera Etapa} \\ \text{Entradà o Estrategia: } \gamma_{1i} \\ \text{Votaciones o Información disponible: } \alpha_1(\cdot) \\ \text{Políticas publicas o Acciones: } \{t_{1i}, T_{1i}, g_i\} \\ \textbf{Segunda Etapa} \\ \text{Entradà o Estrategia: } \gamma_{1i} \\ \text{Votaciones o Información disponible: } \alpha_1(\cdot) \\ \text{Políticas públicas o Acciones: } \{t_{1i}, T_{1i}\} \end{cases}$$

Los agentes serán libres de formar particiones; esto pudiera interpretarse como formar un partido político; dado un conjunto de candidatos C; una partición[3] de los votantes $(n_i)_{i \in C \cup \{0\}}$, se dirá que es sincera si y solo si:

1. $p \in n_i$ implica que $v^i_{\tau p} \geq v^j_{\tau p}$ $\forall j \in C$,

2. $p \in n_0$ implica que $v^i_{\tau p} = v^j_{\tau p}$ $\forall i, j \in C$.

Intuitivamente una partición sincera divide a los votantes entre los candidatos, así, cada agente se asocia con su candidato preferido; es decir: aquel con las preferencias sobre políticas públicas iguales.

2.1. Primer periodo

Comenzamos describiendo la primera etapa del juego, el equilibrio de esta primera etapa se establece en base a los posibles equilibrios que se anticipan para la siguiente etapa.

2.1.1. Entrada

Los agentes competirán por el cargo de hacedor de política publica a fin de establecer las políticas públicas de su preferencia; sea $s_{1i} \in \{0, 1\}$, una estrategia pura, donde si $s_{2i} = 1$ entonces el agente i es un candidato y $s_{2i} = 0$ en caso contrario. Sea $s_1 = (s_{11}, ..., s_{1n})$ un perfil de estrategias puras. Así, el conjunto de candidatos será:

$$C(s_1) = \{i \mid s_{1i} = 1\}.$$

.El pago esperado de cada agente para cualquier perfil de estrategias, dependerá del comportamiento que los agentes anticipan de las votaciones; se denota $\alpha_1(\cdot)$ como la funcion que describe comportamiento esperado en las votaciones que los agentes anticipan cuando el conjunto de candidatos es $C(s_1)$.

Si el agente i se convierte en candidato, entonces este anticipa su victoria con probabilidad:

$$P^i(C(S_1), \alpha_1(C(S_1))).$$

[3] Una partición es una colección de subconjuntos no vacios disjuntos de n, $(n_j)_{j \in J}$, tales que:

$$\cup_{j \in J} n_j = n.$$

Si se anticipa un equilibrio $\{\gamma_2^g, \alpha_2^g(\cdot)\}$ cuando $g \in \{0,1\}$,entonces la distribución de probabilidad esperada para el segundo periodo es $\pi_2^g \equiv \pi_2(\gamma_2^g, \alpha_2^g(\cdot), g)$, con $\Pi_2 \equiv (\pi_2^0, \pi_2^1)$.El pago esperado del agente j bajo s_{1j} esta dado por:

$$U_{1j}(s_1; \Pi_2, \alpha_1(\cdot)) = \sum_{i \in C(S_1)} P^i(C(S_1), \alpha_1(C(S_1)))v_{1j}^i(\Pi_2) + P^0(C(S_1))v_{1j}^0(\Pi_2).$$

$P^0(C(s_1))$ denota la probabilidad de que el resultado por default se seleccione; es decir, que ningún agente decida competir por el cargo de planificador de políticas publicas. Así, si ningún agente decide competir por el cargo entonces los impuestos son cero y no se llevaran a acabo políticas publicas. En otras palabras el vector de estrategias puras será $s_1 = (0, ..., 0)$ y el conjunto de candidatos será: $C(s_1) = \varnothing$. De esta forma $P^0(C(s_1)) = 1$ y $P^0(C(s_1)) = 0$ si y solo si el conjunto de candidatos es no vacio $C(s_1) \neq \varnothing$. v_{1j}^i denota la utilidad esperada de j en el periodo 1 en el caso de que el candidato i gane, v_{1j}^0 denota la utilidad esperada de j en el periodo 1 en el caso de que ningún agente decida competir por el cargo de planificador de políticas publicas.

Todos los agentes son libres de convertirse en candidatos y cada uno debe decidir por sí mismo si convertirse o no en candidato, además; supondremos que la candidatura no tiene costo. Para asegurar la existencia de un equilibrio en la etapa de entrada; es necesario permitir estrategias mixtas[4]. Sea $\gamma_{1j} \in [0,1]$ una estrategia mixta para el agente j con un perfil de estrategias mixtas: $\gamma_1 = (\gamma_{11}, ..., \gamma_{1n})$ y el pago esperado del agente j dajo γ_2 estara dado por:

$$\begin{aligned} u_{1j}(\gamma_1; \Pi_2, \alpha_1(\cdot)) &= \prod_{i=1}^{n} \gamma_{1i} U_{1j}(1, ..., 1; \Pi_2, \alpha_1(\cdot)) + \prod_{i=2}^{n} \gamma_{1i}(1 - \gamma_{11}) U_{1j}(0, 1, ..., 1; \Pi_2, \alpha_1(\cdot)) \\ &+ ... + \prod_{i=1}^{n} (1 - \gamma_{1i}) U_{1j}(0, ..., 0; \Pi_2, \alpha_1(\cdot)). \end{aligned}$$

2.1.2. Votaciones

Dado el conjunto de cantidatos $C \subseteq n$. sea $\alpha_{1j} \in C \cup \{0\}$ el voto del agente j, donde $\alpha_{1j} = i$ denota al agente j votando por el agente i. Así mismo, $\alpha_{1j} = 0$ denota al agente j absteniendose de votar. Sea un vector de decisiones de voto $\alpha_1 = (\alpha_{11}, ..., \alpha_{1n})$; dado C y α_1, sea $P^i(C, \alpha_1)$ la probabilidad de que el candidato i gane la elección.

Así, el conjunto de candidatos ganadores[5], dado un vector de decisiones de voto $\alpha_2 = (\alpha_{21}, ..., \alpha_{2n})$; se denotara como:

$$m(C, \alpha_2);$$

de modo que si un existe un solo candidato, entoces este sera el ganador automatico; es decir:

$$m(C, \alpha_1) = C \ \forall \alpha_1$$

cuando $\#C = 1$.

Dadados estos supuestos; si el candidato i esta en el conjunto de candidatos ganadores la probabilidad de que el candidato i gane sera :

$$P^i(C, \alpha_1) = \frac{1}{\#m(C, \alpha_1)},$$

[4] Podemos aplicar la definición estándar de existencia de equilibro en estrategias mixtas dada por John F. Nash (1950).
[5] Aquellos que han recibido la mayor cantidad de votos.

Por lo tanto:

$$P^i(C,\alpha_1) = 1$$

si el candidato i tiene la mayoría de los votos o si el único candidato,

$$P^i(C,\alpha_1) = \frac{1}{\#m(C,\alpha_1)},$$

si existen m candidatos empatados de los cuales i es uno de ellos y

$$P^i(C,\alpha_1) = 0$$

de otra manera.

En caso de un empate:

$$\#m(C,\alpha_1) \geq 2$$

el ganador; es decir el planificador de políticas publicas es elegido de manera aleatoria donde cada uno de los candidatos empatados tiene la misma probabilidad de ganar.

Los agentes asumiran estrategias de votacion para maximizar su utilidad esperada considerando las votaciones de los demas agentes[6]. Así, dada Π_2 un equilibrio en las votaciones del periodo uno sera un vector de votaciones:

$$\alpha_1^* = (\alpha_{11}^*, ..., \alpha_{1n}^*);$$

donde la mejor estrategia de votacion del agente j estará dada por:

$$\alpha_{1j}^* \in \arg\max \left\{ \sum_{i \in C} P^i(C, (\alpha_{1j}, \alpha_{1-j}^*)) v_{1j}^i(g) \mid \alpha_{1j} \in C \cup \{0\} \right\}.$$

Donde dado Π_2 :

1. α_{2j}^* es una mejor respuesta a α_{2-j}^*,
2. α_{2j}^* no es una estrategia de voto dominada débilmente[7].

2.1.3. Politicas publicas

Los agentes anticiparan un equilibrio para el segundo periodo al elegir sus políticas públicas preferidas para el primer periodo. Así, si se anticipa un equilibrio $\{\gamma_2^g, \alpha_2^g(\cdot)\}$ cuando $g \in \{0,1\}$,entonces la distribución de probabilidad esperada para el segundo periodo es $\pi_2^g \equiv \pi_2(\gamma_2^g, \alpha_2^g(\cdot), g)$, con $\Pi_2 \equiv (\pi_2^0, \pi_2^1)$. Por lo tanto, Las políticas públicas preferidas del agente i cuando este es el planificador de políticas publicas del primer periodo estarán dadas por:

$$\{t_{1i}(\Pi_2), T_{1i}(\Pi_2), g_i(\Pi_2)\} = \arg\max \{V_i((t_1, T_1, g), \pi_2^g) \mid \{t_1, T_1, g\} \in Z_1\},$$

[6] En caso de que se formen particiones entonces las estrategias de votación de los agentes serán aquellas en las que votaran por los candidatos con las mismas preferencias dado que son las que les generan una mayor utilidad.

[7] Este es un supuesto estándar en la literatura de votaciones, el mismo implica que los agentes no votan por su opción menos preferida; de esta forma se considera que el voto es sincero. Así mismo, Una decision de voto α_{1j} sera dominada debilmente si existe otra decision de voto $\widehat{\alpha_{1j}} \in C \cup \{0\}$ tal que:

$$\sum_{i \in C} P^i(C, (\widehat{\alpha_{1j}}, \alpha_{1-j})) v_{1j}^i(\Pi_2) \geq \sum_{i \in C} P^i(C, (\alpha_{1j}, \alpha_{1-j})) v_{1j}^i(\Pi_2)$$

para toda α_{1-j}

Dada Π_2, asumimos que la solución a es única para cada agente; así, el vector de imputaciones de utilidad será:

$$(v_{11}^i(\Pi_2), ..., v_{1n}^i(\Pi_2)),$$

donde:

$$v_{1j}^i(\Pi_2) = V_j(t_{1i}(\Pi_2), T_{1i}(\Pi_2), g_i(\Pi_2); \pi_2^{gi})$$

es la utilidad esperada del agente j en el periodo uno si el agente i es elegido como planificador de políticas públicas.

Si ningún agente compite por el cargo, entonces la políticas públicas del primer periodo serán:

$$(t_{10}(\Pi_2), T_{10}(\Pi_2), g_0(\Pi_2)) = \{0, 0, 0\}$$

y el vector de imputaciones de utilidad sería:

$$(v_{11}^0(\Pi_2), ..., v_{1n}^0(\Pi_2)).$$

2.1.4. Equilibrio

Combinando el análisis de las tres fases del periodo y dadas las distribuciones de probabilidad sobre las políticas públicas del segundo periodo $\Pi_2 \equiv (\pi_2^0, \pi_2^1)$, definimos un equilibrio para el periodo uno

$$\{\gamma_1, \alpha_1(\cdot)\};$$

como un vector de decisiones de entrada $\gamma_1 = (\gamma_{11}, ..., \gamma_{1n})$ y una función $\alpha_1(\cdot)$ que describe el comportamiento esperado en las votaciones tal que:

1. Para cada agente j, γ_{1j} es una mejor respuesta a γ_{1-j} dado Π_2.
2. Para todo conjunto no vacio de candidatos $C \subseteq n$, $\alpha_1(\cdot)$ es un equilibrio en las votaciones dado Π_2.

Un equilibrio $\{\gamma_1, \alpha_1(\cdot)\}$ será un equilibrio de estrategias puras para el periodo uno si los agentes emplean estrategias puras en la etapa de entrada; i.e., $\gamma = s$ para alguna $s \in \{0, 1\}^n$ y será un equilibrio de estrategias mixtas de otra forma.

Asociado con dicho equilibrio $\{\gamma_1, \alpha_1(\cdot)\}$ existen dos distribuciónes de probabilidad:

$$r_1(\gamma_1, \alpha_1(\cdot)),$$

donde $r_1(\gamma_1,\alpha_1(\cdot))(i)$; denota la probabilidad de que i sea el planificador de políticas publicas del primer periodo y $r_2(\gamma_2,\alpha_2(\cdot))(0)$ como la probabilidad de que nadie compita por el cargo y

$$\pi_1(\gamma_1, \alpha_1(\cdot), \Pi_2),$$

donde $\pi_1(\gamma_1,\alpha_1(\cdot), \Pi_2)(t_1, T_1, g)$ es la probabilidad de que las políticas públicas del primer periodo sean $\{t_1, T_1, g\} \in Z_1$.

Así pues, estan distribuciones de probabilidad estan relacionadas por:

$$\pi_1(\gamma_1, \alpha_1(\cdot), \Pi_2)(t_1, T_1, g) = \sum_{j \in \{i \in n \cup \{0\} : (t_{1i}(\Pi_2), T_{1i}(\Pi_2), g_i) = (t_1, T_1, g)\}} r_1(\gamma_1, \alpha_1(\cdot))(j).$$

2.2. Segundo periodo

Continuamos con la segunda etapa del juego y ahora tomamos como dado un equilibrio en la primera etapa donde $g \in \{0,1\}$.

2.2.1. Entrada

Para comenzar con el segundo periodo pasamos ahora a describir la entrada, en esta fase del segundo periodo los agentes competiran por el cargo a fin de establecer las politicas publicas de su preferencia. Sea $s_{2j} \in \{0,1\}$, una estrategia pura, donde si $s_{2j} = 1$ entonces el agente j es un candidato y $s_{2j} = 0$ en caso contrario. Sea $s_2 = (s_{21}, ..., s_{2n})$ un perfil de estrategias puras. Así, el conjunto de candidatos será:

$$C(s_2) = \{i \mid s_{\tau i} = 1\}.$$

El pago esperado de cada agente para cualquier perfil de estrategias, dependerá del comportamiento que los agentes anticipan de las votaciones. Así, se denota $\alpha_2(C)$ como el comportamiento esperado en las votaciones que los agentes anticipan cuando el conjunto de candidatos es C.

Si el agente i se convierte en candidato, entonces este anticipa su victoria con probabilidad:

$$P^i(C(S_2), \alpha_2(C(S_2))).$$

El pago esperado del agente j bajo s_{2j} esta dado por:

$$U_{2j}(s_2; g, \alpha_2(\cdot)) = \sum_{i \in C(s_2)} P^i(C(s_2), \alpha_2(C(s_2)))v_{2j}^i + P^0(C(s_2))v_{2j}^0,$$

$P^0(C(s_2))$ denota la probabilidad de que el resultado por default se seleccione; es decir, que ningún agente decida competir por el cargo de planificador de políticas publicas. Así, si ningún agente decide competir por el cargo entonces los impuestos son cero y no se llevaran a acabo políticas publicas. En otras palabras el vector de estrategias puras será $s_2 = (0, ..., 0)$ y el conjunto de candidatos será: $C(s_2) = \varnothing$. De esta forma $P^0(C(s_2)) = 1$ y $P^0(C(s_2)) = 0$ si y solo si el conjunto de candidatos es no vacio $C(s_2) \neq \varnothing$. v_{2j}^i denota la utilidad esperada de j en el periodo 2 en el caso de que el candidato i gane, v_{2j}^0 denota la utilidad esperada de j en el periodo 2 en el caso de que ningún agente decida competir por el cargo de planificador de políticas publicas.

Todos los agentes son libres de convertirse en candidatos y cada uno debe decidir por sí mismo si convertirse o no en candidato, además; supondremos que la candidatura no tiene costo. Para asegurar la existencia de un equilibrio en la etapa de entrada; es necesario permitir estrategias mixtas. Sea $\gamma_{2j} \in [0,1]$ una estrategia mixta para el agente j con un perfil de estrategias mixtas: $\gamma_2 = (\gamma_{21}, ..., \gamma_{2n})$ y el pago esperado del agente j dajo γ_2 estara dado por:

$$\begin{aligned} u_{2j}(\gamma_2; g, \alpha_2(C)) &= \prod_{i=1}^{n} \gamma_{2i} U_{2j}(1, ..., 1; g, \alpha_2(\cdot)) + \prod_{i=2}^{n} \gamma_{2i}(1 - \gamma_{21}) U_{2j}(0, 1, ..., 1; g, \alpha_2(\cdot)) \\ &\quad + ... + \prod_{i=1}^{n} (1 - \gamma_{2i}) U_{2j}(0, ..., 0; g, \alpha_2(\cdot)). \end{aligned}$$

2.2.2. Votaciones

Tomaremos como dado el conjunto de cantidatos $C \subseteq n$. sea $\alpha_{2j} \in C \cup \{0\}$ el voto del agente j, donde $\alpha_{2j} = i$ denota al agente j votando por el agente i. Así mismo, $\alpha_{2j} = 0$ denota al agente j absteniendose de votar. Sea un vector de decisiones de voto $\alpha_2 = (\alpha_{21}, ..., \alpha_{2n})$; dado C y α_2, sea $P^i(C, \alpha_2)$ la probabilidad de que el candidato i gane la elección.

Así, el conjunto de candidatos ganadores, dado un vector de decisiones de voto $\alpha_2 = (\alpha_{21}, ..., \alpha_{2n})$; se denotara como:

$$m(C, \alpha_2);$$

de modo que si un existe un solo candidato, entoces este sera el ganador automatico; es decir:

$$m(C, \alpha_2) = C$$

cuando $\#C = 1$.

Dadados estos supuestos; si el candidato i esta en el conjunto de candidatos ganadores la probabilidad de que el candidato i gane sera :

$$P^i(C, \alpha_2) = \frac{1}{\#m(C, \alpha_2)},$$

Por lo tanto:

$$P^i(C, \alpha_2) = 1$$

si el candidato i tiene la mayoría de los votos o si el único candidato,

$$P^i(C, \alpha_2) = \frac{1}{\#m(C, \alpha_2)},$$

si existen m candidatos empatados de los cuales i es uno de ellos y

$$P^i(C, \alpha_1) = 0$$

de otra manera.

En caso de un empate:

$$\#m(C, \alpha_2) \geq 2$$

el ganador; es decir el planificador de políticas publicas es elegido de manera aleatoria donde cada uno de los candidatos empatados tiene la misma probabilidad de ganar.

Los agentes asumiran estrategias de votacion para maximizar su utilidad esperada considerando las votaciones de los demas agentes; Así, dada g un equilibrio en las votaciones del periodo dos sera un vector de votaciones:

$$\alpha_2^* = (\alpha_{21}^*, ..., \alpha_{2n}^*);$$

donde la mejor estrategia de votacion del agente j estará dada por:

$$\alpha_{2j}^* \in \arg\max \left\{ \sum_{i \in C} P^i(C, (\alpha_{2j}, \alpha_{2-j}^*)) v_{2j}^i(g) \mid \alpha_{2j} \in C \cup \{0\} \right\}.$$

Donde:

1. α^*_{2j} es una mejor respuesta a α^*_{2-j},

2. α^*_{2j} no es una estrategia de voto dominada débilmente[8].

2.2.3. Politicas publicas

Tomaremos como dada la inversión publica $g \in \{0,1\}$. Así, el agente que resulte ganador en el proceso político del segundo periodo, es decir el hacedor de política publica para el segundo periodo; seleccionará sus políticas publicas preferirías. Las políticas publicas preferidas para dicho agente estarán dadas por:

$$\{t_{2i}(g), T_{2i}(g)\} = \arg\max \{v(t_2, T_2, a_{2i}(g)) \mid \{t_2, T_2\} \in Z_2(g)\}.$$

Asumiremos que la solución es única, asociada con las preferencias de cada agente. Por tanto, las imputaciones de utilidad serán:

$$(v^i_{21}(g), ..., v^i_{2n}(g)),$$

donde:

$$v^i_{2j}(g) = v(t_{2i}(g), T_{2i}(g), a_{2j}(g)),$$

es la utilidad del agente j para el periodo dos si el agente i es electo como hacedor de politica publica. Si ningún agente decide entrar a la competencia por el puesto de hacedor de política publica entonces la utilidad del agente j estará dada por:

$$v^0_{2j}(g) = v(t_{20}(g), T_{20}(g), a_{2j}(g)) = \{0,0\},$$

y las imputaciones de utilidad seran:

$$(v^0_{21}(g), ..., v^0_{2n}(g)).$$

2.2.4. Equilibrio

Combinando el análisis de las tres fases del periodo dos y tomando como dada la inversión pública $g \in \{0,1\}$, definimos un equilibrio para el periodo dos

$$\{\gamma^g_2, \alpha^g_2(\cdot)\};$$

como un vector de decisiones de entrada $\gamma_2 = (\gamma_{21}, ..., \gamma_{2n})$ y una función $\alpha_2(\cdot)$ que describe el comportamiento esperado en las votaciones tal que:

1. Para cada agente j, γ_{2j} es una mejor respuesta a γ_{2-j} dado g y $\alpha_2(\cdot)$.

2. Para todo conjunto no vacio de candidatos $C \subseteq n$, $\alpha_2(\cdot)$ es un equilibrio en las votaciones dado g

[8] Este es un supuesto estándar en la literatura de votaciones, el mismo implica que los agentes no votan por su opción menos preferida; de esta forma se considera que el voto es sincero. Así mismo, Una decision de voto α_{2j} sera dominada debilmente si existe otra decision de voto $\widehat{\alpha_{2j}} \in C \cup \{0\}$ tal que:

$$\sum_{i \in C} P^i(C, (\widehat{\alpha_{2j}}, \alpha_{2-j}))v^i_{2j}(g) \geq \sum_{i \in C} P^i(C, (\alpha_{2j}, \alpha_{2-j}))v^i_{2j}(g)$$

para toda α_{2-j}

Un equilibrio $\{\gamma_2^g, \alpha_2^g(\cdot)\}$ será un equilibrio de estrategias puras para el periodo dos si los agentes emplean estrategias puras en la etapa de entrada; i.e., $\gamma = s$ para alguna $s \in \{0,1\}^n$ y será un equilibrio de estrategias mixtas de otra forma.

Asociado con dicho equilibrio $\{\gamma_2^g, \alpha_2^g(\cdot)\}$ existen dos distribuciónes de probabilidad:

$$r_2(\gamma_2, \alpha_2(\cdot)),$$

donde $r_2(\gamma_2,\alpha_2(\cdot))(i)$; denota la probabilidad de que i sea el planificador de políticas publicas del segundo periodo y $r_2(\gamma_2,\alpha_2(\cdot))(0)$ como la probabilidad de que nadie compita por el cargo y

$$\pi_2(\gamma_2, \alpha_2(\cdot)\,, g),$$

donde $\pi_2(\gamma_2,\alpha_2(\cdot)\,,g)(t_2,T_2)$ es la probabilidad de que las políticas públicas del segundo periodo sean $\{t_2, T_2\} \in Z_2$.

Así pues, estan distribuciones de probabilidad estan relacionadas por:

$$\pi_2(\gamma_2, \alpha_2(\cdot), g)(t_2, T_2) = \sum_{j\in\{i\in n\cup\{0\}:(t_{2i}(g),T_{2i}(g))=(t_2,T_2)\}} r_2(\gamma_2, \alpha_2(\cdot))(j).$$

2.3. Equilibrio perfecto en subjuegos

Definimos un equilibrio perfecto en subjuegos[9] para este caso como:

$$\left\{\{\gamma_1, \alpha_1(\cdot)\}\,, \{\gamma_2^g, \alpha_2^g(\cdot)\}_{g\in\{0,1\}}\right\},$$

tal que:

1. $\{\gamma_1, \alpha_1(\cdot)\}$ es un equilibrio del periodo uno dadas las distribuciones de probabilidad sobre las políticas públicas del segundo periodo; es decir, el equilibrio del primer periodo se establece en base a lo que se espera para el segundo periodo,
2. $\{\gamma_2^g, \alpha_2^g(\cdot)\}_{g\in\{0,1\}}$, es un equilibrio del segundo periodo dado $g \in \{0,1\}$.

2.4. Secuencia de políticas públicas de equilibrio

Definimos una secuencia de políticas públicas de equilibrio como:

$$\{\{t_1^*, T_1^*, g^*\}, \pi_2^*\}\,;$$

la cual será una secuencia de políticas públicas de equilibrio si existe un equilibrio perfecto en subjuegos $\left\{\{\gamma_1, \alpha_1(\cdot)\}, \{\gamma_2^g, \alpha_2^g(\cdot)\}_{g\in\{0,1\}}\right\}$ tal que:

[9] Un equilibrio perfecto en subjuegos (o equilibrio de Nash perfecto en subjuegos) es un concepto de solución de un equilibrio de Nash utilizado en juegos dinámicos. Un perfil de estrategias es un equilibrio perfecto en subjuegos si genera un equilibrio de Nash en cada subjuego del juego original. Informalmente, esto significa que, si los jugadores juegan cualquier subjuego que consista en sólo una parte del juego original y si su comportamiento representa un equilibrio de Nash de ese subjuego más pequeño, entonces su comportamiento es un equilibrio perfecto en subjuegos. Es bien conocido que cada juego extensivo finito tiene un equilibrio perfecto en subjuegos.

Reinhard Selten demostró que cualquier juego que se pueda dividir en "subjuegosçontiene un subconjunto de todas las opciones disponibles en el juego principal y que por lo tanto tendrá una estrategia de equilibrio perfecto en subjuegos (posiblemente una estrategia mixta).

1. $\{t_1^*, T_1^*, g^*\}$ esta en el soporte de la distribución de probabilidad sobre las políticas públicas del primer periodo generadas por dicho equilibrio perfecto en subjuegos,

2. π_2^* es la distribución de probabilidad sobre las políticas públicas del segundo periodo generadas por el equilibrio perfecto en subjuegos dada g^*.

Capítulo 3

Resultados

3.1. Eficiencia de las políticas publicas

A continuación, analizamos las propiedades de las secuencias de políticas públicas de equilibrio generadas por el equilibrio perfecto en subjuegos. Comenzamos con una propiedad de eficiencia que se sigue del hecho de que los hacedores de políticas públicas son agentes que maximizan utilidad.

Sea:

$$\{\{t_1^*, T_1^*, g^*\}, \pi^*\},$$

una secuencia de políticas públicas de equilibrio y sea:

$$\left\{\{\gamma_1, \alpha_1(\cdot)\}, \{\gamma_2^g, \alpha_2^g(\cdot)\}_{g\in\{0,1\}}\right\};$$

el equilibrio perfecto en subjuegos asociado, supóngase que:

si $\gamma_{1j} = 1$ para algun agente $j \in n$; entonces:

$$\nexists \{t_{1i}, T_{1i}, g_i\} \in Z_1 \ ,$$

tal que:

$$V_i(\{\{t_1, T_1, g\}, \pi_2(\gamma_2^g, \alpha_2^g(\cdot), g\}) > V_i(\{\{t_1^*, T_1^*, g^*\}, \pi_2(\gamma_2^{g^*}, \alpha_2^{g^*}(\cdot), g^*)\}) \ \forall i \in n.$$

Es decir, si al menos algún determinado tipo de agente se convierte en candidato con probabilidad 1 condicionado a las políticas públicas del segundo periodo y al equilibrio $(\gamma_2^g, \alpha_2^g(\cdot))_{g\in\{0,1\}}$; entonces no existen políticas públicas alternativas para el primer periodo que generen más utilidad a cualquier otro agente de mismo tipo.

Esto se sigue del hecho que las políticas publicas establecidas en el primer periodo son optimas para algún hacedor de políticas publicas.

si $\{t_2^*, T_2^*\} \in \triangle(\pi_2^*)$;

$$\nexists \{t_2, T_2\} \in Z_2(g^*)$$

tal que:

$$v(\{t_2, T_2\}, a_{2i}(g^*)) > v(\{t_2^*, T_2^*\}, a_{2i}(g^*)) \quad \forall i \in n.$$

Es decir, no existen políticas públicas alternativas para el segundo periodo que dada la inversión pública $g^* \in \{0, 1\}$ que generen más utilidad a cualquier otro agente. Esto implica que una secuencia de políticas públicas serán eficientes cuando los agentes tengan preferencias idénticas sobre políticas públicas.

En este sentido; una secuencia de políticas públicas de equilibrio será eficiente si no existe otra una secuencia de políticas públicas de equilibrio viable que le genere más utilidad a los agentes.

Lo anterior puede ilustrarse centrándose en inversión pública $g^* \in \{0,1\}$. Supondremos que g^* es una mejora de pareto, en el sentido de que por cada secuencia de políticas públicas $\{(t_1, T_1, 0), \pi_2\}$,también existe otra secuencia de políticas públicas alternativa $\{(t_1', T_1', 1), \pi_2'\}$ tal que:

$$V_i(\{\{t_1^{'}, T_1^{'}, 1\}, \pi_2^{'}\}) > (\{t_1, T_1, 0\}, \pi_2\}) \ \ \forall i \in n.$$

3.2. Políticas públicas repetidas

Ahora se establece una condición para que en un equilibrio perfecto en subjuegos, exista una secuencia de políticas públicas de equilibrio en la cual efectivamente se lleve a cabo la inversión publica.

Sea:

$$\{\{t_1^*, T_1^*, g^*\}, \pi^*\}\,,$$

una secuencia política de equilibrio y sea:

$$\left\{\{\gamma_1, \alpha_1(\cdot)\}, \{\gamma_2^g, \alpha_2^g(\cdot)\}_{g\in\{0,1\}}\right\}$$

el equilibrio político asociado. Supóngase que:

$$\forall j \in \triangle(r_1(\{\gamma_1, \alpha_1(\cdot)\}))$$

y

$$\forall k \in \triangle(r_2(\{\gamma_2^1, \alpha_2^1(\cdot)\})).$$

$$\{t_{2j}(1), T_{2j}(1)\} = \{t_{2k}(1), T_{2k}(1)\}.$$

Así, si $\gamma_{1j} = 1$ para algún $j \in n$ y bajo el supuesto de que $g \in \{0,1\}$ es una mejora de pareto, entonces $g^* = 1$.

En este caso, se espera que todos los planificadores de políticas públicas del primer periodo anticipen que si llevan a cabo la inversión pública, entonces el planificador de políticas públicas del segundo periodo habría hecho exactamente lo mismo como si el segundo planificador de políticas públicas hubiera sido el primero. Siempre y cuando $g^* = 1$ represente una mejora de pareto. Así, si un hacedor de políticas públicas quien anticipa que alguien con sus mismas preferencias gobernara en el siguiente periodo, entonces dicho hacedor de políticas publicas siempre llevara a cabo la inversión pública.

3.3. Inversión pública como mejora de pareto

Los agentes se beneficiaran de la inversion publica siempre y cuando esta no involucre mas impuestos y menos transferencias; a continuación se desarrolla de manera más formal la idea de una distribución de probabilidad sobre las políticas públicas del segundo periodo la cual domina a alguna otra.

Para cualquier $\{t_2, T_2\} \in Z_2(0)$[1], sea:

$$\Psi(\{t_2, T_2\}) \in Z_1(1)$$

el conjunto de políticas publicas del segundo periodo tales que:

$$\{t_2, T_2\} \in Z_2(1)$$

para los cuales las transferencias son al menos tan altas y los impuestos al menos tan bajos.

decimos que una distribucion de probabilidad $\pi_2' : Z_2(1) \to \mathbb{R}_+$ domina a la distribucion de probabilidad $\pi_2 : Z_2(0) \to \mathbb{R}_+$ si:

1. $\forall \{t_2^{'}, T_2^{'}\} \in \triangle(\pi_2'),\ \ \exists \{t_2, T_2\} \in \triangle(\pi_2)$ tales que: $\{t_2^{'}, T_2^{'}\} \in \Psi(t_2, T_2)$
   En otras palabas, cada par de políticas publicas del segundo periodo $\{t_2^{'}, T_2^{'}\}$ que se seleccionen por π_2', involucran impuestos t_2 al menos tan bajos y transferencias T_2 al menos tan altas; que cualquier otro par de políticas publicas del segundo periodo $\{t_2, T_2\}$ seleccionado por π_2.

2. $\forall \{t_2, T_2\} \in \triangle(\pi_2)$:
$$\pi_2(\{t_2, T_2\}) \leq \sum_{\{t_2', T_2'\} \in \Psi(\{t_2, T_2\})} \pi_2'(\{t_2^{'}, T_2^{'}\}).$$

En otras palabas, por cada par de políticas públicas del segundo periodo $\{t_2, T_2\}$ seleccionado por: π_2; la distribución dominante: π_2' selecciona un par de políticas públicas del segundo periodo $\{t_2^{'}, T_2^{'}\}$ que involucran impuestos t_2 más bajos y transferencias T_2 mas altas con igual o mayor probabilidad.

Sea $Z_2^*(g) \subset Z_2(g)$ el conjunto de políticas públicas del segundo periodo $\{t_2, T_2\}$ que no es estrictamente pareto dominado, es decir:

$$\{t_2, T_2\} \in Z_2^*(g) \Longleftrightarrow \nexists \{t_2^{'}, T_2^{'}\} \in Z_2(g)$$

tal que:
$$v(t_2^{'}, T_2^{'}, a_{2i}(g)) > v(\{t_2, T_2\}, a_{2i}(g))\ \forall i \in n.$$

Por último se establece la condición para que la inversión publica $g = 1$ sea una mejora de pareto; para cada secuencia de políticas públicas:

$$\{\{t_1, T_1, 0\}, \pi_2\}$$

con
$$\triangle(\pi_2) \subset Z_2^*(0);$$
$$\exists \{t_1^{'}, T_1^{'}, 1\} \in Z_1$$

tal que si π_2' domina a π_2 entonces:

$$V_i(\{\{t_1^{'}, T_1^{'}, 1\}, \pi_2'\}) > V_i(\{\{t_1, T_1, 0\}, \pi_2\}), \forall i \in n.$$

Esto requiere que por cada secuencia de políticas públicas en la cual la inversion publica no se lleva a cabo, exista entonces un modo de financiar dicha inversion

[1] Es decir, no se llevo a cabo la inversión publica.

3.4. Fallo en políticas publicas

Como ya se discutió anteriormente la realización de inversión publica será potencialmente una mejora de pareto siempre que exista un modo de financiar dicha inversión, Así, diremos que un fallo en políticas públicas se dara cuando se presente una secuencia de políticas públicas de equilibrio:

$$\left\{\{t_1^*, T_1^*, 0^*\}, \pi_2^0\right\}$$

y exista un equilibrio perfecto en subjuegos asociado:

$$\left\{\{\gamma_1, \alpha_1(\cdot)\}, \{\gamma_2^0, \alpha_2^0(\cdot)\}_{g\in\{0,1\}}\right\}$$

tal que:

1. $\{t_1^*, T_1^*, 0^*\}$ esta en el soporte de la distribución de probabilidad sobre las políticas públicas del primer periodo generadas por dicho equilibrio perfecto en subjuegos,
2. π_2^0 es la distribución de probabilidad sobre las políticas públicas del segundo periodo generadas por el equilibrio perfecto en subjuegos dada $g^* = 0$.

Es decir, el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos resulta ineficiente en el sentido de que no hay una mejora paretiana del equilibrio.

Capítulo 4

Ejemplo: Ineficiencia en el modelo Besley-Coate con dos tipos de agentes

En el siguiente ejemplo se caracteriza un equilibrio en estrategias puras con dos candidatos. Supongamos que para los dos periodos los agentes se encuentran divididos dos tipos; altos $n_H \subset n$ y bajos $n_L \subset n$ tales que:

$$\#n_H = \#n_L.$$

La utilidad de los agentes estará dada por la forma general:

$$v_{\tau i}(t_\tau, T_\tau, a_i) = u_{\tau i}((1 - t_\tau)a_{\tau i}\ell_{\tau i}(t_\tau, T_\tau, a_i) + T_\tau).$$

Supongamos ademas que los agentes son neutrales al riesgoa los agentes solo les importa maximizar su consumo y su tiempo de ocio $l_{\tau i} = 0$, Así:

$$l_{\tau i} + \ell_{\tau i} = 1,$$

$$0 + \ell_{\tau i} = 1,$$

La utilidad de los agentes quedara de la siguiente forma:

$$v_{\tau i}(t_\tau, T_\tau, a_i) = u_{\tau i}((1 - t_\tau)a_{\tau i}(t_\tau, T_\tau, a_i) + T_\tau).$$

Sea $a_{\tau H}$ la habilidad de un agente alto y sea $a_{\tau L}$ la habilidad de un agente alto, además; $a_{\tau H} > a_{\tau L}$.

Así, la utilidad de los agentes altos $n_H \subset n$ será:

$$v_{\tau i}(t_\tau, T_\tau, a_i) = u_{\tau i}((1 - t_\tau)a_{\tau H}(t_\tau, T_\tau, a_i) + T_\tau).$$

y la utilidad de los agentes bajos $n_L \subset n$ estara dada por:

$$v_{\tau i}(t_\tau, T_\tau, a_i) = u_{\tau i}((1 - t_\tau)a_{\tau L}(t_\tau, T_\tau, a_i) + T_\tau).$$

Si la inversión pública $g \in \{1, 0\}$ no se llevo a cabo, es decir: $g = 0$, las habilidades de los agentes en el segundo periodo son iguales a las del primer periodo, $a_{1i} = a_{2i}$. Así pues, si la inversión pública si se llevo a cabo, es decir: $g = 1$, se incrementa entonces la habilidad $a_{\tau H}$ de los de agentes altos $n_H \subset n$. Formalmente:

$$a_{2H}(1) = a_{2H} + \delta \ \ \forall H \in n_H \ ,$$

mientras que:

$$a_{2L}(1) = a_{2L} \ \forall L \in n_L.$$

Por ultimo, supóngase que:

$$\frac{\delta}{2} > \frac{K}{n} > \frac{\delta}{4}$$

este es el más importante de los supuestos dado que:

$$\frac{\delta}{2} > \frac{K}{n}$$

implica que la inversión publica g es potencialmente una mejora de pareto[1].

Para ambos periodos existiran las siguientes particiones sinceras:

$$(n_H, n_L, n_0),$$

tal que:

$$\#n_H = \#n_L.$$

Ahora se demostrara la existencia de una secuencia de una secuencia de políticas públicas de equilibrio:

$$\left\{\{t_1^*, T_1^*, 0^*\}, \pi_2^0\right\}$$

y un equilibrio perfecto en subjuegos:

$$\left\{\{\gamma_1, \alpha_1(\cdot)\}, \left\{\gamma_2^0, \alpha_2^0(\cdot)\right\}_{g \in \{0,1\}}\right\},$$

donde inversión publica no se lleva a cabo, es decir: $g^* = 0$, lo cual constituye un fallo en las políticas públicas.

4.1. Segundo periodo

4.1.1. Politicas publicas

Comenzamos con la resolución del juego por inducción hacia atrás y empezamos por describir el equilibrio del periodo dos

Tomaremos como dada la inversión publica $g \in \{0, 1\}$ tal que $g = 0$.

Las políticas publicas preferidas para algun agente alto estarán dadas por:

$$\{t_{2H}(0), T_{2H}(0)\} = \arg\max \{v(t_2, T_2, a_{2H}(0)) \mid \{t_2, T_2\} \in Z_2(0)\}.$$

[1] Dada una asignación inicial de bienes entre un conjunto de agentes, un cambio hacia una nueva asignación que al menos mejora la situación de un individuo sin hacer que empeore la situación de los demás se denomina mejora de Pareto. Una asignación se define como "pareto-eficiente.º "pareto-óptimaçuando no pueden lograrse nuevas mejoras de Pareto.

Asumiremos que la solución es única, asociada con las preferencias de cada agente[2] alto donde:

$$v_{2H}^{H^*}(0) = v(t_{2H}(0), T_{2H}(0), a_{2H}(0)),$$

es la utilidad de un agente $H \in n_H$ para el periodo dos si el agente $H^* \in n_H$ es electo como hacedor de politica publica, y las imputaciones de utilidad seran:

$$(v_{21}^{H^*}(0), ..., v_{2n_H}^{H^*}(0)).$$

Ahora, la utilidad de un agente $H \in n_H$ para el periodo dos si el agente $L^* \in n_L$ es electo como hacedor de politica publica.

$$v_{2H}^{L^*}(0) = v(t_{2L}(0), T_{2L}(0), a_{2H}(0)),$$

y las imputaciones de utilidad seran:

$$(v_{21}^{L^*}(0), ..., v_{2n_H}^{L^*}(0)).$$

Si ningún agente decide entrar a la competencia por el puesto de hacedor de política publica entonces la utilidad de un agente $H \in n_H$ estara dada por:

$$v_{2H}^{0}(0) = v(t_{20}(0), T_{20}(0), a_{2H}(0)),$$

y las imputaciones de utilidad seran:

$$(v_{21}^{0}(0), ..., v_{2n_H}^{0}(0)).$$

La tasa de impuestos preferida de un agente alto estará dada por:

$$t_{2H}(H) = \arg\max \{v_{2H}((1-t_2)a_{2H} + T_2) : t_{2H} \in [0,1]\}.$$

y considerando la restricción en forma general:

$$t_2 \sum_{i=1}^{n} a_{2i}\ell_{2i}(t_2, T_2, a_{2i}) - nT_2 = 0.$$

la cual queda de la siguiente forma:

$$t_2 \frac{n}{2} a_{2H} + \frac{n}{2} a_{2L} - nT_2 = 0.$$

Las políticas publicas preferidas para algun agente bajo estarán dadas por:

$$\{t_{2L}(0), T_{2L}(0)\} = \arg\max \{v(t_2, T_2, a_{2L}(0)) \mid \{t_2, T_2\} \in Z_2(0)\}.$$

Asumiremos que la solución es única, asociada con las preferencias de cada agente bajo donde:

$$v_{2L}^{H^*}(0) = v(t_{2H}(0), T_{2H}(0), a_{2L}(0)),$$

es la utilidad de un agente $L \in n_L$ para el periodo dos si el agente $H^* \in n_H$ es electo como hacedor de politica publica, y las imputaciones de utilidad seran:

$$(v_{21}^{H^*}(0), ..., v_{2n_L}^{H^*}(0)).$$

[2] Es decir, cada tipo de agente tendrá una solución distinta, en este caso como solo existen dos tipos de agentes, existirán entonces dos soluciones.

Ahora, la utilidad de un agente $L \in n_L$ para el periodo dos si el agente $L^* \in n_L$ es electo como hacedor de politica publica.

$$v_{2L}^{L^*}(0) = v(t_{2L}(0), T_{2L}(0), a_{2L}(0)),$$

y las imputaciones de utilidad seran:

$$(v_{21}^{L^*}(0), ..., v_{2n_L}^{L^*}(0)).$$

Si ningún agente decide entrar a la competencia por el puesto de hacedor de política publica entonces la utilidad un agente $H \in n_H$ estara dada por:

$$v_{2L}^{0}(g) = v(t_{20}(0), T_{20}(0), a_{2L}(0)),$$

y las imputaciones de utilidad seran:

$$(v_{21}^{0}(0), ..., v_{2n_L}^{0}(0)).$$

La tasa de impuestos preferida de un agente bajo estará dada por:

$$t_{2L}(L) = \arg\max \left\{ v_{2L}((1-t_2)a_{2L} + T_2) : t_{2L} \in [0,1] \right\}.$$

y considerando la restricción:

$$t_2 \sum_{i=1}^{n} a_{2i}\ell_{2i}(t_2, T_2, a_{2i}) - nT_2 = 0.$$

la cual queda de la siguiente forma:

$$t_2 \frac{n}{2} a_{2H} + \frac{n}{2} a_{2L} - nT_2 = 0.$$

Asumimos que las políticas públicas preferidas de un agente alto $H \in n_H$ son:

$$\{t_{2H}(0), T_{2H}(0)\} = \{0, 0\};$$

entonces:

$$\{t_{2H}(0), T_{2H}(0)\} = \arg\max \left\{ v(0, 0, a_{2H}(0)) \mid \{t_2, T_2\} \in Z_2(0) \right\}.$$

Así:

$$v_{2H}^{H^*}(0) = a_{2H} > \overline{a},$$

donde:

$$\overline{a} = \frac{a_{2H} + a_{2L}}{2},$$

$$v_{2H}^{L^*}(0) = \overline{a},$$

$$v_{2H}^{0}(0) = a_{2H}.$$

Por lo tanto, las políticas públicas preferidas de algún agente alto $H \in n_H$ dado que son las que le generan mayor utilidad seran:

$$\{t_{2H}(0), T_{2H}(0)\} = \{0, 0\}.$$

Así mismo, si asumimos que las políticas públicas preferidas de un agente bajo $L \in n_L$ son:

$$\{t_{2L}(0), T_{2L}(0)\} = \{1, \overline{a}\};$$

entonces:

$$\{t_{2L}(0), T_{2L}(0)\} = \arg\max\{v(1, \overline{a}, a_{2L}(0)) \mid \{t_2, T_2\} \in Z_2(0)\}.$$

Así:

$$v_{2L}^{H^*}(0) = a_{2L} < \overline{a},$$

donde:

$$\overline{a} = \frac{a_{2H} + a_{2L}}{2},$$

$$v_{2L}^{L^*}(0) = \overline{a},$$

$$v_{2H}^{0}(0) = a_{2L}.$$

Por lo tanto, las políticas públicas preferidas de algún agente bajo $L \in n_l$ dado que son las que le generan mayor utilidad seran:

$$\{t_{2L}(0), T_{2L}(0)\} = \{1, \overline{a}\}.$$

Ahora se presentan las utilidades de forma resumida en la siguiente tabla; tomando como dada $g = 0$, las utilidades quedan de la siguiente forma:

0	$v_{2L}^{H^*}$	$v_{2L}^{L^*}$	v_{2H}^{0}
$v_{2H}^{H^*}$	a_{2H}, a_{2L}	$a_{2H}, \overline{a}$	a_{2H}, a_{2L}
$v_{2H}^{L^*}$	$\overline{a}, a_{2L}$	$\overline{a}, \overline{a}$	$\overline{a}, a_{2L}$
v_{2H}^{0}	a_{2H}, a_{2L}	$a_{2H}, \overline{a}$	a_{2H}, a_{2L}

Ahora tomamos como dada la inversión publica $g \in \{0, 1\}$ tal que $g = 1$.
Las políticas publicas preferidas para algun agente alto estarán dadas por:

$$\{t_{2H}(1), T_{2H}(1)\} = \arg\max\{v(t_2, T_2, (a_{2H} + \delta)(1)) \mid \{t_2, T_2\} \in Z_2(1)\}.$$

Asumiremos que la solución es única, asociada con las preferencias de cada agente alto donde:

$$v_{2H}^{H^*}(1) = v(t_{2H}(1), T_{2H}(1), (a_{2H} + \delta)(1)),$$

es la utilidad de un agente $H \in n_H$ para el periodo dos si el agente $H^* \in n_H$ es electo como hacedor de politica publica, y las imputaciones de utilidad seran:

$$(v_{21}^{H^*}(1), ..., v_{2n_H}^{H^*}(1)).$$

Ahora, la utilidad de un agente $H \in n_H$ para el periodo dos si el agente $L^* \in n_L$ es electo como hacedor de politica publica.

$$v_{2H}^{L^*}(1) = v(t_{2L}(1), T_{2L}(1), (a_{2H} + \delta)(1)),$$

y las imputaciones de utilidad seran:

$$(v_{21}^{L^*}(1), ..., v_{2n_H}^{L^*}(1)).$$

Si ningún agente decide entrar a la competencia por el puesto de hacedor de política publica entonces la utilidad de un agente $H \in n_H$ estara dada por:

$$v_{2H}^{0}(1) = v(t_{20}(1), T_{20}(1), (a_{2H} + \delta)(1)),$$

y las imputaciones de utilidad seran:

$$(v_{21}^{0}(1), ..., v_{2n_H}^{0}(1)).$$

La tasa de impuestos preferida de un agente alto estará dada por:

$$t_{2H}(H) = \arg\max \left\{ v_{2H}((1-t_2)(a_{2H}+\delta)+T_2) : t_{2H} \in [0,1] \right\}.$$

y considerando la restricción:

$$t_2 \sum_{i=1}^{n} a_{2i}\ell_{2i}(t_2, T_2, a_{2i}) - nT_2 = 0.$$

la cual queda de la siguiente forma:

$$t_2 \frac{n}{2}(a_{2H}+\delta) + \frac{n}{2}a_{2L} - nT_2 = 0.$$

Las políticas publicas preferidas para algun agente bajo estarán dadas por:

$$\{t_{2L}(1), T_{2L}(1)\} = \arg\max \left\{ v(t_2, T_2, a_{2L}(1)) \mid \{t_2, T_2\} \in Z_2(1) \right\}.$$

Asumiremos que la solución es única, asociada con las preferencias de cada agente bajo donde:

$$v_{2L}^{H^*}(1) = v(t_{2H}(1), T_{2H}(1), a_{2L}(1)),$$

es la utilidad de un agente $L \in n_L$ para el periodo dos si el agente $H^* \in n_H$ es electo como hacedor de politica publica, y las imputaciones de utilidad seran:

$$(v_{21}^{H^*}(1), ..., v_{2n_L}^{H^*}(1)).$$

Ahora, la utilidad de un agente $L \in n_L$ para el periodo dos si el agente $L^* \in n_L$ es electo como hacedor de politica publica.

$$v_{2L}^{L^*}(1) = v(t_{2L}(1), T_{2L}(1), a_{2L}(1)),$$

y las imputaciones de utilidad seran:

$$(v_{21}^{L^*}(1), ..., v_{2n_L}^{L^*}(1)).$$

Si ningún agente decide entrar a la competencia por el puesto de hacedor de política publica entonces la utilidad del agente $L \in n_H$ estara dada por:

$$v_{2L}^{0}(1) = v(t_{20}(1), T_{20}(1), a_{2L}(1)),$$

y las imputaciones de utilidad seran:

$$(v_{21}^{0}(1), ..., v_{2n_L}^{0}(1)).$$

La tasa de impuestos preferida de un agente bajo estará dada por:

$$t_{2L}(L) = \arg\max \left\{ v_{2L}((1-t_2)a_{2L}+T_2) : t_{2L} \in [0,1] \right\}.$$

y considerando la restricción:

$$t_2 \sum_{i=1}^{n} a_{2i}\ell_{2i}(t_2, T_2, a_{2i}) - nT_2 = 0.$$

la cual queda de la siguiente forma:

$$t_2 \frac{n}{2}(a_{2H} + \delta) + \frac{n}{2} a_{2L} - nT_{2} = 0.$$

Asumimos que las políticas públicas preferidas de un agente alto $H \in n_H$ son:

$$\{t_{2H}(1), T_{2H}(1)\} = \{0, 0\}$$

entonces:

$$\{t_{2H}(1), T_{2H}(1)\} = \arg\max \{v(0, 0, a_{2H}(1)) \mid \{t_2, T_2\} \in Z_2(1)\}.$$

Así:

$$v_{2H}^{H^*}(1) = a_{2H} + \delta > \overline{a} + \frac{\delta}{2}$$

donde:

$$\overline{a} = \frac{a_{2H} + a_{2L}}{2},$$

$$v_{2H}^{L^*}(1) = \overline{a} + \frac{\delta}{2}$$

$$v_{2H}^{0}(1) = a_{2H} + \delta > \overline{a} + \frac{\delta}{2}$$

Por lo tanto, las políticas públicas preferidas de algún agente alto agente alto $H \in n_H$ dado que son las que le generan mayor utilidad seran:

$$\{t_{2H}(1), T_{2H}(1)\} = \{0, 0\};$$

Así mismo, si asumimos que las políticas públicas preferidas de un agente bajo $L \in n_L$ son:

$$\{t_{2L}(1), T_{2L}(1)\} = \{1, \overline{a} + \frac{\delta}{2}\};$$

entonces:

$$\{t_{2L}(0), T_{2L}(0)\} = \arg\max \left\{ v(1, \overline{a} + \frac{\delta}{2}, a_{2L}(1)) \mid \{t_2, T_2\} \in Z_2(1) \right\}.$$

Así:

$$v_{2L}^{H^*}(1) = a_{2L} < \overline{a} + \frac{\delta}{2}$$

donde:

$$\overline{a} = \frac{a_{2H} + a_{2L}}{2},$$

$$v_{2L}^{L^*}(1) = \overline{a} + \frac{\delta}{2}$$

$$v_{2L}^{0}(1) = a_{2L} < \overline{a} + \frac{\delta}{2}$$

Por lo tanto, las políticas públicas preferidas de algún agente alto agente bajo $L \in n_L$ dado que son las que le generan mayor utilidad seran:

$$\{t_{2H}(1), T_{2H}(1)\} = \{1, \overline{a} + \frac{\delta}{2}\}.$$

Ahora se presentan las utilidades de forma resumida en la siguiente tabla; tomando como dada $g = 1$, las utilidades quedan de la siguiente forma:

1	$v_{2L}^{H^*}$	$v_{2L}^{L^*}$	v_{2H}^{0}
$v_{2H}^{H^*}$	$a_{2H} + \delta, a_{2L}$	$a_{2H} + \delta, \overline{a} + \frac{\delta}{2}$	$a_{2H} + \delta, a_{2L}$
$v_{2H}^{L^*}$	$\overline{a} + \frac{\delta}{2}, a_{2L}$	$\overline{a} + \frac{\delta}{2}, \overline{a} + \frac{\delta}{2}$	$\overline{a} + \frac{\delta}{2}, a_{2L}$
v_{2H}^{0}	$a_{2H} + \delta, a_{2L}$	$a_{2H} + \delta, \overline{a} + \frac{\delta}{2}$	$a_{2H} + \delta, a_{2L}$

4.1.2. Votaciones

Tomaremos como dado el conjunto de cantidatos:

$$\{H^*, L^*\} = C \text{ tal que } C \subset n.$$

Sea:

$$\alpha_{2H} \in C \cup \{0\}\,;$$

el voto del agente alto $H \in n_H$, donde:

$$\alpha_{2H} = H^*,$$

denota un agente $H \in n_H$ votando por el candidato H^*,

$$\alpha_{2H} = L^*,$$

denota un agente $H \in n_H$ votando por el candidato L^*,

$$\alpha_{2H^*} = H^*,$$

denota el candidato $H^* \in n_H$ votando por si mismo.

Así mismo;

$$\alpha_{2H} = 0$$

denota al agente $H \in n_H$ absteniendose de votar.

De acuerdo a lo establecido, se espera que un agente que ha decidido competir por el cargo de hacedor de política pública actué de manera racional y su mejor respuesta sea votar por si mismo. Así también; se espera que la mejor respuesta de los agentes altos sea votar por los candidatos altos y que la mejor respuesta de los agentes bajos sea votar por los candidatos bajos.

Así mismo, sea:

$$\alpha_{2L} \in C \cup \{0\}$$

el voto un agente bajo $L \in n_L$, donde:

$$\alpha_{2L} = H^*,$$

denota un agente $L \in n_L$ votando por el candidato H^*,

$$\alpha_{2L} = L^*,$$

denota un agente $L \in n_L$ votando por el candidato L^*,

$$\alpha_{2L^*} = L^*$$

denota al candidato $L^* \in n_L$ votando por si mismo.

Así mismo;

$$\alpha_{2L} = 0$$

denota al agente $L \in n_L$ absteniendose de votar.

Recordemos como se supuso al principio que:

$$\#n_H = \#n_L.$$

Así, el vector de decisiones de voto será:

$$\alpha_2 = (H^*, ..., H^*, L^*, ..., L^*);$$

donde:

$$\#H^* = \#L^*,$$

Así, la cardinalidad del conjunto de candidatos ganadores:

$$\#m(C, \alpha_2) = 2$$

Por lo tanto; si el candidato $H^* \in m(C, \alpha_2)$; la probabilidad de que dicho candidato gane sera:

$$P^{H^*}(C, \alpha_2) = \frac{1}{2},$$

Así mismo, si el candidato $L^* \in m(C, \alpha_2)$; la probabilidad de que dicho candidato gane será:

$$P^{L^*}(C, \alpha_2) = \frac{1}{2},$$

Supongamos ahora que $g = 0$.

La mejor estrategia de votacion un agente H estará dada por la forma general:

$$\alpha_{2j}^* \in \arg\max \left\{ \sum_{i \in C} P^i(C, (\alpha_{2j}, \alpha_{2-j}^*)) v_{2j}^i(g) \mid \alpha_{2j} \in C \cup \{0\} \right\}.$$

$$\alpha_{2H}^* \in \arg\max \left\{ \frac{1}{2} v_{2H}^{H^*}(0) + \frac{1}{2} v_{2H}^{L^*}(0) \mid \alpha_{2H} \in C \cup \{0\} \right\}$$

la cual quedara como:

$$\alpha_{2H}^* \in \arg\max \left\{ \frac{1}{2} a_{2H} + \frac{1}{2} \overline{a} \mid \alpha_{2H} \in C \cup \{0\} \right\}.$$

Así:

$$\alpha_{2H}^* = (H^*, ..., H^*);$$

1. $\alpha_{2H}^* = H^*$ es una mejor respuesta a $\alpha_{2L}^* = L^*$
2. α_{2H}^* no es una estrategia de voto dominada débilmente.

Así mismo, la mejor estrategia de votacion un agente L estará dada por la forma general:

$$\alpha_{2j}^* \in \arg\max \left\{ \sum_{i\in C} P^i(C, (\alpha_{2j}, \alpha_{2-j}^*)) v_{2j}^i(g) \mid \alpha_{2j} \in C \cup \{0\} \right\},$$

$$\alpha_{2L}^* \in \arg\max \left\{ \frac{1}{2} v_{2L}^{H^+}(0) + \frac{1}{2} v_{2L}^{L^*}(0) \mid \alpha_{2H} \in C \cup \{0\} \right\}$$

la cual quedara como:

$$\alpha_{2L}^* \in \arg\max \left\{ \frac{1}{2} a_{2L} + \frac{1}{2} \overline{a} \mid \alpha_{2H} \in C \cup \{0\} \right\}.$$

sabemos que:

$$\frac{1}{2} a_{2L} + \frac{1}{2} \overline{a} > a_{2L}$$

Así:

$$\alpha_{2L}^* = (L^*, ..., L^*);$$

1. $\alpha_{2L}^* = L^*$ es una mejor respuesta a $\alpha_{2H}^* = H^*$
2. α_{2L}^* no es una estrategia de voto dominada débilmente.

Ahora; dada $g \in \{0, 1\}$ tal que $g = 1$.
La mejor estrategia de votacion un agente H estará dada por la forma general:

$$\alpha_{2j}^* \in \arg\max \left\{ \sum_{i\in C} P^i(C, (\alpha_{2j}, \alpha_{2-j}^*)) v_{2j}^i(g) \mid \alpha_{2j} \in C \cup \{0\} \right\}.$$

$$\alpha_{2H}^* \in \arg\max \left\{ \frac{1}{2} v_{2H}^{H^*}(1) + \frac{1}{2} v_{2H}^{L^*}(1) \mid \alpha_{2H} \in C \cup \{0\} \right\}$$

la cual quedara como:

$$\alpha_{2H}^* \in \arg\max \left\{ \frac{1}{2}(a_{2H} + \delta) + \frac{1}{2}(\overline{a} + \frac{\delta}{2}) \mid \alpha_{2H} \in C \cup \{0\} \right\},$$

$$\alpha_{2H}^* \in \arg\max \left\{ \frac{1}{2} a_{2H} + \frac{1}{2} \overline{a} + \frac{3}{2} \delta \mid \alpha_{2H} \in C \cup \{0\} \right\}.$$

Así:

$$\alpha_{2H}^* = (H^*, ..., H^*);$$

1. $\alpha_{2H}^* = H^*$ es una mejor respuesta a $\alpha_{2L}^* = L^*$
2. α_{2H}^* no es una estrategia de voto dominada débilmente.

Así mismo, la mejor estrategia de votacion un agente L estará dada por la forma general:

$$\alpha_{2j}^* \in \arg\max \left\{ \sum_{i\in C} P^i(C, (\alpha_{2j}, \alpha_{2-j}^*)) v_{2j}^i(g) \mid \alpha_{2j} \in C \cup \{0\} \right\},$$

$$\alpha_{2L}^{*} \in \arg\max \left\{ \frac{1}{2} v_{2L}^{H^*}(1) + \frac{1}{2} v_{2L}^{L^*}(1) \mid \alpha_{2H} \in C \cup \{0\} \right\}$$

la cual quedara como:

$$\alpha_{2L}^{*} \in \arg\max \left\{ \frac{1}{2}(a_{2H} + \delta) + \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{\delta}{2} \mid \alpha_{2H} \in C \cup \{0\} \right\}.$$

sabemos que:

$$\frac{1}{2} a_{2L} + \frac{1}{2}\overline{a} > a_{2L}$$

Así:

$$\alpha_{2L}^{*} = (L^*, ..., L^*);$$

1. $\alpha_{2L}^{*} = L^*$ es una mejor respuesta a $\alpha_{2H}^{*} = H^*$
2. α_{2L}^{*} no es una estrategia de voto dominada débilmente.

4.1.3. Entrada

En este ejemplo se caracteriza un equilibrio con en estrategias puras en la entrada[3]con dos candidatos. En esta primera etapa del segundo periodo, los agentes solo conocen la distribucion de habilidades sobre los demas agentes: $(a_{21}, ..., a_{2n})$, y por ende las preferencias de los demas agentes, tambien se toma como dada la inversion publica $g \in \{0, 1\}$ y entonces los agentes decidiran si competiran por el cargo a fin de establecer las politicas publicas de su preferencia.

Sea s_{2H} donde:

$$s_{2H} \in \{0, 1\},$$

es una estrategia pura para el agente H, tal que si$s_{2H} = 1$ entonces el agente H es un candidato y $s_{2H} = 0$ en caso contrario. Así, el conjunto de candidatos altos será:

$$C(s_2) = \{H^* \mid s_{2H^*} = 1\}.$$

Sea s_{2L} donde:

$$s_{2L} \in \{0, 1\},$$

es una estrategia pura para el agente L, tal que si$s_{2L} = 1$ entonces el agente L es un candidato y $s_{2L} = 0$ en caso contrario. Así, el conjunto de candidatos bajos será:

$$C(s_2) = \{L^* \mid s_{2L^*} = 1\}.$$

El pago esperado de cada agente para cualquier perfil de estrategias, dependerá del comportamiento que los agentes anticipan de las votaciones. Así, se denota como $\alpha_2(C)$ el comportamiento esperado en las votaciones que los agentes anticipan dado un conjunto de candidatos C.

si H^* y L^* desean competir entre si por el puesto de hacedor de políticas publicas debe cumplirse que el conjunto de candidatos ganadores sea de la forma:

$$m(\{H^*, L^*\}, \alpha_2(\{H^*, L^*\})) = \{H^*, L^*\}$$

[3]Un equilibrio será un equilibrio de estrategias puras para el periodo dos si los agentes emplean estrategias puras en la etapa de entrada; i.e., $\gamma = s$ para alguna $s_{2j} \in \{0, 1\}$.

Dado que cualquier equilibrio en las votaciones con dos candidatos involucra votaciones sinceras, se sigue que deben existir una partición sincera:

$$(n_{H^*}, n_{L^*}, n_0)$$

tal que si:

$$\#n_H = \#n_L,$$

entonces como se vio anteriormente se cumple ademas que:

$$\frac{1}{2}v_{2H}^{H^*}(g) > \frac{1}{2}v_{2H}^{L^*}(g),$$

$$\frac{1}{2}v_{2L}^{L^*}(g) > \frac{1}{2}v_{2L}^{H^*}(g).$$

Dado que las preferencias sobre las politicas publicas de los candidatos H^* y L^*, son lo suficientemente distintas se sigue que:

$$n_0 = \{I \in n \mid v_{2I}^{H} = v_{2I}^{L}\}$$

y

$$\#n_0 + 1 < \#n_H = \#n_L,$$

donde n_0 es la particion de los agentes $I \in n$ que son indiferentes entre las políticas publicas. Así se establece que en la particion n_{H^*} consiste solamente de agentes los cuales tienen una estricta preferencia sobre las politicas publicas del candidato H^*. Así mismo, la particion n_{L^*} consiste solamente de agentes los cuales tienen una estricta preferencia sobre las politicas publicas del candidato L^*. Por último; si menos de un tercio de los votantes es indiferente entre los dos candidatos, tendremos entonces un equilibrio en estrategias puras en la entrada.

El candidato alto H^* asumira una estrategia pura $s_{2H^*} = 1$,o bien la probabilidad de que H^* juegue con la estrategia pura $s_{2H^*} = 1$ será 1, así la estrategia mixta del agente alto H^* sera:

$$\gamma_{2H^*} = 1.$$

El candidato bajo L^* asumira una estrategia pura $s_{2L^*} = 1$,o bien la probabilidad de que L^* juegue con la estrategia pura $s_{2L^*} = 1$ será 1, así la estrategia mixta del agente bajo L^* sera:

$$\gamma_{2L^*} = 1.$$

Dadas estas particiones, cada candidato espera ganar con probabilidad:

$$P^{H^*}(\{H^*, L^*\}, \alpha_2(\{H^*, L^*\})) = P^{L^*}(\{H^*, L^*\}, \alpha_2(\{H^*, L^*\})) = \frac{1}{2}$$

Así, tomemos como dado $g \in \{0, 1\}$ tal que $g = 0$, entonces la forma general:

$$U_{2j}(s_2; g, \alpha_2(\cdot)) = \sum_{i \in C(s_2)} P^i(C(s_2), \alpha_2(C(s_2)))v_{2j}^i + P^0(C(s_2))v_{2j}^0,$$

quedara de la siguiente forma:

$$U_{2H}(s_2; 0, \alpha_2(\{H^*, L^*\})) = \frac{1}{2}v_{2H}^{H^*} + \frac{1}{2}v_{2H}^{L^*},$$

$$U_{2H}(s_2; 0, \alpha_2(\{H^*, L^*\})) = \frac{1}{2}a_{2H} + \frac{1}{2}\overline{a},$$

El pago esperado de un agente H dada γ_{2H^*} estará dado por la forma general:

$$\begin{aligned} u_{2j}(\gamma_2; g, \alpha_2(C)) &= \prod_{i=1}^{n} \gamma_{2i} U_{2j}(1,...,1; g, \alpha_2(\cdot)) + \prod_{i=2}^{n} \gamma_{2i}(1-\gamma_{21}) U_{2j}(0,1,...,1; g, \alpha_2(\cdot)) \\ &+ ... + \prod_{i=1}^{n}(1-\gamma_{2i}) U_{2j}(0,...,0; g, \alpha_2(\cdot)). \end{aligned}$$

la cual quedara de la siguiente forma:

$$u_{2H}(\gamma_2; 0, \alpha_2(\{H^*, L^*\})) = \frac{1}{2} a_{2H} + \frac{1}{2}\overline{a},$$

Así mismo, los pagos esperado de un agente L serán:

$$U_{2L}(s_2; 0, \alpha_2(\{H^*, L^*\})) = \frac{1}{2} v_{2L}^{H^*} + \frac{1}{2} v_{2L}^{L^*},$$

$$U_{2L}(s_2; 0, \alpha_2(\{H^*, L^*\})) = \frac{1}{2} a_{2L} + \frac{1}{2}\overline{a},$$

el pago esperado de un agente L dada γ_{LH^*} será:

$$u_{2L}(\gamma_2; 0, \alpha_2(\{H^*, L^*\}) = \frac{1}{2} a_{2L} + \frac{1}{2}\overline{a}.$$

A continuacion, tomemos como dado $g \in \{0,1\}$ tal que $g = 1$, entonces la forma general:

$$U_{2j}(s_2; g, \alpha_2(\cdot)) = \sum_{i \in C(s_2)} P^i(C(s_2), \alpha_2(C(s_2))) v_{2j}^i + P^0(C(s_2)) v_{2j}^0,$$

quedara de la siguiente forma:

$$U_{2H}(s_2; 1, \alpha_2(\{H^*, L^*\})) = \frac{1}{2} v_{2H}^{H^*} + \frac{1}{2} v_{2H}^{L^*},$$

$$U_{2H}(s_2; 1, \alpha_2(\{H^*, L^*\})) = \frac{1}{2}(a_{2H} + \overline{a}) + \frac{3}{4}\delta,$$

El pago esperado de un agente H dada γ_{2H^*} estara dado por la forma general:

$$\begin{aligned} u_{2j}(\gamma_2; g, \alpha_2(C)) &= \prod_{i=1}^{n} \gamma_{2i} U_{2j}(1,...,1; g, \alpha_2(\cdot)) + \prod_{i=2}^{n} \gamma_{2i}(1-\gamma_{21}) U_{2j}(0,1,...,1; g, \alpha_2(\cdot)) \\ &+ ... + \prod_{i=1}^{n}(1-\gamma_{2i}) U_{2j}(0,...,0; g, \alpha_2(\cdot)). \end{aligned}$$

la cual quedara de la siguiente forma:

$$u_{2H}(\gamma_2; 0, \alpha_2(\{H^*, L^*\})) = \frac{1}{2}(a_{2H} + \overline{a}) + \frac{3}{4}\delta,$$

Así mismo los pagos esperado de un agente L serán:

$$U_{2L}(s_2; 0, \alpha_2(\{H^*, L^*\})) = \frac{1}{2} v_{2L}^{H^*} + \frac{1}{2} v_{2L}^{L^*},$$

$$U_{2L}(s_2; 0, \alpha_2(\{H^*, L^*\})) = \frac{1}{2}(a_{2L} + \overline{a}) + \frac{\delta}{4},$$

el pago esperado de un agente L dada γ_{2L^*} será:

$$u_{2L}(\gamma_2; 0, \alpha_2(\{H^*, L^*\})) = \frac{1}{2} a_{2L} + \frac{1}{2}\overline{a}.$$

4.1.4. Equilibrio

Combinando el análisis de las tres fases y dado $g \in \{0,1\}$, definimos un equilibrio para el periodo dos como:

$$\{\gamma_2^g, \alpha_2^g(\cdot)\}\,;$$

donde γ_2^g es un vector de decisiones de entrada:

$$\gamma_2^g = \ (\gamma_{2H^*}^g,\ \gamma_{2L^*}^g, \gamma_{21}^g, ..., \gamma_{2j}^g) = (1,1,0,...,0);$$

$j = n/\{H^*, L^*\}$ y $\alpha_2^g(\cdot)$ es una función:

$$\alpha_2^g(\{H^*, L^*\}),$$

que describe el comportamiento esperado en las votaciones. Así, tenemos un equilibrio en donde dado $g \in \{0,1\}$, existirán solo dos candidatos H^* y L^*, donde de acuerdo al comportamiento esperado en las votaciones ambos tendrán $\frac{1}{2}$ de posibilidades resultar electos como hacedor de políticas publicas.

Así mismo, existen dos distribuciónes de probabilidad:

$$r_2(\gamma_2, \alpha_2(\cdot)),$$

donde $r_2(\gamma_2,\alpha_2(\cdot))(i)$; denota la probabilidad de que i sea el planificador de políticas publicas del segundo periodo y $r_2(\gamma_2,\alpha_2(\cdot))(0)$ como la probabilidad de que nadie compita por el cargo y

$$\pi_2(\gamma_2, \alpha_2(\cdot)\,, g),$$

donde $\pi_2(\gamma_2,\alpha_2(\cdot)\,, g)(t_2, T_2)$ es la probabilidad de que las políticas públicas del segundo periodo sean $\{t_2, T_2\} \in Z_2$.

Así pues, estas distribuciones de probabilidad están relacionadas por la forma general:

$$\pi_2(\gamma_2, \alpha_2(\cdot), g)(t_2, T_2) = \sum_{j \in \{i \in n \cup \{0\} : (t_{2i}(g), T_{2i}(g)) = (t_2, T_2)\}} r_2(\gamma_2, \alpha_2(\cdot))(j).$$

Asociado con el equilibrio $\{\gamma_2^g, \alpha_2^g(\cdot)\}$ y tomando $g = 0$; entonces las distribuciones de probabilidad para este caso estarán relacionadas de la siguiente manera, primero para el caso de los agentes altos:

$$\pi_2(\gamma_2, \alpha_2(\cdot), 0)(0,0) = \sum_{H^* \in \{i \in n \cup \{0\} : (t_{2H^*}(0), T_{2H^*}(g)) = (0,0)\}} r_2(\gamma_2, \alpha_2(\cdot))(H^*).$$

$$\begin{aligned} \pi_2(\gamma_2, \alpha_2(\cdot), 0)(0,0) &= \frac{1}{2} \\ r_2(\gamma_2, \alpha_2(\cdot))(H^*) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ahora para el caso de los agentes bajos:

$$\pi_2(\gamma_2, \alpha_2(\cdot), 0)(1, \overline{a}) = \sum_{L^* \in \{i \in n \cup \{0\} : (t_{2L^*}(0), T_{2L^*}(g)) = (1, \overline{a})\}} r_2(\gamma_2, \alpha_2(\cdot))(L^*).$$

$$\begin{aligned}\pi_2(\gamma_2, \alpha_2(\cdot), 0)(1, \overline{a}) &= \frac{1}{2}\\ r_2(\gamma_2, \alpha_2(\cdot))(L^*). &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Asociado con el equilibrio $\{\gamma_2^g, \alpha_2^g(\cdot)\}$ y tomando $g = 1$; entonces las distribuciones de probabilidad para este caso estarán relacionadas de la siguiente manera, primero para el caso de los agentes altos:

$$\pi_2(\gamma_2, \alpha_2(\cdot), 0)(0, 0) = \sum_{H^* \in \{i \in n \cup \{0\} : (t_{2H^*}(0), T_{2H^*}(g)) = (0,0)\}} r_2(\gamma_2, \alpha_2(\cdot))(H^*).$$

$$\begin{aligned}\pi_2(\gamma_2, \alpha_2(\cdot), 0)(0, 0) &= \frac{1}{2}\\ r_2(\gamma_2, \alpha_2(\cdot))(H^*) &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ahora para el caso de los agentes bajos:

$$\pi_2(\gamma_2, \alpha_2(\cdot), 0)(1, \overline{a} + \frac{\delta}{2}) = \sum_{L^* \in \left\{i \in n \cup \{0\} : (t_{2L^*}(0), T_{2L^*}(g)) = (1, \overline{a} + \frac{\delta}{2})\right\}} r_2(\gamma_2, \alpha_2(\cdot))(L^*).$$

$$\begin{aligned}\pi_2(\gamma_2, \alpha_2(\cdot), 0)(1, \overline{a} + \frac{\delta}{2}) &= \frac{1}{2}\\ r_2(\gamma_2, \alpha_2(\cdot))(L^*) &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

4.2. Primer periodo

Continuamos con la resolución del juego por medio de la indicción hacia atrás y pasamos ahora a describir el primer periodo.

4.2.1. Politicas publicas

Los agentes anticiparan un equilibrio para el segundo periodo al elegir sus políticas públicas preferidas para el primer periodo. Así, si se anticipa un equilibrio

$$\{\gamma_2^g, \alpha_2^g(\cdot)\}$$

cuando $g \in \{0, 1\}$,entonces la distribución de probabilidad esperada para el segundo periodo es:

$$\pi_2^g \equiv \pi_2(\gamma_2^g, \alpha_2^g(\cdot), g),$$

con:

$$\Pi_2 \equiv (\pi_2^0, \pi_2^1).$$

Las políticas públicas preferidas un agente alto para el primer periodo serán las mismas que en el periodo dos, además bajo el supuesto de:

$$\frac{\delta}{2} > \frac{K}{n},$$

un agente alto siempre optara por llevar a cabo la inversión publica ya que esta le genera una mayor utilidad. Así las políticas publicas preferidas por un agente alto estarán dadas por:

$$\{t_{1H}(\pi_2^1), T_{1H}(\pi_2^1), g_H(\pi_2^1)\} = \arg\max \left\{ V_i((0, -\frac{K}{n}, 1), \pi_2^1) \mid \{t_1, T_1, g\} \in Z_1 \right\},$$

donde:

$$v_{1H}^{H^*}(\pi_2^1) = V_H(t_{1H^*}(\pi_2^1), T_{1H^*}(\pi_2^1), g_{H^*}(\pi_2^1); \pi_2^{gH^*}),$$

así:

$$v_{1H}^{H^*}(\pi_2^1) = a_H - \frac{K}{n} + \frac{1}{2}(a_H + \overline{a}) + \frac{3}{4}\delta,$$

es la utilidad esperada de un agente H en el periodo uno si el candidato H^* es elegido como planificador de políticas públicas para el primer periodo,

$$v_{1H}^{L^*}(\pi_2^0) = \overline{a} + \frac{1}{2}(a_L + \overline{a}),$$

es la utilidad esperada del agente H en el periodo uno si el candidato L^* es elegido como planificador de políticas públicas para el primer periodo.

Así mismo, las politicas preferidas de un agente bajo serian las mismas que para el segundo periodo ademas bajo el supuesto de:

$$\frac{K}{n} > \frac{\delta}{4},$$

los agentes bajos optaran por no llevar a cabo la inversion publica Así las políticas publicas preferidas por un agente bajo estarán dadas por:

$$\{t_{1L}(\pi_2^0), T_{1L}(\pi_2^0), g_L(\pi_2^0)\} = \arg\max \left\{ V_i((1, \overline{a}, 0), \pi_2^0) \mid \{t_1, T_1, g\} \in Z_1 \right\},$$

donde:

$$v_{1L}^{L^*}(\pi_2^0) = V_L(t_{1L^*}(\pi_2^0), T_{1L^*}(\pi_2^0), g_{L^*}(\pi_2^0); \pi_2^{gL^*}),$$

así:

$$v_{1L}^{H^*}(\pi_2^1) = a_L - \frac{K}{n} + \frac{1}{2}(a_L + \overline{a}) + \frac{\delta}{4},$$

es la utilidad esperada de un agente L en el periodo uno si el candidato H^* es elegido como planificador de políticas públicas para el primer periodo,

$$v_{1L}^{L^*}(\pi_2^0) = \overline{a} + \frac{1}{2}(a_L + \overline{a}),$$

es la utilidad esperada de un agente L en el periodo uno si el candidato L^* es elegido como planificador de políticas públicas para el primer periodo.

4.2.2. Votaciones

Tomaremos como dado el conjunto de cantidatos:

$$\{H^*, L^*\} = C \text{ tal que } C \subset n.$$

Sea:

$$\alpha_{1H} \in C \cup \{0\};$$

el voto del agente alto $H \in n_H$, donde:

$$\alpha_{1H} = H^*,$$

denota un agente $H \in n_H$ votando por el candidato H^*,

$$\alpha_{1H} = L^*,$$

denota un agente $H \in n_H$ votando por el candidato L^*,

$$\alpha_{1H^*} = H^*,$$

denota el candidato $H^* \in n_H$ votando por si mismo.

Así mismo;

$$\alpha_{1H} = 0$$

denota al agente $H \in n_H$ absteniendose de votar.

De acuerdo a lo establecido, se espera que un agente que ha decidido competir por el cargo de hacedor de política pública actué de manera racional y su mejor respuesta sea votar por si mismo. Así también; se espera que la mejor respuesta de los agentes altos sea votar por los candidatos altos y que la mejor respuesta de los agentes bajos sea votar por los candidatos bajos.

Así mismo, sea:

$$\alpha_{1L} \in C \cup \{0\}$$

el voto un agente bajo $L \in n_L$, donde:

$$\alpha_{1L} = H^*,$$

denota un agente $L \in n_L$ votando por el candidato H^*,

$$\alpha_{1L} = L^*,$$

denota un agente $L \in n_L$ votando por el candidato L^*,

$$\alpha_{1L^*} = L^*$$

denota al candidato $L^* \in n_L$ votando por si mismo.

Así mismo;

$$\alpha_{1L} = 0$$

denota al agente $L \in n_L$ absteniendose de votar.

Recordemos como se supuso al principio que:

$$\#n_H = \#n_L.$$

Así, el vector de decisiones de voto será:

$$\alpha_1 = (H^*, ..., H^*, L^*, ..., L^*);$$

donde:

$$\#H^* = \#L^*,$$

Así, la cardinalidad del conjunto de candidatos ganadores:

$$\#m(C, \alpha_1) = 2$$

Por lo tanto; si el candidato $H^* \in m(C, \alpha_1)$; la probabilidad de que dicho candidato gane sera:

$$P^{H^*}(C, \alpha_1) = \frac{1}{2},$$

Así mismo, si el candidato $L^* \in m(C, \alpha_1)$; la probabilidad de que dicho candidato gane será:

$$P^{L^*}(C, \alpha_1) = \frac{1}{2},$$

La mejor estrategia de votacion un agente H dada una distribución de probabilidad sobre las políticas públicas del segundo periodo estará dada por la forma general:

$$\alpha_{1j}^* \in \arg\max \left\{ \sum_{i \in C} P^i(C, (\alpha_{1j}, \alpha_{1-j}^*)) v_{1j}^i(\Pi_2) \mid \alpha_{1j} \in C \cup \{0\} \right\}.$$

$$\alpha_{1H}^* \in \arg\max \left\{ \frac{1}{2} v_{1H}^{H^*}(\pi_2^1) + \frac{1}{2} v_{1H}^{L^*}(\pi_2^0) \mid \alpha_{1H} \in C \cup \{0\} \right\}$$

la cual quedara como:

$$\alpha_{1H}^* \in \arg\max \left\{ \frac{1}{2}(a_H - \frac{K}{n} + \frac{1}{2}(a_H + \overline{a}) + \frac{3}{4}\delta) + \frac{1}{2}(\overline{a} + \frac{1}{2}(a_L + \overline{a})) \mid \alpha_{2H} \in C \cup \{0\} \right\}.$$

Así:

$$\alpha_{1H}^* = (H^*, ..., H^*);$$

1. $\alpha_{1H}^* = H^*$ es una mejor respuesta a $\alpha_{1L}^* = L^*$
2. α_{1H}^* no es una estrategia de voto dominada débilmente.

Así mismo, la mejor estrategia de votacion un agente L dada una distribución de probabilidad sobre las políticas públicas del segundo periodo estará dada por la forma general:

$$\alpha_{1j}^* \in \arg\max \left\{ \sum_{i \in C} P^i(C, (\alpha_{1j}, \alpha_{1-j}^*)) v_{1j}^i(\Pi_2) \mid \alpha_{1j} \in C \cup \{0\} \right\},$$

$$\alpha_{1L}^* \in \arg\max \left\{ \frac{1}{2} v_{1L}^{H^*}(\pi_2^1) + \frac{1}{2} v_{1L}^{L^*}(\pi_2^0) \mid \alpha_{1H} \in C \cup \{0\} \right\},$$

la cual quedara como:

$$\alpha_{1L}^* \in \arg\max \left\{ \frac{1}{2}(a_L - \frac{K}{n} + \frac{1}{2}(a_L + \overline{a}) + \frac{\delta}{4}) + \frac{1}{2}(\overline{a} + \frac{1}{2}(a_L + \overline{a})) \mid \alpha_{1H} \in C \cup \{0\} \right\}.$$

Así:

$$\alpha_{1L}^* = (L^*, ..., L^*);$$

1. $\alpha_{1L}^* = L^*$ es una mejor respuesta a $\alpha_{1H}^* = H^*$
2. α_{1L}^* no es una estrategia de voto dominada débilmente.

4.2.3. Entrada

Los agentes decidiran si competiran por el cargo a fin de establecer las politicas publicas de su preferencia.

Sea s_{1H} donde:

$$s_{1H} \in \{0, 1\},$$

es una estrategia pura para el agente H, tal que si$s_{1H} = 1$ entonces el agente H es un candidato y $s_{1H} = 0$ en caso contrario. Así, el conjunto de candidatos altos será:

$$C(s_1) = \{H^* \mid s_{1H^*} = 1\}.$$

Sea s_{1L} donde:

$$s_{1L} \in \{0, 1\},$$

es una estrategia pura para el agente L, tal que si$s_{1L} = 1$ entonces el agente L es un candidato y $s_{1L} = 0$ en caso contrario. Así, el conjunto de candidatos bajos será:

$$C(s_1) = \{L^* \mid s_{1L^*} = 1\}.$$

El pago esperado de cada agente para cualquier perfil de estrategias, dependerá del comportamiento que los agentes anticipan de las votaciones. Así, se denota como $\alpha_1(C)$ el comportamiento esperado en las votaciones dado un conjunto de candidatos C.

si H^* y L^* desean competir entre si por el puesto de hacedor de políticas publicas debe cumplirse que el conjunto de candidatos ganadores sea de la forma:

$$m(\{H^*, L^*\}, \alpha_1(\{H^*, L^*\})) = \{H^*, L^*\}$$

Dado que cualquier equilibrio en las votaciones con dos candidatos involucra votaciones sinceras, se sigue que deben existir una partición sincera:

$$(n_{H^*}, n_{L^*}, n_0)$$

tal que si:

$$\#n_H = \#n_L,$$

entonces como se vio anteriormente se cumple ademas que:

$$\frac{1}{2} v_{1H}^{H^*}(\pi_2^1) > \frac{1}{2} v_{1H}^{L^*}(\pi_2^0),$$

$$\frac{1}{2} v_{1L}^{L^*}(\pi_2^0) > \frac{1}{2} v_{1L}^{H^*}(\pi_2^1).$$

Dado que las preferencias sobre las politicas publicas de los candidatos H^* y L^*, son lo suficientemente distintas se sigue que:

$$n_0 = \{I \in n \mid v_{1I}^H = v_{1I}^L\}$$

y

$$\#n_0 + 1 < \#n_H = \#n_L,$$

donde n_0 es la particion de los agentes $I \in n$ que son indiferentes entre las políticas publicas. Así se establece que en la particion n_{H^*} consiste solamente de agentes los cuales tienen una estricta preferencia sobre las politicas publicas del candidato H^*. Así mismo, la particion n_{L^*} consiste solamente de agentes los cuales tienen una estricta preferencia sobre las politicas publicas del candidato L^*. Por último; si menos de un tercio de los votantes es indiferente entre los dos candidatos, tendremos entonces un equilibrio en estrategias puras en la entrada.

El candidato alto H^* asumira una estrategia pura $s_{1H^*} = 1$,o bien la probabilidad de que H^* juegue con la estrategia pura $s_{1H^*} = 1$ será 1, así la estrategia mixta del agente alto H^* sera:

$$\gamma_{1H^*} = 1.$$

El candidato bajo L^* asumira una estrategia pura $s_{1L^*} = 1$,o bien la probabilidad de que juegue con la estrategia pura $s_{1L^*} = 1$ será 1, así la estrategia mixta del agente bajo L^* sera:

$$\gamma_{1L^*} = 1.$$

Dadas estas particiones, cada candidato espera ganar con probabilidad:

$$P^{H^*}(\{H^*, L^*\}, \alpha_1(\{H^*, L^*\})) = P^{L^*}(\{H^*, L^*\}, \alpha_1(\{H^*, L^*\})) = \frac{1}{2}.$$

A continuacion, con $\Pi_2 \equiv (\pi_2^0, \pi_2^1)$, tomamos la forma general:

$$U_{1j}(s_1; \Pi_2, \alpha_1(\cdot)) = \sum_{i \in C(S_1)} P^i(C(S_1), \alpha_1(C(S_1)))v_{1j}^i(\Pi_2) + P^0(C(S_1))v_{1j}^0(\Pi_2),$$

la cual para el caso en cuestión, el pago esperado del agente H quedara de la siguiente forma:

$$U_{1H}(s_1; \Pi_2, \alpha_1(\{H^*, L^*\})) = \frac{1}{2}v_{1H}^{H^*} + \frac{1}{2}v_{1H}^{L^*},$$

$$U_{1H}(s_1; \Pi_2, \alpha_1(\{H^*, L^*\})) = \frac{1}{2}(a_H - \frac{K}{n} + \frac{1}{2}(a_H + \overline{a}) + \frac{3}{4}\delta) + \frac{1}{2}(\overline{a} + \frac{1}{2}(a_L + \overline{a})),$$

El pago esperado del agente H dada γ_{1H^*} estara dado por la forma general:

$$\begin{aligned} u_{1j}(\gamma_1; \Pi_2, \alpha_1(\cdot)) \quad &= \quad \prod_{i=1}^{n} \gamma_{1i} U_{1j}(1, ..., 1; \Pi_2, \alpha_1(\cdot)) + \prod_{i=2}^{n} \gamma_{1i}(1 - \gamma_{11})U_{1j}(0, 1, ..., 1; \Pi_2, \alpha_1(\cdot)) \\ &+ ... + \prod_{i=1}^{n}(1 - \gamma_{1i})U_{1j}(0, ..., 0; \Pi_2, \alpha_1(\cdot)). \end{aligned}$$

la cual quedara de la siguiente forma:

$$u_{1H}(\gamma_1; \Pi_2, \alpha_1(\{H^*, L^*\})) = \frac{1}{2}(a_H - \frac{K}{n} + \frac{1}{2}(a_H + \overline{a}) + \frac{3}{4}\delta) + \frac{1}{2}(\overline{a} + \frac{1}{2}(a_L + \overline{a})).$$

Así mismo, los pagos esperados de un agente L serán:

$$U_{1L}(s_2; \Pi_2, \alpha_2(\{H^*, L^*\})) = \frac{1}{2}v_{1L}^{H^*} + \frac{1}{2}v_{1L}^{L^*},$$

$$U_{1L}(s_2; \Pi_2, \alpha_2(\{H^*, L^*\})) = \frac{1}{2}(a_L - \frac{K}{n} + \frac{1}{2}(a_L + \overline{a}) + \frac{\delta}{4}) + \frac{1}{2}(\overline{a} + \frac{1}{2}(a_L + \overline{a})),$$

el pago esperado del agente L dajo γ_{1H^*} y γ_{1H^*} será:

$$u_{1L}(\gamma_2; \Pi_2, \alpha_2(\{H^*, L^*\})) = \frac{1}{2}(a_L - \frac{K}{n} + \frac{1}{2}(a_L + \overline{a}) + \frac{\delta}{4}) + \frac{1}{2}(\overline{a} + \frac{1}{2}(a_L + \overline{a})).$$

4.2.4. Equilibrio

Combinando el análisis de las tres fases y dado $\Pi_2 \equiv (\pi_2^0, \pi_2^1)$, definimos un equilibrio para el periodo uno como:

$$\left\{\gamma_1^{\Pi_2}, \alpha_1^{\Pi_2}(\cdot)\right\};$$

donde $\gamma_1^{\Pi_2}$ es un vector de decisiones de entrada:

$$\gamma_1^{\Pi_2} = (\gamma_{1H^*}^{\Pi_2}, \gamma_{1L^*}^{\Pi_2}, \gamma_{11}^{\Pi_2}, ..., \gamma_{1j}^{\Pi_2}) = (1, 1, 0, ..., 0)$$

$j = n/\{H^*, L^*\}$ y $\alpha_1^{\Pi_2}(\cdot)$ es una función:

$$\alpha_1^{\Pi_2}(\{H^*, L^*\}),$$

que describe el comportamiento esperado en las votaciones. Así, tenemos un equilibrio en donde dado $\Pi_2 \equiv (\pi_2^0, \pi_2^1)$, existirán solo dos candidatos H^* y L^*, donde de acuerdo al comportamiento esperado en las votaciones ambos tendrán $\frac{1}{2}$ de posibilidades resultar electos como hacedor de políticas publicas.

Así mismo, existen dos distribuciónes de probabilidad:

$$r_1(\gamma_1, \alpha_1(\cdot)),$$

donde $r_1(\gamma_1,\alpha_1(\cdot))(i)$; denota la probabilidad de que i sea el planificador de políticas publicas del primer periodo y $r_1(\gamma_1,\alpha_1(\cdot))(0)$ como la probabilidad de que nadie compita por el cargo y

$$\pi_2(\gamma_2, \alpha_2(\cdot)\,, g),$$

donde $\pi_1(\gamma_1,\alpha_1(\cdot)\,,\Pi_2)(t_1, T_1, g)$ es la probabilidad de que las políticas públicas del primer periodo sean $\{t_2, T_2, g\} \in Z_1$.

Así pues, estas distribuciones de probabilidad están relacionadas por la forma general:

$$\pi_1(\gamma_1, \alpha_1(\cdot)\,, \Pi_2)(t_1, T_1, g) = \sum_{j \in \{i \in n \cup \{0\} : (t_{1i}(\Pi_2), T_{1i}(\Pi_2), g_i(\Pi_2)) = (t_2, T_2, g)\}} r_1(\gamma_1, \alpha_1(\cdot))(j).$$

Asociado con el equilibrio $\left\{\gamma_1^{\Pi_2}, \alpha_1^{\Pi_2}(\cdot)\right\}$ con $\Pi_2 \equiv (\pi_2^0, \pi_2^1)$, las distribuciones de probabilidad para un agente H estarán relacionadas de la siguiente forma:

$$\pi_1(\gamma_1, \alpha_1(\cdot), \Pi_2)(0, -\frac{K}{n}, 1) = \sum_{H^* \in \left\{i \in n \cup \{0\} : (t_{1H^*}(\pi_2^1), T_{1H^*}(\pi_2^1), g_{H^*}) = (0, -\frac{K}{n}, 1)\right\}} r_1(\gamma_1, \alpha_1(\cdot))(H^*).$$

$$\begin{aligned} \pi_1(\gamma_1, \alpha_1(\cdot), \Pi_2)(0, -\frac{K}{n}, 1) &= \frac{1}{2} \\ r_1(\gamma_1, \alpha_1(\cdot))(H^*) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Asociado con el equilibrio $\left\{\gamma_1^{\Pi_2}, \alpha_1^{\Pi_2}(\cdot)\right\}$ con $\Pi_2 \equiv (\pi_2^0, \pi_2^1)$, las distribuciones de probabilidad para un agente bajo L estarán relacionadas de la siguiente forma:

$$\pi_1(\gamma_1, \alpha_1(\cdot), \Pi_2)(1, \overline{a}, 0) = \sum_{L^* \in \left\{i \in n \cup \{0\} : (t_{1H^*}(\pi_2^0), T_{1H^*}(\pi_2^0), g_{L^*}) = (1, \overline{a}, 0)\right\}} r_1(\gamma_1, \alpha_1(\cdot))(L^*).$$

$$\begin{aligned} \pi_1(\gamma_1, \alpha_1(\cdot), \Pi_2)(1, \overline{a}, 0) &= \frac{1}{2} \\ r_1(\gamma_1, \alpha_1(\cdot))(L^*) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4.3. Resultados

Ahora se presenta la representación en forma normal de los pagos del juego, primero partiendo del escenario donde un agente alto gana en el primer periodo y enseguida los resultados donde un agente bajo gana en el primer periodo:

Comenzamos con el equilibrio en el primer periodo en donde un agente alto gana en el primer periodo

H_1^*		$\frac{1}{2}(L_2^*)$	
$g \in \{0,1\}$		1	0
$\frac{1}{2}(H_2^*)$	1	$a_H - \frac{K}{n} + \frac{1}{2}(a_H + \overline{a}) + \frac{3}{4}\delta, a_L - \frac{K}{n} + \frac{1}{2}(a_L + \overline{a}) + \frac{\delta}{4}$	$a_H - \frac{K}{n} + \frac{1}{2}(a_H + \overline{a}) + \frac{3}{4}\delta, a_L + \frac{1}{2}(a_L + \overline{a})$
	0	$a_H + \frac{1}{2}(a_H + \overline{a}), a_L - \frac{K}{n} + \frac{1}{2}(a_L + \overline{a}) + \frac{\delta}{4}$	$a_H + \frac{1}{2}(a_H + \overline{a}), a_L + \frac{1}{2}(a_L + \overline{a})$

Primero tenemos una secuencia de políticas públicas de equilibrio que corresponden a un agente alto H^* :

$$\left\{\{0^*_{1H^*}, -\frac{K^*}{n}_{1H^*}, 1^*_{1H^*}\}, \pi_2^1\right\};$$

siendo este el hacedor de politica publica del primer periodo, quien siempre elegira llevar a cabo la inversion publica $g = 1$ y un equilibrio perfecto en subjuegos

$$\left\{\{\gamma_1, \alpha_1(\cdot)\}, \{\gamma_2^1, \alpha_2^1(\cdot)\}_{g \in \{0,1\}}\right\}$$

tal que:

1. $\{0_1^*, 0_1^*, 1^*\}$ esta en el soporte de la distribución de probabilidad sobre las políticas públicas del primer periodo generadas por dicho equilibrio perfecto en subjuegos,

2. π_2^1 es la distribución de probabilidad sobre las políticas públicas del segundo periodo generadas por el equilibrio perfecto en subjuegos dada $g^* = 1$.

Como ya se menciono, tenemos unas politicas publicas dadas para el primer periodo: $\{0^*_{1H^*}, -\frac{K}{n}^*_{1H^*}, 1^*_{1H^*}\}$ y una distribucion de probabilidad: π_2^1 la cual selecciona a las politicas publicas para el segundo periodo:

$$\{0_{2H^*}, 0_{2H^*}\}, \{1_{2L^*}, (\overline{a} + \frac{\delta}{2})_{2L^*}\}$$

ambas con probabilidad de $\frac{1}{2}$. Así, la representación en forma normal de los pagos del juego luego de descartar las estrategias que no son optimas quedara de la siguiente forma:

H_1^*		$\frac{1}{2}(L_2^*)$	
$g \in \{0,1\}$		1	0
$\frac{1}{2}(H_2^*)$	1	$a_H - \frac{K}{n} + \frac{1}{2}(a_H + \overline{a}) + \frac{3}{4}\delta, a_L - \frac{K}{n} + \frac{1}{2}(a_L + \overline{a}) + \frac{\delta}{4}$	
	0		

Nos encontramos en una situación en donde a pesar de que la inversión publica se lleva a cabo, esta no representa una mejora de pareto dado que los agentes bajos están maximizando su utilidad esperada para el segundo periodo partiendo de un escenario en que la política publica se llevo a cabo y por tanto el costo de la misma les fue descontado en el primer periodo $-\frac{C}{N}$ *y la compensación futura por llevar a cabo la inversión publica* $+\frac{\delta}{4}$*, no alcanza a compensar el costo del programa en el primer periodo y por tanto los agentes bajos nunca elegirán llevar a cabo la inversión publica.*

Continuamos con el equilibrio en el primer periodo en donde un agente bajo gana en el primer periodo

L_1^*		$\frac{1}{2}(L_2^*)$	
$g \in \{0,1\}$		1	0
$\frac{1}{2}(H_2^*)$	1	$\overline{a}-\frac{K}{n}+\frac{1}{2}(a_H+\overline{a})+\frac{3}{4}\delta,\overline{a}-\frac{K}{n}+\frac{1}{2}(a_L+\overline{a})+\frac{\delta}{4})$	$\overline{a}-\frac{K}{n}+\frac{1}{2}(a_H+\overline{a})+\frac{3}{4}\delta,\overline{a}+\frac{1}{2}(a_L+\overline{a})$
	0	$\overline{a}+\frac{1}{2}(a_H+\overline{a}),\overline{a}-\frac{K}{n}+\frac{1}{2}(a_L+\overline{a})+\frac{\delta}{4})$	$\overline{a}+\frac{1}{2}(a_H+\overline{a}),\overline{a}+\frac{1}{2}(a_L+\overline{a})$

Ahora tenemos una secuencia de políticas públicas de equilibrio que corresponden a un agente bajo:

$$L^* : \left\{\{1^*_{1L^*}, \overline{a}^*_{1L^*}, 0^*_{1L^*}\}, \pi_2^0\right\};$$

En particular esta secuencia de politicas publicas es la que nos interesa dado que en ella un agente bajo $L^* \in n_L$ siendo este el hacedor de politica publica del primer periodo, nunca elegira llevar a cabo la inversion publica $g = 0$ debido a que los costos de llevar a cabo la inversión publica en el primer periodo no le son compensados en el segundo periodo.

Así, tenemos un equilibrio perfecto en subjuegos:

$$\left\{\{\gamma_1, \alpha_1(\cdot)\}, \{\gamma_2^0, \alpha_2^0(\cdot)\}_{g\in\{0,1\}}\right\}$$

tal que:

1. $\{1^*_{1L^*}, \overline{a}^*_{1L^*}, 0^*_{1L^*}\}$ esta en el soporte de la distribución de probabilidad sobre las políticas públicas del primer periodo generadas por dicho equilibrio perfecto en subjuegos,

2. π_2^0 es la distribución de probabilidad sobre las políticas públicas del segundo periodo generadas por el equilibrio perfecto en subjuegos dada $g^* = 0$.

Como ya se menciono, tenemos unas politicas publicas dadas para el primer periodo: $\{1^*_{1L^*}, \overline{a}^*_{1L^*}, 0^*_{1L^*}\}$ y una distribucion de probabilidad: π_2^0 la cual selecciona a las politicas publicas para el segundo periodo:

$$\{0_{2H^*}, 0_{2H^*}\}, \{1_{2L^*}, \overline{a}_{2L^*}\}$$

ambas con probabilidad de $\frac{1}{2}$. Así, la representación en forma normal de los pagos del juego luego de descartar las estrategias que no son optimas quedara de la siguiente forma:

L_1^*		$\frac{1}{2}(L_2^*)$	
$g \in \{0,1\}$		1	0
$\frac{1}{2}(H_2^*)$	1		
	0		$\overline{a}+\frac{1}{2}(a_H+\overline{a}),\overline{a}+\frac{1}{2}(a_L+\overline{a})$

Como supusimos al principio que: $\frac{\delta}{4} < \frac{K}{n}$, entonces tenemos una secuencia de una secuencia de políticas públicas de equilibrio:

$$\left\{\{1^*_{1L^*}, \overline{a}^*_{1L^*}, 0^*_{1L^*}\}, \pi_2^0\right\}$$

y un equilibrio perfecto en subjuegos:

$$\left\{\{\gamma_1, \alpha_1(\cdot)\}, \{\gamma_2^0, \alpha_2^0(\cdot)\}_{g\in\{0,1\}}\right\},$$

donde inversión pública no se lleva a cabo, es decir en el equilibrio la inversión publica no se lleva a cabo, es decir: $g^* = 0$, lo cual constituye un fallo en las políticas públicas.

Capítulo 5

Conclusiones

La meta de este trabajo no ha sido la de proponer un sistema de votación .eficiente", ni mucho menos un sistema democrático alternativo, sino mas bien, hacer uso de una serie de argumentos para establecer situaciones hipotéticas en el contexto de una democracia representativa y dar una definición de fallo en políticas públicas y lo que implica dicho termino. Se identificaron de acuerdo los argumentos presentados dos fallos en elecciones repetidas; el primero de ellos es la incertidumbre sobre el siguiente periodo, es decir, el desconocer la identidad del próximo hacedor de política publica conlleva a que la inversión publica no se lleve a cabo por temor a que las compensaciones esperadas no sean lo suficiente para compensar los costos actuales, el segundo de ellos es la disparidad en las capacidades productivas de los agentes y el efecto de la inversión publica en las mismas.

Algunas de las opciones para dar continuidad a este trabajo serian extender el modelo para mas periodos e incorporar mas variables al modelo tales como el efecto que pudiera tener el sector privado en las decisiones sobre las políticas públicas e introducir información imperfecta y observar sus efectos para estudiar los casos en donde persistan los fallos en las políticas públicas. Por último se puede tratar de modelar el efecto en las políticas públicas de los grupos de presión y legislaciones sobre políticas publicas.

Bibliografía

[1] Becker, Gary,. "Public Policies, Pressure Grops, and Dead Weight Costs."*Journal of Public Economics*, 1985, 28(3), pp.329-47.

[2] Banzhaf John, F,. Weighted voting doesn't work. *Rutgers Law Review* 19: pp. 317–343.*,* 1965.

[3] Besley, Timothy., Coate, Stephen., "Sources of Inefficiency in a Representative Democracy A Dynamic Analysis"*The American Economic Review*, Vol. 88, No. 1 (Mar., 1998), pp. 139-156.

[4] Besley, Timothy., Coate, Stephen., .An Economic Model of Representative Democracy."*Quarterly Journal of Economics,* Febrero 1997, 112(1), pp. 85-114.

[5] Buchanan, James M., Tullock, Gordon (1962). *The Calculus of Consent: Logical Foundations of Constitutional Democracy.*

[6] Shapley, L.S. and M. Shubik, A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System, *American Political Science Review,* 48, 787–792, 1954.

[7] Selten, R. Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. *International journal of game theory*, 1975 4(1), 25-55.

[8] Stigler, George., .Economist and Public Policy" *Regulation*, May/June 1982, pp. 37-49.

[9] Webb, James N., *Game Theory: Decision, Interaction and Evolution*, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2007.

[10] Wittman, Donald., "Why Democracies Produce Efficcent Results."*Journal of Political Economy*, 1989, 97(6), pp. 1395-426.