# UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ

## Facultad de Economía

## Extensión al Modelo de Asignación Bilateral

TESIS

que para obtener el grado de

**Maestría en Economía Matemática**

P R E S E N T A:

**Miriam Lizbeth González Cavazos**

Directores de tesis:

**Dr. William Olvera López**
**Dr. Jorge Armando Oviedo**

008 San Luis Potosí, S.L.P., México, Abril 2015.

*Dedicado a mis hermanas,*
*Gloria y Rosa.*

# Agradecimientos

Espero que las siguientes líneas sirvan para reconocer a aquellas personas que de alguna manera colaborarón a que este trabajo pudiera concluirse con éxito.

En primer lugar quisiera agradecer a mis asesores. Al Dr. Jorge Oviedo por haberme hecho sentir como en casa cuando realicé mi estancia en el IMASL, por la paciencia e impulso, y por su valiosa dirección en este trabajo. Al Dr. William Olvera por ser mi guía y mi ejemplo a seguir, por sus consejos, su apoyo incondicional, su amistad y su aliento en los momentos más difíciles de este proyecto.

A mis sinodales, Dr. Leobardo Plata y Dr. Joss Sánchez. A mis profesores de la maestría, quienes aportaron, cada uno de ellos, un granito de arena en mi formación.

También quiero dar las gracias a mis amigos de la maestría, quienes compartieron este camino conmigo: Judith, Yaritza, Leo. En especial a Adriana, mi hermana académica, quien compartió muy de cerca el proceso de creación, desarrollo y conclusión de este trabajo, con quien compartí frustraciones y alegrías.

De igual manera me gustaría agradecer a la gente de Argentina, mis compañeros por un par de meses. A las personas del IMASL y a aquellos que convivieron conmigo en lo que llamé casa durante este tiempo.

Un agradecimiento a mis padres y amigos, quienes nunca han perdido su fé en mi, por su cariño y apoyo incondicional. En especial a mi madre, a quien admiro profundamente y quien es una fuente de inspiración para mí por su fortaleza y su forma de ver la vida.

A todos ustedes mi reconocimiento y gratitud.

# Índice general

# Capítulo 1

# Introducción

A mediados del siglo XX surgió en Estados Unidos el problema de asignación de residentes a hospitales. Se buscaba poder asignar residentes a los diferentes hospitales del país, y la asignación tenía que considerar las preferencias de ambos lados del mercado; es por esto que se crea el NIMP (National Intern Matching Program), posteriormente NRMP (National Resident Matching Program), un algoritmo para poder llevar a cabo dicha asignación. Gale y Shapley analizan el problema en [4]; en este artículo ellos comienzan considerando un mercado al que llaman de matrimonio donde tienen que realizar una asignación de parejas hombre-mujer, donde ambos conjuntos tienen la misma cardinalidad, y buscan que las parejas estén conformes con dicha asignación y no quieran separarse para cambiar de pareja, es decir, que sea estable. Además, dan algunos resultados importantes, como el teorema de la existencia del *matching* estable y el del *matching* óptimo, donde se asegura que el algoritmo que proponen, ahora conocido como algoritmo de aceptación diferida, da como resultado no sólo un *matching* estable sino que además es óptimo, es decir es el *matching* más preferido por un lado del mercado. En este trabajo también se mencionan el problema de los compañeros de habitación y el de "matrimonio" entre hombre, mujer e hijo; estos problemas se estudian más a fondo en [5] y [2] respectivamente.

A partir del primer acercamiento a la teoría del *matching* se empiezan a realizar más estudios alrededor de ésta y en 1970, McVitie y Wilson [8], analizan el caso donde el conjunto de hombres y el de mujeres en el mercado de matrimonio no tienen la misma cardinalidad. Su análisis da como resultado, lo que ahora conocemos como el teorema del hospital rural donde se asegura que aquellos agentes, de un mercado de matrimonio con preferencias estrictas, que hayan quedado sin pareja siempre quedarán solteros sin importar de qué manera se encuentre la asignación estable.

A principios de los años 80 surge el problema de las parejas de residentes y el NRMP no resulta ser tan eficiente al momento de considerar parejas de residentes que desean realizar sus estudios en el mismo hospital. Este problema lo analiza Roth [9] y [10], encontrando que no se puede llegar a un *matching* estable cuando se consideran parejas. En esta década se comienzan a tratar problemas donde sólo tenemos preferencias de un solo lado del mercado (one-sided matching) y surge el problema de trasplantes de riñón [1].

En este trabajo nos enfocamos en resolver un problema de asignación bilateral uno a uno donde queremos asignar materias para que sean dictadas por algún profesor, agregando el condicionante de que todas las materias estén asignadas a algún profesor, es decir, que no quede materia sin ser dictada. Esta condición, diferente al problema orginal [4], nos exige desarrollar nuevos conceptos ya que, en la mayoría de los casos, utilizando los conceptos ya existentes no se puede cumplir con ella.

Lo primero que pedimos es que la cardinalidad del conjunto de las materias sea más pequeña o igual que la del conjunto de los profesores, y que las preferencias de ambos conjuntos sean estrictas. A partir de ésto se desarrollan varios conceptos: *$r$-extensión* de mercados, donde dicha extensión se lleva a cabo utilizando sólo las materias y los profesores que no son asignados al encontrar algún *matching* estable, pidiendo a dichos profesores que extiendan su lista de materias aceptables; *matching* en estos mercados extendidos, que toma las asignaciones hechas en cada mercado donde las materias tengan algún profesor que las imparta; *$r$-estable*, si cada asignación es estable en su correspondiente mercado; y *$r$-óptimos*, donde cada conjunto, materias y profesores, tendrá una asignación $r$-estable que se considera la más preferida a todas las demás para los elementos de cada conjunto. También se desarrolla el algoritmo de extensión de mercados, basado en el algoritmo de aceptación diferida, para poder encontrar un *matching* en los mercados extendidos.

Con las definiciones de *matching*, $r$-estabilidad y $r$-optimalidad, se encuentran resultados equivalentes a los obtenidos hasta ahora en los modelos de asignación bilateral. Primero, el conjunto de los *matchings* $r$-estables es no vacío, se da una prueba utilizando el algoritmo de extensión de mercados y el teorema de Gale y Shapley [4]. Segundo, el algoritmo de extensión de mercados cuando las materias proponen, nos arroja el *matching* $r$-óptimo para las materias y de manera análoga encontramos el $r$-óptimo para los profesores con el algoritmo de extensión de mercados cuando ellos proponen. Y tercero, el *matching* $r$-óptimo para las materias es el más preferido por todas ellas, es decir, es el mejor para ellas, y el *matching* $r$-óptimo para los profesores es el menos preferido por las materias, es decir, el peor para ellas.

Además de estos resultados generales, mediante el análisis de casos particulares, se encuentran algunos resultados interesantes que pueden dar una guía para encontrar casos donde exista un único *matching* $r$-estable.

El trabajo esta organizado en tres capítulos. En el Capítulo 2 se muestran los conceptos básicos de la teoría de asignación bilateral uno a uno, así como los resultados más importantes de ésta y algunas propiedades que serán utilizadas en el siguiente capítulo. En el Capítulo 3 se realiza un planteamiento formal del problema dando definiciones básicas y desarrollando la extensión al modelo original, así como propiedades resultantes de dicho desarrollo y algunos casos particulares. En el Capítulo 4 se dan las conclusiones del estudio y en el Apéndice A se explica el algoritmo de aceptación diferida y se da un ejemplo.

# Capítulo 2

# Preliminares

Este capítulo contiene los conceptos básicos de la teoría de *matching* dados en [11], así como algunos resultados del modelo utilizado para la *asignación bilateral*. En la primera parte se hace un planteamiento formal del mercado de matrimonio, dando todos los elementos necesarios para poder establecer alguna asignación. En la segunda parte se habla de los *matchings* estables, ¿qué es un *matching* estable?, ¿cuándo podemos decir que un *matching* es estable?

La tercera sección contiene algunas propiedades del los *matchings* estables, se establecerá cuándo existen los *matchings* estables y cuándo estos *matchings* son óptimos. Además, se expone el *algoritmo de aceptación diferida* propuesto por Gale y Shapley en [4], utilizado para encontrar *matchings* estables.

## 2.1. El modelo

El modelo formal de matrimonio, expuesto por primera vez en [4] considera los elementos desarrollados en esta sección.

Sean dos conjuntos disjuntos, $M = \{m_1, m_2, ..., m_n\}$ el conjunto de hombres, y $W = \{w_1, w_2, ..., w_p\}$ el conjunto de mujeres. Cada hombre tendrá preferencias sobre el conjunto de mujeres y viceversa. En estas preferencias podemos tener, por ejemplo, que un hombre $m$ podría preferir quedarse soltero a casarse con la mujer $w$, la cual no es de su interés.

Las preferencias son tales que si algún individuo $i$ se encuentra ante alguna elección entre dos opciones $a$ y $b$, se dirá que $i$ prefiere a $a$ sobre $b$ si siempre que tenga estas dos opciones entre sus alternativas elige a $a$. Decimos que un individuo es *indiferente* entre dos opciones $a$ y $b$ si puede escoger cualquiera de las dos. Para el individuo $i$, $a$ es al menos tan bueno como $b$ si prefiere a $a$ sobre $b$ o le es indiferente cualquiera de los dos.

Las preferencias de cada hombre $m$ serán representadas por una lista ordenada de elementos del conjunto $W \cup \{m\}$, denotada por $P(m)$. Esto es, un hombre $m$ podría tener las siguientes preferencias:

$$P(m) = w_1, w_2, m, w_3, ..., w_p$$

indicando que su primera opción es casarse con la mujer $w_1$, su segunda opción será la mujer $w_2$ y la tercera será quedarse soltero. Es decir, el hombre $m$ prefiere estrictamente a la mujer $w_1$ sobre la mujer $w_2$, prefiere a la mujer $w_2$ sobre él mismo, y prefiere quedarse soltero a estar con la mujer $w_3$, y así sucesivamente hasta $w_p$. De igual manera, cada mujer $w$ tiene una lista ordenada de preferencias, $P(w)$, en el conjunto $M \cup \{w\}$.

Se denotará por $P$ al perfil de preferencias $P = \{P(m_1), P(m_2), ..., P(m_n), P(w_1), P(w_2), ..., P(w_p)\}$. Un mercado de matrimonio con sus respectivas preferencias será denotado por la terna $(M, W, P)$.

Escribiremos $wP_mw'$ para indicar que el hombre $m$ prefiere a la mujer $w$ sobre la mujer $w'$, y $wR_mw'$ indicará que la mujer $w$ es al menos tan buena como la mujer $w'$ para el hombre $m$ . Además, la mujer $w$ es aceptable para el hombre $m$ si casarse con ella es al menos tan bueno como quedarse soltero, es decir, $wR_mm$, de igual manera, $m$ es aceptable para $w$ si $mR_ww$. Si un individuo no es indiferente entre dos opciones se dice que tiene preferencias estrictas.

Otro supuesto sobre las preferencias es que son racionales, es decir, son transitivas y completas. Se dice que las preferencias son completas si cualesquiera dos alternativas pueden ser comparadas y ordenadas, entonces para todo $a, b \in W$ se cumplirá que $aR_mb$ o $bR_ma$ para todo $m \in M$, de igual manera para todo elemento del conjunto de hombres. Y son transitivas cuando, si $a$ es al menos tan bueno como $b$ y $b$ es al menos tan bueno como $c$, entonces $a$ es al menos tan bueno como $c$, es decir, para todo $a, b, c \in W$ si $aR_mb$ y $bR_mc$ entonces $aR_mb$ para todo $m \in M$, de manera análoga para el conjunto de hombres.

Si se tienen delimitadas las preferencias admisibles de los individuos, podemos proceder a encontrar una asignación de parejas resultado de la interacción entre los individuos a la cual llamaremos *matching*.

**Definición 1.** *Un **matching** uno a uno es una función $\mu : M \cup W \to M \cup W$, tal que:*

1. *Si $\mu(m) \notin W$ entonces $\mu(m) = m$, para todo $m \in M$*
2. *Si $\mu(w) \notin M$ entonces $\mu(w) = w$, para todo $w \in W$*
3. *$\mu(m) = w$ si y sólo si $\mu(w) = m$, para todo $m \in M$, y para todo $w \in W$.*

Un *matching* puede ser representado como un conjunto de pares. Esto es, por ejemplo, el *matching* $\mu = \{\{m_1, w_2\}, \{m_2, w_3\}, \{m_3, m_3\}, \{m_4, w_1\}\}$, donde $w_2$ está casado con $m_1$, $w_3$ con $m_2$, $w_1$ con $m_4$ y $m_3$ permanece soltero. Esto también lo podemos escribir como

$\mu(m_1) = w_2$, $\mu(m_3) = m_3$, y así sucesivamente.

Las preferencias que los individuos tengan sobre los diferentes *matchings* depende solamente de las preferencias que tengan sobre sus propias parejas en los distintos *matchings*. Un hombre $m$ prefiere un *matching* $\mu$ sobre un *matching* $\nu$ si y sólo si lo que le asigna $\mu$ es preferido a lo que le asigna $\nu$, es decir $\mu P_m \nu$ si y sólo si $\mu(m) P_m \nu(m)$.

## 2.2. Estabilidad

Ya que se tiene definido lo que es un *matching*, se puede comenzar a pensar en cuáles de los *matchings* pueden ser apropiados y cuáles no. Supongamos que tenemos un *matching* $\mu$ donde un hombre $m$ está casado con una mujer $w$, pero para al menos uno de ellos dicha asignación no es aceptable, es decir, prefiere estar soltero a la asignación hecha por el *matching* $\mu$. Entonces, diremos que el *matching* $\mu$ es bloqueado por el individuo que prefiere estar soltero y este *matching* no será posible, ya que dicho individuo se quedará soltero y no con la pareja asignada por $\mu$.

Formalmente, un *matching* $\mu$ en un mercado $(M, W, P)$ es *bloqueado por un agente* $i \in M \cup W$ si $i P_i \mu(i)$. Además, $\mu$ es *individualmente racional* si no es bloqueado por ningún agente. Denotaremos al conjunto de *matchings* individualmente racionales como $IR(M, W, P)$.

Otro caso importante es aquel donde en un *matching* $\mu$ existen un hombre $m$ y una mujer $w$ que no están casados, pero se prefieren mutuamente a la pareja asignada por $\mu$. Entonces, se dice que la pareja $\{m, w\}$ bloquea el *matching* $\mu$. Esto ocurre porque este par hombre-mujer pueden decidir separarse de la pareja que les ha asignado $\mu$ y casarse entre ellos, pero lo que se busca es una asignación donde esto no sea necesario.

Formalmente, un *matching* $\mu$ en un mercado $(M, W, P)$ es *bloqueado por un par* hombre-mujer $\{m, w\}$, $m \in M$ y $w \in W$, si $w \neq \mu(m)$, $w P_m \mu(m)$ y $m P_w \mu(w)$.

Entonces, tenemos dos consideraciones importantes para analizar los *matchings*: no deseamos que los *matchings* que formemos sean ninguno de los casos antes mencionados; por lo tanto, los *matchings* deseados serán aquellos que cumplan con la siguiente definición.

**Definición 2.** *En un mercado $(M, W, P)$ un matching $\mu$ es* ***estable*** *bajo $P$ si:*

- *Es individualmente racional*
- *No es bloqueado por ningún par m,w.*

Denotaremos por $S(M, W, P)$ el conjunto de *matchings* estables del mercado $(M, W, P)$. Para que el concepto de estabilidad quede más claro, analicemos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.** *Sean* $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ *y* $W = \{w_1, w_2, w_3\}$*, con las preferencias:*

$$\begin{array}{ll} P(m_1) = w_1, w_2, w_3, m_1 & P(w_1) = m_1, m_2, m_3, w_1 \\ P(m_2) = w_1, w_2, w_3, m_2 & P(w_2) = m_2, m_3, m_1, w_2 \\ P(m_3) = w_2, w_1, w_3, m_3 & P(w_3) = m_1, m_2, m_3, w_3 \end{array}$$

*Todos los posibles matchings son individualmente racionales porque tanto hombres como mujeres tienen a todas sus posibles parejas como aceptables. El matching* $\mu$ *dado por:*

$$\mu(m_1) = w_1, \mu(m_2) = w_3, \mu(m_3) = w_2$$

*es inestable, ya que* $m_1, w_2$ *es un par bloqueador. Sin embargo, se puede ver que el matching* $\mu'$ *dado por:*

$$\mu'(m_1) = w_1, \mu'(m_2) = w_2, \mu'(m_3) = w_3$$

*es estable porque no existe par o individuo bloqueador.*

## 2.3. Propiedades

Ahora que se ha definido estabilidad en los *matchings*, cabe hacernos una pregunta fundamental, ¿siempre existen los *matchings* estables? Esto dependerá del tipo de agentes con los que se esté trabajando y de que la asignación hecha sea uno a uno. Es decir, hemos tratado con agentes que son de dos tipos diferentes, hombres y mujeres, y las preferencias de dichos agentes son siempre sobre el conjunto opuesto, los hombres tienen preferencias sobre el conjunto de mujeres y las mujeres sobre el conjunto de los hombres. En el problema del compañero de habitación [11, Ejemplo 2.5], se puede observar el caso donde se tiene un único conjunto de agentes con preferencias sobre él mismo, y en el problema de "matrimonio" entre hombre, mujer e hijo [11, Ejemplo 2.6], existen tres tipos diferentes de agentes; en estos casos no se puede asegurar que exista *matching* estable. Tampoco se puede asegurar esto en el caso donde el *matching* no sea uno a uno, [11, Ejemplo 2.7].

Una manera de demostrar que siempre existe al menos un *matching* estable en el mercado de matrimonio, es utilizar algún algoritmo que cuando sea aplicado nos dé como resultado un *matching* estable. En [4], se describe un algoritmo, que produce un *matching* estable a partir de cualquier lista de preferencias, llamado "algoritmo de aceptación diferida"; dicho algoritmo se desarrolla en el Apéndice A.

**Teorema 1** (Gale y Shapley,1962)**.** *En un mercado de matrimonio siempre existe un matching estable.*

El *matching* obtenido del algoritmo de aceptación diferida cuando los hombres proponen es denotado por $\mu_M$, y $\mu_W$ será aquel que resulte del mismo algoritmo pero ahora las mujeres serán las que propongan, y ambos son estables. Estos dos *matchings* estables normalmente no son iguales; para ilustrar esto daremos el siguiente ejemplo propuesto en [11].

**Ejemplo 2.** *Sean $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ y $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, con las preferencias:*

$$\begin{array}{ll} P(m_1) = w_1, w_2, w_3, m_1 & P(w_1) = m_1, m_2, m_3, w_1 \\ P(m_2) = w_1, w_2, w_3, m_2 & P(w_2) = m_1, m_3, m_2, w_2 \\ P(m_3) = w_1, w_3, w_2, m_3 & P(w_3) = m_1, m_2, m_3, w_3 \end{array}$$

*Cualquier matching que no tenga asignado $m_1$ con $w_1$ es inestable porque son su primera opción respectivamente y serán un par bloqueante. Por lo tanto, existirán sólo dos matchings estables:*

$$\mu_M(m_1) = w_1, \mu_M(m_2) = w_2, \mu_M(m_3) = w_3$$

$$\mu_W(m_1) = w_1, \mu_W(m_2) = w_3, \mu_W(m_3) = w_2$$

*los cuales son diferentes en la asignación para $m_2$ y $m_3$. Además de ser diferentes, son totalmente opuestas para los dos conjuntos, en el sentido que para todos los hombres $\mu_M$ es al menos tan bueno como $\mu_W$ y para todas las mujeres $\mu_W$ es al menos tan bueno como $\mu_M$.*

El Teorema 1 nos asegura que existirá *matching* estable en cualquier mercado de matrimonio, pero no nos asegura que sea el único. Por lo tanto, como pueden existir varios *matchings* estables, es natural pensar en preferencias sobre los *matchings* estables, y más aún, se analizará cuáles *matchings* son preferidos sobre otros por cada conjunto, $M$ y $W$.

Diremos que un *matching* $\mu$ es al menos tan bueno como $\mu'$ para todos los hombres, $\mu P_M \mu'$, si $\mu(m) P_m \mu'(m)$ para al menos un hombre y $\mu(m) R_m \mu'(m)$ para todos los hombres; y $\mu R_M \mu'$ denotará que se cumple $\mu P_M \mu'$ o que todos los hombres son indiferentes entre $\mu$ y $\mu'$. Estas preferencias, a diferencia de las individuales, no serán completas, ya que se puede dar el caso en el que $\mu$ sea preferido estrictamente por algunos hombres y $\mu'$ sea preferido por otros, entonces se dirá que $\mu$ y $\mu'$ no son comparables. Pero estas preferencias, al igual que las individuales, si cumplen con transitividad, si $\mu$ es al menos tan bueno como $\mu'$ y $\mu'$ es al menos tan bueno como $\mu''$, entonces $\mu$ es al menos tan bueno como $\mu''$. De igual manera se define $P_W$ para representar las preferencias del conjunto $W$ sobre los posibles *matchings*.

A pesar de que exista desacuerdo entre los hombres respecto a cuál es el mejor *matching*, todavía podrían estar de acuerdo en cuál es el mejor *matching* estable. Para un mercado de matrimonio dado, decimos que un *matching* estable $\mu$ es óptimo para los hombres si a cada hombre le gusta al menos tanto como cualquier otro *matching* estable. Se define el *matching* estable óptimo para las mujeres de igual manera. Formalmente,

**Definición 3.** *Dado un mercado $(M, W, P)$, un matching estable $\mu$ es $M$-**óptimo** si para cualquier otro matching estable $\mu'$, $\mu R_M \mu'$. De igual manera, un matching estable $\nu$ es $W$-**óptimo** si para cualquier otro matching estable $\nu'$, $\nu R_W \nu'$.*

Como ya mencionamos anteriormente, los individuos tienen preferencias sobre los *matchings*, las cuales dependen de sus preferencias individuales. Llamaremos opciones *alcanzables* para el hombre $m$ a aquellas mujeres que son asignadas a dicho hombre en algún *matching* estable. En un mercado donde las preferencias de los individuos son estrictas, cada uno de ellos tendrá sólo un *matching* favorito y será aquel donde el hombre sea asignado a su mujer alcanzable más preferida. Esto es lo que hace precisamente el *matching* estable $M$-óptimo. De manera análoga sucede en el caso del *matching* estable $W$-óptimo. El siguiente teorema muestra que el *matching* estable óptimo existe.

**Teorema 2** (Gale y Shapley,1962)**.** *Cuando todos los hombres y todas las mujeres tienen preferencias estrictas, siempre existe un matching estable $M$-óptimo y un matching estable $W$-óptimo. Además, el matching $\mu_M$ obtenido por el algoritmo de aceptación diferida con los hombres proponiendo es el matching estable $M$-óptimo. Y el matching estable $W$-óptimo es el matching $\mu_W$ obtenido por el algoritmo de aceptación diferida cuando las mujeres proponen.*

Entonces, cuando las preferencias son estrictas, los agentes de un lado del mercado tienen intereses comunes respecto al conjunto de *matchings* estables. Resulta que los agentes de lados opuestos del mercado tienen intereses opuestos en este sentido, es decir, el *matching* estable óptimo para uno de los lados es el peor *matching* estable para el otro lado del mercado. Este resultado se da, no sólo en los casos de los *matchings* óptimos, sino también al comparar cualesquiera dos *matchings* estables. Cualquier *matching* estable que es mejor para todos los hombres es peor para todas las mujeres, y viceversa. Formalmente,

**Teorema 3** (Knuth,1976)**.** *Cuando todos los agentes tienen preferencias estrictas, las preferencias de los dos lados del mercado son opuestas sobre el conjunto de matchings estables. Si $\mu$ y $\mu'$ son matchings estables, entonces para todos los hombres $\mu$ es al menos tan bueno como $\mu'$ si y sólo si para todas las mujeres $\mu'$ es al menos tan bueno como $\mu$. Esto es, $\mu R_M \mu'$ si y sólo si $\mu' R_W \mu$.*

Una consecuencia inmediata de este teorema es el siguiente corolario. En éste se estipula que el *matching* estable $M$-óptimo es el peor *matching* estable para la mujer, es decir, asigna a cada mujer con su pareja alcanzable menos preferida; y de igual forma, el *matching* estable $W$-óptimo asigna a cada hombre su pareja alcanzable menos preferida

**Corolario 1.** *Cuando todos los agentes tienen preferencias estrictas, si $\mu_M$ es el matching estable $M$-óptimo y $\mu_W$ el matching estable $W$-óptimo, entonces para todo $\mu$ estable, $\mu R_W \mu_M$ y $\mu R_M \mu_W$.*

Supongamos que le pedimos a todos los hombres que señalen a su mujer alcanzable más preferida. Entonces, el resultado expuesto en el Teorema 2 nos dice dos puntos importantes: primero, ningún hombre señalará a la misma mujer que otro, entonces éste será un *matching* donde todos los hombres se casarán con la mujer que hayan señalado. Segundo, este *matching* será estable. Además, éste será el *matching* $M$-óptimo, y el *matching* $W$-óptimo se obtiene pidiéndole a las mujeres que señalen a su hombre alcanzable más preferido. Y el

Teorema 3 nos dice que también podemos obtener el *matching* $W$-óptimo pidiéndole a los hombres que señalen a su mujer alcanzable menos preferida.

Otro resultado importante en la teoría de *matching* es el teorema conocido como *Teorema del hospital rural*, conocido así por su aplicación al problema de asignación y residentes a hospitales publicado por Roth en [10]. Este teorema apareció por primera vez en el año 1970 en [8], y habla de los agentes que quedan solteros en un mercado con preferencias estrictas; nos dice que el conjunto de agentes que quedan solteros al encontrar un *matching* estable es el mismo que para cualquier otro *matching* estable.

**Teorema 4** (McVitie y Wilson,1970)**.** *En un mercado $(M, W, P)$ con preferencias estrictas, el conjunto de personas que son solteras es el mismo para todos los matchings estables.*

Entonces, este teorema asegura que las personas que queden solteras en algún *matching* estable $\mu$ también quedarán solteras en cualquier otro *matching* estable $\mu'$. Esto no nos indica de qué manera quedan asignados los agentes que sí han encontrado pareja, sólo que el conjunto de éstos es el mismo. Es decir, si en un mercado con cinco hombres y cuatro mujeres, por ejemplo, en el *matching* $\mu$ el hombre $m_1$ ha sido asignado a $w_1$, el hombre $m_2$ a $w_2$, el hombre $m_3$ a $w_3$ y los agentes $m_4, m_5$ y $w_4$ han quedado solteros, entonces en algún otro *matching* $\mu'$, los agentes $m_4, m_5$ y $w_4$ también quedarán solteros y los hombres $m_1, m_2$ y $m_3$ serán asignados a alguna mujer, pero no necesariamente la misma, por ejemplo, $m_1$ con $w_1$, $m_2$ con $w_3$ y $m_3$ con $w_2$.

# Capítulo 3

# Extensión al modelo bilateral

En este capítulo se realizará un planteamiento formal del problema que se quiere resolver, para después dar paso a un desglose de los conceptos básicos que serán utilizados para establecer nuevos conceptos que serán necesarios para dar una solución a dicho problema.

En la primera sección se aborda un problema relacionado con la asignación de un conjunto de materias a un conjunto de profesores, planteándolo como un problema de asignación bilateral. En la segunda sección se analiza el caso de manera similar al problema de matrimonio [4], es decir, se buscará un *matching* estable para este mercado, pero observaremos que se puede obtener que algunas materias no sean asignadas a algún profesor. Es por este motivo, que en la tercera sección se busca un proceso que permita obtener un *matching* que realice una asignación donde todas las materias obtengan un profesor que las imparta, y que además se considere estable en algún sentido.

En la sección cuarta se abordarán algunas propiedades que cumplirán las asignaciones realizadas en la sección anterior. Para finalizar con algunos casos particulares que fueron analizados durante el estudio de dichas asignaciones, donde se buscan condiciones suficientes para que algunas asignaciones sean iguales.

## 3.1. Planteamiento formal del problema

En numerosos departamentos de universidades se ha observado el problema que representa el asignar las materias que serán dictadas cada semestre a los profesores que conforman la planta docente de dicha institución. Este problema puede ser planteado de la manera en que se plantea un mercado de matrimonio, y se puede intentar resolver de la misma manera que dicho mercado de matrimonio. Esto se puede hacer gracias a que se tienen dos lados del mercado, profesores y materias, y ambos tienen preferencias sobre el conjunto opuesto. Los profesores, claramente, tienen preferencias sobre las materias: ellos son capaces de identificar qué materia les gustaría más que otra y ordenarlas de acuerdo a esto. En el caso de las materias, ellas no son capaces de indicar cuáles son sus preferencias, pero sí existe en cada institución alguien que tiene el trabajo de realizar la asignación y dicha persona debe ser capaz de asignar una prioridad para cada materia. Esta prioridad será dada por un orden sobre los profesores, es decir, indicará cuál profesor tiene prioridad sobre los otros para impartir alguna materia basándose en el currículum, experiencia, antigüedad, disponibilidad, etc. y estas listas serán lo que a partir de ahora llamaremos preferencias de las materias sobre el conjunto de profesores. Además, buscamos hacer una asignación uno a uno, es decir, un profesor dictando una sola materia.

Algo que hay que tener muy claro desde el principio es que las instituciones siempre buscan que todas las materias sean impartidas, no tendría mucho sentido decir que buscaran lo contrario. Otro detalle importante en nuestro modelo es que a las instituciones les es indiferente que algunos profesores queden sin una materia asignada, a éstos les bastará con asignar todas las materias sin ser un problema que haya maestros que no realicen esta tarea durante el semestre.

Los elementos para el modelo formal que utilizaremos son una adaptación de los conceptos dados en [11]. Tendremos dos conjuntos finitos y disjuntos $L = \{l_1, l_2, ..., l_n\}$ el conjunto de materias y $T = \{t_1, t_2, ..., t_m\}$ el conjunto de profesores. Consideraremos que la cardinalidad del conjunto de materias es menor que la cardinalidad del conjunto de profesores, $n \leq m$, esto con el objeto de que todas las materias puedan tener algún maestro que las imparta.

Los dos conjuntos tienen preferencias sobre el conjunto opuesto, es decir, los profesores tendrán preferencias sobre el conjunto de las materias y viceversa. Dichas preferencias serán racionales, y además supondremos que son estrictas. Las preferencias de cada profesor serán representadas por una lista ordenada de preferencias, $P(t)$, sobre el conjunto $L \cup \{t\}$, de manera similar, cada materia tendrá preferencias, $P(l)$, sobre el conjunto $T \cup \{l\}$.

Las preferencias son tales que cada profesor puede preferir quedarse sin impartir una materia a impartir alguna que no sea de su agrado, es decir el equivalente a quedarse soltero en el modelo de matrimonio. Supondremos que todos los profesores serán aceptables para dar cualquier materia, es decir, que cada materia tendrá preferencias sobre todo el conjunto de maestros.

Entonces, podemos decir, por ejemplo, que algún profesor tiene la siguiente lista de preferencias:

$$P(t) = l_1, l_2, t, l_3 ..., l_n$$

en donde el profesor $t$ prefiere impartir la materia $l_1$, después la materia $l_2$, y su tercera opción es quedarse sin impartir materia a cualquiera de las restantes.

Llamaremos *materias aceptables* para el profesor $t$ a la lista de preferencias de $t$ donde sólo se considera a las materias que son preferidas al mismo profesor, esto es, aquellas que se prefieren a no dar clases.

Para las materias todos los profesores se considerarán *aceptables*, por lo tanto la lista de preferencias de $l$ tendrá como última opción al mismo $l$. Entonces, para alguna materia $l$, la lista de preferencias podría ser, por ejemplo:

$$P(l) = t_1, t_2, ..., t_m, l$$

lo que nos indica que prefiere en primer lugar al profesor $t_1$, en caso de que dicho profesor ya esté ocupado en otra materia su segunda opción es $t_2$, así sucesivamente hasta llegar al profesor $t_m$ y su última opción será quedarse sin ser impartida.

Al igual que en el mercado de matrimonio, tendremos un perfil de preferencias dado por $P = \{P(l_1), ..., P(l_n), P(t_1), ..., P(t_m)\}$. Un mercado $M$ de materias y profesores con sus respectivas preferencias será denotado por la terna $(L, T, P)$.

Escribiremos $tP_lt'$ para indicar que la materia $l$ prefiere al profesor $t$ sobre el profesor $t'$, y $tR_lt'$ indicará que el profesor $t$ es al menos tan bueno como $t'$ para la materia $l$. De igual manera, si $lP_tl'$, el profesor $t$ prefiere impartir la materia $l$ a la materia $l'$, y si $lR_tl'$ entonces $l$ es al menos tan buena como $l'$ para $t$.

Con las preferencias definidas como lo hemos hecho, se puede pensar en realizar una asignación entre materias y profesores; la manera más natural de realizarla es haciendo uso de la definicón de *matching* dada en el capítulo anterior.

De igual manera se buscará una asignación que cumpla con ciertas características que sean deseables para obtener asignaciones que no sean sencillas de romper. Es decir, se buscará que la asignación no sea bloqueada ni por un individuo ni por un par de individuos. Cabe aclarar que en nuestro problema de materias-profesores, una materia nunca será un individuo bloqueador, ya que para ellas todos los profesores son aceptables.

El conjunto de *matchings* estables en un mercado $(L, T, P)$, al igual que en el mercado de matrimonio, será no vacío y se denotará por $S(L, T, P)$.

Teniendo en cuenta la teoría del capítulo anterior, daremos un ejemplo de cómo puede ser utilizada en nuestro mercado de materias y profesores.

**Ejemplo 3.** *Sea $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7\}$ el conjunto de profesores y $L = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6\}$ el conjunto de materias a impartir. Con la siguiente lista de preferencias:*

$$
\begin{array}{ll}
P(t_1) = l_1, l_2, l_3, l_5, l_6, t_1, l_4 & P(l_1) = t_1, t_2, t_3, t_4, t_6, t_5, t_7, l_1 \\
P(t_2) = l_1, l_2, t_2, l_3, l_4, l_6, l_5 & P(l_2) = t_3, t_4, t_7, t_1, t_6, t_2, t_5, l_2 \\
P(t_3) = l_2, l_1, l_4, t_3, l_6, l_5, l_3 & P(l_3) = t_4, t_2, t_3, t_5, t_6, t_7, t_1, l_3 \\
P(t_4) = l_2, l_1, t_4, l_4, l_5, l_3, l_6 & P(l_4) = t_3, t_7, t_1, t_2, t_5, t_6, t_4, l_4 \\
P(t_5) = l_2, l_1, t_5, l_5, l_6, l_4, l_3 & P(l_5) = t_1, t_7, t_3, t_2, t_6, t_4, t_5, l_5 \\
P(t_6) = l_2, l_1, t_6, l_6, l_3, l_5, l_4 & P(l_6) = t_1, t_2, t_3, t_6, t_5, t_4, t_7, l_6 \\
P(t_7) = l_2, l_3, l_1, t_7, l_4, l_5, l_6 &
\end{array}
$$

*Utilizando el algoritmo de aceptación diferida cuando las materias proponen, obtenemos un matching estable dado por* $\mu(l_1) = t_1,\ \mu(l_2) = t_3, \mu(l_3) = t_7, \mu(l_4) = l_4, \mu(l_5) = l_5$, $\mu(l_6) = l_6, \mu(t_2) = t_2, \mu(t_4) = t_4, \mu(t_5) = t_5$ *y* $\mu(t_6) = t_6$.

El problema con las asignaciones estables que nos arrojan estas preferencias es que no todas las materias han sido asignadas.

## 3.2. Definiciones Básicas

En vista de que, como en el ejemplo, existen mercados en los cuales los *matchings* estables que se pueden encontrar no asignan todas las materias a los profesores, se buscará una manera de poder resolver este problema cuando se presente. Con este objeto se definirá el concepto de mercados $k$-extendidos, denotados por $M_k$, para poder encontrar asignaciones donde no queden materias sin profesor que las imparta y además sean de alguna manera estables.

Consideramos $L_t = \{l \in L | l P_t t\}$, el conjunto de todas las materias aceptables para el profesor $t$ bajo las preferencias $P$. Y el conjunto de materias que han sido asignadas por algún *matching* $\mu$ bajo las preferencias $P$ como $L_\mu = \{l \in L | \mu(l) \in T\}$. De igual manera, definimos, $T_\mu = \{t \in T | \mu(t) \in L\}$, el conjunto de los profesores asignados por algún *matching* $\mu$ bajo las preferencias $P$.

Denotamos al mercado $M_0 = M$ por la terna $(L, T, P) = (L^0, T^0, P^0)$, donde $P^0$ son las preferencias sobre los conjuntos $L^0$ y $T^0$, y por $\mathcal{M}^0$ al conjunto de *matchings* en el mercado $M_0$.

Supongamos que tenemos un caso como el del Ejemplo 3, en donde las únicas materias asignadas fueron $l_1, l_2, l_3$. Nuestro problema principal es que tenemos materias sin asignar después de haber encontrado algún *matching*, $l_4, l_5, l_6$, entonces lo que haremos será tomar estas materias y tratar de asignarlas a algún profesor. Para referirnos a ellas utilizaremos la siguiente notación. Las materias que no han sido asignadas por algún *matching* $\mu^0 \in \mathcal{M}^0$ serán denotadas por $L^1 = L^0 \setminus L_{\mu^0}$ y los profesores que no han sido asignados por el mismo *matching* se denotarán por $T^1 = T^0 \setminus T_{\mu^0}$.

El mercado $M_0$ y el *matching* $\mu^0$ definirán un nuevo mercado $M_1$ que sólo dependerá de ellos y de cómo sean dadas las preferencias sobre los conjuntos $L^1$ y $T^1$. Además, los conjuntos $L^1$ y $T^1$ sólo dependen de las materias y profesores que hayan sido asignados por algún *matching* $\mu^0 \in \mathcal{M}^0$.

Las preferencias en este nuevo mercado $M_1$ tienen que cumplir ciertas reglas para que las preferencias originales $P^0$ no se vean afectadas. En primer lugar, las preferencias se darán sólo sobre las materias y profesores que no han sido asignados por el *matching* $\mu^0$. Para el caso de las materias, deben cumplir que las preferencias sobre los profesores no asignados se mantendrán en el mismo orden sin importar que algunos de ellos hayan sido eliminados de la lista. Para los profesores, tiene que cumplir ésto y además, al menos uno de los profesores tiene que agregar al menos una materia a su lista de materias aceptables. Lo anterior con el objeto de que tengamos alguna materia por asignar; si los profesores no cumplieran con esta condición, entonces ninguno de ellos estaría aceptando impartir alguna de las materias que quedan por repartir y nuestro proceso nunca alcanzaría su objetivo.

**Definición 4.** *Considerando el mercado $M_0 = (L^0, T^0, P^0)$ y un matching $\mu^0 \in \mathcal{M}_0$. Si $L^1 \neq \emptyset$ se define una* ***extensión*** *(o 1-extensión) de $M_0$ y $\mu^0$ como $M_1 = (L^1, T^1, P^1)$, donde $P^1$ es un orden de preferencias que está definido:*

- *Para cada $l \in L^1$, $P^1_l = P^0_l|_{T^1 \cup \{l\}}$.*
- *Para cada $t \in T^1$, $P^1_t$ un orden definido sobre $L^1 \cup \{t\}$ donde $l_1 P^1_t l_2$ si y sólo si $l_1 P^0_t l_2$.*
- *Existe algún $l \in L^1$ tal que $l P^1_t t$ para algún $t \in T^1$.*

Con el objeto de ilustrar este concepto continuaremos trabajando con el ejemplo anterior.

**Ejemplo 4** (Continuación Ejemplo 3)**.** *En el Ejemplo* 3 *teníamos un mercado $(L, T, P)$, tomaremos este mercado y se hará una extensión.*
*Sea $T^0 = T$ y $L^0 = L$, con la misma lista de preferencias del Ejemplo* 3 *y $P^0 = P$.*
*Al aplicar el algoritmo de aceptación diferida cuando las materias proponen a este mercado $(L^0, T^0, P^0)$ encontramos la siguiente asignación: $\mu^0(l_1) = t_1$, $\mu^0(l_2) = t_3$, $\mu^0(l_3) = t_7, \mu^0(l_4) = l_4, \mu^0(l_5) = l_5, \mu^0(l_6) = l_6, \mu^0(t_2) = t_2, \mu^0(t_4) = t_4, \mu^0(t_5) = t_5, \mu^0(t_6) = t_6$.*
*Entonces $L^1 = L^0 \setminus L_{\mu^0} = \{l_4, l_5, l_6\} \neq \emptyset$, $T^1 = T^0 \setminus T_{\mu^0} = \{t_2, t_4, t_5, t_6\}$ y la extensión del mercado $M_0$ será el mercado $M_1 = (L^1, T^1, P^1)$, donde $P^1$ podría ser:*

$$\begin{array}{ll}
P^1(t_2) = l_4, t_2, l_6, l_5 & P^1(l_4) = t_2, t_5, t_6, t_4, l_4 \\
P^1(t_4) = t_4, l_4, l_5, l_6 & P^1(l_5) = t_2, t_6, t_4, t_5, l_5 \\
P^1(t_5) = l_5, l_6, l_4, t_5 & P^1(l_6) = t_2, t_6, t_5, t_4, l_6 \\
P^1(t_6) = t_6, l_6, l_5, l_4 &
\end{array}$$

*En esta extensión vemos que se cumplen los tres puntos importantes para las preferencias* $P^1$*: primero, mantienen el orden de las preferencias* $P_l^0$ *limitandose al conjunto* $T^1$ *solamente; segundo, también se mantiene el orden de las preferencias* $P_t^0$ *para el conjunto* $L^1 \cup \{t\}$*; y tercero, al menos un profesor extiende su lista de aceptables en al menos una materia, en este caso los profesores* $t_2$ *y* $t_5$ *son los que agregan materias a sus aceptables. Con esto nuestro nuevo mercado* $M_1$ *está correctamente extendido a partir de* $M_0$ *y* $\mu^0$*.*

Ahora, supongamos que ya realizada una extensión del mercado $M_0$, queremos obtener una asignación en el mercado $M_1$ y la encontramos por algún método, es decir, encontramos un *matching* $\mu^1 \in \mathcal{M}^1$, pero este *matching* no nos asigna a todas las materias, donde por $\mathcal{M}^1 := \mathcal{M}(\mu^0)$ denotamos todos los *matchings* definidos en el mercado $M_1$. Entonces, aún con la extensión realizada y las nuevas asignaciones, seguimos teniendo algunas materias sin asignar. La extensión ha resuelto parte del problema, pero no todo.

Como el problema puede no ser resuelto por completo al realizar la 1-extensión, volveremos a extender el mercado y lo haremos cuantas veces sean necesarias.

Llamaremos $M_k = (L^k, T^k, P^k)$ al mercado $k$-extendido donde $L^k = L^{k-1} \setminus L_{\mu^{k-1}}$ es el conjunto de materias que *no* han sido asignadas por el *matching* $\mu^{k-1}$, $T^k = T^{k-1} \setminus T_{\mu^{k-1}}$ representa el conjunto de profesores que *no* fueron asignados por dicho *matching*, y $P^k$ son las preferencias sobre los conjuntos $L^k$ y $T^k$, y $\mathcal{M}^k$ los *matchings* definidos en el mercado $M_k$.

**Definición 5.** *Dado el mercado* $M_0$*, la secuencia* $(M_k)_{k=1}^{r-1}$ *y los matchings* $\mu^k \in \mathcal{M}^k$*, para* $k = 0, ..., r-1$*, donde cada* $M_k$ *es una extensión de* $M_{k-1}$*. Si* $L^{r-1} \setminus L_{\mu^{r-1}} \neq \emptyset$ *defino una extensión de* $M_{r-1}$ *y* $\mu^{r-1}$ *por:*

$$M_r = (L^r, T^r, P^r).$$

*Diremos que* $M_r$ *es una* $r$***-extensión*** *de* $M_0, \mu^0, \mu^1, ..., \mu^{r-1}$*.*

En el caso de que haya en alguna etapa alguna materia sin asignar, pediremos que por lo menos un profesor tenga al menos una materia aceptable en la próxima extensión.

Debido a que cada materia tiene a cada profesor $t$ como aceptable en la preferencia $P_l^0$, las extensiones son no triviales, es decir, se puede construir un *matching* $\mu^k$ para algún profesor $t$ tal que $\mu^k(t) \neq t$. Por lo tanto, en cada etapa, el conjunto de materias y profesores será reducido estrictamente y la extensión parará en algún $r \geq 0$. Diremos que el proceso de extensión termina si ya no existen materias sin asignar, es decir, $L^r \setminus L_{\mu^r} = \emptyset$ y denotaremos $(M_k)_{k=0}^{r}$ la secuencia de mercados construidos por este proceso donde las extensiones paran en la etapa $r$.

Al realizar las extensiones de los mercados se permite que algún o algunos profesores no participen en una o varias rondas de extensión. Esto no impide que en algún momento las extensiones terminen, alcanzándose el objetivo principal.

Después de haber delimitado cómo serán extendidos los mercados, podemos ponerlos a interactuar entre ellos para realizar alguna asignación.

**Definición 6.** *Dada una secuencia* $(M_k)_{k=0}^r$ *y* $\mu^k \in \mathcal{M}^k$*, con* $k = 0, ..., r$*, definimos* $(\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r) : L \cup T \to L \cup T$ *si:*

- *Para todo* $l \in L$*,* $(\mu^0, ..., \mu^r)(l) = \mu^k(l)$ *si* $\mu^k(l) \neq l$*.*
- *Para todo* $t \in T \setminus T^r$*,* $(\mu^0, ..., \mu^r)(t) = \mu^k(t)$ *si* $\mu^k(t) \neq t$*.*
- *Para todo* $t \in T^r$*,* $(\mu^0, ..., \mu^r)(t) = \mu^r(t)$

Esta función $(\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r)$ asigna a cada materia un profesor que la imparta en el mercado $M_k$ en el que por primera vez se le asigne algo diferente de ella misma. Por ejemplo, si la materia $l$ ha sido asignada a ella misma en los mercados $M_0, M_1, ..., M_5$ y en el mercado $M_6$ se le asigna algún profesor $t$, entonces tendremos que $(\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r)(l) = \mu^6(l) = t$. Para los profesores funcionará de la misma manera, con excepción de aquellos, que al momento de que todas las materias se asignen en el mercado $M_r$, queden sin materia por impartir.

Esta asignación nos podría dar como resultado en un mercado de 4 profesores y 3 materias, por ejemplo $(\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r)(l_2) = \mu^0(l_2) = t_1, (\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r)(l_3) = \mu^0(l_3) = t_3$, $(\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r)(l_1) = \mu^1(l_1) = t_4, (\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r)(t_2) = \mu^1(t_2) = t_2$, donde del mercado original $M_0$ obtenemos que el profesor $t_1$ impartirá la materia $l_2$ y el profesor $t_3$ la materia $l_3$, del mercado $M_1$ el profesor $t_4$ impartirá la materia $l_1$ y el profesor $t_2$ se quedará sin impartir materia.

Analizando la asignación, notamos que nos arroja como solución pares de materias y profesores, y dichos pares cumplen con las condiciones necesarias para que cumpla la definición de *matching* dada en el capítulo anterior.

**Lema 1.** *Dada una secuencia* $(M_k)_{k=0}^r$ *y* $\mu^k \in \mathcal{M}^k$*,* $k = 0, ..., r$*. Entonces,* $(\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r)$ *es* ***matching*** *en* $\mathcal{M}^r$*.*

*Demostración.* Para que la función $(\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r) : L \cup T \to L \cup T$ pueda ser considerada *matching* debe cumplir con tres condiciones:

1. Si $(\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r)(l) \notin L$ entonces $(\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r)(l) = t$ para todo $l \in L$. Esta condición se cumple de manera inmediata por la definición, de hecho en la definición se menciona que la asignación hecha debe estar en el conjunto de los profesores.
2. Si $(\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r)(t) \notin T$ entonces $(\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r)(t) = l$ para todo $t \in T$. Esta condición también se cumple de manera inmediata por la Definición 6.

3. $(\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r)(l) = t$ si y sólo si $(\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r)(t) = l$ para todo $l \in L$, y para todo $t \in T$. Por definición tenemos que para todo $l \in L$, $(\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r)(l) = \mu^k(l) = t$, como $\mu^k$ es *matching* en el mercado $M_k$ entonces $\mu^k(t) = l$, por lo tanto $(\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r)(t) = l$.

□

## 3.3. $r$-Estabilidad

Al igual que en el caso donde tenemos *matchings* de la forma convencional y establecimos cuál o cuáles de ellos eran los más deseables, ya que no existían individuos o pares bloqueadores. En este caso, donde tenemos *matchings* en los diferentes mercados, trataremos de establecer qué *matchings* son los más naturales desde un punto de vista similar.

Ahora nos daremos a la tarea de buscar algún *matching* donde la asignación hecha, tanto para la materia como para el profesor, sea aceptable, pero no sólo eso, sino que debemos tener cuidado con qué mercado estamos trabajando. Es decir, buscaremos asignaciones aceptables y no bloqueadas, pero en cada uno de los mercados.

Si la asignación hecha en el mercado $M_0$ no es bloqueada por un profesor o por un par profesor-materia, entonces será deseable, de otra forma el *matching* en este mercado tenderá a disolverse, es decir, los profesores buscarán la manera de intercambiar materias o de deshacerse de la materia asignada. De igual manera, si la asignación hecha en el mercado $M_1$ no es bloqueada por algún profesor o por un par, también será deseable, y así sucesivamente para todos los mercados.

**Definición 7.** *Dada una secuencia* $(M_k)_{k=0}^r$ *y* $\mu^k \in \mathcal{M}^k$, $k = 0, ..., r$. $(\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r)$ *es* $r$***-estable*** *si cada componente* $\mu^k$ *es estable en el mercado correspondiente* $(L^k, T^k, P^k)$.

El conjunto de *matchings* $r$-estables será denotado por $S_r(\left(L^k, T^k, P^k\right)_{k=0}^r)$ .

La pregunta natural en este punto es, ¿siempre existe al menos un *matching* $r$-estable en el mercado de profesores y materias? La manera más sencilla de mostrar que esto ocurre es dando algún algoritmo que nos arroje un *matching* $r$-estable. El algoritmo de extensión de mercados que se ha diseñado para este objetivo es una adaptación del algoritmo de aceptación diferida, y está descrito a continuación.

**Algoritmo de extensión de mercados**

- *Etapa 1.* Dado $(L, T, P)$, se define $L^0 = L$, $T^0 = T$ y $P^0 = P$ y se ejecuta el algoritmo de aceptación diferida con las materias haciendo las propuestas en el mercado $M_0 = (L^0, T^0, P^0)$, obteniendo como resultado el *matching* $\mu^0$. Entonces se define el mercado $M_1 = (L^1, T^1, P^1)$ como se indica en la Definición 4.

- *Etapa k.* En cada etapa se realiza el algoritmo de aceptación diferida en el mercado $M_{k-1} = (L^{k-1}, T^{k-1}, P^{k-1})$, y se construye el mercado $M_k = (L^k, T^k, P^k)$ como se indica en la Definición 5. Esto se llevará a cabo mientras $L^{k-1} \neq \emptyset$, en caso contrario el algoritmo se detiene.

Cabe aclarar que el algoritmo siempre se detendrá en algún paso $r$, esto ocurre porque siempre habrá al menos un profesor que extienda sus materias aceptables, entonces en cada etapa se estará asignando al menos una materia hasta que no queden más materias sin asignar, es decir, $L^r = \emptyset$.

**Teorema 5.** *Dada una sucesión de mercados $(M_k)_{k=0}^r$, el conjunto de matchings $r$-estables $S_r(\left(L^k, T^k, P^k\right)_{k=0}^r)$ es no vacío.*

*Demostración.* Sean $M_0, M_1, ..., M_r$, por el Teorema 1 sabemos que en el mercado $M_0$ siempre tendremos al menos un *matching* estable. Esto se cumplirá también para cada uno de los mercados $M_1, M_2, ..., M_r$. Por lo tanto, como en cada mercado existe al menos un *matching* estable, por definición de *matching* $r$-estable, tenemos al menos un *matching* $r$-estable. $\square$

Con motivo de que se comprendan los conceptos dados hasta ahora se retoma el ejemplo de la primera sección.

**Ejemplo 5** (Continuación Ejemplo 4)**.** *En el Ejemplo 4, obtuvimos, por medio del algoritmo de aceptación diferida (AAD), las siguientes asignaciones: $\mu^0(l_1) = t_1$, $\mu^0(l_2) = t_3$, $\mu^0(l_3) = t_7$, quedando sin profesor asignado las materias $l_4, l_5$ y $l_6$ y sin materia asignada los profesores $t_2, t_4, t_5$ y $t_6$.*
*Además obtuvimos el mercado 1-extendido, $M_1$, con $T^1 = \{t_2, t_4, t_5, t_6\}$, $L^1 = \{l_4, l_5, l_6\}$ y las preferencias $P^1$ de estos conjuntos:*

$$\begin{array}{ll} P^1(t_2) = l_4, t_2, l_6, l_5 & P^1(l_4) = t_2, t_5, t_6, t_4 \\ P^1(t_4) = t_4, l_4, l_5, l_6 & P^1(l_5) = t_2, t_6, t_4, t_5 \\ P^1(t_5) = l_5, l_6, l_4, t_5 & P^1(l_6) = t_2, t_6, t_5, t_4 \\ P^1(t_6) = t_6, l_6, l_5, l_4 & \end{array}$$

*En este nuevo modelo se realiza el AAD en el mercado $M_1$ y se obtiene la asignación $\mu^1(l_4) = t_2$, $\mu^1(l_5) = t_5$, donde $l_6$ no obtiene profesor que la imparta, es decir $\mu^1(l_6) = l_6$ y los profesores $t_4$ y $t_6$ tampoco obtienen materia.*
*Como no se han asignado todas las materias tenemos que realizar una segunda extensión, y obtener el mercado 2-extendido, $M_2$, con $T^2 = \{t_4, t_6\}$ el conjunto de profesores y $L^2 = \{l_6\}$ el conjunto de materias. Y las preferencias $P^2$ dadas por:*

$$\begin{array}{ll} P^2(t_4) = t_4, l_6 & P^2(l_6) = t_6, t_4 \\ P^2(t_6) = l_6, t_6 & \end{array}$$

*Al realizar el AAD en el mercado $M_2$ se obtiene $\mu^2(l_6) = t_6$, y se observa que todas las materias han sido asignadas, por lo tanto $L^3 = \emptyset$ Entonces, el profesor $t_4$ quedará sin materia* *por impartir,* $(\mu^0, \mu^1, \mu^2)(t_4) = \mu^2(t_4) = t_4$.

*Entonces, la asignación hecha para este caso en particular será:*

$$(\mu^0, \mu^1, \mu^2)(l_1) = \mu^0(l_1) = t_1, (\mu^0, \mu^1, \mu^2)(l_2) = \mu^0(l_2) = t_3$$
$$(\mu^0, \mu^1, \mu^2)(l_3) = \mu^0(l_3) = t_7, (\mu^0, \mu^1, \mu^2)(l_4) = \mu^1(l_4) = t_2$$
$$(\mu^0, \mu^1, \mu^2)(l_5) = \mu^1(l_5) = t_5, (\mu^0, \mu^1, \mu^2)(l_6) = \mu^2(l_6) = t_6$$

*Además, como todas las asignaciones en todos los mercados han sido encontradas por medio del AAD, éstas serán estables en cada mercado, es decir, la asignación* $(\mu^0, \mu^1, \mu^2)$ *será* 2*-estable.*

En el ejemplo anterior calculamos el *matching* $r$-estable con el algoritmo de extensión de mercados cuando las materias proponen en cada uno de los mercados. Podríamos encontrar otro *matching* $r$-estable con el mismo algoritmo pero con los profesores haciendo las propuestas en cada mercado. O podríamos encontrar otro *matching*, por ejemplo, si se alternan los profesores y las materias, es decir, en el mercado $M_0$ podrían proponer los profesores, en el $M_1$ las materias, en el $M_2$ los profesores nuevamente y así sucesivamente, o en los primeros 10 mercados proponen los profesores y luego las materias, etc. Cualquier sucesión es válida.

Cabe mencionar que sin importar cuál *matching* estable $\mu^0 \in \mathcal{M}^0$ sea el utilizado en el mercado $M_0$, los conjuntos $L^1$ y $T^1$ siempre estarán compuestos por los mismos elementos. Esto se debe al Teorema 4, donde no importa cuál *matching* estable se utilice, las materias y los profesores que quedarán sin asignar siempre serán los mismos, entonces $L^1 = L^0 \setminus L_{\mu^0} = L^0 \setminus L_{\nu^0}$ para dos *matchings* estables $\mu^0$, $\nu^0 \in \mathcal{M}^0$, de manera análoga para el conjunto $T^1$. Esto sucederá para cada mercado, es decir, $L^k = L^{k-1} \setminus L_{\mu^{k-1}} = L^{k-1} \setminus L_{\nu^{k-1}}$ para $\mu^{k-1}$, $\nu^{k-1} \in \mathcal{M}^{k-1}$, de igual manera para el conjunto $T^k$.

Con el objetivo de poder distinguir quién está haciendo las propuestas, las materias o los profesores, en cada uno de los mercados $M_k$, denotaremos por $\mu_L^k$ al *matching* obtenido por el AAD en el mercado $k$ cuando las materias ofrecen y $\mu_T^k$ representará al *matching* obtenido por el AAD en el mercado $k$ cuando los profesores ofrecen.

Notemos que tanto $\mu_L^k$ como $\mu_T^k$ son estables en su mercado $M_k$, por lo tanto la sucesión de estos *matchings* con $k = 0, 1, ..., r$ será $r$-estable.

**Lema 2.** *Sea* $\left(\mu_L^k\right)_{k=0}^r$ *la sucesión de matchings obtenida con el algoritmo de extensión de mercados donde las materias proponen. Entonces el matching* $(\mu_L^0, \mu_L^1, ..., \mu_L^r)$ *es* $r$*-estable.*

*Demostración.* Para que $(\mu_L^0, \mu_L^1, ..., \mu_L^r)$ sea $r$-estable es necesario que cada uno de los elementos de la sucesión sea estable. Además cada uno de los $\mu_L^k$ con $k = 1, 2, ..., r$ es el resultado del AAD cuando las materias proponen, y estos son estables por construcción en su correspondiente mercado $M_k$. □

**Lema 3.** *Sea* $\left(\mu_T^k\right)_{k=0}^r$ *la sucesión de matchings obtenida con el algoritmo de extensión de mercados donde los profesores proponen. Entonces, el matching* $(\mu_T^0, \mu_T^1, ..., \mu_T^r)$ *es* $r$*-estable.*

*Demostración.* Esta proposición se demuestra de manera análoga a la Proposición 1. □

## 3.4. Propiedades

Ya que se ha determinado que los *matchings* $\left(\mu_L^k\right)_{k=0}^r$ y $\left(\mu_T^k\right)_{k=0}^r$ son $r$-estables y que sabemos que existen otros *matchings* que también lo son, es conveniente analizar cuál *matching* será más preferido por ambos conjuntos, el de profesores y el de materias.

Diremos que un *matching* $\mu^k$ es al menos tan bueno como $\mu'^k$ para todas las materias $L^k$ en un mercado $M_k$, $\mu^k P_L^k \mu'^k$, si $\mu^k(l) P_l^k \mu'^k(l)$ para al menos un $l \in L^k$ y $\mu^k(l) R_l^k \mu'^k(l)$ para todas las materias; y $\mu^k R_L^k \mu'^k$ denota que se cumple $\mu^k P_L^k \mu'^k$ o que todas las materias en $L^k$ son indiferentes entre $\mu^k$ y $\mu'^k$. Nótese que al estar trabajando con preferencias estrictas el caso donde las materias son indiferentes entre $\mu^k$ y $\mu'^k$, sólo se dará cuando $\mu^k = \mu'^k$. De igual manera se define $P_T^k$ y $R_T^k$ para representar las preferencias del conjunto $T^k$ en un mercado $M_k$ sobre los posibles *matchings*.

Denotaremos por $\mathcal{R}_L = (R_L^0, R_L^1, ..., R_L^r)$ al vector de perfiles de preferencias de las materias sobre los *matchings* en la secuencia de mercados, de igual manera $\mathcal{R}_T = (R_T^0, R_T^1, ..., R_T^r)$ denota el vector de perfiles de preferencias de las materias sobre los *matchings* en la secuencia de mercados.

Para una sucesión de mercados $(M_k)_{k=0}^r$, decimos que un *matching* ,$(\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r)$, $r$-estable es $r$-óptimo para las materias, si para cada materia asignada en $M_k$, $(\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r)$ es al menos tan bueno como cualquier otro *matching* $r$-estable en el mismo mercado. Se define el *matching* $r$-estable óptimo para los profesores de igual manera.

**Definición 8.** *Dada una sucesión de mercados* $(M_k)_{k=0}^r$*, un matching,* $(\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r)$*,* $r$*-estable es* $L_r$***-óptimo*** *(r-óptimo para las materias) si* $(\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r)\mathcal{R}_L(\mu'^0, \mu'^1, ..., \mu'^r)$ *para cualquier otro matching* $r$*-estable* $(\mu'^0, \mu'^1, ..., \mu'^r)$*. De igual manera, un matching* $r$*-estable* $(\nu^0, \nu^1, ..., \nu^r)$ *es* $T_r$***-óptimo*** *(r-óptimo para los profesores) si para cualquier otro matching* $r$*-estable* $(\nu'^0, \nu'^1, ..., \nu'^r)$ *se cumple* $(\nu^0, \nu^1, ..., \nu^r)\mathcal{R}_T(\nu'^0, \nu'^1, ..., \nu'^r)$*.*

En una secuencia de mercados extendidos $(M_k)_{k=0}^r$ donde las preferencias de los individuos son estrictas, cada uno de ellos tendrá sólo un *matching*, $(\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r)$, $r$-estable favorito y será aquel donde la materia sea asignada a su profesor alcanzable (definido en el Capítulo 1) más preferido en cada mercado. Esto es lo que hace precisamente el *matching* estable $L$-óptimo en cada mercado. De manera análoga sucede en el caso del *matching* estable $T$-óptimo. El siguiente teorema muestra que el conjunto de las materias tendrá al *matching* $(\mu_L^0, \mu_L^1, ..., \mu_L^r)$ como $r$-óptimo y el conjunto de los profesores tendrá como $r$-óptimo al *matching* $(\mu_L^0, \mu_L^1, ..., \mu_L^r)$.

**Teorema 6.** *El matching* $(\mu_L^0, \mu_L^1, ..., \mu_L^r)$ *obtenido por el algoritmo de extensión de mercados con las materias proponiendo en cada extensión es el matching* $r$*-estable* $L_r$*-óptimo. Y el matching* $r$*-estable* $T_r$*-óptimo es el matching* $(\mu_T^0, \mu_T^1, ..., \mu_T^r)$ *obtenido por el algoritmo de extensión de mercados cuando los profesores proponen en cada extensión.*

*Demostración.* Para que el *matching* $(\mu_L^0, \mu_L^1, ..., \mu_L^r)$ sea el $L_r$-óptimo se debe cumplir que $(\mu_L^0, \mu_L^1, ..., \mu_L^r)\mathcal{R}_L(\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r)$ para cualquier otro *matching* $r$-estable $(\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r)$. Entonces necesitamos que se cumpla $\mu_L^k R_L^k \mu^k$ en cada mercado $M_k$, esto es, que $\mu_L^k$ sea el *matching* $r$-estable $L$-óptimo en el mercado $M_k$. El *matching* $\mu_L^0$ es el *matching* $L$-óptimo en el mercado $M_0$, por el Teorema 2. Por el mismo teorema tenemos que $\mu_L^1$ es $L$-óptimo en $M_1$, y así sucesivamente hasta el *matching* $\mu_L^r$ ($L$-óptimo en $M_r$). Por lo tanto, $(\mu_L^0, \mu_L^1, ..., \mu_L^r)$ es $L_r$-óptimo.
De manera análoga se demuestra para el caso del *matching* $(\mu_T^0, \mu_T^1, ..., \mu_T^r)$ que resulta ser el $T_r$-óptimo. □

Los agentes de lado opuesto del mercado tienen intereses opuestos, es decir, el *matching* $r$-estable óptimo para uno de los lados es el peor *matching* $r$-estable para el otro lado del mercado. El *matching* $r$-estable $L_r$-óptimo es el peor *matching* estable para los profesores; esto es, asigna a cada profesor con su materia alcanzable menos preferida. De igual forma, el *matching* $r$-estable $T_r$-óptimo asigna a cada materia con su profesor alcanzable menos preferido. Este resultado se da para cualesquiera dos *matchings* $r$-estables, cualquier *matching* $r$-estable que es mejor para todas las materias es peor para todos los profesores y viceversa.

**Teorema 7.** *Dadas las sucesiones de mercados extendidos* $(M_k)_{k=0}^r$*. Si* $(\mu_L^0, \mu_L^1, ..., \mu_L^r)$ *y* $(\mu_T^0, \mu_T^1, ..., \mu_T^r)$ *son los matchings* $L_r$*-óptimo y* $T_r$*-óptimo, respectivamente. Entonces cualquier otro matching* $r$*-estable* $(\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r)$ *cumple que:*

$$(\mu_L^0, \mu_L^1, ..., \mu_L^r)\mathcal{R}_L(\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r)\mathcal{R}_L(\mu_T^0, \mu_T^1, ..., \mu_T^r)$$

*Demostración.* Haremos la demostración en dos partes:

- $(\mu_L^0, \mu_L^1, ..., \mu_L^r)\mathcal{R}_L(\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r)$. Para que esto se cumpla tenemos que demostrar que en cada mercado $M_k$, $\mu_L^k R_L^k \mu^k$, para $k = 0, 1, ..., r$. Lo cual se cumple de manera inmediata por que $\mu_L^k$ es el *matching* estable $L$-óptimo en el mercado $M_k$ y siempre es el más preferido para todos los $l \in L^k$.

- $(\mu^0, \mu^1, ..., \mu^r)\mathcal{R}_L(\mu_T^0, \mu_T^1, ..., \mu_T^r)$. Es decir, tenemos que mostrar que en cada mercado $M_k$, $\mu^k R_L^k \mu_T^k$ para $k = 0, 1, ..., r$. Sabemos que $\mu_T^k$ es el *matching* $T_r$-óptimo, es decir, es el más preferido por todos los profesores en el mercado, $\mu_T^k R_T^k \mu^k$. Además, por el Teorema 3 tenemos que para cada uno de los mercados $M_k$, $k = 0, 1, ..., r$, el *matching* $\mu_T^k R_T^k \mu^k$ si y sólo si $\mu^k R_L^k \mu_T^k$.

□

## 3.5. Casos particulares

En esta sección analizaremos algunos casos particulares que se pueden presentar en el mercado de materias-profesores.

En [3], Eeckhout analiza en cuáles situaciones el *matching* estable que se obtiene es único y da las condiciones suficientes en las preferencias para que esto se cumpla. Lo que nos hace preguntarnos, en nuestro caso, donde existe una extensión en las preferencias, ¿qué condiciones en las preferencias serán suficientes para que dos *matchings* $r$-estables sean iguales? O, ¿qué condiciones deben de cumplirse para que dos *matchings* sean iguales al realizar dos extensiones diferentes?

Diremos que dos preferencias son *homólogas* para dos profesores $t, t' \in T$ si el orden en sus preferencias es el mismo, y lo representaremos por $P_t \sim P_{t'}$. Por ejemplo, cuando tenemos que la lista de las preferencias del profesor $t$ es $P(t) = l_1, l_2, t, l_3, l_4$ y la lista del profesor $t'$ es $P(t') = l_1, l_2, t', l_3, l_4$. Nótese que en los dos casos prefieren en primer lugar a $l_1$, en segundo lugar a $l_2$ y en tercer prefieren quedarse sin materia, es decir, se prefieren a ellos mismos.

De manera análoga, dos preferencias en un mercado $k$-extendido son homólogas $P_t^k \sim P_{t'}^k$ para dos profesores $t, t' \in T^k$ si tienen en el mismo orden en sus preferencias $k$-extendidas.

Considerando estos conceptos, tendremos que en el mercado materias-profesores, el *matching* $T_r$-óptimo y el *matching* $L_r$-óptimo son iguales cuando las preferencias y las extensiones de las preferencias son siempre iguales para todos los profesores. Es decir, que si todos los profesores tienen un mismo orden en sus preferencias y cada vez que las extienden lo hacen de igual manera, entonces no importará quién está haciendo las propuestas, el resultado será el mismo.

**Proposición 1.** *Si $P_t^k \sim P_{t'}^k$, para todo $t, t' \in T$ y $k = 0, 1, ..., r$, entonces $\left(\mu_T^k\right)_{k=0}^r = \left(\mu_L^k\right)_{k=0}^r$.*

*Demostración.* La prueba se realizará por contradicción. Suponemos que $\left(\mu_T^k\right)_{k=0}^r \neq \left(\mu_L^k\right)_{k=0}^r$, entonces existe al menos un $t$ para el cual son distintas las asignaciones hechas por los dos *matchings* $(\mu_T^0, \mu_T^1, ..., \mu_T^r)(t) = l$ y $(\mu_L^0, \mu_L^1, ..., \mu_L^r)(t) = l'$. Como el *matching* obtenido cuando los profesores proponen en cada extensión es el $T_r$-óptimo, entonces será el $T$-óptimo en el mercado en donde fue hecha la asignación para $t$ y $l P_t^k l'$.

Analicemos lo que sucede con el *matching* donde las materias proponen $(\mu_L^0, \mu_L^1, ..., \mu_L^r)$, aquí existen dos posibles razones por lo que $l$ no es la asignación para $t$. Primera, $l$ le propuso a $t$, pero éste la rechazo por quedarse con $l'$, lo que no es posible porque $t$ prefiere a $l$. Segunda, $l$ nunca le propuso a $t$ porque ya estaba apartada por algún otro profesor $t'$

más preferido a $t$ por $l$, es decir, $t'P_l^k t$.

Por otro lado, para el *matching* donde los profesores proponen $(\mu_T^0, \mu_T^1, ..., \mu_T^r)$ tenemos que $t$ nunca le propuso a $l'$ porque primero le propuso a $l$, a quien prefiere más, y esta materia lo aceptó. Además, sabemos que $l$ prefiere a $t$ sobre todos los demás profesores porque $P_t^k \sim P_{t'}^k$, para todo $t, t' \in T$ y $k = 0, 1, ..., r$, es decir, todos los profesores le proponen al mismo tiempo a la materia $l$ y ella elige al más preferido entre todos. Lo que es una contradicción porque si $tP_l^k t'$ para todos los $t' \in T^k \setminus t$, entonces $l$ debería proponerle primero a $t$ cuando se esta obteniendo el *matching* $(\mu_L^0, \mu_L^1, ..., \mu_L^r)$ y no lo hace. Por lo tanto, $\left(\mu_T^k\right)_{k=0}^r = \left(\mu_L^k\right)_{k=0}^r$. □

Con esta proposición hemos encontrado un caso donde no importa quién realice las propuestas, las materias o los profesores, la asignación hecha por ambos *matchings* será igual. Esto no quiere decir que sea el único caso donde $\left(\mu_T^k\right)_{k=0}^r$ y $\left(\mu_L^k\right)_{k=0}^r$ serán iguales, es decir, esta condición es suficiente más no necesaria para que esto se cumpla.

Otro caso interesante es aquel en donde dos *matchings* obtenidos por el algoritmo de extensión de mercados cuando las materias proponen son iguales sin importar cómo se realicen las extensiones. Esto sólo se dará cuando las preferencias originales y las preferencias $k$-extendidas sean homólogas para todos los profesores. Entonces si tenemos preferencias y extensiones homólogas, el *matching* que se obtiene de estos con el algoritmo de extensión de mercados cuando las materias proponen $\left(\mu_L^k\right)_{k=0}^r$ será igual al *matching* que se obtiene con una extensión homóloga, diferente a la primera, aplicando el mismo algoritmo, $\left(\mu_L'^{k'}\right)_{k=0}^{r'}$.

**Proposición 2.** *Si las preferencias de todos los profesores son homólogas,* $P_t^0 \sim P_{t'}^0$*, y se realizan dos extensiones diferentes, donde todos los profesores extienden sus preferencias de manera homóloga,* $P_t^k \sim P_{t'}^k$*,* $k = 1, 2, ..., r$ *y* $P_t'^k \sim P_{t'}'^k$ *para al menos un* $k \in [1, r']$ *y para todo* $t, t' \in T$*. Entonces* $\left(\mu_L^k\right)_{k=0}^r = \left(\mu_L'^k\right)_{k=0}^{r'}$*.*

*Demostración.* Supongamos que $\left(\mu_L^k\right)_{k=0}^r \neq \left(\mu_L'^k\right)_{k=0}^{r'}$, es decir, para al menos un $l \in L$ se cumple $\left(\mu_L^k\right)_{k=0}^r (l) \neq \left(\mu_L'^k\right)_{k=0}^{r'} (l)$. Entonces para $\left(\mu_L^k\right)_{k=0}^r$, $l$ es asignado a algún $t$ en alguna de las extensiones al mercado $(L, T, P)$, digamos la extensión $q \in [0, r]$ y para $\left(\mu_L'^k\right)_{k=0}^{r'}$, $l$ es asignado a $t' \in T$ en alguna extensión de $(L, T, P')$, digamos $q' \in [0, r']$. Entonces tenemos dos posibilidades:

- La cardinalidad del conjunto de materias asignadas hasta la extensión $q$ es la misma que en $q'$. Lo que nos permite asegurar que los conjuntos de materias asignadas en ambas extensiones es el mismo, porque las preferencias de los profesores son homólogas. Como las asignaciones para $l$ son distintas, suponemos, sin pérdida de generalidad, que $tP_l t'$ ya que las preferencias son estrictas. Esto asegura que en $(L^q, T^q, P^q)$, $l$ nunca le propuso a $t'$, y en $(L^{q'}, T^{q'}, P^{q'})$, $t$ rechazo la propuesta de $l$, lo que claramente es una contradicción pues, al tratarse del mismo conjunto de materias, $t$ lo acepta en $(L^q, T^q, P^q)$ al no haber propuesta de un candidato mejor.

- La cardinalidad del conjunto $Q \in L$ de materias asignadas hasta la extensión $q$ de $(L, T, P)$, es distinta a la cardinalidad del conjunto $Q' \in L$ de materias asignadas hasta la extensión $q'$ de $(L, T, P')$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $|Q'| > |Q|$, entonces podemos encontrar un conjunto $Q'' \in Q'$ que contenga a $l$ y cumpla $|Q''| = |Q|$, es decir la extensión $q'$ en donde se agrega $l$ al conjunto de aceptables en $(L, T, P')$ se divide en dos extensiones y deja a $l$ en el conjunto $Q''$, esto se puede realizar porque las preferencias de los profesores son homólogas. Y por esta misma razón podemos asegurar que $Q'' = Q$, que es precisamente el primer caso en donde se presenta una contradicción. □

Esta proposición nos asegura que no importa cómo realicemos las extensiones, en el caso donde las preferencias y las extensiones sean homólogas, tendremos que el *matching* encontrado con el algoritmo de extensión de mercados cuando las materias proponen siempre será el mismo. El resultado es análogo para el caso de los *matchings* encontrados con el algoritmo de extensión de mercados cuando los profesores son los que proponen.

## 3.6. Ejemplos sobre manipulación

Ahora supongamos que los profesores, los cuales ya conocen el proceso para encontrar las asignaciones, quieren encontrar una manera de salir beneficiados del proceso, es decir, que trataran de manipularlo de alguna manera para estar más satisfechos con la asignación dada.

En un inicio podríamos pensar que los profesores siempre tratarán de revelar cuál es su lista completa de preferencias lo más rápido posible, de esta manera evitarán que alguno de los otros profesores se adelante y obtenga alguna materia que ellos prefieran más que otras. En [11], Roth da algunos ejemplos que contradicen esta primera intuición. Un ejemplo donde podemos observar que lo anterior no se cumple es el siguiente.

**Ejemplo 6.** *Sea un mercado $M_0$ con dos materias $L^0 = \{l_1, l_2\}$, dos profesores $T^0 = \{t_1, t_2\}$ y las siguientes preferencias:*

$$\begin{array}{ll} P^0(l_1) = t_1, t_2, l_1 & P^0(t_1) = l_2, t_1, l_1 \\ P^0(l_2) = t_2, t_1, l_2 & P^0(t_2) = l_1, t_2, l_2 \end{array}$$

*Al realizar el algoritmo de extensión de mercados cuando las materias proponen, obtenemos las asignaciones: $\mu^0(l_1) = t_2$ y $\mu^0(l_2) = t_1$.*
*En cambio si los profesores dan su lista de preferencias extendiendo sus aceptables a todas las materias disponibles, el matching obtenido por el algoritmo de extensión de mercados cuando las materias proponen cambiará. Es decir, si:*

$$\begin{array}{ll} P^0(l_1) = t_1, t_2, l_1 & P'^0(t_1) = l_2, l_1, t_1 \\ P^0(l_2) = t_2, t_1, l_2 & P'^0(t_2) = l_1, l_2, t_2 \end{array}$$

*entonces el matching obtenido será:* $\mu'^0(l_1) = t_1$ *y* $\mu'^0(l_2) = t_2$*, lo que es una peor opción para los profesores.*
*Por lo tanto, ellos preferirán dar sus preferencias reales* $P^0$ *y no las extendidas* $P'^0$*.*

En el ejemplo anterior se observa que, contrario a lo que se creería, los profesores pueden no tener incentivos para extender sus preferencias desde un inicio. Es decir, que si los profesores tuvieran como preferencias $P'^0$ las materias obtendrían una mejor asignación, pero los profesores podrían ponerse de acuerdo, manipular el algoritmo y dar las preferencias $P^0$ para obtener una materia que les agrade más que la asignada por $\mu'^0$.

El caso donde existen más profesores que materias, es otro ejemplo de esto, es muy probable que los profesores traten de no modificar sus preferencias originales. Ellos querrán quedarse sin impartir materia durante el semestre para así dedicarse a otras actividades que más les agraden, entonces tratarán de no extender sus preferencias a menos de que sea estrictamente necesario, de esta manera buscarán no impartir materia que no les guste.

**Ejemplo 7.** *Sea un mercado* $M_0$ *con dos materias* $L^0 = \{l_1, l_2\}$*, tres profesores* $T^0 = \{t_1, t_2, t_3\}$ *y las siguientes preferencias:*

$$\begin{array}{ll} P^0(l_1) = t_1, t_3, t_2, l_1 & P^0(t_1) = l_1, t_1, l_2 \\ P^0(l_2) = t_2, t_1, t_3, l_2 & P^0(t_2) = l_1, t_2, l_2 \\ & P^0(t_3) = l_2, t_3, l_1 \end{array}$$

*Al realizar el algoritmo de aceptación diferida cuando las materias proponen en el mercado* $M_0$ *obtenemos las asignaciones:* $\mu^0(l_1) = t_1$*,* $\mu^0(l_2) = t_3$ *y* $\mu^0(t_2) = t_2$*.*
*En cambio si los profesores dan su lista de preferencias extendiendo sus aceptables a todas las materias disponibles, el matching obtenido por el algoritmo de aceptación diferida cuando las materias proponen cambiará. Es decir, si:*

$$\begin{array}{ll} P^0(l_1) = t_1, t_3, t_2, l_1 & P'^0(t_1) = l_1, l_2, t_1 \\ P^0(l_2) = t_2, t_1, t_3, l_2 & P'^0(t_2) = l_1, l_2, t_2 \\ & P'^0(t_3) = l_2, l_1, t_3 \end{array}$$

*entonces el matching obtenido será:* $\mu'^0(l_1) = t_1$*,* $\mu'^0(l_2) = t_2$ *y* $\mu'^0(t_3) = t_3$*, lo que es una peor opción para el profesor* $2$*, ya que tendrá que impartir una materia que no le agrada.*
*Por lo tanto, ellos preferirán dar sus preferencias considerando solamente a las materias que realmente consideran aceptables* $P^0$ *y no* $P'^0$*.*

# Capítulo 4

# Conclusiones

En el trabajo presentado se ha expuesto un problema de asignación donde se buscaba asignar a todos los elementos de un lado del mercado, con este objetivo en mente se ha realizado una extensión al modelo de matrimonio trabajado por primera vez en [4].

Se han realizado extensiones al mercado original y con estas extensiones se han definido los conceptos de: *matching* en estos nuevos mercados, *matching* $r$-estable y *matching* $r$-óptimo. En el Teorema 5 se demuestra que en una sucesión de mercados extendidos siempre existirá al menos un *matching* $r$-estable. El Teorema 6 hace mención de la existencia de *matchings* $r$-óptimos para ambos lados del mercado y muestra que se pueden encontrar cuando alguno de los dos lados del mercado hace las ofertas durante todos los pasos del algoritmo de extensión de mercados. Es decir, en nuestro mercado de materias y profesores, siempre existirá un *matching* $r$-óptimo para las materias cuando ellas proponen en el algoritmo y un *matching* $r$-óptimo para los profesores cuando ellos son los que proponen.

Uno de los resultados obtenidos más importantes es el Teorema 7, donde se demuestra que el *matching* $r$-óptimo para las materias es el más preferido para éstas y el *matching* $r$-óptimo para los profesores es el menos preferido para las materias. Esto da la pauta para poder encontrar en estudios futuros la estructura de retícula de los *matchings* $r$-estables definidos aquí.

Además mediante el análisis de casos particulares, se encontraron un par de proposiciones interesantes: la primera, Proposición 1, nos da condiciones suficientes para que los *matchings* $r$-óptimos para ambos lados del mercado sean iguales; la segunda, Proposición 2, nos dice que si contamos con preferencias homólogas entonces los *matchings* obtenidos con diferentes extensiones homólogas siempre serán iguales. Estas proposiciones dan una guía para encontrar casos donde exista un único *matching* $r$-estable.

# Apéndice A

# Algoritmo de aceptación diferida

El algoritmo de aceptación diferida se desarrolla por etapas:

- *Etapa 1.* En la primer etapa cada hombre hace su propuesta de matrimonio a su mujer favorita, es decir, la primer mujer en su lista de mujeres aceptables. Cada mujer rechaza las propuestas de hombres no aceptables para ellas, y aquellas mujeres que reciben más de una propuesta rechazan todas excepto su más preferida. En este caso diremos que las mujeres se han comprometido con dicho hombre.

- *Etapa k.* En cada paso cada hombre que fue rechazado en el paso anterior le propone a su mujer más preferida entre aquellas que no lo han rechazado aún, hasta que no queden más mujeres aceptables para él. Cada mujer, que recibe propuestas, rechaza éstas excepto aquella que considera la más preferida, incluyendo aquel hombre con el que pudo estar comprometida.
  El algoritmo termina cuando ningún hombre es rechazado. Todos los hombres estarán comprometidos o habrán sido rechazados por todas las mujeres en su lista de aceptables y los matrimonios podrán llevarse a cabo. Y las mujeres que no recibieron propuestas de sus hombres aceptables y los hombres que fueron rechazados por todas las mujeres aceptables para ellos permanecerán solteros.

Cabe aclarar que el proceso es similiar cuando las mujeres son las que hacen las propuestas, aunque el *matching* obtenido en este caso sea distinto al obtenido en el primer caso.

El ejemplo siguiente muestra cómo se aplica el algoritmo de aceptación diferida.

Sean $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ y $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, con las preferencias siguientes, donde sólo se enlistan las opciones aceptables:

$$\begin{array}{ll} P(m_1) = w_1, w_2, w_3, w_4 & P(w_1) = m_1, m_2, m_3 \\ P(m_2) = w_1, w_4, w_2 & P(w_2) = m_1 \\ P(m_3) = w_2, w_1, w_3 & P(w_3) = m_1, m_2, m_3 \\ & P(w_4) = m_3 \end{array}$$

En la primera etapa del algoritmo todos los hombres le proponen matrimonio a su mujer más preferida, es decir, $m_1$ y $m_2$ le proponen a $w_1$ y $m_3$ le propone a $w_2$. Las mujeres eligen sólo entre los aceptables para ellas el más preferido. Por lo tanto en la primera etapa tenemos que $w_1$ se compromete con $m_1$, los demás hombres son rechazados.

En la siguiente etapa, los hombres rechazados, $m_2$ y $m_3$, le proponen a su segunda opción, es decir, $m_2$ le propone a $w_4$ y $m_3$ le propone a $w_1$. La mujer $w_1$ debe decidir entre $m_1$ con quien estaba comprometida y $m_3$, como $m_1$ es su favorito rechaza a $m_3$ y sigue comprometida con $m_1$. Además $w_4$ rechaza a $m_2$ porque no está dentro de sus hombres aceptables. Por lo tanto, $m_2$ y $m_3$ siguen sin comprometerse.

En la siguiente etapa, $m_2$ y $m_3$ le proponen a su tercera opción aceptable, es decir, $m_2$ le propone a $w_2$ y $m_3$ le propone a $w_3$. Entonces, $m_2$ es rechazado por $w_2$ por no ser aceptable para ella y $m_3$ se compromete con $w_3$.

En este caso el hombre $m_2$ no se ha comprometido, pero ya no tiene posibles parejas aceptables, y todos los demás hombres ya están comprometidos, por lo tanto se realizan los matrimonios y $m_2$ queda soltero.

Es decir, el algoritmo realiza la asignación siguiente:

$$\mu(m_1) = w_1, \mu(m_2) = m_2, \mu(m_3) = w_3$$

.

Además, $w_2$ y $w_4$ también quedan solteras, lo cual se expresa:

$$\mu(w_2) = w_2, \mu(w_4) = w_4$$

.

# Bibliografía


[1] Atila Abdulkadiroğlu y Tayfun Sönmez. *Matching Markets: Theory and Practice*. Advances in Economics and Econometrics Theory and Applications. Tenth World Congress, Vol 2, 2013; 3-47.

[2] Ahmet Alkan. *Nonexistence of Stable Threesome Matchings*. Mathematical Social Sciences, 16, 1986; 207-209.

[3] Jan Eeckhout. *On the Uniqueness of Stable Marriage Matchings*. Economics Letters 69, University of Pennsylvania, 2000; 1-8.

[4] D. Gale y L.S. Shapley. *College Admissions and the Stability of Marriage*. The American Mathematical Monthly, Vol 69, No.1, 1962; 9-15.

[5] Dan Gusfield. *The Structure of the Stable Roommate Problem: Efficient Representation and Enumeration of All Stable Assignments*. SIAM Journal on Computing, 17, 1988; 742-769.

[6] Dan Gusfield y Robert W. Irving. *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*. Cambridge: MIT Press, 1989.

[7] Donald E. Knuth. *Mariages Stables*. Montreal:Les Presses de lÚniversité de Montreal, 1976.

[8] D.G. McVitie y L.B. Wilson. *Stable Marriage Assignments for Unequal Sets*. BIT, 10, 1970; 295-309.

[9] Alvin E. Roth. *The Economics of Matching: Stability and Incentives*. Mathematics of Operations Research, Vol 7, No.4, 1982; 617-628.

[10] Alvin E. Roth. *The Evolution of the Labor Market for Medical Interns and Residentes: A Case Study in Game Theory*. Journal of Political Economy, 92, 1984; 991-1016.

[11] Alvin E. Roth y Marilda A. Oliveira Sotomayor. *Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis*. New York, Cambridge University Press, 1990.