UNIVERSIDAD AUTONÓMA DE SAN LUIS POTOSÍ

Facultad de Economía.

Los Fundamentos Micro y Macroeconómicos de la Teoría de la Inversión.

TESIS

Para obtener el grado de

Maestro en Economía Matemática.

PRESENTA:

Jaime Alberto Montoya Arbelaez.

Tutor de tesis:

Dr. Samuel Gil Martín.

Sinodales:

Dr. Elvio Accinelli Gamba.

Dr. Pedro Isidoro González Ramírez.

Febrero de 2015. San Luis Potosí, México.

Contenido

Introducción.

La inversión agregada, definida como el crecimiento en el stock de capital en un país o región a través del tiempo, es uno de los componentes de la demanda agregada y uno de los más importantes para la dinámica de la macroeconomía de corto y largo plazo. La razones por las cuales esta variable es fundamental son: 1) en cuentas nacionales la inversión representa en promedio el 20% del gasto de los países, 2) es el componente de la demanda agregada más volátil y por tanto explica en gran medida las fluctuaciones en la producción de las economías, dado el suave comportamiento del consumo, y 3) es uno de los componentes principales para generar crecimiento económico y mejorar el bienestar de una sociedad en general.

No obstante, la inversión agregada es explicada a su vez por el crecimiento del capital a nivel de firmas, lo cual lleva a considerar inminentemente el comportamiento microeconómico de la inversión que estará condicionado por su estructura, la competencia que enfrenten y como estas asimilan el entorno económico a su alrededor, por los cambios en la demanda, los choques tecnológicos, las modificaciones en los costos o los ajustes en la política económica. De esta forma, la decisión de invertir por parte de las firmas determinará, entre otras cosas, su tamaño, su productividad y su ciclo de vida en el mercado, siendo por tanto un campo relevante de estudio por parte de la teoría de la organización industrial.

De esta forma, y dada la relevancia del tema, el objetivo de este trabajo es exponer los fundamentos microeconómicos y macroeconómicos de la inversión en la teoría económica, desde vertiente dominante el enfoque de los costos de ajuste en el capital físico.[1] La motivación está centrada en la necesidad de disponer de una síntesis que capture elementos fundamentales en el tema y sea una introducción para investigaciones futuras. Igualmente, es un esfuerzo por abordar de manera más detallada a nivel analítico y conceptual la teoría de la inversión, que en muchos textos se trata parcialmente. Asimismo, busca completar algunas ideas sueltas sobre temas específicos de alta relevancia para la decisión de inversión.

El documento está organizado de la siguiente forma. La primera sección estudia el comportamiento de la inversión en ausencia de fricciones sobre el ajuste del capital, el cual es el primer paso en el desarrollo solido de una teoría de la inversión, la segunda sección se introduce fricciones a la decisión de inversión por medio de la función de costos de ajuste,

[1] Otro enfoque conocido se centra en la teoría de las opciones de inversión que busca explicar los procesos de inversión por medio del precio de compra y de venta del capital y el valor que puede generar para la firma el hecho de esperar antes de tomar una decisión.

en el que se encuentra una variable, llamada q, que se sintetizan todos los elementos relevantes para invertir. Las dos primeras secciones se construyen sobre la hipótesis del agente representativo, y por tanto sus resultados muestran una simetría entre el comportamiento individual de las firmas y el agregado de las mismas. Sin embargo, cuando se asume que no todas son iguales, por cuestiones de competencia o estructura de los costos que enfrentan las mismas, los resultados divergen. La tercera sección busca alejarse del agente representativo introduciendo los costos de ajuste no convexos, en donde se exponen resultados importantes relacionados con la irregularidad en el proceso de inversión, las regiones de inacción en la variación del capital y los efectos ambiguos de la incertidumbre sobre la decisiones de inversión; por ejemplo, al considerar diferentes estructuras de mercado y rendimientos a escala en la producción.

Por otra parte, cuando la hipótesis del agente representativo se relaja para dar lugar a agentes heterogéneos, el comportamiento agregado de la inversión no es igual al que se da en las firmas, por lo que surge la necesidad de diseñar un método de agregación el cual sea consecuente con los modelos analizados en la tercera sección. En este sentido, la cuarta sección se centra en mostrar la metodología de agregación partiendo de firmas heterogéneas, costos de ajuste no convexos aleatorios y zonas de inacción, en donde, a nivel empírico se encuentran resultados ambiguos y no se concluye que la heterogeneidad en las empresas importe en la inversión agregada. Finalmente, en la sección 5 se expondrá un problema de agencia en la inversión en donde se expone como los contratos cambiarían algunos resultados de las secciones anteriores, además de describir el papel que juegan las reservas de dinero en la decisión de invertir.

1. Modelo Neoclásico.

Una de las prioridades de la teoría neoclásica en la década de los 60 era explicar cuál era la razón por la que las firmas, y por ende las economías, se expandían. Hasta entonces habían logrado dar amplias explicaciones y formulaciones a las decisiones de expansión de largo plazo, las cuales se centraban en la demanda óptima de capital; así como los determinantes de la acumulación de capital en el largo plazo, que era uno de los factores que generaba el crecimiento económico de un país. No obstante, el ajuste del capital en el ciclo económico no había sido explicado de forma detallada por los neoclásicos, puesto que muchos de los modelos no lograban identificar el ajuste en los precios del capital como un mecanismo importante para la determinación de la inversión.

Hasta entonces, algunos economistas habían intentado explicar los determinantes de la inversión y sus movimientos en el corto plazo, en donde se encuentran las teorías del acelerador de Clark (1917, 1944) y Koyck (1954), que expresaban que las decisiones de inversión estaban dadas por los cambios en el nivel de producción, o Keynes (1936) con su explicación de la inversión a través de los *Animal Spirits*, sin que el mecanismo fuese vía precios. Una de las principales razones para que hasta entonces no se pudiese lograr esto es que no se había logrado encontrar una forma de desligar las decisiones de inversión en capital de las firmas de sus necesidades de financiación, y por lo tanto era difícil hacer que la liquidez no fuese una variable fundamental para explicar dichas decisiones de inversión, más aun que el cambio en los precios. Pero Modigliani y Miller (1958) demostraron que la forma de financiación de las empresas, fuese interna o externa, bajo competencia perfecta y mercados de capitales completos era irrelevante, trayendo igualdad en las tasas de interés en ambos casos, por lo que se logró separar cuestiones financieras de las del sector real (Hubbard, 1998).

Lo anterior, sumado a la hipotesis del agente representativo, hace que el comportamiento microeconómico sea análogo al comportamiento agregado, pues al no haber problemas de financiación, las restricciones de liquidez no serian un asunto importante para las firmas y lo único que tiene relevancia es la escala de las mismas, que al poder definir el problema de forma consistente, por medio de funciones de producción homogéneas de grado 1, se solucionaría. Así se podría construir un modelo que se base en decisiones reales y en el que los cambios en los precios sean los determinantes del comportamiento de las variaciones en el capital, y por ende de la inversión, de las firmas en el corto plazo, y por tanto de la economía en su conjunto.

Usando lo anterior, Jorgenson (1963) construyo un primer modelo que serviría como piedra angular para el desarrollo de una teoría de la inversión, donde los cambios en los precios fueran la causa que lleva a variar el capital óptimo de la firma en el corto plazo, siendo posible encontrar una formulación teóricamente consistente y que se pudiese validarse desde el punto de vista empírico.

Modelo.

El desarrollo de este modelo parte del deseo de las empresas de maximizar su flujo de beneficios futuros a través de la demanda de factores óptima, en donde se toma el capital físico y otros factores variables en el análisis, que en este caso será el trabajo. Para ello, se asume una función de producción con rendimientos constantes a escala[2] que depende de dos factores de producción, capital (K_t) homogéneo[3] y trabajo (L_t), diferenciable dos veces y que cumple las condiciones de Inada, lo que en términos matemáticos equivale a:

$$Y_t = F(K_t, L_t) \qquad F_K > 0, F_L > 0, F_{KK} < 0, F_{LL} < 0, F_{KL} > 0 \qquad [1.1]$$

Se hace el supuesto que los mercados de factores y bienes están en competencia perfecta y no están sujetos a la incertidumbre. De esta forma, el precio de cada unidad de capital está dado por $P_t^k > 0$, el de una unidad de trabajo llamado salario se denotara por $w_t > 0$ y el de una unidad de producción estará dado por $p_t > 0$. Igualmente, se tiene en cuenta una ecuación de movimiento para el capital, la cual es:

$$I_t = K_{t+1} - (1 - \delta)K_t \qquad [1.2]$$

En donde I_t es la inversión brutal y δ es la tasa de depreciación del capital, que se asume constante debido a que es un fenómeno recurrente (Jorgenson, 1963). Dado esto, se tiene que el problema de maximización de la firma representativa estará dado por:

$$V_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - p_t^k I_t}{(1 + r)^t}$$

$$s.a\ I_t = K_{t+1} - (1 - \delta)K_t \quad con \;\; K_0 \; dado$$

[2] Esta propiedad hace referencia a una función de producción homogénea de grado uno, la cual fue popularizada por Solow en su teoría del crecimiento económico y permite que la identidad entre el gasto, la producción y la remuneración a factores se cumpla bajo mercados competitivos. Igualmente, permite que $F(K_t, L_t) = L_t f(k_t)$, con $k_t = K_t/L_t$. Esta función es muy utilizada en los modelos macroeconómicos de agente representativo, porque la producción en firmas grandes simplemente es una réplica de la producción de firmas pequeñas a gran escala, con lo que solo se hace necesario asumir una firma.

[3] Para ver un modelo semejante, pero con capital no homogéneo, véase Hall (1972).

La solución inicia reemplazando la restricción en la función V_0 y maximizando respecto a L_t y K_{t+1}, donde se obtienen las siguientes condiciones de primer orden:

$$p_t F_{L_t} = w_t \quad [1.3]$$

$$p_{t+1} F_{K_{t+1}} = C_{t+1} \quad [1.4]$$

En dónde.

$$C_{t+1} = (1+r)p_t^k - (1-\delta)p_{t+1}^k \quad [1.5]$$

La ecuación [1.3] muestra que la empresa demandará trabajo hasta el punto en que el valor del producto marginal del trabajo iguale el salario[4]; mientras que la ecuación [1.4] da cuenta de la demanda optima de capital por parte de una firma. Ésta se determina en el punto en que el valor del producto marginal del capital futuro iguale su costo marginal, el cual está dado por la diferencia entre lo que pierde la firma al no invertir los recursos en el mercado financiero $((1+r)p_t^k)$ y el valor que tendrá una unidad de capital en el futuro $((1-\delta)p_{t+1}^k)$. Para tener una expresión más familiar, se puede reordenar la ecuación [1.5] como:

$$C_{t+1} = p_t^k \left[r + \delta - (1-\delta) \left[\frac{p_{t+1}^k - p_t^k}{p_t^k} \right] \right] \quad [1.6]$$

El lado derecho de esta ecuación corresponde al costo de uso del capital[5], que dice que el costo en que incurre una empresa al demandar, y bajo competencia perfecta es equivalente al costo de alquiler de un bien de capital. De esta forma, el costo de uso de una unidad de capital depende positivamente de la tasa de interés del mercado y la tasa de depreciación, y negativamente de la tasa de valorización del capital corregida por el desgaste. A partir de la ecuación [1.5] es posible determinar el efecto que tendría en la demanda de capital una modificación en la tasa de interés, en la depreciación y en los precios de los bienes de capital. Sin embargo, no es posible obtener directamente a partir de esta ecuación, una teoría de la inversión; puesto que solo se tiene una expresión de la demanda optima del capital. Para resolver este problema y obtener una forma funcional para la inversión, en primer lugar se determina el nivel de capital óptimo, que al tomar una función de producción CES[6] será igual a:

[4] Se asume que la oferta de trabajo es perfectamente elástica, por lo que la firma representativa puede demandar la cantidad de trabajo que desee dado el salario w_t. Esto obedece a que se desea dar explicación a la demanda de inversión, aislando el efecto que pueda tener los ajustes en el trabajo.
[5] Jorgenson y otros autores muestran versiones del costo de uso en donde incluyen otros aspectos, especialmente variables tributarias en las que se alteraría el costo de uso del capital, como por ejemplo el impuesto a los ingresos de la firma y los impuestos a los créditos de inversión.
[6] Esta función sería igual a $Y_t = A[aK_t^\rho + (1-a)L_t^\rho]^{1/\rho}$, en donde a es la participación del capital en la producción, A es un factor de escala y ρ es un factor de sustituibilidad.

$$K_{t+1}^{*} = aY_{t+1}C_{t+1}^{-\sigma} \qquad [1.6.1]$$

Donde K_{t+1}^{*} es el nivel de capital óptimo o deseado en el periodo $t+1$ y σ es la elasticidad de sustitución entre factores. En segundo lugar, se hace el supuesto que el cambio en el stock de capital entre dos periodos, dado por $K_{t+1} - K_t$, es determinado por los cambios en el stock de capital deseado de periodos pasados (Jorgenson, 1963), lo que equivale a:

$$K_{t+1} - K_t = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \Delta K_{t-i}^{*} \qquad [1.7]$$

Donde $\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i = 1$ y $\beta_i \geq 0$.

En donde K_{t-i}^{*} es el nivel de capital deseado de la firma en el periodo $t-i$. Así, usando [1.6.1] en [1.7], y reemplazando el resultado en [1.2] se obtiene:

$$I_t = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \Delta(aY_{t-i}C_{t-i}^{-\sigma}) + \delta K_t \qquad [1.8]$$

A partir de la cual puede concluirse que la demanda de inversión depende de la producción y el costo de uso del capital presente y pasados, mostrando que la dinámica del capital está gobernada tanto por los cambios en los precios como en las variaciones en la producción. De esta forma, un aumento en el costo de uso de capital en el periodo presente implica una disminución en la inversión, mientras que un aumento en la producción actual tiene el efecto contrario.

Comentarios.

Este modelo de Jorgenson (1963) represento un primer paso para desarrollar lo que en la actualidad conocemos sobre la teoría de la inversión. Partiendo de un agente representativo se deriva la función de demanda óptima de capital, logrando capturar el costo de uso del capital, un elemento desconocido hasta entonces. Por lo tanto, el modelo amplia el conocimiento de los factores que determinan el costo presente de una unidad de capital, que será determinado por el desgaste, las posibles valorizaciones del capital y tasa de interés real, que desde Keynes (1936) y muchos otros autores ya la habían considerado.

Igualmente, Jorgenson (1963) buscaba una especificación teórica para la inversión, que fuese tratable en términos econométricos y consistentes con la teoría del capital, lo cual logra en términos empíricos, ya que su modelo logró obtener resultados que mostraban que las estimaciones se ajustaban adecuadamente a los datos reales[7]. El éxito obtenido en el

[7] Ver, por ejemplo, los trabajos de Jorgenson (1963), Hall y Jorgenson (1967, 1971), Bischoff (1971), Jorgenson y Siebet (1968).

ajuste de los datos de la inversión popularizo la aplicación econométrica de la ecuación [1.8] y sus variantes fueran populares en las posteriores dos décadas, mostrando resultados satisfactorios cuando se replicó el comportamiento de las series de inversión en Estados Unidos[8].

No obstante, a pesar del buen desempeño empírico y la derivación del costo de uso del capital como una variable determinante en la demanda de capital y de inversión para las firmas, la propuesta de Jorgenson posee varios problemas teóricos. En primer lugar, no hay justificación teórica inicial para establecer la existencia de las estructuras de rezagos[9] (Demers, Demers y Altug, 2003), que no es posible justificar desde los microfundamentos del modelo y hace que las estimaciones realizadas estén sujetas a la Critica de Lucas (Chirinko, 1993). Esta debilidad intrínseca al modelo hizo que su capacidad predictiva no fuese robusta.

En segundo lugar, en términos de tratamiento del modelo, existe un problema de dependencia puesto que la producción y el stock de capital son determinados simultáneamente, con lo cual podría sesgar las estimaciones econométricas (Chirinko, 1993). En tercer lugar, las diferentes estimaciones empíricas muestran un mayor impacto de las variaciones en la producción sobre dinámica de la inversión que los cambios en el costo de uso[10]; algo que da señales sobre la falla de los mecanismos de precios y la existencia de restricciones de liquidez en las decisiones de la firma, mostrando que el Teorema de Modigliani – Miller (1958) no necesariamente se cumple en la economía real debido a las imperfecciones en el mercado de capitales. En cuarto lugar, se asume una tasa de depreciación constante, la cual suele asumirse en los trabajos para hacer tratables los modelos, pero que en algunos trabajos empíricos se ha encontrado que puede ser variable[11].

Finalmente, se resalta que el modelo carece de una buena especificación en el sentido de cómo se considera la decisión de inversión. La razón de esto es que en esta modelación las expectativas futuras no tienen lugar en la decisión de incrementar el capital por parte de una firma. Por el contrario, la inversión está influenciada por los resultados previos de la firma, algo difícil de creer debido a que la ampliación de una firma obedece más a sus oportunidades y perspectivas sobre el futuro, trayendo problemas conceptuales y teóricos en el modelo.

---

[8] En este sentido pueden encontrarse papers como Hall y Jorgenson (1967, 1971), Eisner y Nadiri (1970),

[9] Sin embargo muchas investigaciones explican que esta estructura a nivel empírico puede estar totalmente justificada al tener en cuenta los costos de ajuste convexos (Rothchlid, 1971)

[10] Trabajos al respecto pueden ser citados Bischoff (1971), Coen (1971) y Hall y Jorgenson (1967, 1971).

[11] En este apartado la evidencia empírica es mixta, y en muchos casos depende del tipo de bien que se esté considerando, tal como muestran Hulten y Wikkof (1981).

En conclusión, este modelo y los que se desarrollaron bajo esta misma estructura, fueron los primeros intentos de explicar el comportamiento de la inversión que mostró un buen desempeño empírico a nivel general, pues logran ajustarse bien a la dinámica de esta. Sin embargo, las deficiencias teóricas son notables y la derivación de una función de inversión fue *Ad Hoc*, por lo que se hizo necesario introducir nuevos conceptos anexar detalles adicionales a los modelos.

2. La Teoría de los Costos de Ajuste y la q de Tobin.

El modelo neoclásico obtuvo resultados a nivel empírico, aunque su construcción teórica poseía algunas falencias debidas, especialmente, al supuesto de rezagos distribuidos. La búsqueda de una justificación teórica de este supuesto obedecía al hecho que al variar alguno de los parámetros, el nivel deseado de capital de la firma representativa se vería modificado; pero, a su vez, esta no invertiría inmediatamente hasta que el capital alcanzara este nivel, evidenciando que el rezago en los ajustes del capital se debían a la existencia de costos adicionales al precio de compra, por lo cual no era optimo una variación total en el capital. Esto llevo a que a finales de la década de los 60 y principios de los 70 se introdujese el uso de las funciones de costos de ajuste, las cuales, siguiendo a Mussa (1977), en dos:

- **Costos de ajuste internos:** hacen referencia al sacrificio necesario de producción al acumular capital debido a la necesidad de la firma de gastar recursos en la instalación de nuevos equipos y maquinaria. Estos han sido las funciones más utilizadas en la literatura de la inversión.
- **Costos de ajuste externos:** aquellos asociados a los incrementos crecientes en el precio que enfrenta la firma al tener poder en el mercado de bienes de capital o cuando puede producir sus propios equipos de capital y su costo marginal de producción es creciente.

Así, Gould (1969) y Tradeway (1971), entre otros, desarrollaron modelos en los que al usar funciones de costos de ajuste convexas mostraban que lo mostrado por Jorgenson (1963) era totalmente justificable y dando validez teórica a dicho procedimiento. No obstante, Rothschild (1971) generaliza el problema, mostrando que el uso de funciones de rezagos distribuidos solo era válido bajo expectativas estáticas y costos de ajustes convexos, pero en el caso de funciones no convexas estos dejaban de ser útiles.

Sin embargo, esto solo solventaba una de las críticas hechas al modelo neoclásico, dejando las demás sin ser resueltas, por lo que la teoría debía avanzar y llevar a cabo una refinación del modelo que lograra superar las dificultades. Especialmente, se debía construir un modelo teóricamente consistente con una dinámica explicita para la inversión (Chirinko, 1993) que pudiese dar cuenta de las expectativas futuras con las que planifica una firma sus decisiones, que igualmente resolviese el problema de simultaneidad en las decisiones de producción e inversión; y obtener ecuaciones que pudiesen generar una especificación para predecir el comportamiento de la inversión inmunes a la Crítica de Lucas.

De esta forma, el elemento que se incorpora al análisis es, a parte de los costos de ajuste, es la q de Tobin, la cual es introducida por Keynes y revitalizada por Tobin (1969) (Chirinko, 1993). Esta variable permite capturar por medio de información financiera las posibilidades futuras y desempeño presente de la firma, y con ello poder ser una variable determinante de la inversión. Así, las decisiones de inversión tomarían la característica de ser *forward looking,* algo que claramente estaba influenciado por el desarrollo y auge que estaban teniendo las expectativas racionales en este periodo del tiempo, dejando de lado la característica de *backward looking* del modelo de Neoclásico.

Modelo.

Para empezar se tomara como referencia el modelo presentado por Altug, *et al* (2003). En efecto, para modelar el comportamiento de la firma representativa se hace el supuesto que esta busca maximizar el valor esperado de los beneficios futuros a través del tiempo o el valor de la firma, sujeto a la evolución del capital. En términos matemáticos se expresa como:

$$\max E_0\left[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t[F(K_t,L_t)-w_tL_t-p_t^KI_t-C(K_t,I_t)]\right] \qquad [2.1]$$

$$sa\colon K_{t+1}=I_t+(1-\delta)K_t \qquad [2.2]$$

En donde para el periodo t se tiene que $F(K_t,L_t)$ es la función de producción, la cual cumple con las mismas condiciones que [1.1], K_t y L_t representan el stock de capital homogéneo y la cantidad de trabajo usada en la producción, w_t y p_t^K son sus respectivos precios, δ es la tasa de depreciación del capital y se asume que es constante, $\beta=1/(1+r)$ es el factor de descuento, donde r la tasa de interés del mercado, e I_t es el nivel de inversión, mientras que $C(K_t,I_t)$ será la función de costos de ajuste del capital, la cual busca dar cuenta de los costos implícitos en los que incurre una firma por tener que instalar nuevas unidades de capital, algo no trivial puesto que siempre es necesario hacer adecuaciones y asumir costos de transacción para que estas entre a funcionar. Esta función tiene las siguientes propiedades:

1. $C(K_t,I_t)$ es una función homogénea de grado 1.
2. $C_{I_t}>0$ y $C_{I_tI_t}>0$: implica que la compra de nuevas unidades de capital incrementan los costos de ajuste, y este crecimiento es cada vez más alto, por lo que la función de costos de ajuste es convexa en la inversión. En términos teóricos, esto es lo que limita a que los cambios de inversión sean indeterminados, ya que los costos de la firma incrementarían más que la inversión.
3. $C_{K_t}<0$ y $C_{K_tK_t}>0$: matemáticamente muestra que el costo de ajuste es menor cuanto mayor sea el stock de capital de la firma, pero su reducción marginal cada

vez es menor. En otras palabras, esto implica que la acumulación de capital genera economías a escala para la inversión, puesto que entre más unidades de capital posea la firma, esta tendrá que hacer menos adecuaciones o incurrir en menos costos de transacción. Así, se concluye que empresas más grandes incurren en menores costos de ajuste.

Finalmente, se asume que el trabajo es un factor que no está sujeto a costos de ajuste y su oferta es perfectamente elástica. De esta forma, la ecuación de Bellman del problema planteado previamente viene dada por[12]:

$$V(K_t) = \max\{F(K_t, L_t) - w_t L_t - p_t^K I_t - C(K_t, I_t) + \beta E_t V(K_{t+1})\} \qquad [2.3]$$
$$sa: K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t$$

Las condiciones de primer orden son:

$$F_{L_t} - w_t = 0 \qquad [2.4]$$
$$-p_t^K - C_{I_t} + \beta E_t V'(K_{t+1}) = 0 \qquad [2.5]$$
$$V'(K_t) = F_{K_t} - C_{K_t} + \beta(1-\delta)E_t V'(K_{t+1}) \qquad [2.6]$$

En donde $V'(K_t) = \partial V(K_t)/\partial K_t$ es el valor marginal de una unidad adicional de capital en el periodo t

De acuerdo a las expresiones anteriores, [2.4] muestra que la productividad marginal del trabajo debe igualar en cada periodo de tiempo al salario, resultado [1.3]. Esto se debe a que el trabajo es un factor de producción en el que no se incurre ningún costo adicional de ajuste por su variación. Por otro lado, la expresión [2.5] implica que el costo marginal en el que incurre la firma por invertir una unidad adicional debe igualar el incremento en el flujo de beneficios futuros de la empresa, traídos a valor presente.

Finalmente, la igualdad [2.6] dice que el incremento del flujo de beneficios futuros por un aumento en el stock de capital en el periodo t debe ser igual aumento en la productividad marginal del capital y una disminución en los costos de ajuste, más el valor presente del incremento esperado del flujo de beneficios futuros del periodo $t+1$, corrigiendo por la depreciación que sufre el capital

Ahora bien, Reemplazando [2.5] en [2.6] se obtiene:

$$V'(K_t) = F_{K_t} - C_{K_t} + (1-\delta)\left(p_t^K + C_{I_t}\right) \qquad [2.7]$$

[12] Usando multiplicadores de Lagrange o control óptimo en un modelo de tiempo continuo se obtienen resultados análogos con igual interpretación.

Adelantando un periodo el resultado anterior e introduciendo esta expresión de $V'(K_{t+1})$ en [2.5], se encuentra:

$$p_t^I + C_{I_t} = \beta E_t\left[F_{K_{t+1}} - C_{K_{t+1}} + (1-\delta)\left(p_{t+1}^K + C_{I_{t+1}}\right)\right] \qquad [2.8]$$

Adelantando un periodo y sustituyendo el resultado de $p_{t+1}^K + C_{I_{t+1}}$ en [2.8], se llega a que:

$$p_t^K + C_{I_t} = \beta E_t\left[F_{K_{t+1}} - C_{K_{t+1}} + (1-\delta)\beta E_{t+1}\left(F_{K_{t+2}} - C_{K_{t+2}} + (1-\delta)\left(p_{t+2}^K + C_{I_{t+2}}\right)\right)\right]$$

Usando la ley de las expectativas iteradas y reordenando términos en esta ecuación, se encuentra que:

$$p_t^K + C_{I_t} = \beta E_t\left[F_{K_{t+1}} - C_{K_{t+1}}\right] + (1-\delta)\beta^2 E_t\left[F_{K_{t+2}} - C_{K_{t+2}}\right] + \left((1-\delta)\beta\right)^2 E_t(p_{t+2}^K + C_{I_{t+2}})$$

Haciendo los pasos anteriores sucesivas veces se llega a que:

$$p_t^I + C_{I_t} = (1-\delta)^{-1}\sum_{s=1}^{\infty}\left((1-\delta)\beta\right)^s E_t\left[F_{K_{t+s}} - C_{K_{t+s}}\right] + \lim_{n\to\infty}\left((1-\delta)\beta\right)^n E_t(p_{t+n}^K + C_{I_{t+n}})$$

El último elemento de esta expresión se anula ante el cumplimiento de la condición de transversalidad[13], y por tanto se tiene que:

$$p_t^I + C_{I_t} = (1-\delta)^{-1}\sum_{s=1}^{\infty}\left((1-\delta)\beta\right)^s E_t\left[F_{K_{t+s}} - C_{K_{t+s}}\right] \qquad [2.9]$$

Sustituyendo esta ecuación en [2.5] y agrupando, se obtiene:

$$V'(K_t) = \sum_{s=0}^{\infty}\left((1-\delta)\beta\right)^s E_t\left[F_{K_{t+s}} - C_{K_{t+s}}\right] \qquad [2.10]$$

Esta igualdad muestra que, en el óptimo, un incremento en el valor de la firma en el periodo t ante un incremento en K_t es igual al valor presente de las ganancias que genera en todos los sucesivos periodos de tiempo este aumento en el stock de capital vía incrementos en la productividad marginal y reducción de costos de ajuste, teniendo en cuenta el efecto de la depreciación dado por el factor $(1-\delta)^s$ en [2.10].

Al observar [2.5] y [2.10] se observan claras diferencias entre la teoría Neoclásica de la inversión y la presentada en esta sección. En primer lugar, en términos conceptuales en la sección 1 se muestra que las decisiones de inversión de una firma dependen del desempeño que haya tenido esta hasta ese momento del tiempo, siendo así el pasado el que explica las variaciones en el stock de capital. Sin embargo, cuando se introducen los costos de ajuste se

[13] Esta condiciones se cumple siempre que:

$$\lim_{n\to\infty}\left((1-\delta)\beta\right)^n E_t(p_{t+n}^K + C_{I_{t+n}}) = 0$$

observa que las decisiones de inversión dependen de las expectativas que se tengan en el futuro y el impacto que generara las variaciones en el stock de capital. Como Graham y Webb (1969) afirman, una organización interesada en su crecimiento y desempeño futuro buscara tomar sus decisiones basándose en sus proyecciones. En segundo lugar, el modelo con costos de ajuste permite generar un proceso dinámico explicito, sin necesidad de asumir funciones o mecanismos de ajuste para hallar una función de inversión (Chirinko, 1993). Esto, a su vez, lleva mejorar el modelo de Jorgenson, pues el capital no puede tener una tasa de inversión infinita, y por tanto es consistente con la teoría y la realidad. Finalmente, la especificación en su conjunto es generada por medio de micro fundamentos y con ello la crítica de Lucas no es operativa a la hora de llevar a cabo estimaciones.

La q de Tobin y el Teorema de Hayashi.

Parte del interés en las ciencias viene dado por diseñar herramientas teóricas de fácil uso en el mundo real. Así, Tobin (1969) mostró que las decisiones de inversión en un activo por pueden ser determinadas por medio de una variable llamada q, la cual recoge información de los mercados financieros referente a las perspectivas de la firma y permite tomar decisiones sobre los proyectos de la misma. Esta es medida por la ratio entre el valor esperado de un activo o firma y su costo de reposición, la cual es conocido como la q promedio, denominada q^A, y está viene dada por:

$$q_t^A = \frac{\beta E_t V(K_{t+1})}{p_t^K K_{t+1}}$$

Donde $E_t V(K_{t+1})$ es el valor esperado que tendrá una firma en el periodo $t+1$, la cual incluye todas las expectativas sobre el desempeño futuro de esta valorado en los mercados financieros, mientras que $p_t^k K_{t+1}$ es el costo en el que incurriría la firma para comprar el capital que utilizaría en el futuro. Según Tobin (1969), si el valor de q_t^A fuese mayor a 1, la firma debería tomar la decisión de invertir e incrementar su stock de capital puesto que el valor que se espera tenga la firma seria mayor al costo de su capital, mientras que su q_t^A fuese menor a 1, esta debería desinvertir, y con ello reducir su stock de capital. Finalmente, si q_t^A fuese igual a 1, la firma no debería tomar decisiones de inversión, siendo este un punto de estabilidad en las decisiones respecto al capital. Sin embargo, aunque el mecanismo de ajuste del capital propuesto por Tobin (1969) resulta sencillo y muy útil para la toma de decisiones, fue establecida de forma *Ad Hoc*.

Posteriormente, Mussa (1977), Abel (1980) y otros demostraron que las decisiones de inversión podrían ser tomadas basándose en una q marginal, que será denominada por q_t, determinada por:

$$q_t = \frac{\beta E_t V'(K_{t+1})}{p_t^K} \qquad [2.11]$$

De esta manera, la q marginal viene dada por la relación entre el valor marginal del capital en $t+1$ traída a valor presente y el precio del capital en el periodo t. Es decir, es una medida del beneficio marginal esperado que trae para la empresa el cambio en el stock de capital valorado en términos de los bienes de capital. Las implicaciones de esta medida respecto al ajuste del capital son iguales a las dadas previamente para q^A.

Dadas las definiciones de q_t y q_t^A, en principio ambas no representan la misma medida, y aunque buscan dar señales sobre la decisión de inversión, se esperaría que sus valores fuesen diferentes a través de tiempo. No obstante, Hayashi (1982), demuestra que si una firma competitiva que opera bajo una función de producción $F(K_t, L_t)$ y una función de costos de ajuste $C(K_t, I_t)$ homogéneas de grado 1; entonces se cumple que $q_t = q_t^A$, algo que se demostrara en el apéndice. De esta forma, no solo se obtiene la relación dicha por Tobin, sino que además la q es una variable que da cuenta de las perspectivas esperadas de la firma, por lo que es una proyección del futuro de la misma, cuando se cumplen los supuestos establecidos (Chirinko, 1993); siendo la variable clave para encontrar de la inversión óptima para la firma.

Usando la igualdad entre q_t^A y q_t, es fácil llevar a cabo la estimación de la q_t, puesto que la información estaría disponible en los libros de la firma y no sería necesario conocer las condiciones técnicas que la determinan, con la que podría finalmente la tasa de inversión, lo cual es un cálculo relativamente sencillo, facilitando así las estimaciones empíricas.

Con el objetivo de una mejor explicación del funcionamiento de esta solución, se considera el siguiente ejemplo, utilizado frecuentemente en la literatura. Supóngase una función de costos de ajuste igual a:

$$C(K_t, I_t) = \frac{a}{2}\frac{{I_t}^2}{K_t} \quad con\ a > 0$$

Derivando esta ecuación en I_t, reorganizando términos en [2.5] y usando [2.11], se obtiene:

$$\frac{I_t}{K_t} = \frac{P_t^K}{a}(q_t - 1)$$

Usando el hecho que la función de producción es homogénea de grado 1, al igual que la función de costos de ajuste, se tiene que $q_t = q_t^A$, con lo que se obtiene:

$$\frac{I_t}{K_t} = \frac{P_t^K}{a}(q_t^A - 1) \qquad [2.12]$$

El cual muestra, la inversión solo depende de q_t^A, teniendo una relación positiva entre ellas, corrigiendo el problema de simultaneidad entre variables presente en el modelo neoclásico. Igualmente, dado q_t^A, se posee una gran cantidad de información acerca de las condiciones futuras que afectaran a la inversión (ver ecuación [2.10]) sin necesidad de hacer supuestos específicos acerca de la formación de las expectativas (Chirinko, 1993).

Evidencia Empírica.

Dadas las mejoras obtenidas desde el punto de vista teórico que se generan al incluir los costos de ajuste, se esperaría que la evidencia empírica también tuviese un mejor desempeño, especialmente en términos de predicción. Para ver esto, parte de los modelos empíricos que han buscado estimar el impacto de la q en la inversión utilizan la ecuación [2.12] agregándole un término de error.

Así, al realizar las regresiones se encuentra que el desempeño empírico de [2.12] no es muy satisfactoria empíricamente. En principio, las regresiones estimadas muestran que el valor estimado de a es muy alto, lo que implica que para generar grandes aumentos en la inversión la q debe aumentar en una cantidad muy grande. Respecto a esto, Summers (1981) hallo un valor de $a = 32$ para la economía estadounidense, lo que implica que ''un incremento en el 10% en el valor de mercado de la empresa llevaría solamente a un incremento de 0.009 de $\frac{I_t}{K_t}$. Esto pone de manifiesto que el parámetro de los costos de ajuste suelen ser muy grandes y poco realistas, como muestran también Ciccolo (1975) y Hall (1979). Igualmente, se encontró que el R^2 de las regresión estimada era bastante bajo y los errores presentaban alta correlación serial, estas dos últimas características mostradas también por los trabajos de Hayashi (1982) y Blanchard y Wyplosz (1982).

Dados los problemas de auto correlación en las series, Ciccolo (1975) y Engel y Foley (1975) llevan a cabo estimaciones en donde se utiliza rezagos distribuidos en la q_t^A, encontrando que esta variable es importante en la determinación de la inversión. Esto va en contra de la lógica del modelo, puesto que sus fundamentos hacen que la información pasada no sea relevante a la hora de llevar a cabo las estimaciones. Este hecho suele ser justificado afirmando que los costos de ajuste incluyen variables rezagadas u otros elementos dinámicos de la tecnología; no obstante, esta explicación es insatisfactoria puesto que el modelo no cuenta con dicha estructura.

Asimismo, Clark (1979) hace una comparación de diferentes teorías de la inversión usando datos agregados, mostrando que en términos empíricos la ecuación [2.12] no lograba buenos resultados para Estados Unidos y otras economías. Finalmente, en el modelo se encuentra que la única variable determinante para la inversión es la q. Sin embargo, al estimar regresiones que incluyan variables de cantidades, como la producción y la liquidez de las firmas, se encuentra que estas últimas son altamente significativas. Esto solo muestra un amplio desconocimiento y falta de comprensión que hay sobre estas variables dentro del modelo.

No obstante, en la década de los 90 una gran cantidades de pruebas econometricas fueron realizadas a nivel de planta, en donde el desempeño de la q mejoraba un poco. La razón de esto es que, en primer lugar, el modelo fue diseñado a nivel de firmas, por lo que aplicarlo a nivel agregado llevaba a problemas de especificación, lo cual sugería que el agente representativos no era válido en la decisión de inversión de las firmas; y en segundo lugar, las mediciones de la q no eran correctas, como señala Barnet y Sakelaris (1999), por lo que las predicciones de las estimaciones no eran las adecuadas.

Comentarios.

Aunque teóricamente el modelo con costos de ajuste este bien construido y la propuesta aquí presentada permitió dar más claridad y solidez teórica respecto al modelo Neoclásico, permitiendo determinar de forma endógena la dinámica de la inversión y la elección óptima en el incremento del capital, su desempeño empírico no ha sido satisfactorio; sin embargo, cuando se aplica a nivel de planta sus estimaciones mejoran un poco. Esto trajo problemas a las concepciones de la teoría de la inversión, pues se empezó a ver que el agente representativo en este caso no parecía ser la estrategia adecuada para comprender el problema y seguir avanzando, siendo necesario concentrarse en los detalles particulares que hacían que la inversión de las empresas variase de acuerdo a sus características.

Igualmente, la prosperidad de la época de postguerra empezaba a agotarse y muchos problemas económicos empezaron a emerger, como lo fueron el incremento en el precio de las materias primas, tasas de desempleo, aumentos en las tasas de interés; pero lo más importante fue la aparición de una creciente incertidumbre en la economía en general que hasta entonces no se había experimentado. Todo esto llevo a que la teoría se tuviese que reconfigurar y la incertidumbre y otros elementos fuesen incluidos en el análisis.

3. Inversión Irreversible e Incertidumbre.

A principios de los años 80, queda claro que el proceso de la toma de decisiones de inversión debía buscar caminos alternativos al que se basa en la consideración del agente representativo. La razón de esto es que la composición de los sectores en los que se encontraban las firmas, las demandas a las que estas se enfrentaban y los tipos de capital que utilizaban eran muy diferentes en general. Se hicieron evidentes también problemas específicos que no podían ser considerados en la teoría del agente representativo, pero de gran importancia en el momento de la toma de decisiones.

Por ejemplo, la especificidad del capital en una firma trae problemas a la hora de desinvertir, pues está, posiblemente, no consiga fácilmente compradores de su capital usado, lo que llevaría a que este se deprecie en el tiempo sin que se saque ingreso alguno, dada la imposibilidad de venderlo. Esto último es lo que se conoce en la literatura como la irreversibilidad en la inversión, y se define como la incapacidad de una empresa de vender su capital usado a un precio al menos igual al que lo compró (Altug *et al*, 2003). Arrow (1968) mostró que ante irreversibilidad en la inversión, la decisión de óptima de ajustar el por parte de la firma está dada por periodos irregulares, siendo en algunos de ellos el ajuste en el capital positivo y otros nulo, lo que muestra que no sigue un proceso suave y continuo en el tiempo, evidenciando que la decisión de inversión suele ser discontinua bajo este supuesto.

Otros aspectos importantes son señalados por Caballero (1999), quien afirma que hay tres niveles de ajuste a nivel de las firmas individuales:

- Ajuste por flujos de inversión continua o recurrente, caracterizados especialmente por los costos de mantenimiento o depreciación.
- Ajustes graduales, asociados a los cambios en el stock de capital en maquinarias y equipos para incrementar la producción de forma moderada.
- Ajustes mayores e infrecuentes, como la construcción de una nueva planta.

La discusión hasta principios de los años 80 se centró principalmente en los dos primeros puntos, que dio lugar a funciones de costos de ajuste tales como la cuadrática, considerada en el capítulo anterior. Esto se debía que se asumía que en el proceso de agregación los ajustes infrecuentes que hacían las firmas no eran decisivos en la determinación del nivel de inversión. Sin embargo, la evidencia empírica muestra que los ajustes infrecuentes en la inversión no son eliminados en el proceso de agregación.

Por ejemplo, Doms y Dunne (1993) llevan a cabo un estudio en el que muestran que, para el periodo 1972 - 1989, en promedio el más grande nivel de inversión para cada firma fue de 25% de la inversión total realizada durante los 17 años de análisis, y más de la mitad de ellas exhibieron un incremento en su stock de capital de cerca del 50% en un solo año. Adicionalmente, notaron que el segundo pico más grande de inversión se da un año antes o un año después del incremento más grande, lo cual hacia a la inversión en las firmas un proceso bastante irregular.

Igualmente, señalan que cerca del 18% de la inversión agregada está concentrada en los primeros 100 proyectos, y al calcular la correlación entre la inversión agregada y un índice de Herfindhal para la inversión microeconómica obtienen un valor de 0.45, el cual es lo suficientemente alto para dar cuenta de la concentración de la inversión a nivel firma. Esto, sumado al mal desempeño empírico de los costos de ajuste convexos en establecer una relación significativa entre la inversión y la q, derivo en la introducir de funciones de costos de ajustes no convexas, que dejaran de lado el supuesto de convexidad, bastante fuerte y poco justificado en la práctica, y diese cuenta de las irregularidades en la inversión a nivel microeconómico para tener una mejor comprensión de su comportamiento agregado[14].

En otro orden de ideas, las firmas no suelen ser competitivas, y por tanto los efectos que tienen algunos cambios en el entorno económico pueden afectar de forma diversas las decisiones de las firmas respecto a cómo lo harían bajo competencia perfecta. Uno de estos elementos es la incertidumbre en los precios, los salarios o los choques de productividad. Hartman (1972) y Abel (1983) muestran un resultado que parece difícil de creer de acuerdo a la creencia convencional, puesto que al asumir una firma competitiva con costos de ajuste convexos encuentran que mayor incertidumbre en el precio del bien que esta ofrece o la productividad genera incentivos a una mayor inversión. No obstante, Caballero (1991) encuentra que dependiendo de los rendimientos a escala en la producción y el nivel de competencia del mercado que la firma enfrentase, la respuesta de la inversión ante cambios en la volatilidad de los precios no necesariamente podría ser negativa.

Así, la decisión de una firma de modificar su capital ante un cambio en el entorno económico puede ser distinta a la de otras firmas de la economía, debido a la estructura de mercado que enfrenta, su estructura productiva y los tipos de costos de ajuste que enfrente. Por tanto,

[14] De hecho, Rothschild (1971) ya había demostrado que la inversión podía tener un comportamiento diferente de acuerdo al tipo de función de costos de ajuste que enfrentase la firma, la cual podría además ser no convexa. El supuesto de convexidad de esta función es muy fuerte y poco justificado en la práctica.

aunque teóricamente la q unida a los costos de ajuste presento un marco suficientemente consistente para modelar la inversión, era necesario avanzar en la agenda de investigación y desarrollar modelos más coherentes con la realidad que se observaba a nivel microeconómico y su posible impacto a nivel agregado. Por lo que el propósito de esta sección será acercar bajo un modelo general todos los elementos discutidos previamente de forma rigurosa para expandir la comprensión de los problemas de la inversión a nivel microeconómico.

Modelo[15].

Para este modelo se tomará como base el trabajo de Abel y Eberly (1994) en donde se utilizaran algunas herramientas del cálculo estocástico, especialmente los movimientos Brownianos[16]. Así, se considera una firma individual neutral al riesgo, la cual produce utilizando dos factores de producción; capital, denotado por K_t y que está sujeto a costos de ajuste, y trabajo L_t, el cual no es un factor sin costos de ajuste. De esta forma, en cada periodo del tiempo, la firma buscara maximizar sus beneficios eligiendo L_t, y el valor máximo de estos estará dado por $\pi(K_t, \varepsilon_t)$[17]. Así, se define a ε_t como una variable aleatoria que representa los cambios inesperados en el salario que paga la firma, la demanda a la que esta se enfrenta o los cambios tecnológicos que la afectan. Se hace el supuesto que $\pi_K > 0$ y $\pi_{KK} < 0$, mientras que se supondrá que ε_t evoluciona de acuerdo a un proceso de difusión el cual está caracterizado de la siguiente forma:

$$d\varepsilon_t = \mu(\varepsilon_t)dt + \sigma(\varepsilon_t)dz \qquad [3.1]$$

Siendo z un proceso de Wiener estándar[18]. Igualmente, en cada instante del tiempo, la firma decide cuál será su variación en el capital, la cual estará dada por el siguiente proceso:

$$dK_t = (I_t - \delta K_t)dt \qquad [3.2]$$

---

15 Hay dos enfoques que se pueden utilizar para ver el problema de la irreversibilidad y la incertidumbre, el que se centra en los costos de ajuste, que será el adoptado en este documento, y el segundo utiliza las opciones sobre los precios del capital. Para conocer un poco más de este último enfoque puede verse la reseña que hacen Altug *et al* (2003).

16 Para profundizar en este tema, puede verse Oksendal (2000) y Stockey (2009).

17 Esto se deduce fácilmente del hecho que los beneficios de corto plazo están dados por $\pi(K, L, \varepsilon) = P(\varepsilon)F(K, L, \varepsilon) - w(\varepsilon)L$. Al derivar esta expresión respecto L, igualando a 0 y despejando, se obtiene que $P(\varepsilon)F_L(K, L, \varepsilon) = w(\varepsilon)$; lo cual implica que el nivel de trabajo óptimo en cada periodo $L^* = L(K, \varepsilon)$, lo que lleva a que en el corto plazo $\pi(K, L^*, \varepsilon) = \pi(K, \varepsilon)$.

18 Un proceso de Wiener z se define como un proceso estocástico que es caracterizado por:

1. Trayectoria temporal continúa.
2. Incrementos estacionarios independientes.
3. $dz \sim N(0, dt)$.

De esta forma, se tendrá que la firma incurrirá en costos de ajuste en el capital, los cuales estarán descritos por 3 componentes:

1. **Costo por compra y venta de capital:** es la parte de los costos que se da por comprar nuevos bienes productivos o la ganancia por la venta de unidades desinstaladas o que no están en uso. Así, se tiene un precio de compra igual a p_t^{k+} y el precio de venta estará dado por p_t^{k-}, asumiendo que $p_t^{k+} \geq p_t^{k-} \geq 0$. Si $p_t^{k+} > p_t^{k-}$ se deberá a especificidad en el capital de la empresa o a problemas de selección adversa. Por lo tanto, la función estará dada por:

$$p_t^{k+} \max\{0, I_t\} + p_t^{k-} \max\{0, -I_t\}$$

   La cual es una función diferenciable en I_t excepto cuando sea igual a cero.
2. **Costos de ajuste:** son los utilizados tradicionalmente en la teoría de costos de ajuste. Se asume que estos son continuos y estrictamente convexos en I_t , los cuales alcanzan un valor mínimo cuando la inversión es igual a cero. Igualmente, estos pueden depender de la cantidad de capital, en donde se supone que su derivada es no positiva.
3. **Costos fijos:** son costos independientes del nivel de inversión, y representan cosas como los costos de parar la producción en una firma mientras se instalan los nuevos equipos o el costo en que se incurre en la adaptación de los nuevos equipos o procesos (Rothschild, 1971). De esta forma, el costo fijo será distintos de cero cada periodo en que $I_t \neq 0$[19].

Al considerar estos 3 componentes juntos se puede definir la función de costos de ajuste aumentada o costos de ajustes no convexos, que estará dada por $C(I_t, K_t)$; junto con una variable dicotómica v que tomara el valor de 1 si $I_t \neq 0$, o el valor de 0 si $I_t = 0$. Se asume que $C(I_t, K_t) \in C^2$, excepto, posiblemente, en $I_t = 0$; es decir la función de costos de ajuste es continua y diferenciable de orden dos en todo su dominio; salvo, quizás, cuando la inversión sea nula; además que:

$$\lim_{I\uparrow 0} C(I_t, K_t) = \lim_{I\downarrow 0} C(I_t, K_t) = C(0, K_t)$$

En donde $C(0, K_t)$ denotara los costos fijos y será no negativo para todo K_t. Igualmente, se define $C_I^+(0, K_t)$ y $C_I^-(0, K_t)$ como la derivada por la izquierda y la derecha en los costos de

[19] Khan y Thomas (2008) introducen un intervalo para la inversión en el que los costos fijos son nulos, haciendo la función de costos de ajuste más general. No obstante, aquí no se tendrá en cuenta.

ajuste respecto a la inversión evaluados en $I_t = 0$, en donde $C_I^+(0, K_t) \geq 0$ y $C_I^-(0, K_t)$ no tiene signo definido. Adicionalmente se asume $C_I^+(0, K_t) \geq C_I^-(0, K_t)$.

Dada la definición de las variables y las funciones que entran a ser consideradas en el modelo, el problema que pretende resolver la firma es la maximización de la siguiente función:

$$V(K_t, \varepsilon_t) = \max_{I_{t+s}, v_{t+s}} \int_0^\infty E_t[\pi(K_{t+s}, \varepsilon_{t+s}) - v_{t+s}C(I_{t+s}, K_{t+s})]e^{-rs}ds \qquad [3.3]$$

$$s.a \quad d\varepsilon_t = \mu(\varepsilon_t)dt + \sigma(\varepsilon_t)dz$$

$$dK_t = (I_t - \delta K_t)dt$$

En donde $r > 0$. Para solucionar [3.3] se deriva la ecuación de Bellman para el cálculo estocástico, la cual estará dada por:

$$rV(K_t, \varepsilon_t) = \max_{I_t, v_t} \left\{ \pi(K_t, \varepsilon_t) - v_t C(I_t, K_t) + E_t \left[\frac{dV}{dt} \right] \right\} \qquad [3.4]$$

El lado izquierdo de [3.4] es el rendimiento de la firma en el periodo inicial, mientras que el lado derecho muestra los beneficios de operación netos de los costos aumentados de ajuste más las ganancias en el valor de la empresa. Para calcular este último término, se aplica el lema de Ito en $V(K_t, \varepsilon_t)$, abusando un poco de la notación y eliminando los subíndices de tiempo para obtener[20]:

$$dV = V_K(I - \delta K)dt + V_\varepsilon \mu(\varepsilon)dt + \frac{1}{2}V_{\varepsilon\varepsilon}\sigma(\varepsilon)^2 dt + V_\varepsilon \sigma(\varepsilon)dz$$

Al tomar E_t a la expresión anterior:

$$E_t[dV] = V_K(I - \delta K)dt + V_\varepsilon \mu(\varepsilon)dt + \frac{1}{2}V_{\varepsilon\varepsilon}\sigma(\varepsilon)^2 dt \qquad [3.5]$$

Así, Reemplazando este resultado en [3.4] se llega a la siguiente igualdad:

$$rV(K_t, \varepsilon_t) = \max_{I_t, v_t} \left\{ \pi(K_t, \varepsilon_t) - v_t C(I_t, K_t) + V_K(I_t - \delta K_t) + V_\varepsilon \mu(\varepsilon_t) + \frac{1}{2}V_{\varepsilon\varepsilon}\sigma(\varepsilon_t)^2 \right\} \qquad [3.6]$$

Ahora sea $q = V_K$, el incremento en el valor de la firma ante un aumento del capital, o también el precio sombra (una variante de la q expuesta en la sección anterior). De esta forma, para obtener una solución para las variables control solo se deben tener en cuenta los términos de [3.6] en los que I_t y v_t aparecen, es decir:

$$\max_{I_t, v_t} \{ q_t I_t - v_t C(I_t, K_t) \} \qquad [3.7]$$

[20] Se debe tener en cuenta que $dt^2 = dK^2 = dKd\varepsilon = dzdt = E_t dz = 0$

Así, se puede proceder en dos pasos: 1. Asumir que $v = 1$ y elegir I, 2. Elegir entre v igual a 0 o 1. Si $v = 1$ en [3.7] y denotando con $\psi(q, K)$ a la función resultante se tiene, eliminando el subíndice de t, se tiene:

$$\psi(q, K) = \max_{I}\{qI - C(I, K)\} \quad [3.8]$$

Derivando [3.8] respecto a I se obtienen la condición de primer orden:

$$q = C_I(I^*, K) \; para \; I^* \neq 0 \;\; y \;\; q < C_I^-(0, K) \;\; o \;\; q > C_I^+(0, K) \quad [3.9.1]$$

$$I^* = 0 \;\; si \;\; C_I^-(0, K) \leq q \leq C_I^+(0, K) \quad [3.9.2]$$

En donde I^* denota la inversión óptima, la cual será una función implícita de K y q. Las ecuaciones [3.9.1] y [3.9.2] representan la regla de elección de la inversión óptima para una firma. La ecuación [3.9.2] muestra lo que se conoce en la literatura como región de inacción, la cual se define como el intervalo de valores de la q para los cuales la inversión es nula. Esto se da por la asimetría que hay en los costos de ajustes marginales entre invertir o desinvertir y la incapacidad de la firma por aprovechar la información que ofrece la q cuando esta entre $C_I^-(0, K)$ y $C_I^+(0, K)$, que llevan a que en el margen la firma no tome decisión alguna sobre la variación de su capital. Por otro lado, [3.9.1] muestra las regiones de inversión de la firma las cuales están por fuera de la región de inacción. Asimismo, al tomar [3.9.1] y derivarla respecto I, se obtiene:

$$I_q^* = \frac{1}{C_{II}} > 0$$

Por lo que, al ser I^* una función creciente en q, se concluye que las decisiones de inversión se pueden resumir por[21]:

$$I^* \begin{cases} < 0 \;\; si \;\; q < C_I^-(0, K) \\ = 0 \;\; si \;\; C_I^-(0, K) \leq q \leq C_I^+(0, K) \\ > 0 \;\; si \;\; q > C_I^+(0, K) \end{cases} \quad [3.10]$$

De [3.10] se deduce que la decisión de inversión óptima puede ser totalmente determinada por la variable q, por lo que no es necesaria otra variable para establecer su comportamiento, tal como en la sección anterior. Finalmente, si se hace el supuesto que la función de costos de ajuste aumentada es diferenciable en $I = 0$, se estaría afirmando que $C_I^-(0, K) = C_I^+(0, K)$ y se concluiría que la regla de inversión optima estaría dada por $q = C_I(I^*, K)$ para todo q. Así, ante la continuidad en los costos de ajuste desaparece la región de inacción, encontrando que el comportamiento es igual al de la teoría de la inversión de

[21] Es importante resaltar que:

$$q_K = C_{I,K} < 0$$

Lo cual muestra que el precio sombra del capital disminuye con el incremento en el capital.

los costos de ajuste presentada en la sección anterior, la cual sería un caso particular de la presentada aquí.

Ahora bien, si $v = 0$, es claro que $I^* = 0$; con lo cual $\psi(q,K) = 0$. De esta forma, la firma solo elegirá $v = 1$ si y solo si $\psi(q,K) > 0$, lo cual es posible de saber si se conoce el comportamiento de la función ψ en relación a q. De esta forma, usando [3.8] en el óptimo y recordando de [3.10] que si $C_I^-(0,K) \leq q \leq C_I^+(0,K)\ I^* = 0$; se obtiene que:

$$\psi(q,K) = -C(0,K) \leq 0 \qquad [3.11]$$

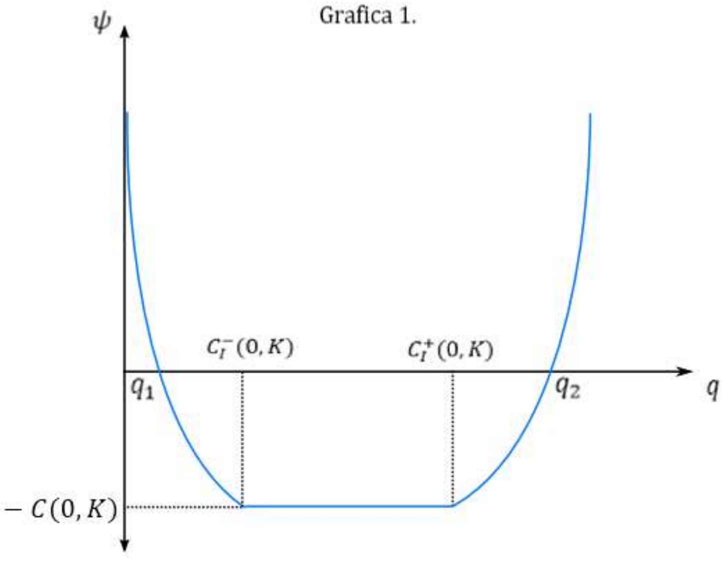
El cual será el valor mínimo $\psi(q,K)$. Igualmente, fuera del mínimo de ψ, es decir en $I^* \neq 0$, se calcula la primera derivada respecto a q, en donde se llega a:

$$\psi_q = qI_q^* + I^* - C_I(I^*,K)I_q^* = I^* + I_q^*\big(q - C_I(I^*,K)\big) = I^* \qquad [3.12]$$

Este último resultado se obtiene de la [3.9.1]. Así, siguiendo a [3.10], se tiene que ψ será creciente siempre que $q < C_I^+(0,K)$, decreciente cuando $q < C_I^-(0,K)$ y su pendiente será nula cuando q este en la región de inacción. Por último, al tomar de nuevo derivada respecto q en [3.12], se tiene que:

$$\psi_{qq} = I_q^* > 0 \ \ para \ \ q < C_I^-(0,K) \ \ o \ \ q > C_I^+(0,K) \qquad [3.13]$$

Grafica 1.



Con la información obtenida en [3.11], [3.12] y [3.13] se concluye que $\psi(q,K)$ es una función convexa, con un valor mínimo igual a $-C(0,K)$ global cuando q se encuentra en la zona de inacción. Por último, para encontrar el intervalo de q en el que será $v = 0$, simplemente se debe determinar el valor más pequeño y más grande de q para el cual $\psi(q,K) = 0$; las cuales existen dada la convexidad de la función y denotaremos por q_1 y q_2 respectivamente[22], tal como se observa en la gráfica 1. Así, se sigue de [3.12] que:

$$\psi(q,K) > 0\,, v = 1 \quad si\, q < q_1\, o\, q > q_2 \qquad [3.14.1]$$

$$\psi(q,K) = 0\,, v = 0 \quad si\, q_1 < q < q_2 \qquad [3.14.2]$$

Con lo cual, reuniendo toda la información obtenida, se tiene que la función de inversión estará dada finalmente por:

$$\hat{I}\begin{cases} < 0 & si \quad q < q_1 \\ = 0 & si \quad q_1 \leq q \leq q_2 \\ > 0 & si \quad q > q_2 \end{cases} \qquad [3.15]$$

Implicaciones de la región de inacción.

Lo más importante que se ha encontrado en este modelo es la existencia de una región de inacción a la hora de tomar decisiones de inversión, lo cual se debe, principalmente, a la estructura en los costos de ajuste alrededor de $I = 0$ y la presencia de costos fijos. De acuerdo a [3.10] y [3.15], esta región de no inversión es ajena a la forma de $\pi(K_t, \varepsilon_t)$, por lo que la función de producción, el tipo de demanda que la firma enfrenta o los cambios tecnológicos que estén asociados a ella; por lo que cualquier tipo de firma, sea competitiva o no, estaría potencialmente sujeta a tener un intervalo en el que la q no genera información relevante respecto a la decisión de invertir.

De igual forma, cuando se tiene que $C(0,K) > 0$ o $C(I,K)$ no es diferenciable en $I = 0$, se tiene que el comportamiento de $\hat{I}$ es discontinuo. Lo que esto ocasiona es que la firma podría pasar de poseer altas inversiones a, de repente, no incrementar su stock de capital para dejar que su capital se deprecie durante un periodo de tiempo y vuelva a ser optimo invertir de nuevo, generando una dinámica en la inversión que dista mucho de ser suave a través del tiempo, encontrándose que esta es irregular.

Así mismo, es claro que la ecuación [3.6] se mantendrá para cualquier valor de K_t para todo t. Si se diferencia esta ecuación respecto K y luego se hace el supuesto que la firma está en el óptimo, se obtiene que:

[22] Hay una aclaración que se debe hacer respecto a las raíces y lo importante que son los costos fijos. Si el costo fijo es nulo, entonces se tiene el valor mínimo de $\psi = 0$, con lo que la región de inacción estaría sobre el eje horizontal, con lo cual $q_1 = C_I^-(0,K)$ y $q_2 = C_I^+(0,K)$, lo cual muestra que la región de inacción solo depende de la asimetría en los costos de invertir y desinvertir alrededor de $I = 0$, siendo un menor intervalo que cuando $C(0,K) \neq 0$. Por tanto, la existencia de costos fijos hace que intervalo para el cual q no genera información que lleve a modificar el stock de capital de la firma es más amplio.

$$rV_K = \pi_K - vC_K(\hat{I},K) + V_{KK}(\hat{I} - \delta K) - \delta q + V_{\varepsilon K}\mu(\varepsilon) + \frac{1}{2}V_{\varepsilon\varepsilon K}\sigma(\varepsilon)^2$$

Recordando que $q = V_K$, entonces se tiene que:

$$rq = \pi_K - vC_K(\hat{I},K) + q_K(\hat{I} - \delta K) - \delta q + V_{\varepsilon K}\mu(\varepsilon) + \frac{1}{2}V_{\varepsilon\varepsilon K}\sigma(\varepsilon)^2 \qquad [3.16]$$

Usando el lema de Ito para q se llega a:

$$dq = V_{KK}dK + V_{K\varepsilon}d\varepsilon + \frac{1}{2}V_{KKK}dK^2 + \frac{1}{2}V_{K\varepsilon\varepsilon}d\varepsilon^2 + V_{KK\varepsilon}dKd\varepsilon$$

Usando las operaciones adecuadas y las ecuaciones [3.2] y [3.3], para luego tomar valor esperado y obtener:

$$E[dq] = q_K(\hat{I} - \delta K)dt + V_{K\varepsilon}\mu(\varepsilon)dt + \frac{1}{2}V_{K\varepsilon\varepsilon}\sigma(\varepsilon)^2 dt$$

Reemplazando este resultado en [3.16] se encuentra:

$$(r + \delta)q = \pi_K - vC_K(\hat{I},K) + E_t\left[\frac{dq}{dt}\right] \qquad [3.17]$$

La cual es una ecuación de Euler para la decisión del capital. El lado izquierdo de [3.17] se interpreta como el costo en el que incurre una empresa al apropiarse de una unidad de capital adicional, mientras que el lado derecho es el beneficio marginal de un aumento en el stock de capital que viene dado por el incremento en los beneficios de corto plazo, la disminución en los costos de ajuste y la variación esperada del valor del capital.

Ahora bien, si q es una difusión como en [3.17], y dado que $r + \delta > 0$, por el Lema se tiene que:

$$q_t = \int_0^\infty E_t[\pi_{K_{t+s}} - vC_{K_{t+s}}(I_{t+s}, K_{t+s})]e^{-(r+\delta)s}ds > 0 \qquad [3.18]$$

Esto demuestra que en todo momento, el precio sombra del capital es positivo para todo t, lo cual trae implicaciones importantes para el modelo. Supóngase que $\min_I C(I,K) \geq 0$, por lo que desde [3.8] se tiene que $\psi(0,K) = \max_I -C(I,K) = -\min_I C(I,K)$, lo que implica que el valor mínimo de $\psi(0,K) \leq 0$. Ahora bien, dado lo anterior y la convexidad de ψ se tiene que q_1 debe ser no positiva; pero en el proceso de inversión q, que de acuerdo a [3.18] debe ser siempre positiva, no puede ser menor que q_1; por lo que, ante costos fijos positivos, q no puede generar niveles de inversión optima negativos. Así, la irreversibilidad de la inversión que surge en presencia de costos fijos es total, y la razón es que no habría un precio de venta lo suficientemente alto para que los bienes de capital puedan compensar los costos de ajuste marginales por desinvertir, y por tanto la venta de capital resulta no óptima en para la firma.

Efectos de la Incertidumbre en los Precios Sobre la Inversión.

El primer trabajo sobre los efectos de la incertidumbre en la inversión fue el de Hartman (1972). Su resultado fue demostrado en un contexto estocástico por Abel (1983), y posteriormente Caballero (1991) amplia el resultado al usar una función de costos de ajuste no simétrica, tal como ocurre aquí. Para ello, se hace el supuesto que la empresa es tomadora de precios en el mercado de factores y de bienes. Se supone que la producción está dada por una función tipo Cobb Douglas, por lo que $Y = AK_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha}$, con $0 < \alpha < 1$ y la función de costos de ajuste solo dependerá de la inversión, por lo cual $C_K(I, K) = 0$. Igualmente, se tendrá que la incertidumbre estará dada por los precios del bien, que serán aleatorios (por lo que $\varepsilon_t = p_t$) y evolucionan de acuerdo a un movimiento Browniano geométrico, el cual estará dado por:

$$dp = p\sigma dz \qquad [3.19]$$

Con estos supuestos formulados y maximizando los beneficios de corto plazo de la empresa (recordar pie de página 13) se tiene que:

$$p(1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha} = w$$

Y al despejar L obtenemos:

$$L^* = K\left[\frac{p(1-\alpha)A}{w}\right]^{1/\alpha}$$

Por tanto, al reemplazar este resultado en la ecuación de beneficios de corto plazo, se obtiene que:

$$\pi(K,p) = \alpha(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}w^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}p^{\frac{1}{\alpha}}A^{1/\alpha}K$$

Sea entonces $\mu = \frac{1}{\alpha} > 1$ y $h = (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}w^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}A^{1/\alpha}$, por lo que la los beneficios de corto plazo estarán dados por:

$$\pi(K,p) = hp^{\mu}K \qquad [3.20]$$

Lo cual muestra que la función de beneficios de corto plazo es convexa en el precio del bien. De esta forma, y usando [3.20] se tiene que q_t usando [3.18] se obtiene que:

$$q_t = h\int_0^{\infty} E_t[p_{t+s}^{\mu}]e^{-(r+\delta)s}ds \qquad [3.21]$$

Usando el lema de Ito para p_{t+s}^{μ} estará dada por:

$$p_{t+s}^{\mu} = p_t^{\mu} + \frac{1}{2}\int_0^s \mu(\mu-1)p_{t+v}^{\mu-2}p_{t+v}^{2}\sigma^2 dv + \int_0^s \mu p_{t+v}^{\mu-1}p_{t+v}dz$$

Que al tomar diferencial estará dado por:

$$d\left(p_{t+v}^{\mu}\right) = \frac{\mu(\mu-1)}{2}p_{t+v}^{\mu}\sigma^2 dv + \mu p_{t+v}^{\mu}dz(v)$$

Al hacer $x_{t+v} = p_{t+v}^{\mu}$, con $x_t = p_t^{\mu}$ se tiene que:

$$\frac{dx_{t+v}}{x_{t+v}} = d\ln x_{t+v} = \frac{\mu(\mu-1)}{2}\sigma^2 dv + \mu dz(v)$$

Al tomar esperanza en t en la expresión anterior se obtiene que:

$$E_t d\ln x_{t+v} = \frac{\mu(\mu-1)}{2}\sigma^2 dv$$

Integrando a ambos lados:

$$E_t\int_0^s d\ln x_{t+v} = \int_0^s \frac{\mu(\mu-1)}{2}\sigma^2 dv$$

$$E_t[\ln x_{t+s} - \ln x_t] = \frac{\mu(\mu-1)}{2}\sigma^2 s \;\rightarrow\; E_t x_{t+s} = x_t e^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}\sigma^2 s}$$

Por tanto, al usar la expresión anterior y reemplazar $x_{t+s} = p_{t+s}^{\mu}$ se llega al siguiente resultado:

$$E_t p_{t+s}^{\mu} = p_t^{\mu} e^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}\sigma^2 s} \qquad [3.22]$$

Al reemplazarla en [3.21] se obtiene que:

$$q_t = hp_t^{\mu}\int_0^{\infty} e^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}\sigma^2 s}e^{-(r+\delta)s}ds = hp_t^{\mu}\int_0^{\infty} e^{-\left(r+\delta-\frac{\mu(\mu-1)}{2}\sigma^2\right)s}ds$$

Asumiendo que $r+\delta-\frac{\mu(\mu-1)}{2}\sigma^2 > 0$ se tiene entonces que:

$$q_t = \frac{hp_t^{\mu}}{r+\delta-\frac{\mu(\mu-1)}{2}\sigma^2} \qquad [3.23]$$

Este resultado muestra que un aumento de la incertidumbre en el precio del bien, medida por σ, implica un incremento en la q_t. La razón para que esto suceda se debe a que la función de beneficio marginal de corto plazo es convexa en los precios, por lo que ante un aumento de la incertidumbre en el precio que ofrece la firma llevará a un incremento en los beneficios esperados en el futuro; con lo cual habrá un incremento en el precio sombra del capital[23]. No obstante, esto no implica que un incremento en q_t implique un aumento de la inversión[24], puesto que la presencia de la región de inacción hace que si $q_t < q_2$ se requiera un incremento lo suficientemente alto en σ para que la demanda por nuevos bienes de capital aumente.

No obstante, este resultado no se corrobora para las firmas con poder de mercado, y de hecho Caballero (1991) demuestra que el incremento en la variabilidad de los precios tiene un efecto negativo en las decisiones de inversión de las firmas que no son competitivas cuando el poder de mercado que estas poseen es relativamente alto, y la función de producción es linealmente homogénea[25]. La razón principal se debe a que un incremento en el poder de mercado de la empresa lleva a una disminución en la convexidad de la función de beneficio marginal del capital respecto al precio del bien, por lo que la respuesta ante un incremento en la volatilidad de los precios implica que la respuesta cada vez va a ser menor, hasta llegar al punto en que sea tan grande el poder de mercado de la firma que esta vea como su función de beneficio marginal del capital es cóncava respecto a los cambios en los precios. Este resultado es ajeno a la simetría que posea la función de costos de ajuste[26], aunque el efecto se vuelve más pronunciado a medida que desinvertir se vuelve más costoso que el costo que se incurre por invertir, es decir, cuando la irreversibilidad se hace más fuerte.

Sin embargo, también se muestra que bajo rendimientos crecientes a escala en la función de producción, las firmas con poder de mercado tienden a comportarse como predicen Abel (1983) y Hartman (1972), puesto que mayores rendimientos a escala es semejante a una disminución en el *mark-up*, lo que implicaría que el beneficio marginal del capital se hace cada vez más convexo respecto a los precios. Por el contrario, si la función de producción exhibe rendimientos decrecientes a escala y la firma es competitiva, se genera una relación negativa entre inversión e incertidumbre.

Todo lo anterior muestra que el efecto de la incertidumbre en la inversión no es concluyente, y depende especialmente de la estructura de mercado que se considere y los

[23] También implica un incremento en los costos de ajuste de la empresa, tal como enuncia Hartman (1972)
[24] Tal como señalaron Hartman (1972), Abel (1983) y Caballero (1991).
[25] Esto se muestra por medio del *mark-up*.
[26] De hecho, el resultado de la ecuación [3.23] se da para una función de costos de ajuste asimétrica, por lo que esta es irrelevante en cuanto a la consideración de la relación entre incertidumbre e inversión.

rendimientos a escala, que ejercen una influencia lo suficientemente fuerte sobre la decisión de inversión de las firmas. Por tanto, el resultado de Hartman (1972) no es robusto.

Evidencia Empírica.

Estos nuevos desarrollos teóricos fueron acompañados de desarrollos empíricos que fuesen en la dirección de validar o rechazar las hipótesis contenidas allí, tanto a nivel individual como agregado, siendo este último tratado en el próximo capítulo. De esta forma, la necesidad de validar empíricamente la presencia de costos fijos y asimetrías en los precios de inversión y desinversión hacen parte de la validación de los costos de ajuste ampliados o no convexos, mientras que el siguiente tema a validar empíricamente es el del efecto de la incertidumbre. En este orden de ideas, la primera parte de esta evidencia empírica mostrara algunas estimaciones empíricas de los costos de ajuste a nivel de firmas, y posteriormente se dará a conocer algunos aspectos sobre el efecto que trae la incertidumbre en las decisiones de inversión.

De esta manera, Caballero, Engel y Haltiwanger (1995) usan datos a nivel de firma para una muestra de 7000 del Longitudinal Data Research (LRD) para observar si hay costos de ajuste no convexos, y por tanto la existencia de ajustes irregulares. Así, encontraron una alta elasticidad del capital respecto al costo de uso en el largo plazo, entre -0.1 y -2.0, mientras en el corto plazo hallaron elasticidades más bajas, entre 7 y 12% de las de largo plazo, y más variables; siendo estos resultados consistentes con la idea de irreversibilidad, puesto que en el largo plazo las firmas son más propensas a hacer ajustes en el capital que en el corto plazo debido a la presencia de costos fijos y las economías a escala que generan en la inversión.

Igualmente, Doyle y Whited (2001) muestran que la inversión a nivel de firmas sigue un proceso intermitente en el ajuste del capital, además muestran que los choques idiosincráticos son importantes, lo que implica que la heterogeneidad de la firmas es la que prevalece, lo cual es evidencia en contra del paradigma del agente representativo.

Por otro lado, Abel y Eberly (2002) usando un panel de datos de firmas del COMPUSTAT para el periodo entre 1974 y 1993 buscan mostrar que la q es una variable relevante y que explica el comportamiento de la inversión cuando se está en presencia de costos de ajuste aumentados. De esta forma, hacen un paralelo entre la estimación basada en costos de ajuste cuadráticos, que implica el uso de técnicas lineales de estimación, y costos de ajuste aumentados, que llevan al uso de estimaciones econométricas no lineales, todo esto cuando la inversión es positiva. En efecto, la primera estimación lleva a un coeficiente de la q que está entre 0.017 y 0.131, mientras que en presencia de costos de ajuste aumentados, la estimación de este coeficiente esta entre 0.238 y 0.94. Este mayor coeficiente implico un mejor ajuste a los datos de la ecuación estimada sobre la dinámica de la tasa de inversión, encontrando una mejoría en su trayectoria, especialmente en eventos en donde se daban fuertes cambios en la política económica. Esto mostró que la función de costos de ajuste necesariamente no debía ser cuadrática, tal como asumían las investigaciones de años previos, obteniendo así una mejoría en el desempeño de la q.

Igualmente, a nivel micro llevan a cabo una estimación de un modelo Logit en el que se busca estimar la probabilidad de que una firma desinvierta[27], como proxy del proceso de desinversión, en donde encuentran que el aumento de la q lleva a una menor probabilidad de desinvertir (el coeficiente estaba entre -0.061 y -0.033), mientras que el aumento del precio de venta lleva a un aumento en esta probabilidad. Esta estimación muestra que para que sea altamente probable desinvertir, se requieren caídas importantes en la q, lo cual es consistente con la presencia de costos fijos en la inversión.

Por su parte, Cooper y Haltiwanger (2006) usando datos de panel balanceado a nivel de firmas muestran que los costos fijos y la asimetría en los costos marginales de ajuste son importantes para tener un buen ajuste a los datos de la economía real respecto a la dinámica de la inversión en el periodo 1972 - 1988. Así, estiman una función de costos de ajuste en la inversión con costos cuadráticos, costos fijos y precios de compra y venta diferentes, en donde encuentran que cada uno de estos componentes es altamente significativo. Específicamente hablando, el coeficiente de los costos cuadráticos es de 0.49% de la producción, el de costos fijos es de 20.4% de la producción y la diferencia de precios de compra/venta es de 2.5%. Igualmente, muestran que cada elemento de los costos de ajuste por separado, aislando los demás, ayudan a explicar el comportamiento de la inversión en algún grado más o menos preciso; pero su nivel de significancia económica y estadística es mucho mayor cuando se consideran en conjunto, mostrando que a nivel microeconómico es necesario considerar estos 3 componentes para comprender mejor el comportamiento de la inversión.

Khan y Thomas (2008) encuentran que a nivel de firmas, en un marco de equilibrio general, los costos de ajuste no convexos solo llevan a suavizar los momentos de la inversión, sin ser determinantes en la dinámica de la inversión de cada firma individualmente, debido a que el ajuste de precios lleva a que los efectos se suavicen y no haya sobrerreacción en la inversión de las firmas. Esto pone en el centro de discusión el desempeño que puede traer

[27] Aquí la variable indicadora toma el valor de 1 cuando $I < 0$ y toma el valor de 1 cuando $I \geq 0$.

el ajuste de precios en los factores como un medio para regular los ajustes de la inversión, no obstante, en la siguiente sección esto será tratado.

En cuanto a la incertidumbre, la evidencia empírica que puede encontrarse suele ser modesta, y esta muestra diferentes resultados sobre cuál es el impacto que tiene sobre la inversión en las firmas. Un resultado en el que se observa que la incertidumbre tiene un impacto positivo es el mostrado por Bar–Ilan y Strange (1996), en donde dan cuenta que si las firmas tardan en la realización de sus proyectos, la incertidumbre puede tener un efecto positivo sobre la decisión de incrementar el capital, lo cual se conoce como las *Growth options* en la literatura. Stein y Stone (2012) y Kraft, Schwatz y Weiss (2013) muestran que este mecanismo es importante en las industrias de Investigación y Desarrollo, en donde los costos de proyectos ineficientes o inseguros tienen una cota inferior debido a que las firmas pueden dejar de producir el producto que estén desarrollando y perder solamente los costos de I+D; mientras que el desarrollo de proyectos que superen las expectativas no estarían restringidos por una cota superior, lo cual llevaría a un aumento en las ganancias cuando el producto vaya al mercado; por lo que la ganancia esperada incrementa, y con ello la inversión.

Por su parte, Leahy y Whited (1996) usando un panel de datos para varias firmas de la industria manufacturera de Estados Unidos muestran una fuerte relación entre la incertidumbre e inversión es negativa. Por su parte, Guiso y Parigi (1999) utilizando datos de firmas italianas estudian el comportamiento de la inversión y las expectativas sobre la demanda futura, la fuente de incertidumbre mostrada en la sección anterior, encontrando una relación fuertemente negativa entre estas dos.

No obstante, Bloom, Bond and Van Reenen (2007) muestran en un modelo teórico con irreversibilidad parcial que la incertidumbre tiene efectos ambiguos sobre la inversión, siendo negativo en el corto plazo pero positivo en el largo plazo, confirmándose así el efecto Hartman (1972) y Abel (1983) solo en largos periodos de tiempo. Mientras que en estimaciones econométricas de un panel no balanceado de 672 encuentran que el efecto de la incertidumbre es negativo, y se hace más fuerte el efecto a nivel microeconómico[28]. Asimismo, señalan que las firmas ajustan poco su nivel de inversión ante cambios inesperados en la demanda cuando el nivel de incertidumbre que enfrentan en el corto plazo es muy grande; por lo que cuando los eventos se vuelven muy inciertos las firmas no responderán en gran medida a la política fiscal o monetaria. Finalmente, Bloom (2009)

[28] Justamente encuentra que la incertidumbre macroeconómica afecta a las empresas de forma positiva, sin embargo no fue significativo estadísticamente.

muestra empíricamente que el aumento en la incertidumbre lleva a incrementar la región de inacción para la inversión en el corto plazo.

Comentarios.

La irreversibilidad, parcial o total, en la inversión es un hecho que es evidente y su presencia llevo a replantear la comprensión de los procesos de inversión a nivel microeconómico por parte de los economistas sin importar el tipo de mercados considerado. La evidencia empírica apoya la existencia de costos fijos, los cuales hacen que la inversión siga un proceso irregular en donde se incrementa en gran volumen el capital para pasar a periodos en donde las firmas no modifican su stock de capital más que por efecto de la depreciación. No obstante, los efectos a nivel macroeconómicos de dicha irreversibilidad no se ha discutido, por lo que hay que indagar como la presencia de funciones de costos de ajuste no convexas modifican la dinámica de la inversión, y más aún, si la inclusión de estos puede llevar a encontrar una relación econométrica consistente con la teoría macroeconómica. No obstante, esto se discutirá en la siguiente sección.

En cuanto al tema de la incertidumbre en la inversión, se puede decir que este no ha sido comprendido completamente y requiere de aunar esfuerzos por parte de los investigadores para profundizar en el, en especial por el efecto que puede tener sobre el ciclo económico y vital de las firmas. Es bien sabido que la Gran Crisis del 2007 genero efectos fuertes en la dinámica de las firmas, siendo la incertidumbre uno de los grandes causantes de esto (Bloom, 2009). Igualmente, los eventos políticos también generan una fuerte incertidumbre sobre la economía, así como las guerras, que claramente afectaran las decisiones de inversión de las firmas cuando se ven afectadas por estos eventos. En gran medida, Bloom (2009 y 2014) muestra que la incertidumbre trae, en general, efectos negativos sobre las decisiones de inversión de corto plazo, pero cuando la inversión es de más largo plazo el efecto de la incertidumbre parece ser positivo.

Dado lo anterior, se señaló que dicha ambigüedad también podría darse por los rendimientos a escala de las firmas. En efecto, este hecho de las economías a escala y el largo plazo fue discutido por Marshall (1890), en discute como en el corto plazo las firmas enfrentan rendimientos decrecientes a escala y en el largo plazo, por medio del desarrollo tecnológico y el mejoramiento de las técnicas de producción, se alcanzan rendimientos crecientes. Esto, unido a lo dicho por Caballero (1991), muestra un indicio teórico de lo encontrado por Bloom *et al* (2007) y Bloom (2009, 2014) sobre el impacto negativo que se da en el corto plazo entre la variabilidad de los precios y la inversión, y el incremento en el capital y ante aumentos de la incertidumbre que enfrentaría la firma. Esto último muestra la importancia de considerar los ciclos de vida de las firmas en los mercados para determinar la actitud de estas en relación a la incertidumbre. Sin embargo, aún se sigue trabajando en esto en la actualidad, puesto que faltan muchas cuestiones que considerar.

4. Agregación de la Inversión.

Al observar que las heterogeneidades que hay entre las firmas y la incertidumbre que estas enfrentan, algo visto en la sección anterior, y las implicaciones de estas sobre sus decisiones de inversión, es imposible concebir una agregación simple como un método adecuado para dar cuenta en trabajos macroeconómicos del impacto que tienen variables como, por ejemplo, los cambios en los precios sobre la inversión agregada. En efecto, Las irregularidades en la inversión, las diferentes características de competencia que enfrentan y las economías a escala que estás poseen, llevan a que la decisión de invertir sea distinta entre las firma y se aleje de lo que muestran las teorías basadas en la hipótesis del agente representativo, las cuales fueron usadas para tratar los problemas a nivel agregado durante muchísimos años y no tuvieron resultados satisfactorios.

En este sentido, Gordon (1992) muestra teórica y empíricamente que el uso del agente representativo genera problemas de estimación por la inadecuada agregación que se hace al no reconocer las diferencias entre las dinámicas microeconómicas y macroeconómicas. En otras palabras, la inversión a nivel microeconómico es muy irregular, lo cual difícilmente es eliminado completamente a nivel agregado, como se señaló previamente. Por tanto, para poder tener un método agregación que reconozca las irregularidades en las firmas y su impacto en las decisiones de inversión agregada se requiere de una formulación adecuada que permita un mejor desempeño a nivel empírico.

De esta forma, surge una pregunta central ¿Cómo conciliar un comportamiento relativamente suave en la serie de inversión agregada con los picos y las irregularidades que se observan a nivel de firma? Para ello, se debe empezar con un modelo que describa el comportamiento de las firmas y posteriormente llevar a cabo una agregación en la que se tenga en cuenta los elementos que hacen que la inversión sea irregular. Así, se llevara a cabo el desarrollo de uno de los principales métodos de agregación usando una dinámica de comportamientos irregulares como la descrita en la sección 3, la cual estará basada en modelos del tipo (S, s), los cuales suelen ser usados en presencia de costos fijos de ajuste e incertidumbre (Caplin y Leahy, 2010)[29].

Modelo.

[29] La aplicación de estos modelos es amplia y muy diversa dentro de la teoría económica, por lo que consultar este trabajo puede ser interesante.

Las ideas de esta sección están basadas en el trabajo de Caballero y Engel (1999), en donde desarrollan un método de agregación de la inversión en el que se asume que las firmas enfrentan una estructura de mercado de competencia monopolística bajo una dinámica (S,s) y su decisión de invertir no es continua, puesto que los costos de ajuste se asume que no son simétricos, siendo además aleatorios y una fuente de incertidumbre.

Comportamiento de firmas individuales.

Para iniciar con la construcción de un método de agregación en la inversión se debe describir como las firmas tomaran sus decisiones. Así, el primer paso consiste en explicar cómo estas actúan en ausencia de fricciones, y luego se muestra como modifican su conducta cuando aparecen los costos de ajuste. En efecto, como se señaló previamente, se hace el supuesto inicialmente que las firmas no tienen ninguna restricción o fricción para ajustar su stock de capital, por lo que su objetivo será maximizar los beneficios en cada momento del tiempo, dados por:

$$\pi(K_t,\theta_t) = \theta_t K_t^{\beta} - (r+\delta)K_t \qquad [4.1]$$

De acuerdo a [4.1], se asume que $0 < \beta < 1$ debido a que se evidencia algún poder de monopolio o efecto de los rendimientos marginales decrecientes, mientras que θ_t es una variable aleatoria que da cuenta de los choques de demanda, productividad o salarios[30]. Igualmente, δ es la tasa de depreciación y r es la tasa de interés que enfrenta la firma. Derivando [4.1] respecto K al tiempo que se iguala a cero se obtiene que el nivel de capital óptimo en el periodo t, denotado por K_t^*, y estará dado por:

$$K_t^* = \left(\frac{\beta\theta_t}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$$

Por lo que K_t^* será una variable aleatoria dado que θ_t lo es[31]. No obstante, el nivel de capital que posee la empresa en la actualidad puede distar del stock que la firma tendría sin fricciones debido a los costos de ajuste en el capital, por lo que se define la tasa de desequilibrio en el capital, representado por z_t y que será igual a:

[30] El comportamiento de θ_t se asume igual a un paseo aleatorio en logaritmos, es decir $\ln\theta_t = \ln\theta_{t-1} + \varepsilon_t$, en donde $\varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2)$ independiente e idénticamente distribuida. La normalidad de ε_t es un supuesto introducido por Caballero y Engel (1999).

[31] Esto se encuentra al tomar logaritmo en K_t^*, y asumiendo las el comportamiento de θ_t, se obtiene:

$$\ln K_t^* = \ln\left(\frac{\beta\theta_{t-1}}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} + \frac{1}{1-\beta}\varepsilon_t \;\rightarrow\; \ln K_t^* = \ln K_{t-1}^* + \mu_t$$

Con $\mu_t = \frac{1}{1-\beta}\varepsilon_t$, y se obtiene así el resultado.

$$z_t = \ln\left(\frac{K_t}{K_t^*}\right) \rightarrow \quad K_t = K_t^* e^{z_t} \qquad [4.2]$$

Así, si $K_t \lesseqgtr K_t^*$, entonces $z_t \lesseqgtr 0$. Finalmente, para describir el comportamiento de la firma sin fricciones y determinar la función de beneficios en función de z_t y K_t^*. Para ello, Despejando θ_t de la expresión encontrada para K_t^* se tiene:

$$\theta_t = \beta^{-1}(r+\delta){K_t^*}^{1-\beta} \qquad [4.3]$$

Luego, reemplazando [4.2] y [4.3] en [4.1], se puede reescribir la función de beneficios de la firma en el periodo t como:

$$\pi(K_t^*, z_t) = \left[\beta^{-1}(r+\delta){K_t^*}^{1-\beta}\right]{K_t^*}^{\beta} e^{\beta z_t} - (r+\delta)K_t^* e^{z_t}$$

Tomando $\xi = \beta^{-1}(r+\delta)$, se tiene que:

$$\pi(K_t^*, z_t) = \xi K_t^* e^{\beta z_t} - \xi\beta K_t^* e^{z_t} = \xi\left(e^{\beta z_t} - \beta e^{z_t}\right)K_t^* \rightarrow \quad \pi(K_t^*, z_t) = \pi(z_t)K_t^* \qquad [4.4]$$

Una vez caracterizada $\pi(K_t^*, z_t)$, es claro que la firma para invertir podría incurrir en costos de ajuste, los cuales pueden ser no convexos. Asumiendo esto último, es evidente que la decisión su decisión sigue un proceso de inversión irregular debido a la presencia de una región de inacción y costos fijos. Así, se supone que los costos de ajuste en el periodo t, denotados por CA_t, se definen como la pérdida de ingresos por parte de la firma debido a cambios en su capital, que estarán dados por:

$$CA_t = \omega_t(\pi(K_t, \theta_t) + (r+\delta)K_t) = \omega_t\theta_t K_t^{\beta} \rightarrow CA_t = \omega_t \xi K_t^* e^{\beta z_t} \qquad [4.5]$$

En donde ω_t es la proporción de los ingresos que se pierde debido al ajuste del capital. La ultima igualdad en [4.5] muestra economías a escala del capital sobre los costos de ajuste, pues entre mayor sea el aumento en K_t, los costos de ajuste marginal disminuirán. De igual forma, se asume que ω_t es una variable aleatoria con función de distribución $G(\omega_t)$, que será independiente entre firmas y a través del tiempo, y su realización será observada al principio de cada periodo.

Ahora bien, dadas las economías a escala que poseen los costos de ajuste no convexos, se hace necesario caracterizar la región de inacción, en la que la empresa no ajustara su stock de capital, y una región de acción en la que, por el contrario, esta modificara su nivel de capital. Para esto, en primer lugar, se caracteriza la dinámica de K_t^* [32]:

$$K_t^* = K_{t-1}^* e^{\mu_t} \qquad [4.6]$$

[32] Ver el pie de página 30.

En donde μ_t es una variable normal independiente e idénticamente distribuida. De esta forma, si no hay ajuste en el stock de capital, se tendrá que:

$$K_t = (1-\delta)K_{t-1} \rightarrow K_t^* e^{z_t} = (1-\delta)K_{t-1}^* e^{z_{t-1}}$$

Al tomar logaritmos y reorganizar términos y usando [4.6], se tiene que:

$$z_t = \ln(1-\delta) + z_{t-1} - \mu_t$$

Así, cuando no hay ajustes, se encuentra que z_t es un paseo aleatorio con media e innovaciones normales. Esto último, junto con el supuesto de independencia de ω_t, asegura que la elección de ajustar su capital en el periodo t por parte de la firma y en cuanto hacerlo estará completamente determinado por el vector (z_t, K_t^*, ω_t), que son las variables estado de las firmas. Por tanto, su decisión estará dada por el siguiente problema:

$$V^*(z_t, K_t^*, \omega_t) = \max\{V(z_t, K_t^*), V(c, K_t^*) - \omega_t \xi e^{\beta z_t} K_t^*\} \qquad [4.7]$$

El término $V(z_t, K_t)$ es el valor que tendría la empresa al no ajustar su stock de capital, mientras que $V(c, K_t^*) - \omega_t \xi e^{\beta z_t} K_t^*$ muestra el valor de la empresa si ajustase su nivel de capital hasta el punto objetivo o *target point* en el que el desequilibrio sea c[33]. De esta forma, de [4.7] y usando [4.4], se tendrá que:

$$V(z_t, K_t^*) = \pi(z_t)K_t^* + \frac{1}{1+r} E_t[V^*(z_{t+1}, K_{t+1}^*, \omega_{t+1})] \qquad [4.8]$$

Desde que la función de beneficios y la de costos de ajuste sean homogéneas de grado 1 respecto K_t^*, implica entonces que $V(K_t, z_t)$ y $V^*(z_t, K_t, \omega_t)$ también lo serian, por lo que:

$$V(K_t^*, z_t) = v(z_t)K_t^* \qquad V^*(z_t, K_t^*, \omega_t) = v^*(z_t, \omega_t)K_t^*$$

Y desde que $K_{t+1}^*/K_t^* = (1-\delta)e^{-\Delta z_{t+1}}$, se tendrá que [4.7] y [4.8] podrán reexpresarse como:

$$v^*(z_t, \omega_t) = \max\{v(z_t);\ v(c) - \omega_t \xi e^{\beta z_t}\} \qquad [4.7.1]$$

$$v(z_t) = \pi(z_t) + \psi E_t\left[V^*(z_{t+1}, K_{t+1}^*, \omega_{t+1})e^{-\Delta z_{t+1}}\right] \quad con \quad \psi = \frac{1-\delta}{1+r} \qquad [4.8.1]$$

Se sigue directamente de la maximización del valor de una firma que decide ajustar hasta c, que el máximo de $v(z_t)$ y $v^*(z_t, \omega_t)$ es obtenido en $z_t = c$, y este punto objetivo es independiente del desequilibrio inicial[34]. Igualmente, esta decisión puede ser caracterizada por la función de política $\Omega(z_t)$, la cual se define como la más grande proporción de los

---

[33] c se define como: $c = \ln(K^c/K^*)$. Por lo que K^c es el nivel de capital objetivo de la firma. Vale aclarar que c no necesariamente debe ser igual a 1, que sería el punto en que $K^c = K^*$.

[34] Las condiciones optimalidad y unicidad del punto c, que son bastante complejas de obtener, se pueden consultar en el apéndice A de Caballero y Engel (1999). Igualmente, muestran que $v'(c) = 0$.

costos de ajuste para la cual la firma encuentra rentable variar su stock de capital, dado un desequilibrio en el capital de z_t. Esta función puede ser encontrada usando [4.7.1], igualando ambos elemento del lado derecho de la ecuación, lo que es equivalente a decir que es indiferente entre ajustar su stock de capital y no hacerlo, lo que se expresa como:

$$v(z_t) = v(c) - \widetilde{\omega}_t \xi e^{\beta z_t}$$

Donde $\widetilde{\omega}_t$ es la proporción de los costos de ajuste en la que la firma es indiferente respecto a hacer el ajuste. Por tanto, despejando a $\widetilde{\omega}_t$ de esta ecuación, se tiene que:

$$\widetilde{\omega}_t = \xi^{-1} e^{-\beta z_t}[v(c) - v(z_t)] = \Omega(z_t) \qquad [4.9]$$

De esta forma se tiene que $\Omega(c) = 0$. Derivando [4.9] respecto a z_t y haciendo a $z_t = c$, y dado que $v'(c) = 0$[35] se produce la condición adicional llamada "*smooth pasting*", la cual expresa que cuando se da lugar al ajuste en el capital, este debe cesar en el momento en que el valor de una unidad extra de capital iguala el costo de dicha acción (Caballero, 1999).

Igualmente, de [4.9] se tiene que a medida que $z_t \rightarrow c$ el costo de ajuste se hace pequeño, por lo que $\Omega(z_t) \rightarrow 0$, y también se hace claro que $\Omega(z_t)$ incrementará a medida que $|z_t|$ aumenta. Igualmente, al tomar la función inversa de $\Omega(z_t)$ se encuentran los valores por encima y por debajo de c, que se denotaran por $L(\omega_t)$ y $U(\omega_t)$ respectivamente. Estos dos valores representan la máxima escasez y el máximo exceso de capital que la firma tolerara sin ajustar para una dada realización de ω. Por tanto, para los valores $z_t \in (L(\omega_t), U(\omega_t))$ la firma no incurrirá en ajustes a su stock de capital, siendo esta la región de inacción[36].

Finalmente, la forma de $\Omega(z_t)$ y los valores $L(\omega_t)$ y $U(\omega_t)$ estarán determinados por la función de distribución $G(\omega_t)$, es decir, funciones de distribución distintas llevaran a diferentes formas de la función de política y distintas regiones de inacción.

"Hazard Adjustment Function" e Inversión Esperada de la Firma.

Es claro entonces que la firma solo ajustara su nivel de capital cuando $z_t \notin \left(L(\omega_t), U(\omega_t)\right)$, es decir cuando z este fuera del rango de inacción, y el ajuste correspondiente se da hasta que el desequilibrio en el capital alcance el nivel objetivo, que es c. De esta forma, más que estar condicionados a lo que ocurra con ω_t, lo que es relevante preguntarse es cuál será la probabilidad que una firma con un desequilibrio en el capital igual a z_t ajustara su stock de

[35] Ver el pie de página 33.

[36] Dados los valores de $L(\omega_t)$ y $U(\omega_t)$, para un dado valor de ω_t, se describe una política de ajuste convencional dada por (L, c, U) de los modelos (S, s); en donde L representa el valor mas bajo que puede alcanzar la variable antes de ajustarse, U es el valor más alto y c representa el valor central al cual ajustar. Ver Caplin y Leahy (2010).

capital. Para darle respuesta a esto, debemos usar la información que da la distribución de ω_t. De esta forma, sea $x_t = z_t - c$ el desbalance de la firma respecto a su nivel objetivo. Así, una firma solo ajustara su nivel de capital siempre que los costos de ajuste actuales sean menores que aquellos que hacen rentable a la firma ajustarlo, es decir cuando $\omega_t < \Omega(x_t + c)$, lo cual implica que la probabilidad de una firma ajustar su stock de capital, dado el valor de x_t, viene dado por:

$$\Lambda(x_t) = G\big(\Omega(x_t + c)\big) = \frac{1}{\phi\Gamma(p)} \int_0^{\Omega(x_t+c)} \omega_t^{p-1} e^{-\frac{\omega_t}{\phi}}\, d\omega_t \qquad [4.10]$$

Donde $\Lambda(x_t)$ es una función de distribución Gamma que es llamada *Hazard Adjustment Function*, y expresa la probabilidad que una firma ajuste su stock de capital dado un nivel desequilibrio. Ahora bien, dado un desequilibrio en el capital igual a x_t, si la firma decidiera invertir lo haría en la cuantía[37]:

$$I_t(x_t) = (e^{-x_t} - 1)K_t(x_t)$$

De esta forma, la inversión esperada de las firmas con un desequilibrio x inmediatamente antes de ajustar su nivel de capital en el periodo t estará dado por[38]:

$$E_\omega[I_t(x_t)|x_t] = \Lambda(x_t)(e^{-x_t} - 1)K_t(x_t) \qquad [4.11]$$

La cual, en general, es una función no lineal de x_t. Es importante resaltar que la inversión esperada muestra que el incentivo a invertir aumentara más que proporcionalmente con el desequilibrio en capital que posee la firma.

Agregación en la Inversión.

Dado todo lo anterior, sea $K_t^A, I_t^A, K_t(x)$ y $I_t(x)$ el capital y la inversión agregada, el stock de capital y la inversión que tendrían las firmas con un nivel de desequilibrio x_t antes del ajuste del periodo t, respectivamente. Como los costos de ajuste son independientes e idénticamente distribuidos a través de las firmas y asumiendo la ley de los grandes numeros, se tiene desde [4.11] que:

$$I_t(x_t) = \Lambda(x_t)(e^{-x_t} - 1)\overline{K_t}(x_t) \qquad [4.12]$$

---

[37] Este resultado se desprende de lo siguiente:

$$I_t = K_t^c - K_t = (e^c - e^{z_t})K_t^* = (e^{z_t - x_t} - e^{z_t})K_t^* = (e^{-x_t} - 1)e^{z_t}K_t^* = (e^{-x_t} - 1)K_t$$

[38] La razón del resultado de la ecuación es el siguiente: se sabe que la firma ajustara su stock de capital siempre que $\omega < \Omega(x + c)$, mientras que en caso contrario el ajuste será nulo, es decir la inversión será nula. Por tanto, la inversión esperada será igual a:

$$E_\omega[I_t(x_t)|x_t] = I_t * P[\,\omega_t < \Omega(x_t + c)] + 0 * P[\,\omega_t \geq \Omega(x_t + c)]$$

De esta forma, por la ecuación [4.10] se sabe que $P[\,\omega_t < \Omega(x_t + c)] = G\big(\Omega(x_t + c)\big) = \Lambda(x_t)$, por lo que se obtiene el resultado.

En donde $\overline{K_t}(x_t)$ denota el stock de capital promedio de las firmas con un nivel de desequilibrio x_t. Ahora bien, sea $\tilde{f}(x_t)$ la función de densidad del conjunto de firmas con desequilibrio x_t antes de llevarse a cabo el ajuste, se llega a la expresión de la inversión agregada:

$$I_t^A = \int \Lambda(x_t)(e^{-x_t} - 1)\overline{K_t}(x_t)\tilde{f}(x_t)dx_t \qquad [4.13]$$

De esta forma, al dividir [4.13] por K_t^A y sumar y restar la expresión $\int \Lambda(x_t)(e^{-x_t} - 1)\tilde{f}(x_t)dx_t$ y reorganizando términos, se obtiene:

$$\frac{I_t^A}{K_t^A} = \int \Lambda(x_t)(e^{-x_t} - 1)\left[\frac{\overline{K_t}(x_t)}{K_t^A} - 1\right]\tilde{f}(x_t)dx_t + \int \Lambda(x_t)(e^{-x_t} - 1)\tilde{f}(x_t)dx_t \qquad [4.14]$$

El primer término del lado derecho de la última igualdad podría anularse siempre que $\overline{K_t}(x_t) - K_t^A$ no este correlacionado con $\Lambda(x_t)(e^{-x_t} - 1)$. Si se asume esto[39], entonces se tendría que la tasa de inversión estaría dada por:

$$\frac{I_t^A}{K_t^A} = \int \Lambda(x_t)(e^{-x_t} - 1)\tilde{f}(x_t)dx_t \qquad [4.14.1]$$

En donde, debido a que $\Lambda(x_t)(e^{-x_t} - 1)$ es no lineal en x por lo general, la tasa de inversión agregada no solo depende del primer momento, sino también de los momentos de más alto orden de $\tilde{f}(x_t)$.

Para observar algunas cuestiones y a modo de ejemplo, se llevara a cabo un ejercicio. Primero, de acuerdo a [4.14.1], suponga que la "*Hazard function*" no depende del nivel de desequilibrio, y por tanto es constante. Si se asume además que gran parte de la masa de la distribución $\tilde{f}$ está concentrada en $x_t = 0$ y se aproxima con la expansión de Taylor $(e^{-x_t} - 1) \cong -x_t$ cuando x esta alrededor del cero; entonces se encontraría que:

$$\frac{I_t^A}{K_t^A} \cong -\Lambda_0\overline{x_t} \qquad [4.15]$$

En donde $\bar{x}$ es el nivel promedio de desequilibrio antes del ajuste. De esta manera, la expresión [4.15] es conocida como Modelo Parcial de Ajuste, el cual concuerda con el modelo con costos de ajuste cuadráticos que genera una ecuación de la tasa de inversión lineal. Las características de esta función muestra que la composición sectorial no importa[40], siendo este el único caso en el que esto ocurre (Caballero y Engel, 1999), dando cuenta que

[39] Cabellero, Engel y Haltiwanger (1995), así como Caballero y Engel (1999) muestran con simulaciones y estimaciones que el uso de [4.14], y no su aproximación [4.14.1] tiene un impacto reducido a nivel empírico, ajuste sobre los datos y costo para la estimación, además que implica mayores complicaciones a la hora de manipular los datos; por eso, argumentan, es razonable y valido el supuesto.

[40] lo cual es semejante al supuesto de agente representativo

mucha de la literatura generada en los años 70 y principio de los 80 es un caso particular de esta propuesta. Igualmente, usando [4.15] es posible encontrar una especificación más clásica. Para esto, se tiene que observar que la tasa de crecimiento en el stock de capital de la firma está dado por $\Delta \ln k_t^A \cong (I_{t-1}^A / K_{t-1}^A) - \delta$, en donde $k_t = \ln K_t$; mientras se define que el stock de capital sin fricciones cambia de acuerdo con los cambios aleatorios agregados de la economía, que al usar [4.6] implica que $\Delta k_t^* = v_t$. De esta forma, se tiene que:

$$\bar{x}_t = k_t - k_t^* = \Delta k_t - \Delta k_t^* + (k_{t-1} - k_{t-1}^*) = \Delta k_t - \Delta k_t^* + \bar{x}_{t-1}$$

Multiplicando por Λ_0 ambos lados de la ecuación anterior y usando [4.15] se tiene que:

$$\frac{I_t^A}{K_t^A} \cong \Lambda_0(\delta + v_t) + (1 - \Lambda_0)\frac{I_{t-1}^A}{K_{t-1}^A} \qquad [4.16]$$

Equilibrio Sectorial y Dinámica del Conjunto de Empresas.

Los cambios que afectan a una firma son de múltiple índole, y estos pueden ser individuales a cada una de ellas o que afecten a todo el sector considerado; por tanto hay que hacer una distinción entre estos. Así, los choques sobre los salarios, la productividad y la demanda, representados por el parámetro θ, cambian la dinámica del stock de capital sin fricciones, y usando [4.6] se tiene:

$$K_t^* = K_{t-1}^* e^{v_t + \epsilon_t}$$

En donde ϵ_t representa los choques idiosincráticos que enfrenta la firma de forma individual. Así, si no hubiese ajustes, entonces se tendría que el desbalance de la firma evoluciona de la siguiente forma:

$$\Delta x_t = -(\delta + v_t + \epsilon_t)$$

De esta forma, los cambios en la distribución del conjunto de firmas dentro de un sector vienen dados por los ajustes que hagan las firmas, la depreciación, los choques agregados y los choques idiosincráticos. No obstante, se hace necesario describir estos cambios de forma correcta y en los momentos en que ocurren para entender la dinámica sectorial, lo cual se verá a continuación:

1. La densidad del conjunto de firmas al final del periodo $t - 1$ estará dada por $f(x_t, t-1)$.
2. Durante el periodo t se da la depreciación y los choques agregados, resultando $\tilde{f}(x_t) = f(x_t + \delta + v_t, t - 1)$.

3. El periodo t finaliza cuando se dan los choques idiosincráticos, con lo cual se tiene que la distribución al final del periodo t estará dada por:

$$f(x_{t+1},t)=\left[\iint \Lambda(y_t)\tilde{f}(y_t)dy_t\right]g(-\epsilon_t)+\int[1-\Lambda(x_t+\epsilon_t)]\tilde{f}(x_t+\epsilon_t)g(-\epsilon_t)d\epsilon_t$$

Que usando la ecuación del numeral 2 sería igual a:

$$\begin{aligned} f(x_{t+1},t)=&\left[\iint \Lambda(y_t)f(y_t+\delta+v_t,t-1)dy_t\right]g(-\epsilon_t)\\ &+\int[1-\Lambda(x_t+\epsilon_t)]f(x_t+\epsilon_t+\delta+v_t,t-1)g(-\epsilon_t)d\epsilon_t \end{aligned} \quad [4.17]$$

En donde g es la densidad de probabilidad para los choques idiosincráticos.

4. Finalmente, el ciclo se repite para calcular $f\left(x_{t+j},t+j-1\right)$ para $j\geq 2$.

De esta forma, al usar la ecuación para $\tilde{f}(x_t)$ y [4.14.1], se obtiene la ecuación final de la inversión agregada del sector:

$$\frac{I_t^A}{K_t^A}=\int \Lambda(x_t)(e^{-x_t}-1)f(x_t+\delta+v_t,t-1)dx_t \quad [4.18]$$

Por tanto, combinando [4.17] y [4.18] se puede determinar la secuencia de la inversión agregada determinada por una distribución inicial del conjunto de firmas del sector, dado por $f(x_1,0)$ y una sucesión de los choques agregados $\{v_t\}$.

El Efecto de la Demanda de Inversión Acumulada.

Este efecto busca mostrar que ante choques agregados de productividad sucesivos, la distribución en el conjunto de firmas se ira desplazando a la parte en donde es más probable que se dé el ajuste de capital, generando cambios en el capital en el periodo actual por medio de las firmas que ajustan y además de alterar la probabilidad de ajustar el capital en el futuro por parte de las firmas que no lo hicieron en el presente, haciendo que en un momento las firmas sincronicen la acción de invertir, lo que generaría una amplificación del impacto de los choques agregados sobre inversión. En la literatura suele denominarse como *pent – up effect*, y de acuerdo a Caballero (1999) es la razón por la cual el modelo presentado aquí es superior a los modelos lineales de inversión, mostrando cómo se puede conciliar cambios suaves en la inversión agregada con ajustes irregulares a nivel microeconómico.

Por ejemplo, una sucesión de cambios en la productividad agregada positivos llevara a que muchas firmas en el presente ajusten su nivel capital, incrementando la demanda de inversión en el periodo actual. Pero esto a su vez, dado que otras firmas no harán ajustes, llevara a que en el futuro incremente el número de estas que desean cambiar su stock de capital, puesto que su probabilidad de ajuste aumentara; llevando a su vez a que el incremento en la demanda de inversión se vea más fácilmente impulsado por adicionales choques de productividad positivos. En el caso de un choque negativo de productividad, se tiene que los efectos son contrarios a los citados previamente.

De esta forma, ante choques agregados hay un cambio conjunto de muchas firmas simultáneamente, observándose un alto grado de sincronización que llevaría a grandes cambios en la inversión, dados los costes de ajuste no convexos, por lo que el efecto sobre la inversión agregada se vería amplificado. Asimismo, se observa que los choques generados en el pasado juegan un papel muy importante en el comportamiento a través del tiempo de la inversión agregada, generando una dinámica dependiente de la historia de los choques de productividad. Así, el reconocimiento del efecto *pent – up* es otro mecanismo el cual señala que la dinámica de la inversión dista de ser lineal, mostrando que los efectos de los cambios en la productividad o en políticas no pueden ser capturados por modelos que no consideren la heterogeneidad en las firmas.

Evidencia Empírica.

En relación al modelo presentado previamente, se mostrara evidencia empírica relevante respecto al mismo. Algo importante a aclarar en este punto es que este modelo es de equilibrio parcial, por lo que en principio no se consideran ajustes de precios como en los modelos de equilibrio general. Así, Caballero y Engel (1999) usan datos agregados a nivel sectorial para los dos primeros dígitos del CUI en equipos y estructuras para la economía de Estados Unidos durante el periodo 1947 – 1992. Estiman la función distribución de costos de ajuste $G(\omega)$ igual para todos los sectores de la economía, y toman otros parámetros de la literatura, llamando a este modelo estructural. Igualmente estiman una *hazard función ad hoc* que estaría dada por $\Lambda(x) = 1 - \exp(\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2)$, llamada como modelo semiestructural. Ellos encuentran evidencia en ambos modelos que sostiene la existencia de irreversibilidad y el efecto de ajuste, al igual que demuestran que la no linealidad que hay a nivel microeconómico importa a nivel agregado. Asimismo, muestran que la *hazard function* es creciente con el desbalance en el capital; es decir que la probabilidad de ajustar el capital por parte de la firma crece más que proporcionalmente con x. Igualmente, estos modelos son comparados con un modelo $AR(1)$ (semejante a la ecuación [4.16]) y un $AR(2)$, los cuales están dados por:

$$\frac{I_t^A}{K_t^A} = a_i + \rho_i \frac{I_{t-1}^A}{K_{t-1}^A} + v_{it}$$

$$\frac{I_t^A}{K_t^A} = a_i + \rho_{1i}\frac{I_{t-1}^A}{K_{t-1}^A} + \rho_{2i}\frac{I_{t-2}^A}{K_{t-2}^A} + v_{it}$$

Los autores rechazan que estos dos modelos sean equivalentes al modelo estructural no lineal, además de encontrar que para datos fuera de la muestra el modelo estructural se comporta mejor, puesto que sigue la trayectoria de la inversión agregada cuando ocurren grandes cambios en la inversión, lo cual es consecuencia del efecto *pent – up.*

Asimismo, Caballero, Engel y Haltiwanger (1995) usan datos a nivel de firma para observar el impacto que los costos de ajuste tendrían en la inversión agregada, miden el desbalance de capital en cada una de ellas y luego encuentran la función de distribución del conjunto de firmas para todos los periodos y calculan la tasa de inversión agregada usando una aproximación de [4.14.1]. De esta forma, ellos encuentran que hay mayor probabilidad de ajustar en capital en la firma entre mayor sea el desbalance, algo semejante a lo encontrado por Caballero y Engel (1999). Igualmente, Doyle y Whited (2001) concluyen que la agregación correcta a través de las firmas heterogéneas, como la propuesta aquí, es la que lleva a suavizar las fluctuaciones en la inversión agregada.

Por otro lado, Cooper y Haltiwanger (2006) muestran que para los datos agregados considerados por ellos, en donde toman un panel de datos balanceado[41] de firmas, demuestran que el modelo que mejor se ajusta a nivel agregado es el de costos de ajuste cuadráticos, haciendo en principio innecesario considerar formas funcionales para el ajuste del capital no lineales[42]. No obstante el modelo no considera la entrada y salida de firmas debido a la estructura de panel balanceado.

Igualmente, Thomas (2002), Veracierto (2002) y Khan y Thomas (2008) introducen un modelo de equilibrio general dinámico estocástico (DSGE), incluyendo el efecto que tienen los costos de ajuste no convexos, concluyendo que los cambios irregulares en la inversión a nivel micro, generados por la irreversibilidad y la existencia de costos de ajuste no convexos, no tienen un gran impacto sobre el comportamiento de la inversión a nivel agregado, y el ciclo económico en general, cuando hay cambios estocásticos en la actividad agregada, eliminando así el efecto *pent up* sobre la demanda de inversión. La razón de esto es que al considerar ajuste en los precios de los factores, un incremento en la demanda de inversión

[41] Un panel de datos balanceado es aquel en el que el conjunto de individuos analizados es el mismo a través del tiempo de análisis, en este caso se refiere a que durante el trabajo se utilizó el mismo conjunto de firmas en cada momento del tiempo.

[42] Específicamente hablando, estos autores encuentran que a nivel agregado el coeficiente de la regresión [2.12] fuese igual a 0.195, lo suficientemente bajo para no hacer a los costos de ajuste muy elevados y desincentivar la inversión, produciendo un $R^2 = 0.859$, lo que muestra el poder explicativo de esta estimación.

por parte de las firmas haría que la tasa de interés suba, a su vez los consumidores deseosos de suavizar su consumo estarán reacios a permitir una gran variación en la demanda de inversión; llevando a que muchas firmas vean costoso incrementar su capital y se vean desmotivadas, eliminando en gran medida el efecto inicial, eliminando así el efecto que encuentran los modelos de equilibrio parcial. No obstante, cuando los precios no varían, estos trabajos muestran los mismos efectos que Caballero y Engel (1999)

Finalmente, Bachmann, Caballero y Engel (2010) usando un DSGE muestran que los efectos de tipo parcial, como los propuestos por Caballero y Engel (1999), y de equilibrio general, como los postulados por Khan y Thomas (2008), son necesarios para explicar la dinámica de la inversión a nivel agregado y su variabilidad en el ciclo económico, por lo que el efecto *pent up* no sería anulado totalmente por cambios en precios. El punto de partida de su calibración es que la inversión a nivel sectorial estaría menos sujeta a los ajustes que impone las fuerzas del equilibrio general; y por tanto la suavización que genera el equilibrio parcial (es decir, el efecto de los costos de ajuste supera el impacto en la suavización que genera el movimiento en los precios) toman relevancia. Igualmente, en la función de costos de ajuste agregan el nivel de mantenimiento que enfrentan las firmas, es decir el costo en que incurren las empresas para evitar que la depreciación de los bienes de capital tenga efecto y no sea necesaria incurrir en gastos de inversión. Así, la dinámica del modelo muestra tener un comportamiento más cercano a los datos reales, al tiempo que es más precisa que los resultados arrojados por Khan y Thomas (2008). La razón de esto es que un modelo que solo considere el ajuste de equilibrio general lleva a que los ajustes de la inversión en las diferentes etapas del ciclo económico sea semejantes, mientras que al considerar costos de ajuste, la dinámica de la inversión se acelera más en las recesiones que en los auges que presenta el ciclo económico.

Comentarios.

La propuesta desarrollara por Caballero y Engel (1999) para abordar los efectos que trae a la demanda de inversión agregada el comportamiento de las firmas en su conjunto, no solo tuvo impacto metodológico en la inversión, si no que llevo a considerar dicha metodología para otros temas de interés en la macroeconomía. Igualmente, fue un paso importante en la búsqueda de integrar ajustes irregulares en el capital, costos de ajuste asimétricos, no linealidades en las variaciones del capital y discontinuidad en las funciones a nivel microeconómico con el comportamiento suave de la serie agregada de inversión. Igualmente, esta sección muestra lo complejo que puede ser un proceso de agregación y los problemas que se pueden enfrentar al utilizar modelos lineales que no permitan dar cuenta de los ajustes que habría en las diferentes firmas ante cambios en productividad, ajustes en el salario o medidas de política que llevaran a cambiar la distribución de las firmas en el corto plazo y generen rupturas importantes en la dinámica que seguiría la inversión agregada en el largo plazo.

Los resultados empíricos de este método de agregación se ajustan bastante bien a lo que presentan los datos reales, con lo cual se observa una mejora en las estimaciones efectuadas en los años 70, en donde el agente representativo era el paradigma dominante. Sin embargo, algunos autores; como Thomas (2002), Veracierto (2002) y Khan y Thomas (2008); muestran evidencia bajo modelos de equilibrio general en donde el agente representativo no está muy alejado de ajustarse a los datos reales cuando se consideran ajustes en los precios de los factores vía oferta y demanda, algo que ignoraron los modelos de la década de los 70. La cuestión que surge es la necesidad de unir estos elementos para poder explicar la dinámica de inversión agregada, es decir la estructura de costos de ajuste de las empresas a nivel microeconómico y los ajustes vía precios tienen impactos importantes en las explicaciones del comportamiento de la inversión agregada a nivel teórico y empírico, por lo que ambos son elementos complementarios, y no sustitutivos.

5. Un Problema de Agencia en la Inversión.

La teoría de la inversión ortodoxa ha enfatizado en la importancia de los costos de ajuste en las decisiones de variar el stock de capital, pero ha dejado de lado muchos otros temas sin resolver. Uno de estos es el papel que juegan los contratos entre los inversionistas y el director de una firma, lo que implica un problema de agencia que requiere hablar de la generación de incentivos compatibles entre las partes involucradas. La razón de esto es que los directores de las firmas suelen tener motivaciones diferentes a las que poseen los inversionistas. Akerlof (2007) explica que los directores de las firmas tienden a desviarse del objetivo de maximizar el valor de estas, llevando a que sus decisiones de inversión tiendan a incrementar su poder de negociación o buscar cumplir sus ideales o normas preestablecidas. Estas cuestiones llevan a que las inversiones sean ineficientes y el desperdicio de recursos podría ser significativo, con pérdidas importantes en el corto y largo plazo. Por tanto, los inversionistas deben encontrar la manera de hacer compatibles sus objetivos compatibles con los de los directores de las firmas y esto, innegablemente, tendrá efectos sobre la decisión de inversión, al tiempo que altera la distribución del valor de la firma.

Ahora bien, desde la década de los 70 se ha encontrado en estimaciones empíricas que la cantidad de fondos internos que manejan las firmas tiene un impacto positivo en la decisión de inversión. En este sentido, Fazzari, Hubbard y Peterson (1988) señalan que no hay perfecta sustituibilidad entre las reservas de dinero que posean las firmas y los fondos externos a los que estas pueden acceder para financiar sus proyectos de inversión, especialmente en el corto plazo. Igualmente, la necesidad de tener un fondo de estabilización es importante para las firmas enfrentar choques idiosincráticos, lo cual lleva a retener fondos de manera preventiva para solventarlos (Hubbard, 1998). Estas cuestiones rompen con el teorema de Modigliani – Miller (1958), pues la influencia de cómo una firma se financie y la posibilidad de quedarse sin fondos internos deja de ser irrelevante, y por tanto en los siguientes años se llevaron muchas investigaciones que profundizaban en estos aspectos[43].

Dado el problema de compatibilidad de incentivos entre directores e inversionistas y las necesidades de fondos internos para financiar sus inversiones o enfrentar los choques idiosincráticos, se hace necesario integrarlos a la teoría de la inversión, algo en los que se trabajara en esta sección.

[43] En Hubbard (1998) se encuentra una excelente síntesis sobre esta cuestión

Modelo.

El modelo que se presentara es el de DeMarzo, Fishman, He y Wang (2012), quienes integran la dinámica de la inversión bajo un contrato dinámico, expandiendo fácilmente su modelo al caso en el que se consideran fondos de estabilización para enfrentar los choques que pueda sufrir la firma, generando una restricción financiera que es endógena al modelo.

Tecnología de Producción de las Firmas.

Se asumirá una firma que busca tomar decisiones de inversión con el objetivo de acumular su stock de capital, obteniendo una trayectoria óptima que maximice el valor de la firma. Así, el nivel de capital evoluciona de acuerdo a [3.2] y se asumirá una función de costos de ajuste homogénea de grado 1 y sin costos fijos. Por tanto, los costos totales sobre el capital que enfrenta la firma estarán dados por:

$$I_t + \frac{\theta}{2}\frac{I_t^2}{K_t} = K_t c(i_t) \quad con \quad c(i_t) = i_t + \frac{\theta}{2} i_t^2 \qquad [5.1]$$

Ahora bien, se asume que el incremento en los ingresos reales de la firma a través del tiempo será proporcional al stock de capital, y esto estará dado por $K_t dA_t$, en donde A_t es un proceso de productividad acumulado y será explicado en la siguiente sección. De esta forma, el proceso del flujo de caja en cada periodo estará dado por dY_t:

$$dY_t = K_t\big(dA_t - c(i_t)\big)dt \qquad [5.2]$$

Igualmente, se asume que hay asimetrías de información entre principal y agente, los cuales estarán representados por los inversionistas y director de la empresa respectivamente. Así, si el contrato que hay entre ambos se terminara, los inversionistas podrán recuperar l por unidad de capital que posea la firma en ese momento, donde es constante y $l \geq 0$. La terminación del contrato puede interpretarse como una situación ineficiente que genera pérdidas para los agentes involucrados, con lo que se puede asumir que esta situación está asociada a la liquidación de la firma[44].

El Problema de Agencia.

Cuando hay divergencia entre los intereses de propietarios y quien controla la firma surge un problema de agencia, por lo que se deben desarrollar los mecanismos adecuados para resolverlos. De esta forma, los inversionistas contratan un director para manejar la firma,

[44] Una forma en que la firma podría liquidarse es a través de la desinversión, por lo que parece natural especificar que $l \geq c'(-\infty)$

en donde se asume que el proceso de productividad es influenciado por la acción no observable del agente. De esta forma, sea la acción director dada por a_t, la cual toma valores en el intervalo [0, 1], en donde $a_t = 0$ es nulo esfuerzo y $a_t = 1$ es total esfuerzo. Igualmente, la producción por unidad de capital sigue el siguiente proceso:

$$dA_t = a_t \mu dt + \sigma dz_t \qquad [5.3]$$

En donde z_t es un proceso de Wiener estándar sobre un espacio de probabilidad completo y una filtración (ver pie de página 17). De la ecuación [5.3] se observa que el director controla la producción promedio que tendrá la firma, no obstante esta puede incurrir en pérdidas operacionales aun cuando el agente se esté esforzando por completo, es decir cuando $a_t = 1$ y se tiene que z_t tuvo un valor muy negativo.

Ahora bien, cuando el director toma una acción a_t, el disfrutara de un beneficio privado de $\lambda(1 - a_t)\mu dt$ por unidad de capital, en donde $0 \leq \lambda \leq 1$, que se puede interpretar como la fracción del flujo de caja que el director desvía para su beneficio privado, con λ igual al consumo neto por dólar desviado por parte del director y representaría la severidad del problema de agencia, y como se verá más adelante captura el nivel mínimo del incentivo requerido para motivar al director a esforzarse. Finalmente, se asume que el agente es neutral al riesgo con una tasa de descuento igual a $\gamma > 0$. En cuanto a los inversores, se asume que tienen una cantidad de recursos ilimitados y son neutrales al riesgo, con una tasa de descuento $r > 0$, en donde se supone que $\gamma > r$.

Formulación del Contrato Óptimo.

Dadas las variables que están involucradas en el problema se tiene que K_t y Y_t son variables observables y puede establecerse contratos sobre ellas, por lo que I_t y A_t también pueden ser sujetas a contratos. Para maximizar el valor de la firma, los inversores ofrecen un contrato en el que especifica el valor de la inversión I_t, la compensación acumulada del director que se denotara U_t, que es un término no decreciente, y el periodo de terminación τ, todo ello depende de la historia del desempeño del agente, el cual está dado por el proceso de productividad A_t. Así, sea $\Phi = (I_t, U_t, \tau)$ la representación del contrato; y dado este el agente elige un proceso para sus acciones determinado por el conjunto $\{a_t \in [0, 1]: 0 \leq t < \tau\}$ que resuelve:

$$W(\Phi) = \max_{\{a_t \in [0,1]: 0 \leq t < \tau\}} E\left[\int_0^\tau e^{-\gamma t}(dU_t + \lambda(1 - a_t)\mu K_t dt)\right] \qquad [5.4]$$

Ahora bien, si se centra la atención en el contrato óptimo para los inversionistas, es decir $a_t = 1$ para todo t, se dice que Φ es de incentivos compatibles. Asumiendo esto en el momento en que el contrato inicia, la firma tendrá un nivel de capital igual a K_0, dado un pago de W_0 para el director, con lo cual, la función valor de los inversionistas será:

$$P(K_0, W_0) = \max_{\Phi} E\left[\int_0^{\tau} e^{rt} dY_t + e^{-r\tau} l K_\tau - \int_0^{\tau} e^{-rt} dU_t\right] \quad [5.5]$$

$$sa\ \Phi\ es\ el\ incentivo\ compantible\ y\ W(\Phi) = W_0$$

Así, el pago esperado del director W_0 estará determinado por el poder de negociación que posean los inversores y el director cuando el contrato es iniciado. Por ejemplo, si los inversionistas tuviesen todo el poder de negociación, entonces $W_0 = \underset{w \geq 0}{\operatorname{argmax}} P(K_0, W)$; mientras que si el director tuviese todo el poder para negociar, el contrato se tendría que el pago sería igual a $W_0 = \max\{W: P(K_0, W) \geq 0\}$.

Solución Neoclásica.

Esta será la referencia para determinar cuál sería el nivel de inversión máximo en un mundo en donde no hay asimetrías en incentivos y desaparece el problema de agencia, con lo cual en [5.4] se tendría que $\lambda = 0$. Igualmente, se asume que $\sigma = 0$ en [5.3] con el objetivo de asumir que no hay ruido que oculte las acciones del director, y se supone además que este último se esfuerza siempre, por lo que $a_t = 1$, al tiempo que se asume $\tau \to \infty$. Por tanto, dado que no hay incertidumbre que alteres la dinámica de la firma y la homogeneidad lineal de la funciones, se puede asumir que la tasa de inversión será constante, es decir i no variara con el tiempo. Así, el valor presente del flujo de caja de la firma estará dado por:

$$\max_i V(K_t) = \int_0^{\infty} e^{-rt} dY_t = \int_0^{\infty} e^{-rt} K_t (dA_t - c(i)dt) = \int_0^{\infty} e^{-rt} K_t \big(\mu - c(i_t)\big) dt$$

$$sa\ \dot{K} = K_t(i - \delta)$$

Dado que la producción y la función de costos de ajuste son homogéneas de grado 1, se puede calcular el valor presente de flujo de beneficios futuros de la firma por unidad de capital, por lo que se resuelve [3.2] para obtener:

$$K_s = K_t e^{(i-\delta)(s-t)} \quad [5.6]$$

Reemplazando esta restricción en $V(K_t)$, se obtiene una función valor de la firma es igual a:

$$V(K_t) = K_t \left[\frac{\mu - c(i)}{r + \delta - i}\right] \rightarrow \frac{V(K_t)}{K_t} = q^* = \frac{\mu - c(i)}{r + \delta - i} \quad [5.7]$$

Donde q^* es el valor promedio de cada unidad de capital. Así, para determinar el nivel de inversión que maximice la función valor, se deriva [5.7] respecto i y se iguala a cero, obteniendo:

$$c'(i^*) = \frac{\mu - c(i^*)}{r + \delta - i^*} = q^* \qquad [5.8]$$

Con lo cual se tiene que la inversión optima, dada por i^*, es una función creciente de q^*, al tiempo que, de acuerdo a la sección 2, se cumple el resultado de Hayashi (1982) en donde la q promedio es igual a la q marginal. Igualmente, de las características de los costos de ajuste se tiene que $q^* > l$. Asimismo, dado que el director es impaciente ($\gamma > r$), es óptimo para la los inversionistas pagarle al agente de inmediato el monto de su compensación, que será igual a W_0. De esta forma, dados los supuestos y usando [5.7] en [5.5] se llega a:

$$P^*(K_0, W_0) = q_0^* K_0 - W_0$$

Ahora bien, definiendo $w = W/K$, se tiene que lo que percibe el inversionista por unidad de capital está dado por:

$$P^*(K_0, W_0) = p^*(w_0)K_0 = [q_0^* - w_0]K_0 \ \rightarrow \ q_0^* = p(w_0) + w_0 \qquad [5.9]^{45}$$

La cual es una expresión que no depende de la historia de la firma o las volatilidades del flujo de caja. Así, [5.9] es la mejor opción para invertir en la firma y en donde se maximiza la función valor del inversionista, y por tanto su asignación es eficiente, tal como se mostró en la sección 2. Sin embargo, el problema de agencia traerá alteraciones significativas, lo que se verá en las siguientes secciones.

Inversión y Contrato Óptimo con Problemas de Agencia.

Si asume que hay un problema de agencia, entonces $\lambda > 0$ y $\sigma > 0$. Así, dada la especificación del contrato Φ, la firma estará interesada en establecer un contrato que genere incentivos compatibles y maximice la función $P(K, W)$. Por tanto, asumiendo que Φ es de incentivos compatibles y la decisión de los agentes se ubica en el periodo t, el valor esperado descontado de las compensaciones futuras del agente está dada por:

$$W_t(\Phi) = E_t\left[\int_t^{\tau} e^{-\gamma(s-t)} dU_s\right] \qquad [5.10]$$

En donde se llamara a W_t la continuación de pagos del agente en el periodo t. Al tomar diferencial total en [5.10] aplicando la regla de Liebniz en el instante t, se llega a:

$$dW_t = \gamma E_t\left\{\left[\int_t^{\tau} e^{-\gamma(s-t)} dU_s\right] - e^{-\gamma(s-t)} dU_s|_{s=t}\right\} = E_t(\gamma W_t dt - dU_t)$$

Que equivale a:

---

[45] Dado que q^* no depende del contrato, se tiene que $\frac{dp(w_t)}{dw_t} = -1$.

$$E_t(dW_t + dU_t) = \gamma W_t dt \qquad [5.11.1]$$

Esta ecuación muestra que al darse un incremento en la compensación del director en t, este es compensado con un pago en efectivo de dU_t y también hay un cambio en el valor de sus pagos futuros esperados igual a dW_t; por lo que para compensar impaciencia del director el aumento en su compensación debe ser igual a $\gamma W_t dt$ en promedio. No obstante, para hacer la compensación del director compatible en incentivos debe hacerse a esta suficientemente sensible a los aumentos por encima de la media en la producción. De esta forma, se tiene que la compensación que recibe el director sigue el proceso:

$$dW_t + dU_t = \gamma W_t dt + \beta_t K_t[dA_t - \mu dt] = \gamma W_t dt + \beta_t K_t \sigma dz_t \qquad [5.11.2]$$

Donde β_t es el incentivo al pago del director cuando sobrepasa el nivel promedio de producción. Para entender cómo funciona esta última variable, suponga que el director se desvía y elige una acción $a_t < 1$, lo cual implica que incurriría en un costo instantáneo de reducción de su compensación de $\beta_t(1 - a_t)\mu K_t dt$, mientras que en beneficios privados obtendría $\lambda(1 - a_t)\mu K_t dt$. De esta forma, para hacer que el director elija $a_t = 1$ para todo t y tener incentivos compatibles, los inversionistas deben establecer que $\beta_t \geq \lambda$ para todo t.

Ahora bien, para mostrar de forma intuitiva que la compatibilidad de incentivos implica igualdad entre β_t y λ, hay que asumir que el director enfrenta un mínimo nivel de exposición que provea el incentivo para que este elija el incentivo adecuado, es decir $a_t = 1$. Así, La razón de la igualdad de estos términos surge porque es costoso para los inversionistas cargar de riesgo al director, como; por ejemplo, resulta cuando hay realizaciones sucesivas desafortunadas en dz_t que pueden reducir la continuación de pagos del agente a niveles por debajo de 0, y dado que $W_t \geq 0$ el contrato podría terminar; lo cual implica un costo para ellos. Por tanto, un contrato optimo establecerá una sensibilidad del agente en donde $\beta_t = \lambda$ para reducir la probabilidad de liquidación mientras mantiene la compatibilidad de incentivos[46].

Una vez establecidas las condiciones del contrato, se pasa a resolver el problema de los inversores y la decisión de inversión. Estos poseen dos variables estado, que son K_t y W_t; no obstante, bajo las características de funciones linealmente homogéneas en producción y costos de ajustes se puede escribir $P(K, W) = p(w_t)K_t$, semejante a [5.9], en donde se reduce el problema a tener una sola variable estado w_t. De esta forma, las características de la función valor de los inversionistas, asumiendo que el contrato del director llevaría a que $a_t = 1$ para todo t, estaría dada por:

1. $p(w_t) \leq p^*(w_t)$

[46] La demostración formal de este hecho se puede encontrar en DeMarzo y Sannikov (2006).

2. $p(0) = l$
3. $p(w_t)$ es cóncava[47], además $p'(w_t) \geq -1$, lo que implica que el valor de la firma por unidad de capital $p(w_t) + w_t$ es débilmente creciente en w_t.

La primera de estas propiedades muestra que es imposible obtener una función valor superior a la obtenida por la solución neoclásica para cualquier valor de w_t. La segunda muestra que si la continuación de pagos por unidad de capital llega a cero ($w_t = 0$), entonces el contrato se termina en ese instante y los inversionistas recibirán l por unidad de capital. La tercera propiedad se debe a que un aumento en la compensación del director siempre puede ser hecho con efectivo, esto implicara que el costo para los inversionistas de un incremento de w_t en 1 siempre será a lo sumo de 1, igualmente la concavidad muestra que cuando w_t es bajo, entonces $p(w_t)$ será estrictamente creciente en w_t, lo cual intuitivamente implica que un mayor w_t reduce la probabilidad de terminar el contrato. No obstante, cuando más crece w_t hay una disminución en las ganancias de los inversionistas, y por tanto $p(w_t)$ es decreciente.

Debido a la concavidad de $p(w_t)$, hay un beneficio por diferir la compensación del director cuando w_t es bajo, el contrato óptimo establecerá una compensación en efectivo por unidad de capital $du_t = dU_t / K_t = 0$, con la intención que w_t incremente lo más rápido posible. No obstante, debido a que el director es más impaciente que los inversionistas, dado que $\gamma > r$, hay un costo asociado a diferir la compensación. Este *trade-off* lleva a que debe haber un nivel $\overline{w}$ a partir del cual sea optimo compensar al director con efectivo. De esta forma, siempre que $w_t > \overline{w}$ se pagara la diferencia en efectivo, en otro caso se diferirá todo el pago del director, lo que en términos matemáticos sería igual a:

$$du_t = \max\{w_t - \overline{w}, 0\} \qquad [5.12]$$

Así, la función valor de los inversionistas cuando $w_t > \overline{w}$ será $p(w_t) = p(\overline{w}) - (w_t - \overline{w})$, lo que muestra que estos pagan la compensación en efectivo, en donde $\overline{w}$ es el nivel de continuación de pagos más bajo para el cual:

$$p'(\overline{w}) = -1 \qquad [5.13]$$

De esta forma, cuando $w_t \in [0, \overline{w}]$ la compensación del agente es diferida (es decir $dU_t = 0$), y por tanto, de [5.11.2] la evolución de w_t estar dada por:

$$\begin{gathered} \frac{dw_t}{w_t} = \frac{dW_t}{W_t} - \frac{dK_t}{K_t} \quad \rightarrow \quad dw_t = \frac{dW_t}{K_t} - w_t(i_t - \delta)dt \\ dw_t = \big(\gamma - (i_t - \delta)\big)w_t dt + \lambda\sigma dz_t \end{gathered} \qquad [5.14]$$

[47] La prueba de la concavidad de esta función se encuentra en DeMarzo *et al* (2012).

Por tanto, la ecuación [5.14] muestra la dinámica del contrato en el intervalo $[0, \overline{w}]$, en donde el pago prometido al director varia con su tasa de descuento menos crecimiento neto de la firma (dado por $i_t - \delta$), más los cambios en productividad que hacen variar en igual sentido a la continuación de pagos del director. Ahora bien, en el caso de los inversionistas, este lleva a cabo la decisión de acuerdo a la dinámica de la función valor, para ello, en primer lugar, usando [5.6] en [5.5] es posible hallar la ecuación de Bellman[48] en el intervalo $[0, \overline{w}]$; la cual estará dada por:

$$(r + \delta - i_t)p(w_t) = \mu - c(i_t) + \big(\gamma - (i_t - \delta)\big)w_t p'(w_t) + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}p''(w_t)$$

Reorganizando términos, se obtiene:

$$rp(w_t) = \mu - c(i_t) + (i_t - \delta)p(w_t) + \big(\gamma - (i_t - \delta)\big)w_t p'(w_t) + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}p''(w_t) \qquad [5.15]$$

En donde [5.15] muestra que el rendimiento esperado de los inversionistas está dado por el flujo de caja de la firma, el crecimiento de la misma por acumulación de capital y el aumento en los pagos de agente. Derivando respecto i_t e igualando a cero:

$$c'(i_t) = p(w_t) - w_t p'(w_t) \qquad [5.16]$$

En donde se observa que la tasa de inversión no será constante debido su dependencia con la evolución de w_t, que se modifica en el tiempo. Así, la decisión óptima de inversión está dada por la igualdad entre el costo marginal de ajuste y la diferencia entre la función valor del inversionista y la perdida marginal que obtiene el director en su continuación de pagos ante el crecimiento de la firma.

Finalmente, se requiere una condición adicional para obtener el valor optimo en $\overline{w}$, la cual estará dada por la *"super contact" condition*[49] y establece que:

$$p''(\overline{w}) = 0$$

De esta forma, desde [5.15] se tendría que en $\overline{w}$ el valor de la firma por unidad de capital estaría dado por:

$$p(\overline{w}) + \overline{w} = \frac{\mu - c\big(i_t(\overline{w})\big) - (\gamma - r)\overline{w}}{r + \delta - i_t(\overline{w})} \qquad [5.17]$$

[48] Esta ecuación se puede encontrar fácilmente siguiendo los mismos pasos que se realizaron en el apéndice de la sección 3.
[49] Esta condición se utiliza en casos en que valores más altos de una variable, a partir de cierto valor, se convierten en menos deseables, por lo que hay una barrera superior reflectora. Así, para obtener una condición de optimalidad en estos puntos extremos de esa variable se hace uso de la segunda derivada, puesto que la primera derivada no genera una regla de optimización. Para ver en más detalle esto véase Dumas (1991) y Dixit (1993).

Implicaciones del modelo.

Dada la descripción de las funciones y el contrato optimo, y asumiendo este último, surgen algunas cuestiones a resaltar aquí. En primer lugar, la concavidad de la función valor de los inversionistas muestra que estos poseen aversión a los cambios en w_t; y la razón de esto es que, aunque ellos sean neutrales al riesgo, la incapacidad de observar la verdadera acción del director debido a la presencia de choques aleatorios y a la dependencia que posee la función valor y la inversión sobre la volatilidad de w_t hace que se comporten como si ellos fuesen aversos al riesgo.

En segundo lugar, la concavidad de $p(w_t)$ no implica que esta no sea monótona, lo cual se debe a 2 efectos contrarios. El primero, que podría ser llamado efecto transferencia de riqueza, lleva a la disminución en el valor que perciben los inversionistas cuando se incrementar la continuación de pagos en el agente; y el segundo es el efecto de alineación de incentivos, que al incrementar w_t permite al contrato proveer incentivos para que el director tenga una menor probabilidad de liquidar la firma, lo cual lleva a incrementar el valor total a distribuir entre los inversionistas y el director. De esta forma, el primero de estos efectos dominara cuando la función sea decreciente, mientras que el segundo dominara en los tramos crecientes[50].

Finalmente, el valor de liquidación, dado por l, es un factor crucial en la comportamiento no monótono de $p(w_t)$. Un valor bajo de liquidación llevaría a que la empresa enfrente un alto riesgo por terminar el contrato con un bajo valor de liquidación y así dominar el efecto de alineación de incentivos; mientras que para valores altos de l disminuyen la perdida que obtendrían los inversionistas al finalizar el contrato, por lo que se tendría una mayor dominancia del efecto transferencia de riqueza.

Ahora bien, bajo el contrato establecido, se observara cual es el comportamiento de la q marginal y la q promedio. Para ello, recordemos que el valor de la firma estará dado por $P(W_t, K_t) + W_t$, denotado $q_t^A = q^A(w_t)$, estará dada por:

$$q_t^A = \frac{P(W_t, K_t) + W_t}{K_t} \;\rightarrow\; q_t^A = p(w_t) + w_t \qquad [5.18.1]$$

Ahora bien, la q marginal estará dada por, donde $q_t = q(w_t)$:

$$q_t = \frac{\partial (P(W_t, K_t) + W_t)}{\partial K_t} \;\rightarrow\; q_t = p(w_t) - w_t p'(w_t) \qquad [5.18.2]$$

[50] En el caso de la solución neoclásica, el efecto transferencia de riqueza es el único que domina, y esto se debe a que la acción del agente siempre será observable.

Es decir, aun cuando todas las condiciones que requiere el Teorema de Hayashi (1982) están dadas en este modelo, la existencia del contrato muestra que, en general, $q \neq q^A$ para todo t, y por tanto el uso en estudios empíricos de la q^A lleva a sesgos en las estimaciones cuando existen problemas de agencia. No obstante, cuando $w_t \in \{0, \overline{w}\}$ se tendrá que $q_t = q_t^A$[51]. Por tanto, recordando que $p'(w_t) \geq -1$, se tiene que $q_t^A \geq q_t$[52], lo cual se debe a que, dado un valor de W_t, un incremento en el stock de capital, disminuye w_t; lo que genera una pérdida en los derechos sobre la firma por parte del director generando problemas con el contrato. Igualmente, Dado [5.16] se hace evidente que i_t es función de w_t, por lo que al derivar dicha expresión respecto w_t se obtiene que:

$$\frac{di_t}{dw_t} = -\frac{w_t p''(w_t)}{c'(i_t)} \geq 0 \qquad [5.19]$$

Con igualdad estricta solamente en $w_t \in \{0, \overline{w}\}$. Así, dada la concavidad de la función valor, la inversión incrementa ante un aumento en la continuación de pagos del agente. Esto se debe a que un aumento en w_t lleva a que disminuya el riesgo de liquidar el contrato, por lo que los inversionistas incrementarían el capital de la firma. Entre tanto, dado que q_t y q_t^Ason funciones crecientes de w_t y usado [5.17] y [5.7] se puede establecer la relación:

$$q^* > q_t^A \geq q_t \;\rightarrow\; i^* > i_t(w_t)$$

Asimismo, en la literatura existente la q es una variable *forward looking* que captura las oportunidades de inversión al observar el futuro. No obstante, dado que la q es una función creciente en w_t, y esta última, por [5.14], esta positivamente relacionada con la historia de los beneficios de corto plazo (dados por dz_t), se tendría que mejores resultados en los beneficios pasados de la firma llevarían a un incremento de la inversión, dado que q sería mayor en este caso. Igualmente, este hecho hace que la inversión este serialmente correlacionada, dada la persistencia de w_t, algo que Hayashi (1982) y otros autores encontraron empíricamente.

Finalmente, los cambios en la volatilidad en el proceso de productividad llevan a disminuir la función valor de los inversionistas. Este hecho refleja que una mayor volatilidad implica que los beneficios de la firma darán menos información sobre la acción del director, lo cual hace al mecanismo de incentivos más costoso.

---

[51] Si $w_t = 0$, entonces $q_t = q_t^A = l$; mientras si $w_t = \overline{w}$, se obtiene $q_t = q_t^A = p(\overline{w}) + \overline{w}$, dado que $p'(\overline{w}) = -1$.

[52] Matemáticamente, una forma de mostrar esto es tomando [5.17.2], y al usar el hecho que $p'(w_t) \geq -1$ y la expresión [5.18.1], se tiene llega a:

$$q_t = p(w_t) + w_t - w_t\big(1 + p'(w_t)\big) = q_t^A - w_t\big(1 + p'(w_t)\big) \leq q_t^A$$

Fondo de Estabilización e Inversión.

Algo a resaltar en el modelo presentado hasta ahora es que el contrato entre el director y los inversionistas terminara cuando $w_t = 0$. Así, una medida de la distancia para que una firma deje de operar es w_t, puesto que, de acuerdo a [5.14], si hay un choque de productividad negativo superior al w_t/λ el contrato finalizara. De esta forma, la firma puede generar un fondo de estabilización igual a este monto, que sería la más grande pérdida que la firma podría sostener antes de que el director renuncie y se termine el contrato.

Si se asume que la firma conoce sus necesidades financieras de corto plazo, esta puede mantener una reserva de liquidez. Así, sea M_t el nivel de reserva en efectivo en la periodo t, en donde $M_t = W_t/\lambda$, y la cual percibirá un interés igual a r. Igualmente, es claro que si $M_t = 0$ el contrato finaliza. De igual forma, la firma es financiada con acciones, y los accionistas requerirán una tasa mínima de pagos en dividendos igual a:

$$dD_t = \big(K_t\big(\mu - c(i_t)\big) - (\gamma - r)M_t\big)dt \qquad [5.20]$$

El primer término corresponde al flujo de caja esperado de la firma en cada periodo, mientras que el segundo término es el costo esperado de mantener el fondo dada la impaciencia del agente, que se hace casi nulo siempre que $\gamma \cong r$. Si el agente falla en mantener el pago mínimo de dividendos a los accionistas, entonces el contrato terminara. Dado esto, el director tiene discreción a la hora de elegir su nivel de esfuerzo, el valor de i_t y pago adicional de dividendos por encima del mínimo, denotados por X_t. Asimismo, la compensación del director estará dada por una fracción λ de X_t. De esta forma, bajo estas especificaciones, las reservas de efectivo de la firma cambiaran de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$dM_t = rM_t dt + dY_t - dD_t - dX_t \qquad [5.21]$$

En donde se tiene que el valor de las acciones de la firma estará dado por:

$$S_t = E_t\left[\int_t^{\tau} e^{-r(s-t)}(dD_t - (1-\lambda)dX_t) + e^{-r(\tau-t)}K_\tau\right] \qquad [5.22]$$

Siendo τ el primer momento en que $M_t = 0$. Finalmente, el pago esperado del agente será:

$$W_t = E_t\left[\int_t^{\tau} e^{-\rho(s-t)}\lambda dX_t\right] \qquad [5.23]$$

Así, dado el supuesto de $M_t \geq 0$, el mantenimiento de un mínimo pago de dividendos y un máximo esfuerzo compatible con los incentivos de los accionistas, el agente elegirá el nivel de inversión igual al que se elige sobre el contrato[53]. De igual forma, la máxima cantidad de

[53] Solo se debe recordar que M_t es una proporción de W_t.

reservas por unidad de capital estará dada por $M_t/K_t = \overline{w}_t/\lambda$. Dado esto, la continuación de pagos para el director estará dado por $W_t = \lambda M_t$, el cual coincidirá con [5.4]. Finalmente, el valor de las acciones de la firma estará dado por $S_t = [p(\lambda m_t) + m_t]K_t$.

Dado lo anterior se tiene que los dividendos de la firma son relativamente suaves, puesto que los choques de productividad serian absorbidos por la reserva en efectivo de la firma hasta alcanzar el máximo o hasta el momento en que la firma cierre por no tener reservas. Igualmente, como el fondo financiero adopta el contrato óptimo, se mantendría la decisiones optimas sobre el la función valor de los inversionistas o accionistas. Asimismo, se tiene que el fondo de estabilización aumenta entre menor sea λ, en otras palabras cuanto menos grave sea el problema de agencia en la firma mayor será m_t.

Dada esta modificación, se pueden extraer algunas conclusiones. La primera es que las reservas de dinero están relacionadas directamente con los choques presentes y pasados que ha tenido la firma, siendo este un mecanismo que absorbe los choques de productividad. La segunda es que la q_t^A y q_t varían en igual dirección que la variaciones en m_t, por lo que la inversión tendrá una relación positiva con las reservas en efectivo que mantenga la firma. Igualmente, la compensación que recibirá el director aumentara con m_t.

Comentarios.

Cuando los modelos tradicionales de inversión fueron construidos, el teorema de Modigliani – Miller (1958) fue la piedra angular que sostuvo sus resultados. No obstante, el surgimiento de trabajos que mostraban la importancia de los factores financieros en la determinación del comportamiento de la inversión llevó a indagar en estos aspectos. Un trabajo pionero fue el de Fazzari, Hubbard y Petersen (1988), en donde se investiga a nivel empírico el impacto que tienen las restricciones financieras en la decisión de inversión por parte de las firmas. La necesidad de explicar teóricamente este hecho llevo a crear una nueva agenda de investigación en donde se negaba la neutralidad del modo de financiación, tal como señala Hubbard (1998), llevando a generar nuevos postulados que complementan las explicaciones que solo se centran en los costos de ajuste.

La introducción de un sencillo problema de Principal – Agente muestra como los resultados de la sección 2 se modifican, por lo que un contrato dista de ser neutral en la decisión de inversión. Así, se encontró que en general la q marginal y la q promedio no son iguales, haciendo invalido el resultado de Hayashi (1982), siendo una explicación del sesgos que hay en las estimaciones econométricas de la relación entre la tasa de inversión y la q. De igual forma, se encontró que la inversión bajo contratos es menor que en ausencia de problemas de agencia, lo cual demuestra la ineficiencia que suele darse ante fricciones en el sistema.

Igualmente, un resultado relevante es que la q incluya información pasada de su desempeño, en donde las ganancias que tuvieron las firmas juegan un papel importante sobre la decisión de inversión, algo que la teoría tradicional había dejado de lado debido a que solo las expectativas futuras incorporadas en la q podían explicar la decisión de inversión. Esto muestra que la reputación de la firma es importante a la hora de explicar los cambios en su capital y el valor de la misma. Igualmente, la introducción de un fondo de estabilización que evita la terminación del contrato, es una forma con la cual se generan endógenamente restricciones financieras en la decisión de inversión. Dado que este fondo es proporcional al valor del contrato, o continuación de pagos, se tiene que estas reservas crecerán con los beneficios extraordinarios que obtenga la firma o disminuirá con las pérdidas que esta tenga. De esta forma, el fondo de estabilización tiene un impacto positivo sobre la decisión de inversión, mostrando la importancia que pueden tener las reservas a la hora de expandir el capital dentro de una firma.

No obstante, el modelo posee algunas deficiencias que pueden ser corregidas en el futuro y otras que deberían ser integradas. Respecto a las deficiencias, es claro que el supuesto de tasa constante de inversión es algo que puede ser mejorado, en especial cuando la concavidad de la función valor de los inversionistas depende justamente de este supuesto[54]. En relación a las cuestiones que pueden ser agregadas, se hace evidente que pueden ser consideradas la ampliación de la función de costos de ajuste, tal como en la sección 3 se llevó a cabo, además de entrar a considerar el poder de mercado y los efectos que esta tendría sobre el desempeño de la firma, el contrato y otros aspectos relevantes. Asimismo, es posible pensar otros mecanismos con los cuales los problemas de liquidez endógenos a las firma puedan ser importantes para determinar el comportamiento de la inversión. Por último, es necesario comprender de mejor manera como la política económica cambiaria las condiciones de los contratos, y con ello la dinámica que seguiría el capital.

[54] Cuando se observa la demostración ofrecida por DeMarzo *et al* (2012) en el lema 2, es fácil notar que la concavidad es producto de este supuesto, por lo que no es posible observar la concavidad sin este supuesto de por medio.

Bibliografía.

Abel, Andrew (1980). "Empirical Investment Equations: An Integrative Framework" Carnegie – Rochester Conference Series Public Policy, Vol 12, pp 39 - 91.

Abel, Andrew (1983). ''Optimal Investment under Uncertainty''. American Economic Review, Vol 73, No 1, March, pp 228 – 233.

Abel, Andrew and Eberly, Janice (1994) "A Unified Model of Investment under Uncertainty". American Economic Review, Vol 84, December, pp 1369-1384.

Abel, Andrew and Eberly, Janice (2002). "Investment and q with Fixed Costs: An Empirical Analysis". Working Paper.

Akerlof, George (2007). '' The Missing Motivation in Macroeconomics''. The American Economic Review, Vol 97, No 1, March, pp 3-36.

Altug, Shuru; Demers, Michael and Demers, Fanny (2003). "Investment Dynamics", in Altug, S. et al (eds.), *Dynamic Macroeconomic Analysis: Theory and Policy in General Equilibrium*, Cambridge University Press.

Arrow, Keneth (1968) "Optimal Capital Policy with Irreversible Investment". In J. N. Wolfe (ed.) *Value, Capital and Growth, Papers in Honour of Sir John Hicks,* Chicago, Aldine Publishing Company, pp 1-19.

Bar – Ilan, Avner and Strange, William (1996). "Investment Lags". American Economic Review, Vol 86, No 3. pp 610-22.

Barnett, Steven and Sakellaris, Plutarchos (1999) '' A New Look at Firm Market Value, Investment, and Adjustment Costs''. The Review of Economics and Statistics, Vol 81, No 2, May, pp 250-260.

Bischoff, Charles (1971). "The Effect of Alternative Lag Distributions.'' In Gary Fromm (ed.), *Tax Incentives and Capital Spending*, Washington: Brookings Institution, pp. 61-130.

Blanchard, Oliver and Wyplosz, Charles (1981). "An Empirical Structural Model of Aggregate Demand" Journal of Monetary Economics, Vol 7, No 1, January, pp 1 – 28.

Bloom, Nicholas (2009). "The Impact of Uncertainty Shocks". Econometrica, Vol 77, No 3, pp 623–685.

Bloom, Nicholas; Bond, Stephen and Van Reenen, John (2007). "Uncertainty and Investment Dynamics". Review of Economic Studies, Vol 74, No 2, pp 391-415.

Caballero, Ricardo (1991) “On the Sign of the Investment - Uncertainty Relationship”. American Economic Review, Vol 81, pp 279–288.

Caballero, Ricardo (1999). "Aggregate Investment". In John Taylor and Michael Woodford (eds.), *Handbook of Macroeconomics,* Amsterdam, North-Holland, pp 813-862.

Caballero, Ricardo and Engel, Eduardo (1999) “Explaining Investment Dynamics in U.S. Manufacturing: A Generalized (S, s) Approach’’. Econometrica, Vol 67, No 4, July, pp 783–826.

Caballero, Ricardo, Engel, Eduardo and Haltiwanger, John (1995). "Plant-Level Adjustment and Aggregate Investment Dynamics". Brookings Papers on Economic Activity, Vol 2, No 1, pp 1-39.

Caplin, Andrew and Leahy, John (2010). ‘’ Economic Theory and the World of Practice: A Celebration of the (S, s) Model’’. The Journal of Economic Perspectives, Vol. 24, No. 1, pp. 183-201.

Chirinko, Robert (1993). "Business fixed investment spending: a critical survey of modelling strategies, empirical results, and policy implications". Journal of Economic Literature, Vol 31, No 1, December, pp 1875-1911.

Clark, John (1917). "Business Acceleration and the Law of Demand: A Technical Factor in Economic Cycles" Journal of Political Economics, Mar, Vol 21, No 1, pp 217-235.

Clark, Jhon (1944). "Additional note on business acceleration and the law of demand". American Economic Association, Readings in Business Cycle Theory (Blackiston Company, Philadelphia, PA).

Clark, Peter (1979). "Investment in the 1970s: Theory, Performance, and Prediction" Brookings Papers on Economic Activities, No 1, pp 73-124.

Coen, Robert (1971). ‘’The Effect of Cash Flow on the Speed of Adjustment". In Gary Fromm (ed.), *Tax Incentives and Capital Spending*, Washington: Brookings Institution, pp. 131 – 196.

Cooper, R. and Haltiwanger, J. (2006). “On the Nature of Capital Adjustment Costs”. Review of Economic Studies, Vol 73, pp 611–633.

DeMarzo, Peter, and Sannikov, Yuliy (2006). ‘’Optimal Security Design and Dynamic Capital Structure in a Continuous-Time Agency Model’’, Journal of Finance, Vol 61, pp 2681–2724.

DeMarzo, Peter; Fishman, Michael; He, Zhiguo and Wang, Neng (2012). ''Dynamic Agency and the q Theory of Investment''. The Journal of Finance, Vol 67, No 6, December, pp 2295 – 2340.

Dixit, Avinash (1993). *The Art of Smooth Pasting.* Vol. 55 in Fundamentals of Pure and Applied Economics (Harwood Academic Publishers, Routledge, NY).

Doms, Mark and Dunne, Thimoty (1993) "An investigation into capital and labor adjustment at the plant level". Working paper, Center for Economic Studies, Census Bureau.

Doyle, Joanne and Whited, Toni (2001). "Fixed Costs of Adjustment, Coordination, and Industry Investment". *The Review of Economics and Statistics,* Vol 83, No 4, November, pp. 628-637

Dumas, Bernard (1991). ''Super Contact and Related Optimality Conditions''. Journal of Economic Dynamics and Control, Vol 15, pp 675 – 685.

Eisner, Robert and Nadiri, M. Ishaq (1970). ''Neoclassical Theory and Investment Behavior: A Comment''. The Review of Economics Statistics, Vol 52, No 2, May, pp. 369-82.

Engle, Robert and Foley, Duncan (1975). "An Asset Price Model of Aggregate Investment''. International Economic Review, Vol 16, No 3, October, pp 625 – 647.

Fazzari, Steven, Hubbard; Glen and Petersen, Bruce (1988). ''Financing constraints and corporate investment''. Brookings Papers on Economic Activity, No 1, pp 141–195.

Gordon, Stephen (1992). '' Costs of Adjustment, the Aggregation Problem and Investment''. The Review of Economics and Statistics, Vol 74, No 3, August, pp 422-429.

Gould John (1968). "Adjustment Costs in the Theory of Investment of the Firm". The Review Economics Studies, Vol 35, No 1, January pp. 47-55.

Graham, Jhon and Webb, Roy (1979). "Stocks and depreciation of human capital: New evidence from a present-value perspective". Review of Income and Wealth, Vol. 25, No 2, June, pp. 209–224.

Guiso, Luigi and Parigi, Guiso (1999) "Investment and Demand Uncertainty". Quarterly Journal of Economics, Vol 114, No 1, pp 185-227.

Hall, Robert (1968). '' Technical Change and Capital from the Point of View of the Dual''. Review of Economic Studies, Vol 35, No 1, January, pp 35 – 46.

Hall, Robert and Jorgenson, Dale (1967). "Tax policy and investment behavior". American Economic Review, Vol 57, No 3, June, pp 391 – 414.

Hall, Robert and Jorgenson, Dale (1971). "Application of the Theory of Optimum Capital Accumulation". In Gary Fromm (ed.), *Tax Incentives and Capital Spending*, Washington: Brookings Institution, pp 9-60.

Hartman, Richard (1997). "The Effects of Price and Cost Uncertainty on Investment ". Journal of Economic Theory, Vol 5, pp 258-266.

Hayashi, Fumio (1982). "Tobin's Marginal q and Average q: A Neoclassical Interpretation" Econometrica, Vol 50, No 1, January, pp 213 – 224.

Hubbard, Glen (1998). “Capital – Market Imperfections and Investment”. Journal of Economic Literature, Vol 36, No 1, May, pp 193 – 225.

Hulten, Charles R and Wykoff, Frank (1981). "The Estimation of Economic Depreciation Using Vintage Asset Prices" Journal of Econometrics, Vol 15, April, pp 367–396.

Jorgenson, Dale (1963). "Capital theory and investment behavior". American Economic Review, Vol 53, No 2, May, pp 247-259.

Khan, A. and J. Thomas, (2008). “Idiosyncratic Shocks and the Role of Non convexities in Plant and Aggregate Investment Dynamics”. Econometrica, Vol 76, No 2, March, pp 395–436.

Koyck, L. (1954). *Distributed Lags and Investment Analysis.* North-Holland, Amsterdam.

Kraft, Holger; Schwartz, Eduardo and Weiss, Farina (2013) "Growth Options and Firm Valuation". NBER Working Paper 18836.

Leahy, John and Toni, Whited (1996). ‘’The Effecto on Uncertainty Investment: Some Stylized Facts”. Journal or Money, Banking and Credit, Vol 28, No 1, February, pp 64 – 83.

Modigliani, Franco and Miller, Merton (1958). ‘’ The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment’’. The American Economic Review, Vol 48, No 3, June, pp 261 – 297.

Mussa, Michael (1977). "External and Internal Adjustment Costs and the Theory of Aggregate and Firm Investment". Economica, Vol 44, No 174, May, pp 163-178.

Romer, David (2012). *Advanced Macroeconomics.* McGraw Hill, Fourth Edition.

Rothschild, Michael (1971). "On the Cost of Adjustment" Quarterly Journal Ecoomics, Vol 85, No 4, November, pp. 605 - 622.

Stein, Luke and Stone, Elizabeth (2012). "The Effect of Uncertainty on Investment, Hiring, and R&D: Causal Evidence from Equity Options". Working Paper.

Summers, Lawrence (1981). "Taxation and Corporate Investment: A q-Theory Approach" Brookings Papers on Economic Activity, No 1, pp. 67-127.

Tobin, James (1969). "A General Equilibrium Approach to Monetary Theory" Journal of Money, Credit and Banking, Vol 1, No 1, February, pp. 15-29.

Treadway, A. B. (1969). ''On Rational Entrepreneurial Behaviour and the Demand for Investment''. The Review of Economic Studies, Vol 36, No 2, April, pp 227-239.

Thomas, Julia (2002). "Is Lumpy Investment Relevant for the Business Cycle?" Journal of Political Economy, Vol 110, pp 508–534.

Veracierto, Marco (2002) "Plant-Level Irreversible Investment and Equilibrium Business Cycles" American Economic Review, Vol 92, pp 181–197.

Apéndice.

En esta sección se presentaran algunas demostraciones de resultados presentados en la sección 2 y 3 respectivamente.

1. **La igualdad entre la q media y la q marginal.**

Teorema: Suponga una firma competitiva que posee una función de producción $F(K_t, L_t)$ y una función de costos de ajuste $C(K_t, I_t)$, ambas homogéneas de grado 1; entonces, se cumple que $q_t = q_t^A$.

Demostración: Dado [2.11] y reemplazando en [2.5] se obtiene:

$$1 + \frac{C_{I_t}}{p_t^K} = q_t \qquad [2.1A]$$

Así, utilizando [2.6] un periodo hacia adelante, la expresión [2.11] para despejar $E_t V'(K_{t+1})$ y ordenando términos se llega a:

$$p_t^K q_t = \beta E_t\left[F_{K_{t+1}} - C_{K_{t+1}} + (1-\delta) q_{t+1} p_{t+1}^K\right] \qquad [2.2A]$$

Al multiplicar por K_{t+1} en la expresión anterior se tiene:

$$p_t^K q_t K_{t+1} = \beta E_t\left[F_{K_{t+1}} - C_{K_{t+1}} + (1-\delta) q_{t+1} p_{t+1}^K\right] K_{t+1} \qquad [2.3A]$$

Dado que $K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t$, estos dos últimos términos se pueden introducir en la ecuación, y por lo tanto se tendrá que:

$$p_t^K q_t K_{t+1} = \beta E_t\left[F_{K_{t+1}} K_{t+1} - C_{K_{t+1}} K_{t+1} + (1-\delta) q_{t+1} p_{t+1}^K K_{t+1}\right] \qquad [2.4A]$$

Teniendo en cuenta que la función de producción y la de costos de ajustes son homogénea de grado 1, usando el teorema de Euler se obtiene:

$$F(K_t, L_t) = F_{K_t} K_t + F_{L_t} L_t$$

$$C(K_t, I_t) = C_{K_t} K_t + C_{I_t} I_t$$

Despejando $F_{K_t} K_t$, iterando un periodo hacia adelante, reemplazando el resultado en [2.4A] y utilizando la [2.4] se encuentra:

$$p_t^K q_t K_{t+1} = \beta E_t\left[F(K_{t+1}, L_{t+1}) - w_{t+1} L_{t+1} - C_{K_{t+1}} K_{t+1} + (1-\delta) q_{t+1} p_{t+1}^K K_{t+1}\right]$$

Igualmente, se tiene que $K_{t+1} = (K_{t+2} - I_{t+1})(1-\delta)^{-1}$, por lo que al sustituir esta expresión en la igualdad anterior se llega a:

$$p_t^K q_t K_{t+1} = \beta E_t\left[F(K_{t+1}, L_{t+1}) - w_{t+1} L_{t+1} - C_{K_{t+1}} K_{t+1} - q_{t+1} p_{t+1}^K I_{t+1} + q_{t+1} p_{t+1}^K K_{t+2}\right]$$

De igual forma, iterando un periodo la ecuación [2.1A] y reemplazando el resultado en $q_{t+1}p_{t+1}^K I_{t+1}$ se llega a:

$$p_t^K q_t K_{t+1} = \beta E_t\left[F(K_{t+1}, L_{t+1}) - w_{t+1}L_{t+1} - C_{K_{t+1}}K_{t+1} - C_{I_t+1}I_{t+1} - p_{t+1}^K I_{t+1}\right]$$
$$+ \beta E_t[q_{t+1}p_{t+1}^K K_{t+2}]$$

Usando el teorema de Euler para la función de costos de ajuste se obtiene:

$$p_t^K q_t K_{t+1} = \beta E_t[\pi_{t+1}] + \beta E_t[q_{t+1}p_{t+1}^K K_{t+2}] \qquad [2.5A]$$

En donde $\pi_{t+1} = F(K_{t+1}, L_{t+1}) - w_{t+1}L_{t+1} - p_{t+1}^K I_{t+1} - C(K_{t+1}, I_{t+1})$. Adelantando un periodo [2.5A] y reemplazando el resultado, se encuentra:

$$p_t^K q_t K_{t+1} = \beta E_t[\pi_{t+1}] + \beta^2 E_t[\pi_{t+2}] + \beta^2 E_t[q_{t+2}p_{t+2}^K K_{t+3}]$$

Repitiendo el proceso sucesivamente, se llega a la ecuación:

$$p_t^K q_t K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \beta^s E_t[\pi_{t+s}] + \lim_{n\to\infty} \beta^n E_t[q_{t+n}p_{t+n}^K K_{t+n+1}]$$

Que por condición de transversalidad sobre K_t, se determina que:

$$p_t^K q_t K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \beta^s E_t[\pi_{t+s}] \qquad [2.6A]$$

Finalmente usando la ecuación [2.3] e iterando sucesivamente, se encuentra que:

$$E_t V(K_{t+1}) = \sum_{s=1}^{\infty} \beta^{s-1} E_t[\pi_{t+s}]$$

Así que, finalmente, se llega a que:

$$q_t = \frac{\beta E_t V(K_{t+1})}{p_t^K K_{t+1}} = q_t^A \qquad [2.7A]$$

Que es lo que se quería demostrar.

2. Funcion valor y la q de Tobin en un entorno estocástico.

En este apartado se mostrara como son deducidos los resultados [3.4] y [3.18]. Para esto se seguirá Stockey (2009) que tiene una forma sencilla de encontrar esta ecuación. Así, la derivación de la ecuación de Bellman se toma la función valor [3.3] y se reescribe de la siguiente forma:

$$V(K_t, \varepsilon_t) = \max_{I_{t+s}, v_{t+s}} \int_0^{\Delta t} E_t[\pi(K_{t+s}, \varepsilon_{t+s}) - v_{t+s}C(I_{t+s}, K_{t+s})]e^{-rs}ds$$
$$+ e^{-r\Delta t}E_t V(K_{t+\Delta t}, \varepsilon_{t+\Delta t})$$

Haciendo $e^{-r\Delta t} \cong 1/(1 + r\Delta t)$ y usando el teorema del valor medio en la integral, se obtiene:

$$V(K_t, \varepsilon_t) = [\pi(K_{t+s}, \varepsilon_{t+s}) - v_{t+s}C(I_{t+s}, K_{t+s})]\Delta t + \frac{1}{1 + r\Delta t}E_tV(K_{t+\Delta t}, \varepsilon_{t+\Delta \mathrm{t}})$$

Multiplicando ambos lados por $1 + r\Delta t$ se tiene que:

$$r\Delta tV(K_t, \varepsilon_t) = [\pi(K_{t+s}, \varepsilon_{t+s}) - v_{t+s}C(I_{t+s}, K_{t+s})](1 + r\Delta t)\Delta t + E_t\Delta V(K_t, \varepsilon_t)$$

Al dividir por Δt a ambos lados y tomar limite cuando $\Delta t \rightarrow 0$ se tiene que:

$$rV(K_t, \varepsilon_t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left\{[\pi(K_{t+s}, \varepsilon_{t+s}) - v_{t+s}C(I_{t+s}, K_{t+s})](1 + r\Delta t) + \frac{E_t\Delta V(K_t, \varepsilon_t)}{\Delta t}\right\}$$

Lo cual implica que:

$$rV(K_t, \varepsilon_t) = \pi(K_{t+s}, \varepsilon_{t+s}) - v_{t+s}C(I_{t+s}, K_{t+s}) + E_t\left[\frac{dV}{dt}\right]$$

Que es igual a [3.4].

Ahora bien, para obtener [3.18] se seguirá la demostración propuesta por Abel y Eberly (1993). Para esto, se asume que

$$q_t = \int_0^\infty E_t[\pi_{K_{t+s}} - vC_{K_{t+s}}(I_{t+s}, K_{t+s})]e^{-(r+\delta)s}ds$$

Y lo que se mostrara es que q_t es solución para la ecuación diferencial propuesta en [3.17]. Así, para un corto intervalo de tiempo Δt se tendría que:

$$q_t = \int_0^{\Delta t} E_t[\pi_{K_{t+s}} - vC_{K_{t+s}}(I_{t+s}, K_{t+s})]e^{-(r+\delta)s}ds + \int_{\Delta t}^\infty E_t[\pi_{K_{t+s}} - vC_{K_{t+s}}(I_{t+s}, K_{t+s})]e^{-(r+\delta)s}ds$$

Sumando y restando dentro de la segunda integral $e^{-(r+\delta)(s-\Delta t)}$ se encuentra:

$$q_t = \int_0^{\Delta t} E_t[\pi_{K_{t+s}} - vC_{K_{t+s}}(I_{t+s}, K_{t+s})]e^{-(r+\delta)s}ds + \int_{\Delta t}^\infty E_t\left[\pi_{K_{t+s}} - vC_{K_{t+s}}(I_{t+s}, K_{t+s})\right]\left(e^{-(r+\delta)s} + e^{-(r+\delta)(s-\Delta t)} - e^{-(r+\delta)(s-\Delta t)}\right)ds$$

Reorganizando:

$$q_t = \int_0^{\Delta t} E_t\left[\pi_{K_{t+s}} - vC_{K_{t+s}}(I_{t+s}, K_{t+s})\right]e^{-(r+\delta)s}ds$$
$$+ \left(e^{-(r+\delta)\Delta t} - 1\right)\int_{\Delta t}^{\infty} E_t\left[\pi_{K_{t+s}} - vC_{K_{t+s}}(I_{t+s}, K_{t+s})\right]e^{-(r+\delta)(s-\Delta t)}ds + E_t q_{t+\Delta t} \quad [3.A]$$

Cuando $\Delta t \to 0$ se pueden hacer las siguientes aproximaciones de forma exacta:

$$E_t q_{t+dt} = q_t + E_t\left[\frac{dq}{dt}\right]\Delta t$$

Usando el teorema del valor medio en el primer termino de [3.A]:

$$\int_0^{\Delta t} E_t\left[\pi_{K_{t+s}} - vC_{K_{t+s}}(I_{t+s}, K_{t+s})\right]e^{-(r+\delta)s}ds = \left[\pi_{K_{t+s}} - vC_{K_{t+s}}(I_{t+s}, K_{t+s})\right]\Delta t$$

Y aproximando por Taylor y el teorema de valor medio en el segundo termino de [3.A], se tiene

$$\int_{\Delta t}^{\infty} E_t\left[\pi_{K_{t+s}} - vC_{K_{t+s}}(I_{t+s}, K_{t+s})\right]\left(e^{-(r+\delta)\mathrm{h}} - 1\right)e^{-(r+\delta)(s-\mathrm{h})}ds = -(r+\delta)q_t\Delta t$$

Así:

$$q_t = \left[\pi_{K_{t+s}} - vC_{K_{t+s}}(I_{t+s}, K_{t+s})\right]\Delta t - (r+\delta)q_t\Delta t + q_t + E_t\left[\frac{dq}{dt}\right]\Delta t$$

Simplificando términos se obtiene [3.17], que es lo que se deseaba demostrar.