UNIVERSIDAD AUTONÓMA DE SAN LUIS POTOSÍ

Facultad de Economía.

Modelos Intertemporales de Consumo: Un Estudio General de la Teoría y sus Implicaciones para el Análisis Económico.

TESIS

para obtener el grado de

Maestro en Economía Matemática.

PRESENTA:

Cristian Camilo Castrillón Gaviria.

Tutor de tesis:

Dr. Samuel Gil Martín.

Sinodales:

Dr. Leobardo Plata Pérez.

Dr. Pedro Isidoro González Ramírez.

Junio de 2015. San Luis Potosí, México.

CONTENIDO:

Modelos Intertemporales de Consumo: Un Estudio General de la Teoría y sus Implicaciones para el Análisis Económico.

INTRODUCCIÓN.

La discusión que se presenta en este trabajo de tesis se iniciara con la siguiente pregunta: ¿Por qué es tan importante el consumo? La razón básica es que para la mayoría de las economías desarrolladas el consumo cuenta como cerca de dos tercios de su PIB; es uno de los factores que en gran parte determina el bienestar de los agentes económicos; es la otra cara del ahorro, él cual es importante para crecimiento de la inversión y por ende la acumulación de capital, factor importante para el crecimiento económico; sus fluctuaciones están correlacionadas con las del producto. Sin embargo, es el menos volátil de sus componentes, especialmente en bienes no-durables (tales como alimentos) que son muy estables a lo largo del ciclo económico

En la actualidad la teoría del consumo se ha edificado sobre principios económicos altamente matematizados, que han permitido proporcionar predicciones concretas sobre el funcionamiento de los mercados de bienes y servicios y mercados financieros. Por otro lado, la disponibilidad de datos y los avances en la Estadística ha permitido la validación y rechazo empírico de algunas hipótesis. Comprender el Consumo como decisión por parte de los agentes económicos es ver su comportamiento en la asignación intertemporal de los recursos en un entorno incierto, a su vez, tal contexto intertemporal es lo que enlaza las decisiones de inversión por parte de los consumidores. Es la interacción entre el componente temporal y la incertidumbre lo que hace que la teoría del consumo sea analizada a la luz de la economía financiera.

Asimismo, la comprensión de la teoría del consumo y el ahorro es crucial para el estudio no solo de la teoría económica, sino para las demás ciencias sociales, desde el punto de vista positivo y normativo para comprender el desarrollo de la sociedad como sistema. Este aspecto se toca recientemente de forma crucial a partir del 2008, pues la crisis ha tenido alcances globales afectando a las diferentes esferas de la acción humana, tanto en el aspecto político, económico, social y ecológico. A su vez las teorías no han logrado ofrecer un conocimiento de forma sistemática con respecto a los procesos económicos actuales, lo que ha hecho que esta crisis esté reconfigurando muchos aspectos de la humanidad hoy. Además, la dinámica actual del mercado laboral en relación a la población joven ha llevado a analizar con detalle las hipótesis establecidas por parte de la teoría económica, pues el contexto histórico de los años 1930s (la Gran Depresión), 1960s (Periodo de postguerra y auge de crecimiento económico mundial) y 1990s (crisis profundas y de deuda) a nivel teórico difieren con el análisis actual.

Dicho todo lo anterior, este trabajo ofrece una exposición acerca de las contribuciones teóricas modernas sobre el consumo, así como su relación con el sistema financiero y como los cambios en éste modifican su dinámica, haciendo énfasis en la incertidumbre y las restricciones crédito y liquidez. El programa de investigación en la macroeconomía es unificado y denso al introducir la **Hipótesis de las Expectativas Racionales** (HER) y la **Optimización Dinámica** (OD) a la hora explicar algunos problemas que competen al consumo como lo son el ahorro por motivo de precaución, restricciones de liquidez, restricciones de crédito, el consumo y el precio de los activos y decisiones de portafolio óptimas a nivel teórico.

Integrar la teoría del consumo con la Economía Financiera es partir de los trabajos de Milton Friedman, Kenneth Arrow, Gerard Debreu y Franco Modigliani pues fueron quienes sentaron las bases de la teoría actual. Aunque la literatura moderna se ha venido trabajando con base al impacto que tuvieron los trabajos en los años 90s de Harry Markowitz, Merton Miller y William Sharpe a partir de la teoría de los mercados eficientes, selección de carteras, análisis y valoración del riesgo y la teoría de valoración de opciones. Así mismo, con los trabajos posteriores de Myron Scholes y Robert Merton contribuyeron a la valoración de los activos derivados, han permitido, profundizar más en la teoría del consumo y la Economia Financiera. Vale la pena destacar que uno de los análisis más importantes hasta ahora en dicha teoría se debe a la contribución de Louis Bachelier (1900) cuya tesis “Teoría de la Especulación” se introdujeron procesos de difusión[1].

En este orden de ideas, los trabajos de Lars Peter Hansen y Thomas Sargent son esfuerzos considerables por introducir la naturaleza del equilibrio en los mercados

[1] Son una clase de procesos estocásticos que pueden definir el comportamiento de las variables económicas, así definió las bases sobre las que se han construido las teorías de los mercados eficientes y valoración de opciones tal y como se entienden hoy.

de capitales y las consecuencias a la hora de valorar activos financieros en un mundo de incertidumbre, pues tiempo atrás se intentaba valorar activos de forma individualizada atendiendo exclusivamente a los pagos que se generaba a los agentes económicos. Sin embargo, la macroeconomía y la teoría de finanzas hoy nos han llevado al punto en el que no se pueden entender los valores de los activos sin hacer referencia a los precios de otros títulos existentes en la economía. Básicamente las dos perspectivas dominantes son: a) la perspectiva de la ausencia de arbitraje, que procede de valorar los activos tomando como referencia el precio de otros activos y b) la perspectiva del equilibrio que busca la determinación simultanea de todos ellos y se observa como las variables agregadas influyen en la determinación del precio de cada activo.

Para lograr una exposición integral partiremos de la lectura de textos como Romer (2012)[2] y la síntesis elaborada por Attanasio (1999) y complementándolos con literatura más actualizada sobre el tema, que se puede encontrar en el survey de Atanassio and Weber (2010). Estos toman como referente la versión moderna del ciclo de vida y a partir de ahí se busca incorporar aspectos como: la demografía, relajamiento de la separabilidad intertemporal, sistema financiero, información y contratos. Debe ser claro que debido a la existencia de los costos de transacción y al ser altos, la imposibilidad de redactar un contrato para cada posible contingencia en el mundo real con información heterogénea entre los individuos, hace que el ideal de los mercados completos sea inalcanzable. De hecho, aquí surgen los problemas de riesgo moral en la teoría del consumo, pues es posible que algún individuo o institución tenga la capacidad para influir por medios no fortuitos en las probabilidades de ocurrencia de los estados de la naturaleza y así afectar los patrones de consumo de los individuos. De hecho, si no hubiese problemas de riesgo moral y asimetrías de información se pueden expandir las oportunidades de inversión, de asignación de recursos y el reparto del riesgo.

La lectura exhaustiva de este tipo de literatura lleva al siguiente punto señalado por Hansen (2012): la búsqueda de una nueva síntesis de los precios que permita incorporar la incertidumbre, pues a raíz de la reciente crisis y el papel de los

[2] Si bien el texto de Romer (2012) es uno de los textos más seguidos en macroeconomía avanzada, su trabajo es una síntesis hasta los años 90s.

mercados financieros, han hecho que la comunidad académica e instituciones públicas tengan como agenda el desafío de cuantificar el riesgo sistemático y comprender mejor los vínculos que hay entre el sistema financiero y la macroeconomía. Con todos los argumentos anteriores es que surgen los diferentes modelos del *Arbitrage Pricing Theory (APT)* y el *Capital Asset Pricing Model (CAPM).* El punto de partida en los trabajos de investigación de los modelos *CAPM* con consumo y el *CAPM* intertemporal al imponer preferencias alternativas al modelo básico con preferencias isoelásticas de los agentes económicos o comportamientos alternativos en el conjunto de oportunidades de inversión al que se enfrentan dichos agentes y en la distribución de probabilidades de los rendimientos. No obstante, se debe notar que todos estos modelos teóricos son casos particulares de la ecuación fundamental de valoración y, más específicamente, casos particulares de lo que se entiende hoy por factor de descuento estocástico.

La estructura del trabajo se dividirá en 4 secciones: 1) explicar el consumo bajo mercados completos; 2) el consumo bajo modelos que tratan de explicar los precios de los activos, serían los modelos C-CAPM; 3) el consumo en modelos de valoración intertemporal de activos, que serían extensiones del C-CAPM; 4) los ahorros por motivo de precaución y restricciones de crédito y liquidez. Para así concluir con algunas reflexiones y conclusiones sobre el tema.

1. EL CONSUMO BAJO MERCADOS COMPLETOS.

En esta primera sección se expondrá las bases teóricas de las secciones restantes. La idea es mostrar las hipótesis del ciclo de vida y el ingreso permanente bajo la estructura de mercados completos. Por esa razón, se iniciara con la comprensión de tal estructura y a partir de ahí construir el discurso de tales hipótesis en el consumo y al final se mostrara alguna evidencia empírica al respecto.

1.1. Descripción de una economía con asignación optima de consumo a partir de un consumo completo de activos Arrow-Debreu.

Considérese una economía de intercambio puro con incertidumbre en la que existe un solo periodo y dos fechas y se consume un único bien de consumo no duradero en ambas fechas. Los individuos, $i = 1, \dots, I$, deciden su consumo en el momento presente $t = 0$ y escogen entre un conjunto de activos contingentes (activos Arrow-Debreu) que les permitirá consumir el único bien de consumo en el momento futuro $t = 1$. Aquí la incertidumbre se modela por medio de los múltiples estados de la naturaleza que ocurren en el futuro. Se supone que los individuos tienen funciones de utilidad sobre el bien de consumo que son estrictamente crecientes, estrictamente cóncavas (aversión al riesgo) y diferenciales y que satisfacen los axiomas de la utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern. Su usara el bien de consumo como numerario en todo momento, lo que implica que el precio de las unidades de consumo en el momento presente y futuro es igual a 1.

Sea Ω el conjunto de los estados de la naturaleza posibles $\{s = 1, \dots, S\}$. Se denota a las asignaciones de consumo admisibles para el momento presente y futuro en los diferentes estados como $\{c_{i0}, c_{is}$ para $s \in \Omega; i = 1, \dots, I\}$. Se tiene en cuenta que una asignación de consumo presente y consumo contingente entre los individuos existentes en la economía es admisible o factible si y solo si:

$$\sum_{i=1}^{I} c_{i0} = C_0, \tag{1.1}$$

donde C_o es el consumo agregado en el momento $t = 0$ y además,

$$\sum_{i=1}^{I} c_{is} = C_s, \text{para cualquier estado } s \in \Omega, \tag{1.2}$$

siendo C_s es el consumo agregado en el estado s y momento futuro $t = 1$. Realmente C_o y C_s son el total de recursos de la economía en dichos momentos y estados, por lo que son variables exógenas.

Se sabe que para cada *asignación óptimo paretiana* existe un conjunto de números no negativos $\{\lambda_i; i = 1, \dots, I\}$ tal que la misma asignación de consumo puede lograrse por un planificador central que maximiza la combinación lineal de las funciones de utilidad esperada de los individuos usando como ponderaciones estos números no negativos, sujetos a las restricciones impuestas por los recursos disponibles en dicha economía. Se tiene que una asignación de consumo presente y contingente es *óptimo paretiana o eficiente en sentido de Pareto* si es una asignación admisible y si no existe otra asignación admisible que pueda incrementar al menos la utilidad de un individuo sin disminuir la de los demás. Por tanto, las asignaciones de consumo resultante del siguiente problema de maximización son óptimos paretiana:

$$\begin{aligned} \underset{\{c_{i0}, c_{is}; i=1,\dots,I\}}{\text{Max}} \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i \left[\sum_{s=1}^{S} \pi_{is} U_{is}(c_{i0}, c_{is}) \right] + \phi_0 \left(C_0 - \sum_{i=1}^{I} c_{i0} \right) \\ + \sum_{s=1}^{S} \phi_s \left(C_s - \sum_{i=1}^{I} c_{is} \right), \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde ϕ_0 y ϕ_s para $s = 1, \dots, S$ son los correspondientes multiplicadores de Lagrange o *precios sombra* de las unidades de consumo en los correspondientes momentos de tiempo y estados de la naturaleza y donde π_{is} es la probabilidad de ocurrencia que asigna cada indivuo i a cada estado de la naturaleza s. Nótese que en (1.3) la función de utilidad $U_{is}(.)$ depende de cada individuo y de cada estado. Se supone que dicha función cumple con las condiciones necesarias y suficientes para que la solución sea un óptimo global.

Las condiciones de primer orden del problema (1.3) son:

$$\lambda_i \sum_{s=1}^{S} \pi_{is} \frac{\partial U_{is}(.)}{\partial c_{i0}} = \phi_0; \; i = 1, \dots, I \tag{1.4}$$

$$\lambda_i \pi_{is} \frac{\partial U_{is}(.)}{\partial c_{is}} = \phi_s;\ s = 1, \dots, S;\ i = 1, \dots, I \tag{1.5}$$

$$\sum_{i=1}^{I} c_{is} = C_s; s = 1, \dots, S \tag{1.6}$$

$$\sum_{i=1}^{I} c_{i0} = C_0 \tag{1.7}$$

Dividiendo (1.5) entre (1.4) se obtiene:

$$\frac{\pi_{is} \frac{\partial U_{is}(.)}{\partial c_{is}}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_{is} \frac{\partial U_{is}(.)}{\partial c_{i0}}} = \frac{\phi_s}{\phi_0};\ s = 1, \dots, S;\ i = 1, \dots, I \tag{1.8}$$

el numerador de la ecuación (1.8) es la utilidad marginal del consumo en cada estado de la naturaleza futuro para el individuo i, mientras que el denominador es la utilidad marginal del consumo presente. Por tanto, el cociente entre ambas utilidades marginales es la *relación marginal de sustitución entre consumo presente y consumo futuro contingente*, pero teniendo en cuenta las probabilidades de ocurrencia de cada estado es la misma para todos los individuos. Asimismo, dado que la asignación del problema (1.3) es una asignación óptima paretiana, se concluye que dichas asignaciones se caracterizan por tener idéntica relación marginal de sustitución entre consumo presente y consumo futuro entre todos los individuos.

Teóricamente el problema de este tipo de incertidumbre se soluciona a partir del hecho de que los individuos pueden contratar un conjunto completo de activos Arrow-Debreu para satisfacer sus preferencias de consumo, puesto que un conjunto completo de activos Arrow-Debreu significa que se negocian activos Arrow-Debreu para cada uno de los estados de la naturaleza posibles (existen tantos activos Arrow-Debreu como estados de la naturaleza).

TEOREMA 1.1: *En una economía competitiva es posible alcanzar asignaciones de consumo entre los individuos óptimo pareto si existe un conjunto completo de activos Arrow-Debreu.*

Esto significa, que los individuos intercambian los activos Arrow-Debreu de forma que satisfacen sus deseos de consumo, teniendo en cuenta que existen activos Arrow-Debreu para todos los estados de la naturaleza posibles. Para verlo, basta que las condiciones de primer orden que caracterizan las asignaciones óptimo paretianas de la expresión (1.8) se cumplan. Entonces la posibilidad de negociar en un entorno competitivo un conjunto completo de activos Arrow-Debreu, garantizaría asignaciones óptimo pareto. Luego definimos ϕ_s como el precio hoy de un activo Arrow-Debreu que paga una unidad monetaria si ocurre el estado s y nada en caso contrario. Naturalmente, el precio de las unidades de consumo hoy, ϕ_0, es igual a 1. El problema de los consumidores se puede expresar de la siguiente manera:

$$\underset{\{c_{i0},c_{is};i=1,\dots,I\}}{\text{Max}} \mathcal{L} = \sum_{s=1}^{S} \pi_{is} U_{is}(c_{i0}, c_{is}) + \eta_i \left[e_{i0} - c_{i0} + \sum_{s=1}^{S} \phi_s \left(e_{is} - c_{is} \right) \right] \qquad (1.9)$$

Donde e_{i0} y e_{is} son las dotaciones que tiene el individuo i de unidades de consumo en el momento $t = 0$ y en el momento $t = 1$ y estado s respectivamente, donde η_i es el multiplicador de Lagrange asociado a las restricciones del individuo i dadas sus dotaciones de consumo. Las condiciones de primer orden del problema son

$$\sum_{s=1}^{S} \pi_{is} \frac{\partial U_{is}(.)}{\partial c_{i0}} = \eta_i \qquad (1.10)$$

$$\pi_{is} \frac{\partial U_{is}(.)}{\partial c_{is}} = \eta_i \phi_s; \; s = 1, \dots, S \qquad (1.11)$$

$$e_{i0} + \sum_{s=1}^{S} \phi_s \, e_{is} = c_{i0} + \sum_{s=1}^{S} \phi_s \, c_{is} \qquad (1.12)$$

Se debe tener presente que, a partir de la expresión (1.10), el *precio sombra* η_i es estrictamente positivo al ser las funciones de utilidad estrictamente crecientes en el consumo.

Dividiendo (1.11) entre (1.10) se obtiene:

$$\frac{\pi_{is}\frac{\partial U_{is}(.)}{\partial c_{is}}}{\sum_{s=1}^{S}\pi_{is}\frac{\partial U_{is}(.)}{\partial c_{i0}}} = \phi_s;\ s = 1, \dots, S \tag{1.13}$$

Además, en equilibrio, las condiciones de vaciado de mercado se satisfacen. En otras palabras que cumple que:

$$\sum_{i=1}^{I} c_{is} = C_s; s = 1, \dots, S$$

$$\sum_{i=1}^{I} c_{i0} = C_0$$

Se trata simplemente de comparar las condiciones de primer orden (1.4) y (1.5) con las condiciones (1.10) y (1.11), donde simplemente $\lambda_i = \frac{1}{\eta_i}$, lo que es posible hacer ya que ambos, λ_i y η_i, son dos números estrictamente positivos. De esta forma, al ser (1.8) una expresión que caracteriza las asignaciones óptimo paretianas, es la misma expresión que (1.9). Las relaciones marginales de sustitución entre consumo presente y futuro son las mismas para los individuos. Así, se concluye que las asignaciones resultantes de una economía competitiva donde se negocia un conjunto completo de activos Arrow-Debreu son óptimo pareto. Disponer de un conjunto completo de activos Arrow-Debreu permite replicar cualquier patrón deseado de consumo por parte de los individuos. Es decir, al existir tantos activos Arrow-Debreu como estados de la naturaleza el mercado es *completo*. Queda así demostrado que las asignaciones resultantes de una economía competitiva con mercados completos son óptimo pareto.

La manera en la que se ha abordado la incertidumbre ha sido desde el modelo de preferencia tiempo-estado. Los activos Arrow-Debreu son un caso particular de los activos contingentes, cuyas implicaciones expondremos después a partir de las siguientes tres definiciones:

DEFINICIÓN 1.1: *Un activo (o derecho) contingente es un activo financiero cuyos pagos se definen como una función (definida a priori) de un suceso futuro incierto.*

DEFINICIÓN 1.2: *Un activo contingente elemental o activo Arrow-Debreu es un activo que paga una unidad monetaria si un determinado estado de la naturaleza ocurre y nada en caso contrario.*

DEFINICIÓN 1.3: *Un mercado es completo si cada estructura imaginable de pagos futuros puede replicarse mediante los activos existentes.*

Una de las primeras implicaciones que vienen del concepto de activo Arrow-Debreu es que se puede tomar como la extensión del concepto de bono básico al caso en que existe incertidumbre caracterizada por los estados de la naturaleza. La contingencia se asocia con la ocurrencia de un estado de la naturaleza concreto en el futuro, y así el precio del activo Arrow-Debreu proporciona el valor que tiene hoy una unidad monetaria recibida en el futuro en un estado determinado. Además, cuando se dispone de la información de los precios de dichos activos, se está en condición de poder valorar cualquier activo financiero, reflejando así, lo que los inversionistas están dispuestos a pagar hoy por unidades de consumo (unidades monetarias) en cada uno de los estados de la naturaleza futuros, recogiendo la incertidumbre asociada a cada uno de dichos estados con la característica de que son precios de hoy, por lo que incorporan un factor de descuento temporal. En otras palabras, valoran hoy unidades de consumo futuras teniendo presente tanto la incertidumbre correspondiente a cada estado como la valoración temporal del dinero (costo de oportunidad de la liquidez). Por otro lado, se pueden interpretar también como *seguros* que contratamos para recibir una determinada cantidad de dinero si llegará a ocurrir algún estado de la naturaleza, a partir de esto sus precios pueden entenderse como la prima del seguro de una póliza que cubre frente a ciertas contingencias futuras.

En definitiva los precios de los activos Arrow-Debreu son una herramienta útil porque pueden usarse para valorar cualquier activo (real o financiero) sin emplear explícitamente las probabilidades asociadas a cada estado. Es aquí donde se puede introducir la *ecuación fundamental de la valoración*[3]:

[3] la ecuación de valoración tradicional es:

$$P_j = E\left[(FD)(X_j)\right]$$

donde E es el operador de expectativas, FD es algún factor de descuento y X_j los pagos futuros del activo j. La atención que se le debe dar al factor de descuento es fundamental, pues si se modela en un escenario de ausencia de arbitraje, se garantizara que dicho factor de descuento exista y sea positivo. La literatura

$$V_j = \sum_{s=1}^{S} \phi_s X_{js},$$

donde X_{js} es el pago (flujo de caja) en unidades monetarias del activo j en el estado de la naturaleza s y ϕ_s al precio del activo Arrow-Debreu que paga una unidad monetaria en el estado s y cero en caso contrario (esto se da bajo el supuesto implícito de ausencia de arbitraje). La interpretación intuitiva es que nos dice simplemente que el precio o valor de cualquier activo j consistente con la ausencia de arbitraje es el valor actual de sus pagos futuros, donde los factores de descuento reflejan tanto la incertidumbre de cada estado donde se generan los flujos de caja como el valor temporal del dinero, y vienen recogidos por los precios de los activos Arrow-Debreu. La debilidad de dicha expresión viene del hecho de cómo definir apropiadamente el número de estados de la naturaleza futuros en que el activo genera flujos de caja, incluso se puede reducir el número de estados para simplificar más el problema, y solo se da siempre y cuando los inversionistas estén bien diversificados

Finalmente, vale la pena insistir en que las probabilidades de cada estado no son necesarias para valorar activos; los precios hoy de las unidades de consumo recibidas en los estados de la naturaleza futuros (precios Arrow-Debreu o precios de los activos contingentes elementales) son suficientes para valorar cualquier activo financiero mediante carteras replica siempre que existan tantos activos financieros con pagos linealmente independientes como número de contingencias o estados de la naturaleza. Esto último es equivalente a afirmar que siempre que existan tantos activos Arrow-Debreu como contingencias o estados de la naturaleza tendremos mercados completos.

1.2. El modelo referente de consumo bajo mercados completos.

Si bien la literatura ha ofrecido herramientas metodológicas para exponer la teoría del consumo, una de las notaciones más compacta se puede encontrar en el texto de Ljungqvist y Sargent (2012). Es partir de la concepción de equilibrio bajo estructuras de mercados completos que se desarrollara la exposición y luego se irán

---

ha denominado a dicho factor de descuento como factor de descuento estocástico, precio de los activos Arrow-Debreu, probabilidad neutral al riesgo o medida equivalente de martingala.

relajado algunos supuestos y se introducirán otras restricciones para el análisis de la teoría del consumo. Se usaran algunos ejemplos a partir de las definiciones y proposiciones anteriormente enunciadas con el fin de explicar las intuiciones necesarias para comprender el desarrollo histórico de las diferentes hipótesis que han explicado el consumo en la teoría macroeconómica.

La siguiente notación se usara para representar la incertidumbre. Sea $s_t \in \mathcal{S}^t$ el estado actual de la economía, luego sea $s^t = \{s_0, s_1, \dots, s_t\}$ la sucesión de eventos históricos, en otras palabras, es la historia hasta t, con $s^t \in \mathcal{S}^t \equiv \mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_t$. Sea $\pi(s^t)$ la probabilidad de que esta historia esté ocurriendo. Ahora el ingreso puede ser de fuente exógena o endógena, al inicio de la exposición se tomó el salario como fuente de ingresos laborales, pero ahora tomaremos un ingreso más general que puede tomar el carácter de dotación, sea $y_i^t(s^t)$ la realización individual i de la dotación-ingreso sobre la realización de la historia s^t, con $\sum_{i \in I} y_t^i(s^t) = Y_t(s^t)$ es la dotación-ingreso agregado de la economía.

1.3. Dos puntos de referencia: Autarquía y Mercados Completos.

Considerando todo el espectro de todos los posibles arreglos que se dan en el mercado, se encuentran dos extremos, la autarquía y los mercados completos.

No hay riesgo a compartir en autarquía.

El punto de partida para analizar el consumo es una economía de dotación donde el mercado de seguros para intercambiar a lo largo de los estados s_t en un punto del tiempo t dado está completamente ausente, y no hay tecnología de almacenamiento para transferir recursos a lo largo de periodos (por ejemplo, el bien de consumo es perecedero). En esta economía, se cuenta con un individuo i el cual recibe un choque de flujos de ingresos aleatoriamente $\left\{\left\{y_t^i(s^t)_{s_t \in \mathcal{S}^t}\right\}\right\}_{t=0}^{\infty}$ y no tiene otra opción más que consumir su ingreso en cada estado

$$c_t^i(s^t) = y_t^i(s^t), \text{para todo } s^t \text{ y } t, \tag{1.14}$$

y la ecuación (1.14) es a su vez la restricción presupuestaria.

Riesgo compartido en mercados completos.

Restricción presupuestaria tipo Arrow-Debreu: El modelo de referencia es una economía de dotación con un conjunto completo de seguros y mercados financieros.

Aquí el agente se enfrenta en el periodo cero a la restricción presupuestaria del tipo Arrow-Debreu:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t \in \mathcal{S}^t} p_t(s^t)\left[c_t^i(s^t) - y_t^i(s^t)\right] = 0, \text{para todo } i \in I \tag{1.15}$$

Por tanto, cada posible transferencia del ingreso a lo largo de los estados y tiempo es posible, en la medida que el gasto de consumo descontado es igual al ingreso descontado, para cada individuo.

Solución del planificador social: A partir del Primer Teorema del Bienestar, se puede caracterizar las asignaciones de equilibrio de los mercados completos como la solución del problema de Pareto de la siguiente forma:

$$\max_{\{c_t^i(s^t)\}} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t \in \mathcal{S}^t} \beta^t\, \pi(s^t) \sum_{i \in I} \alpha^i\, u\left(c_t^i(s^t)\right)$$

sujeto a

$$\sum_{i \in I} c_t^i(s^t) = \sum_{i \in I} y_t^i(s^t) \rightarrow C_t(s^t) = Y_t(s^t), \text{para todo } t, s^t \in \mathcal{S}^t$$

donde α son las ponderaciones del planificador, y tiene solución

$$\beta^t \pi(s^t) \alpha^i u'\left(c_t^i(s^t)\right) = \theta_t(s^t)$$

Donde θ es el precio de valoración de tipo Arrow-Debreu, lo que implica que para cualquier par de agentes (i, j) la ratio de la utilidad marginal es constante en cada periodo y estado del mundo

$$\frac{u'\left(c_t^i(s^t)\right)}{u'\left(c_t^j(s^t)\right)} = \frac{\alpha^j}{\alpha^i}, \text{para todo } s^t, (i, j) \tag{1.16}$$

La cual es precisamente la definición de riesgo compartido completo (o seguro completo).

Por ejemplo para el caso de la función CRRA, donde $u\left(c_t^i(s^t)\right) = \frac{c_t^i(s^t)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}$, de la cual se deriva de (1.16) que

$$\frac{c_t^i(s^t)}{c_t^j(s^t)} = \left(\frac{\alpha^i}{\alpha^j}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

por tanto, la ratio de las asignaciones de consumo es constante. Sumando sobre $i = 1, \dots, I$, esto implica claramente

$$c_t^j(s^t) = \left[\frac{(\alpha^j)^{\frac{1}{\gamma}}}{\sum_{i=1}^{I}(\alpha^i)^{\frac{1}{\gamma}}}\right]\sum_{i=1}^{I} c_t^i(s^t) = \left[\frac{(\alpha^j)^{\frac{1}{\gamma}}}{\sum_{i=1}^{I}(\alpha^i)^{\frac{1}{\gamma}}}\right] C_t(s^t) \qquad (1.17)$$

Así, el consumo individual sigue perfectamente la trayectoria del consumo agregado para todos los hogares. En general, *full risk sharing* no significa que el consumo sea constante a lo largo del tiempo y los estados, ya que en la ecuación (1.17) se observa que el consumo individual es constante a lo largo del tiempo y los estados si y solo si el consumo agregado es constante; incluso si la dotación agregada es constante, con oferta de trabajo flexible y no-separabilidad entre consumo y ocio en las preferencias, el consumo no será constante a lo largo del tiempo. De hecho, la única afirmación que siempre es verdadera bajo mercados completos es que la ratio de la utilidad marginal para cualquiera par de agentes es constante en el tiempo. Igualmente, debe notarse que este resultado se cumple para una economía con producción y con acumulación de capital. En los mercados completos hay una separación perfecta entre la producción de recursos y la distribución del producto entre los hogares para el consumo. Mientras que en autarquía hay una correspondencia perfecta entre producción y consumo.

Implicaciones empíricas.

La hipótesis de *full risk sharing* puede ser evaluada empíricamente. Bajo preferencias CRRA, por ejemplo, la ecuación (1.17) implica que el cambio logaritmo del consumo individual debe de ser igual al cambio del logaritmo en el consumo agregado, para cada individuo, en cada periodo. La estimación de dicha hipótesis con micro datos seria la siguiente relación

$$\Delta \ln c_t^i = b_1 \Delta \ln C_t + b_2 \Delta \ln y_t^i + \varepsilon_t^i,$$

donde y_t^i es el ingreso corriente individual, entonces la hipótesis de *full risk sharing* implica que $b_1 = 1, b_2 = 0$; en contraste con la predicción de la "hipótesis de autarquía" la cual implica que $b_1 = 0, b_2 = 1$. En general, ambas son rechazadas, aunque los datos parecen ser más cercanos al *full risk-sharing* en algunos contextos (ver Mace (1991) y Cochrane (1991)). Por tanto, a nivel empírico un buen modelo para el consumo se encuentra entre la "hipótesis de autarquía" y la hipótesis de full risk sharing, por ejemplo, debe de ser un modelo en donde los agentes tengan acceso "parcial" a un seguro de consumo.

1.4. Restricciones exógenas en el intercambio: La Economía de Bonos.

La formulación secuencial de los mercados completos parte de la restricción tipo Arrow-Debreu (1.15) y se desarrolla de manera secuencial. Por ejemplo, una sucesión de restricciones presupuestarias, para cada periodo t y la historia s^t, de la forma

$$c_t^i(s^t) + \sum_{s_{t+1} \in S_{t+1}} q_t(s_{t+1}, s^t) a_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t) = y_t^i(s^t) + a_t^i(s^t), \tag{1.18}$$

y teniendo una condición de esquema no Ponzi que descarta excesivos niveles de deuda en cada nodo. Aquí, $q_t(s_{t+1}, s^t)$ es el precio en el periodo t y el estado s^t de un activo que paga una unidad de consumo en el siguiente periodo, independientemente de la realización del estado s_{t+1}, por ejemplo, es un bono de un periodo. Por otro lado, se puede demostrar que la secuencia de restricciones en (1.18). Además, no se consideran restricciones de crédito, y solamente se impone la condición de esquema No Ponzi estableciendo que los límites de los activos no pueden ser negativos, por ejemplo

$$\lim_{t \to \infty} q_t(s_{t+1}, s^t) a_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t) \geq 0,$$

que es equivalente a la restricción Arrow-Debreu[4] (1.15). En otras palabras, el agente es aislado de cada estado contingente en el mercado de seguros y tiene únicamente acceso a un simple instrumento financiero para transferir recursos a lo largo del tiempo. La falta de oportunidades en cuanto a seguros induce al consumidor a tener una cierta cantidad del bono que compró para poder suavizar consumo a lo largo del tiempo.

La optimalidad implica que la anterior desigualdad débil se cumple con igualdad estricta (Flavin, 1981). Para simplificar la notación de las siguientes secciones, se

[4] dicha prueba se encuentra en el capítulo 8 de Ljungqvist and Sargent (2012).

supondrá fluctuaciones en la dotación agregada $Y_t(s^t)$, ya sea determinista o estocástica, por tanto

$$q_t(s^t) = q \equiv \frac{1}{1+r} = \frac{1}{R}$$

donde r es la tasa de interes de un bono libre de riesgo, de esta forma se puede reformular la restricción presupuestaria con una notación mucho más ligera

$$a_{t+1} = R(y_t + a_t - c_t) \tag{1.19}$$

Cuando se utiliza la ecuación (1.19) es claro que se omite explícitamente la dependencia en las historias individuales. En este caso se enfocaría el problema en un único individuo, por lo que se omite el subíndice i. Con esto justificado, se podrá exponer de forma más ligera a continuación las hipótesis del consumo.

1.5. El modelo de ciclo de vida e ingreso permanente.

El modelo de ciclo de vida e ingreso permanente ha sido el caballo de batalla en la teoría macroeconómica para el análisis del comportamiento dinámico del consumo. La hipótesis del ingreso permanente y la hipótesis del ciclo de vida fueron introducidas en los años 1950s por Modigliani and Brumberg (1954) y Friedman (1957), hasta el día de hoy en la literatura siguen siendo los referentes para construir y explicar la teoría del consumo. Ambas hipótesis en su conjunto se definen en un marco en donde los individuos maximizan su utilidad a lo largo del tiempo dado un conjunto de oportunidades de intercambio intertemporal. El consumo será tratado en diferentes puntos del tiempo tratado como diferentes mercancías, así que, dadas unas oportunidades de intercambio intertemporales, el consumo en un periodo dado depende del total de recursos (del ciclo de vida y de los precios intertemporalmente). La elección de consumo optimo serán tales que la ratio de las utilidades marginales (esperadas) de consumo en diferentes periodos de tiempo serán igualas a la ratio de precios intertemporales. Por tanto, la relación entre consumo y recursos totales es probable que dependa de las preferencias (y en particular de la elasticidad de sustitución intertemporal y la tasa a la cual el futuro es descontado) y de la tasa de interés (en la medida que representan precios intertemporales). En caso de introducir la incertidumbre, esto haría que el riesgo entre potencialmente como un determinante importante en el consumo.

El modelo de ciclo de vida e ingreso permanente en su forma más simple considera un horizonte de tiempo finito, no incertidumbre y preferencias muy simples. Esto se hace con el fin de obtener soluciones cerradas para el consumo que dependerán no solamente del ingreso corriente pero también de la cuantía total de recursos disponibles para un individuo y los precios intertemporales. En la realidad los consumidores se enfrentan a ambientes intertemporales más complicados, si bien el modelo en su forma simple arroja intuiciones, para el análisis de política económica se debe de hacer más sofisticada su especificación.

A continuación se explicara cada hipótesis de forma sencilla pero sin perder las intuiciones originales de los artículos seminales anteriormente citados:

1.5.1. La hipótesis del ingreso permanente (PIH).

Un modelo de dos periodos.

La idea aquí es construir un modelo simple pero que tenga las intuiciones para comprender la hipótesis del ingreso permanente. Considere un modelo de dos periodos donde los hogares eligen consumir (c_1, c_2) para solucionar

$$\max_{\{c_1,c_2\}} u(c_1, c_2) = \ln c_1 + \beta \ln c_2$$

sujeto a

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = \left(1 + \frac{1}{1+r}\right) y^P + y^T$$

donde β es el factor de descuento, r es la tasa de interés. El término y^P es el componente permanente del ingreso, por ejemplo, ingreso que se le concede al individuo en cada periodo, mientras que y^T es el componente transitorio, por ejemplo, el componente que se gana solo en el periodo $t = 1$ pero no en el periodo $t = 2$. Se puede pensar y^P como un salario base y y^T como comisiones o una lotería ganada. Claramente, y^T podría ser negativo, por ejemplo, una pérdida de capital en inversiones financieras. Solucionando este problema

$$\mathcal{L}(c_1, c_2, \lambda) = \ln c_1 + \beta \ln c_2 + \lambda \left[\left(1 + \frac{1}{1+r}\right) y^P + y^T - c_1 - \frac{c_2}{1+r}\right]$$

cuyas condiciones de primer orden son

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial} = 0 \rightarrow \frac{1}{} = \lambda$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = 0 \rightarrow \ \beta \frac{1}{c_2} = \frac{\lambda}{1+r}$$

las cuales llevan a la ecuación de Euler

$$\frac{c_2}{c_1} = \beta(1+r)$$

Usando luego la ecuación de Euler en la restricción presupuestaria vital, se llega a que el consumo optimo c_1^* (similarmente para c_2^*)

$$c_1^* = \frac{1 + \frac{1}{1+r}}{1+\beta} y^P + \frac{1}{1+\beta} y^T$$

$$c_2^* = \frac{\beta(2+r)}{1+\beta} y^P + \frac{\beta(1+r)}{1+\beta} y^T.$$

Ahora, simplifiquemos con el supuesto de que $\beta(1+r) = 1$. De la ecuación de Euler, esto significa que los efectos compensación de la tasa de paciencia e interés sobre el ahorro se cancelan exactamente y el hogar elige óptimamente perfectamente suavizar el consumo a lo largo de los dos periodos $c_1 = c_2 = c$. Notar que y^T puede ser muy grande, lo que significa que el perfil de ingreso podría ser muy empinado, y sin embargo, el consumo ser perfectamente suavizado. El individuo va a pedir prestado lo suficiente como para que en el primer periodo al enfrentarse al ingreso futuro se logre igualar el consumo a lo largo de los periodos $t = 1$ y $t = 2$. Imponiendo luego la restricción paramétrica $\beta(1+r) = 1$ o $\beta = \frac{1}{(1+r)}$, llegamos a

$$c^* = y^P + \frac{1+r}{2+r} y^T.$$

Esta sencilla ecuación explica como el consumo reacciona de forma diferente a cambios permanentes y transitorios en el ingreso. Suponga que y^P cambia por una cuantía ΔY, es decir, si el cambio en el ingreso es permanente. Entonces el consumo cambiara, respectivamente, por

$$\Delta c^* = \Delta Y$$

luego si el cambio en el ingreso es transitorio, donde la aproximación que usaremos es para $r \cong 0$, tendremos

$$\Delta c^* = \frac{1+r}{2+r} \Delta Y \cong \frac{\Delta Y}{2}$$

En otras palabras, el consumo responde mucho más a cambios permanentes en el ingreso comparado a los cambios transitorios en el ingreso. Este resultado es el corazón de la llamada "*Permanent Income Hypothesis*" formulada por Friedman (1957). La exposición original de Friedman (1957,1963) de la HIP implica un marco muy flexible. El argumentó que:

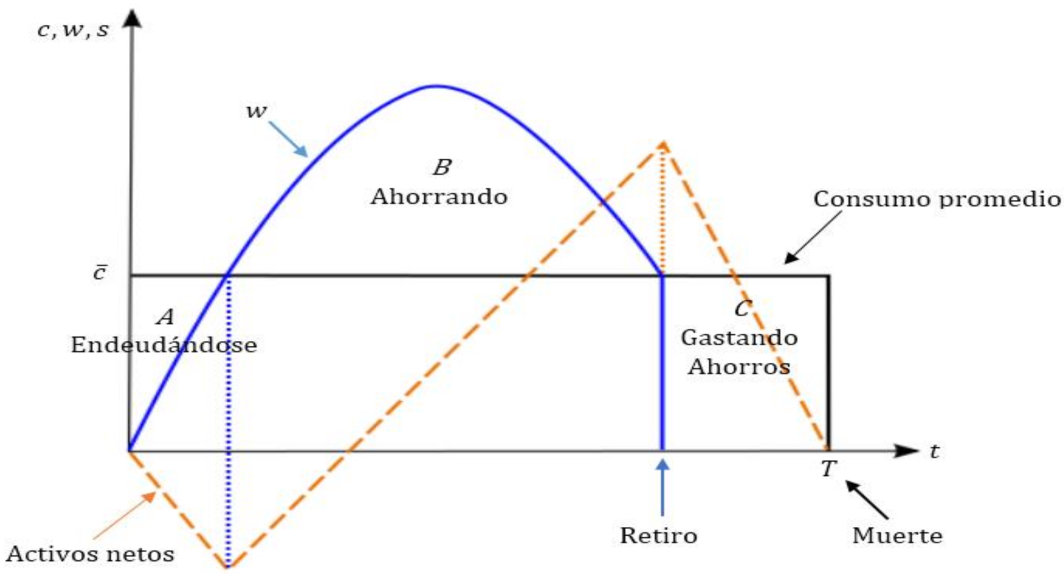
i. Cuando se calcula el ingreso permanente, el factor de descuento usado para obtener el valor presente del ingreso futuro es un concepto altamente subjetivo, que no lleva necesariamente cualquier relación con las tasas de interés de mercado (por ejemplo, Friedman (1963) argumentó para una tasa anual de descuento de alrededor de 33 por ciento, implicando un horizonte de tiempo de alrededor de tres años).
ii. Diferentes tasas de descuento podrían ser aplicadas a diferentes tipos de ingreso.
iii. El ingreso permanente podría esperarse variar en el futuro, en la medida que nueva información es adquirida.

Tal marco permite incorporar la incertidumbre (acerca del ingreso futuro en general, o sobre fuentes particulares del ingreso, incluso sobre las preferencias futuras) para tener una gran influencia en el comportamiento.

1.5.2. La hipótesis del ciclo de vida (LCH).

El horizonte de tiempo de corto plazo implicado por el punto i. de la PIH es una forma posible en la cual el marco permite a los hogares responder a tal incertidumbre. En contraste con la LCH de Modigliani and Brumberg (1954), el horizonte de tiempo es el ciclo de vida esperado restante, y la elección es gobernada por la proposición de que el consumidor representativo elegirá consumir a una tasa estable razonable, cercana a su consumo promedio de vida anticipado. Esto se puede representar gráficamente de la siguiente forma:

Figura 1.1 Diagrama de “Modigliani” del ciclo de vida.



La figura 1.1 representa la LCH de un individuo o una familia desde el momento en que comienza a obtener ingresos. En esta figura se representa el hecho de que los consumidores intentan suavizar su consumo a lo largo de su ciclo de vida, para lograr esto deben ahorrar y desahorrar en dicho periodo de tiempo, para así tener un consumo parejo, que se representa por medio de $\bar{c}$[5]. La trayectoria de ingresos es creciente y alcanza un máximo, para luego decrecer hasta el periodo de retiro hasta que los ingresos caen a cero cuando el consumidor se jubila del mercado laboral. El área A muestra la acumulación de deuda, pues los ingresos son menores a $\bar{c}$, la línea recta hacia abajo representa el total de activos (son pasivos en este caso). En el área B al percibir mayores ingresos el consumidor, éste comienza a pagar la deuda y los los pasivos pasan a la dinámica de acumulación de activos, siendo este el ahorro que se gastara después del retiro, consumiéndose al final todos sus ahorros y terminando así con cero activos[6].

[5] Se puede apelar a dicho caso si la elasticidad intertemporal de sustitución es nula, implicando que el ahorro no reacciona ante cambios en la tasa de interés. Se puede justificar cuando la tasa de descuento y la tasa de interés son iguales y no hay restricciones de liquidez.

[6] Si la tasa de interés fuese nula, la suma de *A* más *C* debe ser igual a *B*. Si fuese positiva es la suma de los valores presentes de dichas áreas lo que debe igualarse a cero.

La LCH, es decir, el diagrama de "Modigliani" puede ser descrito fácilmente por la siguiente configuración, que es básicamente bajo la cual se desarrolla la literatura hoy en la teoría del consumo:

$$Max\, E_t \sum_{j=0}^{T-t} \beta^{t+j} U\left(C_{t+j}, z_{t+j}, v_{t+j}\right)$$

$$s.t. \quad W_{t+j+1} = W_{t+j}\left(1 + R^*_{t+j}\right) + Y_{t+j} - C_{t+j},$$

$$W_{t+j} = \sum_{i=1}^{N} A^i_{t+j}\,,$$

$$R^*_{t+j} = \sum_{i=1}^{N} \omega^i_{t+j} R^i_{t+j}\,,$$

$$W_T \geq 0$$

donde el factor de descuento, β, varia en el tiempo – reflejando probabilidades de supervivencia; las variables observables que afectan la utilidad, z, puede ser una variable de elección (ocio) o no (demográficas); las variables no observables v. Finalmente, hay N activos cuyos rendimientos no dependen de la posición adoptada por el hogar (corto o largo plazo).

Las implicaciones de la configuración anterior y de la figura 1.1 en una economía sin crecimiento en la población, todos los individuos tienen el mismo perfil de ingresos y la cantidad de individuos en cada grupo de edad es la misma, esto significa que en el agregado el ahorro neto es nulo, pues lo que un grupo de individuos ahorra, otros lo desahorran o se endeudan ($A + C = B$). Mientras que en una economía con crecimiento las implicaciones son diferentes, pues si hay crecimiento en la población o en la productividad, es la población más joven de la distribución la que tiene un papel importante, pues las áreas A y B tendrán mayor relevancia y serían más grande que el área C. De esta forma, el crecimiento afecta al ahorro. En economías con mayor crecimiento se tendrá un tamaño de población mayor en el ciclo de vida A y B, siendo importante que sean ambas crecientes en el tiempo y que dicho ahorro neto de esta población sea mayor que el desahorro de la población que se encuentra en el ciclo de vida C. Y aunque esto ocurre cuando la población aumenta o debido a aumentos en productividad, puede ocurrir lo contrario, el mayor crecimiento sería el causante de las elevadas tasas de ahorro (la causalidad entre crecimiento y ahorro puede ser bidireccional). Las implicaciones de la LCH a la hora de tomar decisiones de política económica son importante en muchos aspectos de la sociedad, por ejemplo, decisiones de mercado laboral, educación y sistemas de pensiones.

1.6. El caso de horizonte infinito.

El supuesto de horizonte infinito es hecho en macroeconomía básicamente por dos razones: Primero, es un supuesto más conveniente que el horizonte de tiempo T, desde que el problema sea más fácil de resolver. Segundo, el problema de horizonte finito corresponde a un individuo que no posee ningún altruismo hacia sus descendientes, es decir, pone una ponderación de cero en su utilidad después de estar muerto.

Consideremos ahora un individuo que si tiene altruismo, pero vive dos periodos solamente y descuenta su propia utilidad por un factor de descuento β y la utilidad de sus hijos con un factor de descuento $\beta\delta \leq \beta$. La función objetivo del agente es

$$\begin{aligned} U = u(c_0) + \beta u(c_1) & \\ & + \beta^2\delta\{u(c_2) + \beta u(c_3) \\ & + \beta^2\delta[u(c_4) + \beta u(c_5) + \beta^2\delta(u(c_6) + \beta u(c_7) + \cdots)]\} \\ & = u(c_0) + \beta u(c_1) + \delta[\beta^2 u(c_2) + \beta^3 u(c_3)] \\ & + \delta^2[\beta^4 u(c_4) + \beta^5 u(c_5)] + \delta^3[\beta^6 u(c_6) + \beta^7 u(c_7)] + \cdots \end{aligned}$$

Ahora supongamos que $\delta = 1$, por ejemplo, es el caso de *altruismo perfecto*. El agente se preocupa de igual forma por de sí mismo y sus descendientes en el futuro. Entonces, las preferencias del individuo se vuelven:

$$\begin{aligned} U = u(c_0) + \beta u(c_1) + \beta^2 u(c_2) + \beta^3 u(c_3) + \beta^4 u(c_4) + \beta^5 u(c_5) + \beta^6 u(c_6) & \\ + \beta^7 u(c_7) + \cdots = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t). & \end{aligned}$$

En otras palabras, el horizonte finito del agente con perfecto altruismo hacia sus descendientes corresponde al agente que vive infinitamente.

Consideremos entonces un agente con un horizonte de planificación infinito que se enfrenta a una sucesión infinita de ingresos $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$, la cual es perfectamente conocida desde el periodo $t = 0$. Y esto es igual a

$$y_t = \begin{cases} y^P + y^T & \text{para } t = 0 \\ y^P & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

este agente soluciona el siguiente problema de consumo/ahorro:

$$\max_{\{c_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t$$

sujeto a

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} c_t = y^T + \left(\frac{1+r}{r}\right) y^P$$

cuya ecuación de Euler es siempre

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \beta(1+r)$$

Imponiendo nuevamente $\beta(1+r) = 1$ llegamos al mismo resultado: consumo c_t es constante e igual a c^* en ambos periodos. Por tanto, podemos hallar c^* de la restricción presupuestaria al desarrollar la suma infinita en el lado izquierdo y obtenemos:

$$c^* = y^P + \frac{r}{1+r} y^T.$$

Esta solución muestra que la PIH operando es extrema de alguna manera. Cambios permanentes en el ingreso son reflejados "uno por uno" en el consumo, mientras que los cambios transitorios son reflejados proporcionalmente por el factor $\frac{r}{1+r}$ el cual para $r \cong 0$ es también muy cercano a cero. Por tanto, en un modelo de horizonte infinito, el consumo básicamente no responde a cambios transitorios en el ingreso.

Se debe hacer notar que en el modelo con dos periodos cambios en el ingreso transitorio trasladados en el consumo con coeficiente $1/_2$ y en el modelo con horizonte infinito con coeficiente $1/_\infty = 0$. En un modelo de N periodos, un cambio en el ingreso toma lugar en solo uno de los N periodos afectando el consumo proporcionalmente en $1/_N$. Si el cambio ocurre para un periodo $M < N$, el coeficiente de transmisión para el consumo es aproximadamente $M/_N$ y si $M = N$ (y por tanto el cambio en el ingreso es permanente), este coeficiente de transmisión es uno.

1.7. El caso particular de Hall: El consumo como un paseo aleatorio.

Se supone que los consumidores conocen la naturaleza estocástica de su entorno[7]. El artículo de Hall (1978) muestra una versión estricta de la PIH, por lo que se trata de un caso particular especial de una economía de bonos con dos supuestos claves: 1) los hogares tienen utilidad cuadrática

$$u(c) = b_1 c_t - \frac{1}{2} b_2 c_t^2,$$

y 2) la tasa de interés del bono de un periodo es igual a la inversa del factor de descuento o simplemente que $\beta(1+r) = 1$. Se debe notar que para que la función de utilidad sea bien comportada $u' > 0$ requiere que $c_t < \frac{b_1}{b_2}$ y $u'' < 0$ requiere que $b_2 > 0$.

Dadas estas hipótesis, se obtiene el resultado de que el Consumo sigue un paseo aleatorio. A partir de la ecuación de Euler tenemos:

$$b_1 - b_2 c_t = \beta(1+r) E_t(b_1 - b_2 c_{t+1}) \Rightarrow E_t c_{t+1} = c_t \tag{1.20}$$

de lo anterior se obtiene el conocido resultado del consumo como una martingala[8]. Asimismo, a partir de la ley de las expectativas iteradas y la propiedad de la martingala:

$$E_t c_{t+1} = E_t[E_{t+1} c_{t+2}] = E_t c_{t+1} = c_t,$$

Y utilizando la ley de las expectativas iteradas:

$$E_t c_{t+j} = c_t, \text{para cualquier } j \geq 0. \tag{1.21}$$

Iterando un periodo hacia adelante en la restricción presupuestaria (1.19) y reorganizando términos, obtendremos

$$c_t + \frac{1}{R} c_{t+1} = a_t + y_t + \frac{1}{R} y_{t+1} - \left(\frac{1}{R}\right)^2 a_{t+2}$$

---

[7] Vale la pena destacar algo que no se suele decir en los textos de macroeconomía, y es que la introducción de la incertidumbre en el modelo del consumo con PIH y LCH fue formalizado en los años 70s, la contribución se debe al trabajo de Bewley (1977), el cual generaliza la PIH en un ambiente con incertidumbre. Típicamente, lo que se supone es que los consumidores maximizan su utilidad esperada del ciclo vital eligiendo consumo, en un entorno más general, con ocio y partición de activos financieros.

[8] Una martingala es un proceso estocástico (por ejemplo, una secuencia de variables aleatorias) $\{x_t\}$ el cual satisface, para cada t, $E_t x_{t+j} = x_t$ para cualquier $j > 0$.

Si se continua iterando T veces y usando las expectativas condicionales para lidiar con la incertidumbre de las realizaciones futuras del ingreso (y el consumo) llegamos a la siguiente expresión

$$\sum_{j=0}^{T-1}\left(\frac{1}{R}\right)^{j} E_t c_{t+j} = a_t + \sum_{j=0}^{T-1}\left(\frac{1}{R}\right)^{j} E_t y_{t+j} - \left(\frac{1}{R}\right)^{T} E_t a_{t+T},$$

tomando el limite cuando $T \to \infty$ y usando la condición de esquema No Ponzi, y suponiendo que los hogares desean suavizar consumo siempre a lo largo del tiempo, es decir, que se usa la propiedad establecida por (1.21), llegamos a que:

$$c_t = \frac{R-1}{R}\left[a_t + \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{R}\right)^{j} E_t y_{t+j}\right] = \frac{r}{1+r}(a_t + H_t) \qquad (1.22)$$

en la última igualdad denotaremos a la riqueza humana, por ejemplo, como el valor futuro de los ingresos descontados, con H_t. Se debe recordar que la riqueza financiera es a_t. Definiendo el ingreso permanente como el valor de la anualidad[9] (por ejemplo, $\frac{r}{1+r}$) de la riqueza total (humana y financiera) $W_t \equiv (a_t + H_t)$. Por tanto, tendremos el siguiente resultado:

Si las preferencias son cuadráticas, y $\beta(1+r) = 1$, *entonces el consumo sigue un proceso estocástico de tipo martingala e iguala el ingreso permanente, por ejemplo, el valor de la anualidad de la riqueza humana y financiera.*

Para hablar sobre el **Equivalente Cierto**[10] en el consumo, se debe notar que, si se soluciona la versión no estocástica del problema de la PIH, a partir de la condición (1.20) se obtiene que $c_{t+1} = c_t$ e iterando hacia adelante en la restricción presupuestaria se obtiene,

---

[9] El valor de la anualidad es definido como la porción que, cuando se consume cada periodo, se mantiene el valor del activo constante. Se debe notar que (abstrayéndose de y_t solo para agilizar cálculos) tomando la ecuación (1.19) y reemplazando (1.22) en ella:

$$a_{t+1} = (1+r)(a_t - c_t) = (1+r)\left(a_t - \frac{r}{1+r}a_t\right) = a_t$$

[10] Se trata de un término utilizado en la teoría de la Utilidad Esperada, con la que se busca predecir el comportamiento de los individuos en situaciones de incertidumbre. El equivalente cierto C(p) de una lotería p es aquella cantidad de riqueza que le deja indiferente entre jugar p o tener seguro ese nivel de riqueza.

$$c_t = \frac{r}{1+r}\left(a_t + \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{R}\right)^j y_{t+j}\right).$$

Comparando con la ecuación (1.22), la ecuación de arriba sugiere que el consumo satisface el *equivalente cierto* en el sentido de que para obtener la solución del problema estocástico uno puede: 1) solucionar el problema determinístico y 2) sustituir las expectativas condicionales forzando a las variables y_{t+j}. Dicho de otra manera, la varianza y los momentos más elevados del proceso del ingreso no importan en la determinación del consumo. Esta propiedad desciende directamente de que la función de utilidad sea cuadrática.

La popularidad del artículo de Hall radica en que fue de las primeras contribuciones que exploto la ecuación de Euler y el hecho de que tal enfoque no requiere de la especificación completa del entorno en el cual el consumidor vive, o incluso restricción presupuestaria completa. Además, el enfoque es robusto a la presencia de varias imperfecciones en algunos mercados intertemporales. Y mientras la especificación con una función de utilidad cuadrática lleva a una ecuación lineal para el consumo, especificaciones alternativas, con preferencias más plausibles, son fácilmente introducidas.

El precio que se pagar por usar el enfoque de la ecuación de Euler, es que no se obtienen soluciones cerradas para el consumo. Un enfoque que se va más allá de la ecuación de Euler es el importante artículo de Flavin (1981), quien toma el mismo marco teórico que Hall (1978), y supone que ningún otro activo está disponible para el consumidor (igualmente que en Bewley (1977)). Sin embargo, Flavin desarrolla una solución para el consumo. Para hacerlo, ella especifico completamente el entorno estocástico en el cual el consumidor vive y usa particularmente preferencias simples. En particular, Flavin (1981) supone que la única variable estocástica es el ingreso laboral, que las preferencias sean cuadráticas y que el consumidor puede ahorrar o pedir prestado con un solo activo a una tasa de interés fija. Bajo estas condiciones, Flavin muestra que el consumo es igual al ingreso permanente, y esto es definido como el valor presente del ingreso corriente y el ingreso futuro esperado.

$$c_t = \frac{r}{1+r}\left(a_t + \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^j E_t\big(y_{t+j}\big|\, \mathcal{F}_t\big)\right),$$

donde $\mathcal{F}_t$ es la información disponible para el consumidor en el momento t. La ecuación anterior hace claras las implicaciones del modelo: *el consumo depende del valor presente descontado del ingreso futuro esperado. La tasa de interés juega el papel importante de convertir recursos futuros a presentes y por tanto constituye un determinante del consumo*.

1.8. La dinámica del consumo.

A continuación se explicara la dinámica del consumo siguiendo a Flavin (1981). A partir de (1.22), el cambio en el consumo en el periodo t es igual a

$$\Delta c_t = c_t - c_{t-1} = c_t - E_{t-1}c_t = \frac{r}{1+r}[W_t - E_{t-1}W_t], \tag{1.23}$$

donde se ha usado la propiedad del paseo aleatorio. Luego, se usa la definición de la riqueza total W_t para poder definir la innovación (por ejemplo, cambio no esperado) en el ingreso permanente, en el periodo t como

$$W_t - E_{t-1}W_t = a_t - E_{t-1}a_t + \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^j \big[E_t y_{t+j} - E_{t-1}\big(E_t y_{t+j}\big)\big],$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^j (E_t - E_{t-1})y_{t+j}, \tag{1.24}$$

aquí se ha usado la ley de las expectativas iteradas $E_{t-1}\big(E_t y_{t+j}\big) = E_{t-1}y_{t+j}$, y el hecho de que $a_t = E_{t-1}a_t$, desde que no haya incertidumbre en el periodo t sobre la evolución de la riqueza en el siguiente periodo: simplemente es mirar a la restricción presupuestaria (1.19). Reemplazando la expresión (1.24) en (1.23) se llega a que el cambio en el consumo

$$\Delta c_t = \frac{r}{1+r}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^j (E_t - E_{t-1})y_{t+j}. \tag{1.25}$$

La ecuación (1.25) establece el siguiente útil resultado:

Bajo la PIH, el cambio en el consumo entre $t-1$ y t es proporcional a la revisión en los ingresos esperados debido a la nueva información ("news") devengados en el mismo intervalo de tiempo.

1.9. El comportamiento del ahorro.

Una vez considerado el consumo, es hora de mirar qué ocurre con el ahorro. Aquí seguiremos a Campbell (1987), ya que notó que la implicación de (1.25) es que el ahorro predice cambios futuros en el ingreso, esto es lo que se conoce en la literatura como el motivo "*Saving for a Rainy Day*". Supóngase por facilitar un poco la exposición que r es constante. Definiendo los ahorros como la diferencia que hay entre los ingresos laborales derivados de la riqueza humana (capital humano) y la riqueza no-humana con respecto al consumo

$$s_t = y_t + ra_t - c_t, \tag{1.26}$$

tomando la restricción presupuestaria[11] $a_{t+1} = (1+\mathrm{r})a_t + y_t - c_t$

$$a_t(1+r) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_{t+j}}{(1+r)^j} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y_{t+j}}{(1+r)^j} + \lim_{T\to\infty} \frac{a_{t+T+1}}{(1+r)^T}$$

Y supóngase que el consumidor desea suavizar consumo en todo momento del tiempo, además, imponiendo la condición de juego no Ponzi

$$\bar{c} = r\left[a_t + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y_{t+j}}{(1+r)^{j+1}}\right] \tag{1.27}$$

y reemplazando (1.27) en (1.26) tenemos la siguiente expresión para el ahorro

$$s_t = -\frac{r}{1+r}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_{t+j} - y_t}{(1+r)^j},$$

la forma de expresar los ahorros es escribiendo la expresión en diferencias $\Delta x_{t+j} = x_{t+j} - x_{t+j-1}$ de la siguiente forma, pero primero tomando la expresión con la tasa de interés:

$\left(\left(\frac{1}{1+r}\right) - \left(\frac{1}{1+r}\right)^2\right) = \left(\frac{1}{1+r}\right)\left(1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)\right) = \frac{r}{(1+r)^2}$; $\left(\frac{1}{1+r}\right)^2\left(1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)\right) = \frac{r}{(1+r)^3}$ y así sucesivamente.

$$s_t = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Delta y_{t+j}}{(1+r)^j}. \tag{1.28}$$

La ecuación (1.28) tiene una interpretación interesante, y es que muestra que el ahorro será tomado para compensar las caídas (no esperadas) en el ingreso. Esto podría ser temporal (por ejemplo, debido a periodos de desempleo) o permanentes

---

[11] Habíamos tomado (1.19) que es igual a $a_{t+1} = R(y_t + a_t - c_t)$. Recuérdese que la forma en la que se escriben los activos dependen de cómo se remuneran los pagos de éstos, si al principio del periodo o al final. En (1.19) se usa un bono de cupón cero con un factor de descuento de $q = \frac{1}{1+r}$. Mientras que para la restricción presupuestaria $a_{t+1} = (1+\mathrm{r})a_t + y_t - c_t$ se considera un bono que se intercambia a un precio de 1 hoy y obtiene una tasa de interés con rendimiento bruto de $(1+r)$ mañana.

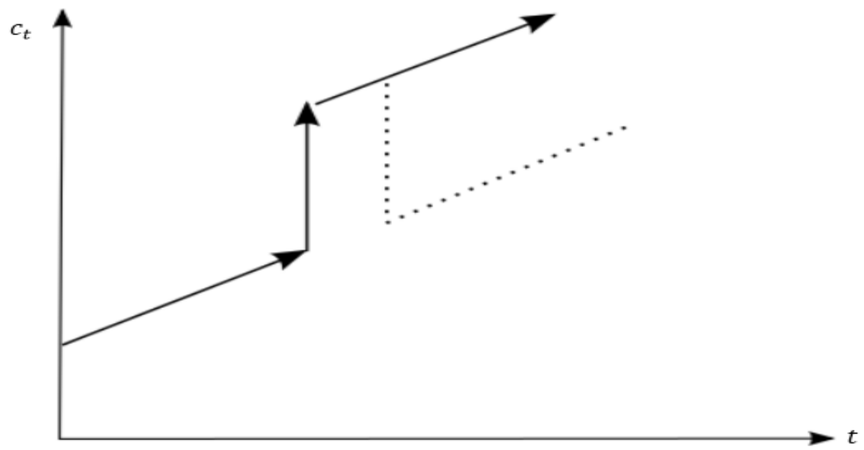
(por ejemplo, debido al periodo de retiro de las familias). Así, que llevando la abstracción a una economía que está creciendo, el ahorro permite a que el consumo se mantenga constante durante toda la vida.

1.10. La respuesta del consumo a cambios en el ingreso.

Una vez se explicó el comportamiento de la dinámica del consumo y el ahorro, es importante destacar la importancia que hay en la distinción entre los cambios permanentes y transitorios en el ingreso por parte de las instituciones para reformas tributarias que afecten el ingreso disponible (Blinder and Deaton (1985) y Poterba (1988)). Por otro lado, Jappelli and Pistaferri (2010) realizan una amplia revisión de la literatura que sugiere que si los acuerdos en los mercados financieros y las restricciones de liquidez son vinculantes, los cambios en los ingresos que son predecibles pueden tener un efecto significativo sobre el consumo. Sugieren que los cambios en el sistema distributivo pueden tener un impacto considerable sobre el gasto en consumo.

La figura 1.2 clarifica un poco mejor la cuestión de los choques de los ingresos de tipo transitorio o permanente en el consumo, pues la dinámica del consumo está determinado por los cambios en r y β, el choque positivo del ingreso permanente lleva a un desplazamiento del segmento, y el consumo seguirá creciendo en la misma tendencia. En contraste, el choque temporal llevaría a aumentar el consumo por un periodo de tiempo y luego vuelve a su senda anterior. Debe notarse que si el incremento permanente se anticipa, el consumo comenzara a incrementar en el tiempo, y se desplazara al segmento superior suavemente cuando el incremento en el ingreso toma lugar

Figura 1.2 El efecto en el consumo de choques permanentes y transitorios al ingreso.



Básicamente, la literatura en este sentido sobre la respuesta del consumo se centra en dos aspectos: 1) cambios anticipados en el ingreso, si son aumentos o disminuciones previstas y 2) cambios no anticipados en el ingreso, si son transitorios o permanentes. Por esta razón, se enunciara a continuación algunos trabajos que abordan estas cuestiones a nivel empírico:

1) Cambios anticipados en el ingreso.

Una gran cantidad de trabajos empíricos hallan que el consumo privado presenta sensibilidad a las variaciones del ingreso corriente, al contrario de lo que propone la hipótesis del ingreso permanente, según la cual el consumo está determinado por el ingreso permanente, habitualmente definido como el ingreso medio o esperado, o el valor de anualidad de los recursos a obtener a lo largo de la vida (ver Deaton (1992)). En la mayoría de los casos, este "exceso de sensibilidad" (***excess sensitivity***) del consumo al ingreso corriente ha sido atribuido a las restricciones al crédito que enfrentan los hogares, lo que implica que al aliviarse tales restricciones el consumo sería menos sensible al ingreso corriente. Los estudios empíricos parecen indicar que el exceso de sensibilidad del consumo es relativamente bajo en Canadá y Estados Unidos, algo más alto en el Reino Unido y más alto aún en España, Francia e Italia. De hecho, en el trabajo de Dynan, Elmendorf and Sichel (2006), se ha documentado la reducción del exceso de sensibilidad del consumo en Estados Unidos, hecho que se atribuye a la desregulación financiera.

En los primeros estudios empíricos que testean esto, tenemos a Hall (1978) quien utilizo series macroeconómicas para el periodo comprendido entre 1948-1977 para U.S. Su experimento fue usar preferencias cuadráticas. Encontró que el coeficiente de la tasa de crecimiento del ingreso rezagado fue estadísticamente significativo, pero la restricción de ortogonalidad fue rechazada para el precio de mercado de las acciones. Asimismo, Flavin (1981) uso series macroeconómicas para el periodo de 1949-1979 para U.S. donde especificó un proceso al ingreso y estimó conjuntamente ecuaciones de consumo e ingreso. Halló que no hay evidencia para el ***excess sensitivity***.

Por otro lado, Zeldes (1989) para el periodo de 1968-1982 y usando la base de datos de PSID, se basó en una regla de separación de muestras basado en activos para investigar el impacto de las restricciones de crédito al consumo. Donde obtuvo que el ***excess sensitivity*** se asoció a la restricción de crédito debido a la violación de la ecuación de Euler para las observaciones para las cuales la restricción era vinculante y no para las restantes.

Por otro lado, Attanasio and Weber (1995) para el periodo de 1980-1990 y usando la base de datos CEX, usaron variables de la oferta de trabajo como determinantes de la utilidad marginal del consumo para dar cuenta de las *preferencias no separables*. Hallaron que la falta de control de los indicadores de oferta de trabajo puede conducir a evidencia espuria en el ***excess sensitivity***. Finalmente, Shea (1995) para 1981-1987 uso el PSID, donde uso información pública de contratos sindicales para construir una medida específica de los hogares de la tasa de crecimiento del salario esperado, encontró que movimientos predecibles de los salarios estuvieron significativamente correlacionados con el consumo y éste respondió fuertemente a disminuciones predecibles del ingreso que a incrementos predecibles en éste (esto es inconsistente con las restricciones de liquidez y miopía).

2) Cambios no anticipados en el ingreso.

Con respeto a los trabajos empíricos para testear cambios no anticipados en el ingreso, Hall and Mishkin (1982) para el periodo de 1969-1975 usando el PSID, especificaron un proceso al ingreso y usaron restricciones de covarianza para identificar parámetros de respuesta del consumo frente a choques. Encontraron que la respuesta del consumo a innovaciones en el ingreso transitorio fue de 29% (muy alto para ser consistente con la teoría). Sin embargo, Hayashi (1985) para 1981-1982 uso un panel de hogares japoneses, en donde explotó las expectactivas subjetivas sobre el consumo y el ingreso. Concluyó que se aplica el *permanent income* a aproximadamente al 85% de la población y cambios en el ingreso explican solo una pequeña fracción de los movimientos en el gasto.

Pistaferri (2001) para el periodo 1989-1991 y usando el panel of italian SHIW, combinó realizaciones en el ingreso y expectativas subjetivas para identificar separadamente los choques transitorios y permanentes al ingreso. Encontró que los consumidores ahorran la mayor parte de los choques transitorios y muy poco de los permanentes. De la misma forma, Jappelli and Pistaferri (2006) aumentando el periodo muestral, 1987-1995 panel of the italian SHIW, explotaron las implicaciones de la teoría con una matriz de transición de consumo. Hallaron que representaciones simples de la regla de decisión de consumo fueron rechazadas, y fue revelado que los hogares suavizan choques al ingreso en menor medida que lo implicado por la *PIH.*

Finalmente el trabajo de Guvenen and Smith (2014) especificaron un proceso de ingreso con heterogeneidad e información avanzada que es resuelto en un contexto Bayesiano, concluyendo que los consumidores saben mucho sobre la evolución de su proceso de ingreso (aproximadamente el 80% de la incertidumbre sobre el componente de tendencia aleatoria fue resuelto en el primer periodo).

2. EL CCAPM (CONSUMPTION-CAPITAL ASSET PRICING MODELS).

En esta sección se introduce uno de los modelos más conocidos en la literatura referente al consumo, el CCAPM (Consumption-Capital Asset Pricing Models), el consumo ahora es una variable que explica el precio de los activos a partir de los rendimientos esperados en una inversión determinada. De hecho, es una extensión del modelo Capital Asset Pricing Model. La importancia de estos modelos radica en cómo se integra el consumo con las decisiones de inversión en el sistema financiero. Esto se hace con el fin de poder protegerse del riesgo y de la incertidumbre que subyace en los mercados, de forma, que los agentes económicos suavicen su consumo y optimicen mejor sus decisiones.

2.1. El agente representativo y el modelo de valoración de activos financieros con consumo (CCAPM).

En el mercado bursátil se negocian activos complejos como acciones y bonos, el intercambio de dichos activos financieros permite mejorar las decisiones de consumo. Tomando como referente la caracterización de mercados *completos*, es importante señalar que para *preferencias arbitrarias*, la eficiencia paretiana del equilibrio competitivo cuando se negocian activos financieros complejos depende de que el número de activos financieros linealmente independientes sea *igual* al número de estados de la naturaleza. Esto significa, que depende de que el mercado financiero sea completo y que, por tanto, cualquier activo Arrow-Debreu pueda replicarse mediante carteras de activos complejos permitiendo así lograr el patrón de consumo deseado por parte de los individuos.

En una economía con activos financieros se negocian $j = 1, \dots, N$ activos complejos (bonos y acciones) que pagan X_{js} unidades de consumo en $t = 1$ y estado $s = 1, \dots, S$. Por tanto, los pagos que ofrecen los activos financieros se negocian e intercambian entre los individuos permitiéndoles llevar a cabo el consumo en el futuro. Las funciones de utilidad son bien comportadas y tienen dotaciones de consumo en el momento presente, así como dotaciones de activos financieros.

De esta forma, cada individuo i dispone inicialmente de z_{ij}^{e} unidades del activo j y de e_{i0} unidades de consumo en $t = 0$. Cada uno de estos individuos compra el bien de consumo en el mercado de contado en $t = 0$ y, además, invierte en consumo contingente (futuro) a través de la compra de activos financieros en el mercado bursátil. Sean z_{ij} el número de unidades de cada activo j que adquiere el individuo i en equilibrio y P_j el precio (de equilibrio) del activo j en $t = 0$. En este escenario, los individuos maximizan su utilidad esperada por medio del intercambio de activos financieros que les permita optimizar su consumo en el tiempo y entre estados, de manera, que los mercados se vacíen. La diferencia que tiene este planteamiento con el modelo completo Arrow-Debreu es que el consumo futuro de cada individuo depende de su elección de cartera en dicho problema de maximización. Así, será cierto que:

$$c_{is} = \sum_{j=1}^{N} z_{ij} X_{js}\,;\ s = 1, \dots, S;\ i = 1, \dots, I \tag{2.1}$$

Igualmente el problema de maximización de la utilidad esperada al que se enfrenta cada individuo en esta economía será el siguiente:

$$\underset{\{c_{i0}, z_{ij}; j=1,\dots,N\}}{\text{Max}} \sum_{s=1}^{S} \pi_{is} U_{is}\left(c_{i0}, \sum_{j=1}^{N} z_{ij} X_{js}\right) \tag{2.2}$$

sujeto a

$$c_{i0} + \sum_{j=1}^{N} z_{ij} P_j = e_{i0} + \sum_{j=1}^{N} z_{ij}^{e} P_j. \tag{2.3}$$

Tomando el correspondiente Lagrangiano y sacando las condiciones de primer orden, obtenemos la *elección óptima de cartera para cada individuo* i que debe de satisfacer la siguiente ecuación:

$$\sum_{s=1}^{S} \pi_{is} \frac{\frac{\partial U_{is}(.)}{\partial c_{is}}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_{is} \frac{\partial U_{is}(.)}{\partial c_{i0}}} X_{js} = P_j;\ j = 1, \dots, N \tag{2.4}$$

La ecuación (2.4) es importante por su implicación. Cada individuo i ajustará su consumo del momento inicial $t = 0$ y su elección de cartera de activos financieros de tal forma que dicha igualdad se mantenga.

Ahora bien, si el mercado financiero no fuese completo, existiría la posibilidad de intercambiar unidades de consumo entre los individuos que no están disponibles a través de los activos financieros existentes. Así, negociando dichas unidades de consumo sería posible mejorar el bienestar de algún individuo sin empeorar el bienestar del resto. En definitiva, no sería posible alcanzar a través de los activos financieros existentes cualquier patrón deseado de consumo; el mercado *no es completo* y las asignaciones de consumo resultantes no serían óptimo paretianas a pesar de que (2.4) se cumple respecto a los activos financieros existentes. De acuerdo con la ecuación (2.4), cuando el mercado *no es completo*, la relación marginal de sustitución entre consumo presente y consumo futuro depende de cada individuo i. Dicha expresión se puede escribir como:

$$\sum_{s=1}^{S} \pi_{is} M_{is} X_{js} = P_j;\ j = 1, \dots, N. \tag{2.5}$$

Esta expresión recuerda la ecuación fundamental de la valoración, con la diferencia de que la variable agregada M depende, en este caso, de cada individuo i al no ser el mercado completo. Partimos entonces de la definición de estructura de mercado completo.

Otra forma alternativa de escribir (2.5) es en términos de los precios de los activos Arrow-Debreu:

$$\sum_{s=1}^{S} \phi_{is} X_{js} = P_j;\ j = 1, \dots, N \tag{2.6}$$

De esta forma, los precios de los activos Arrow-Debreu no son únicos para todos los agentes. Esto está basado en el Segundo Teorema Fundamental de la Economía Financiera:

TEOREMA 2.1 (Segundo Teorema Fundamental de la Economía Financiera): *Los precios de los activos Arrow-Debreu de no arbitraje o, alternativamente, las probabilidades neutrales al riesgo son únicas si y sólo si el mercado es completo.*

Si el mercado financiero es completo se sabe que el número de activos financieros linealmente independientes es igual al número de estados de la naturaleza. El problema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1S} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2S} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{N1} & X_{N2} & \dots & X_{NS} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{i1} \dfrac{\dfrac{\partial U_{is}(.)}{\partial c_{i1}}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_{is} \dfrac{\partial U_{is}(.)}{\partial c_{i0}}} \\ \pi_{i2} \dfrac{\dfrac{\partial U_{is}(.)}{\partial c_{i2}}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_{is} \dfrac{\partial U_{is}(.)}{\partial c_{i0}}} \\ \vdots \\ \pi_{iS} \dfrac{\dfrac{\partial U_{is}(.)}{\partial c_{iS}}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_{is} \dfrac{\partial U_{is}(.)}{\partial c_{i0}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_N \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Cuando el mercado es completo, al ser el número de activos financieros linealmente independientes igual al número de estados, la matriz de pagos del lado izquierdo de (2.7) es de rango S y, por tanto, es invertible. Esto implica que el sistema (2.7) tiene solución y así obtener las relaciones marginales de sustitución entre consumo presente y consumo futuro de forma que queden como una función de la matriz de pagos y del vector de precios. En caso de tener un mercado financiero completo obtenemos:

$$\pi_{is} \frac{\dfrac{\partial U_{is}(.)}{\partial c_{is}}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_{is} \dfrac{\partial U_{is}(.)}{\partial c_{i0}}} = K_s;\ i = 1, \dots, I \tag{2.8}$$

y las relaciones marginales de sustitución (multiplicadas por la probabilidad del individuo i para cada estado) son iguales a unas constantes K_s, $s = 1, \dots, S$, que son independientes de los individuos. La expresión (2.8) recoge las condiciones necesarias y suficientes para que las asignaciones de consumo admisibles sean óptimo pareto.

Por ende, cuando el número de activos financieros es linealmente independiente y es igual al número de estados, las asignaciones de consumo obtenidas del intercambio de activos financieros son óptimo paretianas y, además, es cierto que $\phi_s = K_s$ para cualquier estado s, donde evidentemente ϕ_s es el precio hoy de un activo Arrow-Debreu que será una unidad monetaria si el estado s ocurre y nada en caso contrario. Esto es, bajo una estructura de mercados completos (valido cuando los activos cuentan con oferta positiva):

$$\pi_{is} \frac{\frac{\partial U_{is}(.)}{\partial c_{is}}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_{is} \frac{\partial U_{is}(.)}{\partial c_{i0}}} = \phi_s;\ i = 1, \dots, I \tag{2.9}$$

Teniendo en cuenta la pura ausencia de arbitraje, los precios de los activos Arrow-Debreu contienen información sobre las probabilidades de los estados de la naturaleza, sino también de las relaciones marginales de sustitución entre el consumo a lo largo del tiempo. La interpretación es igualmente válida para las probabilidades neutrales al riesgo que venían dadas para cada estado de la naturaleza s por la expresión $\pi_s^* = \phi_s(1+r)$.

Con esto expuesto, tenemos que la expresión (2.4) bajo mercados completos representa la *ecuación fundamental de valoración*:

$$P_j = \sum_{s=1}^{S} \phi_s X_{js};\ j = 1, \dots, N, \tag{2.10}$$

donde los precios de los activos Arrow-Debreu vienen dados por (2.10) y son válidos (únicos) para valorar cualquier activo financiero.

Para explicar detalladamente el CCAPM dividamos la exposición en cuatro partes:

2.2. La valoración de activos básica.

Usando la expresión (2.2) y la ecuación (2.9), pero con el supuesto de creencias probabilísticas homogéneas y preferencias aditivas temporalmente e independientes entre estados obtenemos lo siguiente:

$$\pi_s \frac{U_i'(c_{is})}{U_{i0}'(c_{i0})} = \phi_s;\ i = 1, \dots, I;\ s = 1, \dots, S. \tag{2.11}$$

Tomando la ecuación (2.10), $P_j = \sum_{s=1}^{S} \phi_s X_{js}$, puede escribirse que:

$$P_j = \sum_{s=1}^{S} \pi_s \frac{U_i'(c_{is})}{U_{i0}'(c_{i0})} X_{js} = E\left[\frac{U_i'(c_i)}{U_{i0}'(c_{i0})} X_j\right], \tag{2.12}$$

la expresión del lado derecho de (2.12) dice que los precios de los activos financieros son lineales en los pagos de dichos activos. En equilibrio, cada precio no puede ser diferente sin importar el individuo. Bajo ausencia de arbitraje el precio de cualquier activo financiero es igual al costo de cartera de los activos Arrow-Debreu. Como se tiene una economía con varios estados y dos periodos, podemos tomar el precio de un bono básico (bono cupón cero) que puede escribirse como:

$$b = \sum_{s=1}^{S} \phi_s \, 1 = \frac{1}{1+r} \Rightarrow 1 + r = \frac{1}{b} = \frac{1}{\sum_{s=1}^{S} \phi_s}, \tag{2.13}$$

luego procedemos a definir la probabilidad neutral al riesgo como,

$$\pi_s^* = \frac{\phi_s}{\sum_{s=1}^{S} \phi_s} = (1+r)\phi_s \tag{2.14}$$

de forma que,

$$P_j = \sum_{s=1}^{S} \phi_s \, X_{js} = \sum_{s=1}^{S} b\pi_s^* \, X_{js} = \frac{1}{(1+r)} \sum_{s=1}^{S} \pi_s^* \, X_{js} = \frac{1}{(1+r)} E^*[X_j]. \tag{2.15}$$

Esta es la valoración neutral al riesgo de los activos financieros, donde la expectativa se toma respecto a la probabilidad π^*, que se conoce asimismo como la *medida equivalente de martingala*[12], se tiene que:

(i) π^* es una probabilidad equivalente a la verdadera probabilidad, π, ya que

$$\pi^* = 0 \ (> 0) \Leftrightarrow \pi_s = 0 \ (> 0). \tag{2.16}$$

(ii) π^* se denomina *martingala* ya que los precios de los activos descontados son una martingala bajo dicha probabilidad. En un contexto dinámico en el que el precio de cualquier activo j en el momento t es:

$$P_{jt} = \frac{1}{(1+r)^{\Delta_t}} E^*\left[X_{jt+\Delta_t}\right] \tag{2.18}$$

que puede escribirse en forma de *precio descontado* a la tasa libre de riesgo como,

$$\frac{P_{jt}}{(1+r)^t} = E^*\left[\frac{X_{jt+\Delta_t}}{(1+r)^{t+\Delta_t}}\right]. \tag{2.19}$$

Sea $V_t = \frac{P_{jt}}{(1+r)^t}$ el precio del activo j descontado. Entonces la expresión (2.19) es,

$$V_t = E^*\left[V_{t+\Delta_t} \middle| \mathcal{F}_t\right], \tag{2.20}$$

donde $E^*[.\,|\,.]$ es la expectativa condicionada bajo π^*. La expresión (2.20) es la condición que debe satisfacer un proceso $\{V_t\}_{t=0}^{T}$ para ser una martingala.

[12] Ver anexo.

2.3. El agente representativo.

La expresión (2.12) de valoración aparece en términos de las utilidades marginales de un individuo particular i. El siguiente teorema es conocido como el *teorema del agente representativo* bajo el cual se deriva el CCAPM.

TEOREMA 2.2 (*El agente representativo*): *Si se cumplen las siguientes condiciones:*

(i) *Todos los agentes tienen creencias probabilistas homogéneas y funciones de utilidad aditivas temporalmente e independientes entre estados que son estrictamente crecientes, estrictamente cóncavas y diferenciables.*

(ii) *Los mercados son completos (se puede relajar si se supone que agentes heterogéneos obtienen asignaciones óptimo paretianas).*

Entonces, los precios de los activos Arrow-Debreu resultantes del equilibrio competitivo con agentes heterogéneos $\{\phi_s; s = 1, \dots, S\}$ *son asimismo los precios de equilibrio de una economía donde solo existe un único agente (agente representativo) cuyas dotaciones son precisamente los consumos (riqueza) agregados para los distintos periodos y estados de la naturaleza:*

$$\sum_{i=1}^{I} e_{i0} = C_0; \sum_{i=1}^{I} e_{is} = C_s; s = 1, \dots, S.$$

Para verlo, se trata de construir las preferencias del agente representativo. Usando este teorema se negocia un conjunto completo de activos Arrow-Debreu, por lo que el individuo se enfrenta al siguiente problema de maximización:

$$\underset{\{c_{i0}, c_{is}; i=1,\dots,I\}}{\text{Max}} \mathcal{L} = U_{i0}(c_{i0}) + \sum_{s=1}^{S} \pi_s U_i(c_{is}) + \eta_i \left[e_{i0} - c_{i0} + \sum_{s=1}^{S} \phi_s \left(e_{is} - c_{is}\right) \right] \qquad (2.20)$$

donde las condiciones de primer orden son:

$$U_i'(c_{i0}) = \eta_i \qquad (2.21)$$

$$\pi_s U_i'(c_{is}) = \eta_i \phi_s; \ s = 1, \dots, S. \qquad (2.22)$$

Ahora supóngase que el *agente representativo* tiene las siguientes funciones de utilidad en $t = 0$ y $t = 1$ (independiente de los estados), $U_0(c_0)$ y $U(c_s)$ respectivamente. Las funciones serían:

$$U_0(c_0) = \underset{\{c_{i0};i=1,\dots,I\}}{\text{Max}} \left\{ \sum_{i=1}^{I} \lambda_i U_{i0}(c_{i0}) \text{ sujeto a } \sum_{i=1}^{I} c_{i0} = C_0 \right\}$$
$$U(c_s) = \underset{\{c_{is};i=1,\dots,I\}}{\text{Max}} \left\{ \sum_{i=1}^{I} \lambda_i \pi_s U_i(c_{is}) \text{ sujeto a } \sum_{i=1}^{I} c_{is} = C_{1s}; s = 1, \dots, S \right\} \quad (2.23)$$

donde λ_i son ponderaciones estrictamente positivas para todo individuo i.

El *agente representativo* entonces se enfrenta al siguiente problema de optimización de su elección de consumo:

$$\underset{\{c_0,c_s;s=1,\dots,S\}}{\text{Max}} U_0(c_0) + \sum_{s=1}^{S} \pi_s U(c_s) \quad (2.24)$$

sujeto a

$$c_0 + \sum_{s=1}^{S} \phi_s^{AR}\, c_s = C_0 + \sum_{s=1}^{S} \phi_s^{AR}\, C_{1s},$$

donde ϕ_s^{AR} son los precios de los activos Arrow-Debreu en la economía con un agente representativo. Sea θ el multiplicador de Lagrange del problema al que se enfrenta el agente representativo, cuyas condiciones de primer orden del problema (2.24) son:

$$U_0'(c_0) = \theta \quad (2.25)$$

$$\pi_s U'(c_s) = \theta \phi_s^{AR};\ s = 1, \dots, S. \quad (2.26)$$

Utilizando (2.23), estas condiciones pueden escribirse usando el *teorema de la envolvente* como:

$$U_0'(c_0) = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i U_{i0}'(c_{i0}) \frac{dc_{i0}}{dC_0} \quad (2.27)$$

$$\pi_s U'(c_s) = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i U_i'(c_{is}) \frac{dc_{is}}{dC_s};\ s = 1, \dots, S \quad (2.28)$$

haciendo $\lambda_i = {\eta_i}^{-1}$ y utilizando las condiciones (2.21) y (2.22), obtenemos:

$$U_0'(c_0) = \sum_{i=1}^{I} {\eta_i}^{-1}\eta_i \frac{dc_{i0}}{dC_0} = 1 \tag{2.29}$$

$$\pi_s U'(c_s) = \pi_s \sum_{i=1}^{I} {\eta_i}^{-1}\eta_i \frac{\phi_s}{\pi_s}\frac{dc_{is}}{dC_s} = \phi_s;\ s = 1, \dots, S \tag{2.30}$$

Retomando las condiciones (2.25) y (2.26) del agente representativo, observamos que cuando los precios de los activos Arrow-Debreu son los mismos en ambas economías, $\phi_s = \phi_s^{AR}$, ya que $\theta = 1$. Lo que significa que a dichos precios, resulta óptimo para el agente representativo llevar a cabo una demanda optima de consumo que coincide con su dotación inicial de consumo agregado. Por otro lado, con estos precios se garantiza vaciado de mercado, concluyendo así que las asignaciones y precios $\{C_0, C_s, \phi_s;\ s = 1, \dots, S\}$ representan un equilibrio competitivo agente representativo.

2.4. El modelo de valoración de activos con consumo agregado: el CCAPM.

Supóngase una economía como la anterior donde el agente representativo introduce un nuevo activo incierto j con precio igual a P_j y cuyos pagos futuros son X_{js}. Sea z_j la cantidad a invertir en este activo. El agente representativo se enfrenta ahora al siguiente problema de optimización:

$$\underset{\{z_j\}}{\text{Max}}\, U_0\left(C_0 - z_j P_j\right) + \sum_{s=1}^{S} \pi_s\, U\left(C_{1s} + z_j X_{js}\right) \tag{2.31}$$

en términos de utilidad esperada puede escribirse como:

$$\underset{\{z_j\}}{\text{Max}}\, U_0\left(C_0 - z_j P_j\right) + EU\left(C_1 + z_j X_j\right), \tag{2.32}$$

donde C_1 hace referencia al consumo agregado futuro.

La condición de primer orden es:

$$-P_j U_0'\left(C_0 - z_j P_j\right) + E\left[U'\left(C_1 + z_j X_j\right) X_j\right] = 0. \tag{2.33}$$

Retomando nuevamente el teorema del agente representativo, las asignaciones óptimas de consumo son precisamente los consumos agregados. Por tanto, en el óptimo debe ser cierto que $z_j = 0$. De forma que tenemos que,

$$-P_j U_0'(C_0) + E\left[U'(C_1)X_j\right] = 0, \tag{2.34}$$

y despejando el precio del activo j obtenemos que:

$$P_j = \frac{E\left[U'(C_1)X_j\right]}{U_0'(C_0)} \tag{2.35}$$

La expresión (2.35) debe ser válida para cualquier activo $j = 1, \dots, N$. Recordando la (2.11) pero ya para un agente representativo

$$\pi_s \frac{U'(C_1)}{U_0'(C_0)} = \phi_s; \;\; s = 1, \dots, S. \tag{2.36}$$

En equilibrio, el precio del activo Arrow-Debreu en el estado s es la probabilidad asignada por el agente representativo a dicho estado multiplicada por la relación marginal de sustitución entre el consumo agregado presente y consumo agregado futuro. Así (2.10) queda:

$$P_j = \sum_{s=1}^{S} \phi_s X_{js} = \sum_{s=1}^{S} \pi_s \frac{U'(C_1)}{U_0'(C_0)} X_{js} = \frac{E\left[U'(C_1)X_j\right]}{U_0'(C_0)}; \; j = 1, \dots, N, \tag{2.37}$$

en este punto podemos observar que la variable aleatoria agregada M, que representa el factor de descuento que pondera los pagos generados por cualquier activo j según sea el estado de la naturaleza en el que se reciben, tiene la siguiente interpretación en condiciones de equilibrio con un agente representativo. Por tanto, en equilibrio, el factor de descuento que pondera los flujos generados por cualquier activo j es la relación marginal de sustitución:

$$M = \frac{U'(C_1)}{U_0'(C_0)} \tag{2.38}$$

Como M es una variable agregada al estar asociada a las utilidades marginales del consumo agregado y es aleatoria al depender de la utilidad marginal del consumo agregado futuro. En equilibrio, el precio de un bono básico (cupón cero) que paga una unidad monetaria independientemente del estado de la naturaleza, y es igual al interés libre de riesgo, es decir:

$$b = E\left[\frac{U'(C_1)}{U_0'(C_0)}\right] = \frac{1}{(1+r)}. \tag{2.39}$$

Para obtener la expresión común en la literatura del CCAMP, dividimos la ecuación (2.35) por P_j:

$$\frac{E\left[U'(C_1)\tilde{R}_j\right]}{U_0'(C_0)} = 1; j = 1, \dots N \tag{2.40}$$

donde $\tilde{R}_j$ es el rendimiento bruto del activo j. Usando el hecho de que el activo j fuese el activo libre de riesgo, es decir, $\frac{E[U'(C_1)(1+r)]}{U_0'(C_0)} = 1$. Restando a (2.40) dicha expresión obtenemos

$$\frac{E\left[U'(C_1)(R_j - r)\right]}{U_0'(C_0)} = 0 = E\left[U'(C_1)(R_j - r)\right]; j = 1, \dots N \tag{2.41}$$

y usando la definición de covarianza, *la prima por riesgo en equilibrio para cualquier activo incierto j* debe ser, y teniendo en cuenta que el factor estocástico de descuento y la tasa libre de riesgo tienen independencia:

$$E\left(R_j - r\right) = -\left\{\frac{1}{E[U'(C_1)]}\right\} cov\left[U'(C_1), R_j\right], \tag{2.42}$$

La ecuación (2.43) es muy importante porque se conoce como el ***modelo de valoración con consumo agregado, CCAPM***. Notar que $E[U'(C_1)]$ es estrictamente positivo y la utilidad marginal del consumo agregado es decreciente. Así, *este modelo implica que cualquier activo incierto j cuyo rendimiento esté positivamente correlacionado con el consumo (riqueza) agregado debe tener una prima de riesgo positiva. Alternativamente, un activo j tendrá una prima de riesgo positiva cuando la correlación entre el rendimiento del activo y la utilidad marginal del consumo agregado sea negativa.* Intuitivamente, significa que en equilibrio, cuando los individuos tienen una utilidad marginal del consumo agregado muy alta (consumo agregado bajo), valoran mucho cada unidad monetaria adicional en renta o riqueza recibida. Si, en estos casos, el activo tiende a ofrecer rendimientos bajos (covarianza negativa), los individuos exigen una *prima adicional* como incentivo adicional para invertir en un activo que les resulta poco atractivo. Una unidad de consumo en un estado donde los recursos agregados son abundantes tiene menor valor que una unidad de consumo en aquellos estados donde los recursos agregados son bajos.

En síntesis: $cov\left(U'(C_1), X_j\right) < 0 \vee cov\left(C_1, X_j\right) > 0 \Rightarrow P_j$ será pequeño $\Rightarrow$ la valoración que hace el mercado de la empresa *j* será baja $\Rightarrow E\left(R_j - r\right)$ alta, el CCAPM se puede escribir de otra forma, dividiendo y multiplicando el lado derecho de (2.42) por $U_0'(C_0)$ y usando (2.40) se obtiene:

$$E(R_j - r) = -(1+r)\frac{cov[U'(C_1), R_j]}{U_0'(C_0)}. \tag{2.43}$$

Finalmente, se puede abordar la expresión del CCAPM de la siguiente manera: Supongamos que en el mercado se negocia una cartera, m, cuyos pagos futuros, W_{1m}, son idénticos a la riqueza agregada de la economía en el momento $t = 1$. Esta cartera es la *cartera de mercado*. En este caso, teniendo en cuenta que el rendimiento de dicha cartera es igual a R_m, se puede escribir (2.43) como:

$$E(R_m - r) = -\left\{\frac{1}{E[U'(W_{1m})]}\right\} cov[U'(W_{1m}), (R_m - r)] \tag{2.44}$$

debido a que $cov[U'(W_{1m}), r)] = 0$.

Dicha expresión será válida no solo para la prima de riesgo de la cartera de mercado, sino para cualquier activo individual j. Despejando $E[U'(W_{1m})]$ de (2.44) y haciendo $U'(C_1) = U'(W_{1m})$ en (2.42), se tiene obtiene que para cada activo incierto j se cumple lo siguiente:

$$E(R_j - r) = \frac{cov[U'(W_{1m}), R_j]}{cov[U'(W_{1m}), R_m]} E(R_m - r) \tag{2.45}$$

El término $\frac{cov[U'(W_{1m}), R_j]}{cov[U'(W_{1m}), R_m]}$ es la medida de *riesgo sistémico* (riesgo no diversificable o riesgo de mercado) que representa una *generalización* de la tradicional beta del mercado. Si se usa una función cuadrática, dicho término se convierte en la beta, β_{jm}, siendo el tradicional CAPM. El coeficiente beta mide la sensibilidad de un activo individual o cartera a los movimientos del mercado. El mercado no remunera los riesgos asumidos por voluntad propia, sino únicamente el riesgo sistémico o no diversificable, de ahí que modelos de valoración de activos como el CAPM contemplen como relación fundamental la existente entre la rentabilidad esperada de las inversiones y su riesgo sistemático. Por otro lado, el riesgo total de un activo financiero o cartera de valores se puede descomponer como la suma del riesgo sistemático o de mercado (no diversificable o inevitable) y el riesgo no-sistemático o propio (idiosincrásico o diversificable). Es de importancia fundamental esta separación para entender los modelos básicos de gestión de carteras, debido al efecto que ejerce en la diversificación. En una cartera plenamente diversificada, el impacto de los factores de riesgo propio desaparece y sólo quedan los riesgos sistémicos.

2.5. Valoración de activos, reglas de reparto óptimo pareto y preferencias HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion).

Una alternativa para relacionar los consumos individuales óptimos con el consumo agregado, a parte del teorema del agente representativo, se basa en imponer funciones de utilidad a los agentes pertenecientes a la familia HARA con tolerancia al riesgo lineal y que exista un activo libre de riesgo. Aquí la ventaja va radicar en que no será necesario suponer que el mercado sea completo, a diferencia del caso del agente representativo. Los consumos individuales mantienen una relación directa (y lineal) con el consumo agregado a través de las reglas de reparto óptimo paretianas.

Supongamos que la función de utilidad del agente representativo es potencial y, por tanto, isoelástica, con coeficiente de aversión relativa al riesgo constante:

$$U(C_1) = \rho \frac{C_1^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}, \tag{2.46}$$

donde γ es el coeficiente de aversión relativa al riesgo y ρ es el parámetro de preferencia temporal[13], que es simplemente el factor de descuento de las preferencias del momento $t = 1$ al momento $t = 0$. Si utilizamos la ecuación (2.40) del CCAPM, y teniendo en cuenta que la utilidad marginal del consumo agregado futuro bajo la función de utilidad isoelástica es:

$$U'(C_1) = \rho C_1^{-\gamma} \tag{2.47}$$

se obtiene el siguiente modelo de valoración:

$$E\left[\rho \left(\frac{C_1}{C_0}\right)^{-\gamma} \tilde{R}_j\right] = 1; j = 1, \ldots N, \tag{2.48}$$

siendo, $\tilde{R}_j$ el rendimiento bruto del activo j y donde el factor de descuento es

$$M = \rho \left(\frac{C_1}{C_0}\right)^{-\gamma}, \tag{2.49}$$

por lo que el rendimiento esperado de cualquier activo j sería una función de la covarianza entre la tasa de crecimiento del consumo agregado entre $t = 0$ y $t = 1$ y el rendimiento de dicho activo j. En este caso, tendríamos un *coeficiente beta* que

[13] Aquí se cambia ligeramente la notación con respecto a la primera sección de usar β en vez de ρ, pues la idea partirá de que los coeficientes beta son la medida de sensibilidad al riesgo en el mercado y no el factor de descuento usual.

asociaría a los rendimientos de los activos con la tasa de crecimiento del consumo agregado. Finalmente, en el capítulo 5 y 8 del texto de Campbell, Lo and MacKinlay (1997) ofrece una exposición sintética de estos modelos junto con aplicaciones empíricas.

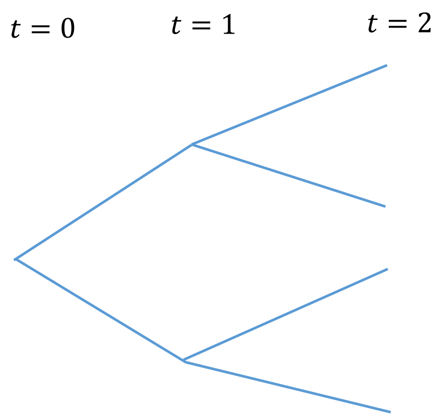
3. MODELOS DE CONSUMO CON VALORACIÓN INTERTEMPORAL DE ACTIVOS (EXTENSIONES DEL CCAPM).

En esta sección se buscara analizar una situación más real con modelos de horizonte intertemporal de consumo, pero que integre a su vez las decisiones de inversión. Son modelos dinámicos de formación de precios en escenarios de equilibrio donde los agentes se enfrentan a la posibilidad de modificar sus carteras de inversión. Recuérdese de la sección 1, que en una economía con mercados completos, los agentes intercambian dichos activos antes de conocer el estado de la naturaleza futuro (intercambiando en $t = 0$). Una vez conocido el estado de la naturaleza (en $t = 1$), los individuos consumen la cantidad asignada a cada uno de ellos, logrando el vaciado de mercado.

Consideremos una economía donde se negocian activos financieros que se intercambian antes de la revelación del estado de la naturaleza. No obstante, esta economía tiene múltiples periodos y hay acceso a los mercados al contado. La implicación de esto es una secuencia de mercados en donde se pueden comprar unidades de consumo usando los pagos contingentes a los estados que provienen de la inversión precedente en los activos financieros. Si el conjunto de activos es completo, en el sentido de que los pagos de los activos generan el espacio de estados de la naturaleza, entonces las asignaciones de equilibrio de esta economía son óptimo pareto. El siguiente teorema permitirá explicar el modelo.

TEOREMA 3.1 (***Tercer Teorema Fundamental de la Economía Financiera***)**:** *Bajo ciertas condiciones de continuidad, la capacidad que tienen los inversores para revisar la composición de sus carteras a lo largo del tiempo puede sustituir o jugar el papel de los activos existentes y convertir al mercado en una economía que sea equivalente al mercado completo.*

Supóngase una economía con dos periodos y tres fechas $t = 0$, $t = 1$ y $t = 2$. En las dos primeras fechas se abre el mercado y los agentes pueden determinar sus carteras óptimas. En cada fecha, existen dos posibles estados de la naturaleza, esto puede representarse por el siguiente árbol binomial:



Supóngase una economía en la que el mercado no se abre en $t = 1$, esto significa que los agentes no pueden revisar la composición de sus carteras una vez conocido el estado de la naturaleza que ocurre en $t = 1$. El mercado sería completo, siempre que se pudiera negociar un conjunto completo de activos Arrow-Debreu. En el árbol descrito para esta economía se necesitarían 6 activos Arrow-Debreu para completar el mercado.

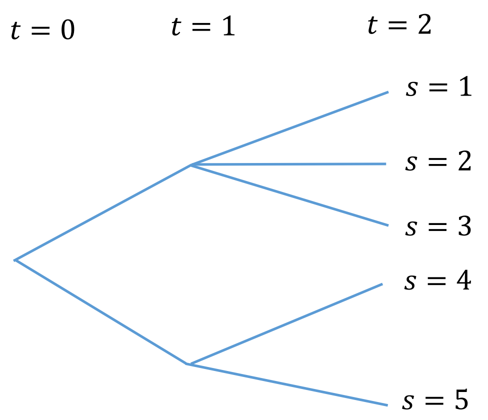
Supóngase ahora que en dicha economía existe una secuencia de mercados, es decir, se abre tanto en $t = 0$ como en $t = 1$. Nótese que en cada fecha donde se produce la apertura de la negociación, el mercado seria completo con solo dos activos, pues solamente existen dos estados de la naturaleza. Esto implica que se necesitan exclusivamente 2 activos en lugar de los 6 que necesitaba la economía estática. Se produce un considerable ahorro de activos y, diremos que *el mercado es dinámicamente completo*. Con respecto a este modelo dinámico se encuentra la condición de ausencia de arbitraje.

3.1. Los mercados dinámicamente completos.

Consideremos una economía de intercambio puro en la que existe un único bien de consumo perecedero en cada periodo. Dicha economía, se caracteriza por tener múltiples periodos o, alternativamente, por $T + 1$ fechas de negociación o aperturas del mercado, $t = 0, 1, 2, \dots, T$. Hay varias formas posibles de llegar a los nodos finales en la fecha T, se denomina estado de la naturaleza $s = 1, \dots, S$. Al conjunto completo de estados se le conoce como Ω. Nótese que a diferencia de lo que sucedía con la economía estática, el verdadero estado de la naturaleza en las economías dinámicas se revela parcialmente a lo largo del tiempo y completamente en la fecha final T. El siguiente ejemplo es un árbol que se denomina *estructura informativa del mercado financiero*.

EJEMPLO 3.1:

Supóngase un caso con 3 fechas y 5 estados de la naturaleza:



En la fecha $t = 0$, la única información disponible es que el verdadero estado de la naturaleza pertenece a uno de los cinco posibles estados $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$. Al ir revelándose parcialmente la información, los agentes *aprenden* en $t = 1$ que el verdadero estado es uno de los que están en $\{s_1, s_2, s_3\}$ o uno de los que aparecen en $\{s_4, s_5\}$. Efectivamente, en $t = 2$, el verdadero estado se revela. En este tipo de estructuras informativas se denomina *suceso* a un subconjunto de Ω. En el árbol anterior, $\{s_1, s_2, s_3\}$ es un suceso ya que nos dice que uno de estos tres estados es el verdadero. En $t = 1$, nos encontramos con dos *sucesos disjuntos*, los cuales ocurren cuando su intersección está vacía. De esta forma, la estructura informativa permite aprender a los agentes al revelarse gradualmente la información. Si existen dos sucesos disjuntos, se sabe que el verdadero estado se encuentra necesariamente en uno de los dos sucesos.

Una *partición* de Ω es una colección de sucesos disjuntos, tal que la unión de los mismos es igual a Ω y las intersecciones de cada dos sucesos cualesquiera están vacías. Se dice que una partición *A es más precisa* que otra *B*, si cualquier suceso de la partición *B* es una unión de sucesos de la partición *A*. Entonces en la estructura de información representada por el ejemplo del árbol, el suceso Ω forma una partición en $t = 0$. Los sucesos $\{s_1, s_2, s_3\}$ y $\{s_4, s_5\}$ forman una partición en $t = 1$ más precisa que la anterior[14].

Sea $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t; t = 0, 1, \dots, T\}$ la *estructura informativa* común a todos los individuos, la cual forma parte de las dotaciones iniciales. Así, $\mathcal{F}$ es una familia de particiones de Ω tal que $\mathcal{F}_\tau$ es *más precisa* que $\mathcal{F}_t$ si $\tau > t$. Evidentemente, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega\}$, mientras que $\mathcal{F}_T$ es la partición generada por todos los estados de la naturaleza individuales. Así, los agentes saben en $t = 0$ que el verdadero estado está en Ω y que lo conocerán en T. Técnicamente se conoce a $\mathcal{F}_t$ como filtración, siendo cada uno de los elementos de la filtración $\mathcal{F}_t$ un determinado suceso que se asocia con cada nodo del árbol y que denominaremos ξ_t. En otras palabras, $\mathcal{F}_t$ representa simplemente el conjunto de información disponible en la fecha t. Cada nodo del árbol o suceso ξ_t es un elemento de la filtración $\mathcal{F}_t$ de forma que $\xi_t \in \mathcal{F}_t$. Del ejemplo anterior, tenemos que $\xi_1 = \{s_1, s_2, s_3\}$ y $\xi_1' = \{s_4, s_5\}$ son dos sucesos o nodos que pertenecen a la filtración $\mathcal{F}_t$.

Así, un *activo Arrow-Debreu en suceso-tiempo es un activo que paga una unidad de consumo en la fecha* $\tau \geq 1$ *y suceso o nodo* $\xi_\tau \in \mathcal{F}_\tau$ *y nada en caso contrario*. Esto significa que, se tiene precios de activos Arrow-Debreu *condicionados*. Por ende, $\phi_{\xi_\tau}(\xi_t)$, es el precio de un activo Arrow-Debreu condicionado a estar hoy en el suceso o nodo ξ_t y fecha t y que paga una unidad monetaria en el suceso o nodo ξ_τ y fecha τ y nada en caso contrario. De esta forma, los individuos tienen la posibilidad de lograr asignaciones óptimo pareto cuando se les permite realizar negociaciones después del momento inicial $t = 0$, de manera que puedan recomponer sus carteras a lo largo del tiempo.

Para el caso en que una economía estática o en una economía con múltiples periodos en los que no se permitiese la negociación a lo largo del tiempo, el número de activos linealmente independientes necesarios para completar el mercado sería igual a $\sum_{t=1}^{T} \# \{\mathcal{F}_t\}$ donde $\#\{\mathcal{F}_t\}$ es el número de sucesos disjuntos en $\mathcal{F}_t$. Así, en el árbol anterior, se necesitarían 7 activos linealmente independientes, que corresponden al número de nodos del árbol o de la estructura informativa (no se cuenta el nodo en

[14] Nótese que las estructuras informativas a través de los árboles son muy útiles para describir economías intertemporales, debido a que la información representada por un árbol se puede describir por una familia de particiones del conjunto de estados Ω que pueden identificarse según el tiempo o las fechas de negociación y donde, además, con el paso del tiempo dichas particiones son cada vez más precisas.

$t = 0$). Sin embargo, en una economía intertemporal con una secuencia de mercados, el mercado puede completarse mediante una estrategia dinámica en activos financieros si en cada nodo del árbol que representa la estructura informativa, el mercado es completo respeto a los siguientes nodos. Del ejemplo del árbol, con solo 3 activos linealmente independientes son suficientes para completar el mercado de forma dinámica siempre que sus precios no admitan oportunidades de arbitraje.

3.2. El modelo intertemporal de valoración de activos con consumo agregado.

El modelo intertemporal básico con consumo agregado se puede hacer bajo el contexto de los precios de los activos Arrow-Debreu o probabilidades neutrales al riesgo o, alternativamente, a través de un enfoque más tradicional basado en la programación dinámica. Dividamos la exposición en dos partes:

3.2.1. Ausencia de arbitraje, mercados (dinámicamente) completos y el agente representativo.

Partiendo de la ecuación fundamental de valoración en un marco estático, se puede comprobar que, bajo ausencia de oportunidades de arbitraje y en el contexto intertemporal, el precio de cualquier activo financiero j en la fecha actual t y suceso ξ_t perteneciente a la partición $\mathcal{F}_t$ viene dado por:

$$P_{jt}(\xi_t) = \sum_{\tau=t+1}^{T} \sum_{\substack{\xi_\tau \in \mathcal{F}_\tau \\ \xi_\tau \subseteq \xi_t}} \phi_{\xi_\tau}(\xi_t)\, X_{j\xi_\tau}, \tag{3.1}$$

donde $\phi_{\xi_\tau}(\xi_t)$ es el precio de un activo Arrow-Debreu en la fecha t y suceso ξ_t (hoy) que paga una unidad de consumo en la fecha futura τ y suceso ξ_τ:

$$\phi_{\xi_\tau}(\xi_t) = \begin{cases} 0 \quad si\ t \geq \tau \\ 0 \quad \text{si } t < \tau \text{ para } \xi_\tau \not\subset \xi_t \\ \phi_{\xi_\tau}(\xi_t) \text{ si } t < \tau \text{ para } \xi_\tau \subseteq \xi_t \,. \end{cases}$$

Además, $X_{j\xi_\tau}$ es el pago del activo incierto j en el suceso ξ_τ de la fecha futura τ. Nótese que dicho pago se compone tanto del posible dividendo que paga j, $D_{j\xi_\tau}$, como el precio futuro del propio activo j, $P_{j\xi_\tau}$. Esto es importante para economías de más de un periodo, pues conviene distinguir entre el componente dividendo y el componente precio.

Supóngase ahora que se tiene una estructura de mercados dinámicamente completos donde los individuos tienen creencias probabilísticas homogéneas y funciones de utilidad temporalmente aditivas e independientes entre los estados, además de monótonamente crecientes y estrictamente cóncavas. Sabemos que, bajo esta caracterización del mercado, podemos justificar una economía con un agente representativo dotado con el consumo agregado.

Tomando el agente representativo, el problema de maximización intertemporal consiste en maximizar su *utilidad esperada intertemporal*:

$$\max_{\{C_{\xi_t}\}} U\left(C_{\xi_t}\right) + \sum_{\tau=t+1}^{T} \sum_{\substack{\xi_\tau \in \mathcal{F}_\tau \\ \xi_\tau \subseteq \xi_t}} \pi_{\xi_\tau}(\xi_t)\, U\left(C_{\xi_\tau}\right) \tag{3.2}$$

sujeto a,

$$C_{\xi_t} + \sum_{\tau=t+1}^{T} \sum_{\substack{\xi_\tau \in \mathcal{F}_\tau \\ \xi_\tau \subseteq \xi_t}} \phi_{\xi_\tau}(\xi_t)\, C_{\xi_\tau} = \underbrace{e_{\xi_t} + \sum_{\tau=t+1}^{T} \sum_{\substack{\xi_\tau \in \mathcal{F}_\tau \\ \xi_\tau \subseteq \xi_t}} \phi_{\xi_\tau}(\xi_t)\, e_{\xi_\tau}}_{W_{\xi_t}}, \tag{3.3}$$

donde $\pi_{\xi_\tau}(\xi_t)$ es la probabilidad condicionada, dado el conjunto de información disponible que nos dice que el verdadero estado está en el suceso ξ_t, asignada por el agente representativo al suceso ξ_τ en la fecha τ. Usando la regla de Bayes, dicha probabilidad condicionada satisface:

$$\pi_{\xi_\tau}(\xi_t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi_\tau \not\subset \xi_t \\ \dfrac{\pi_{\xi_\tau}}{\pi_{\xi_t}} & \text{si } \xi_\tau \subseteq \xi_t. \end{cases}$$

Además, $C(.)$ representa al consumo agregado y $e_{\xi_{(.)}}$ indica la dotación inicial de consumo agregado en un determinado suceso o nodo, por lo que W_{ξ_t} representa la riqueza agregada disponible en el suceso ξ_t.

Las condiciones de primer orden del problema intertemporal (3.2) escritas en forma compacta son

$$\frac{\pi_{\xi_\tau}(\xi_t) U'\left(C_{\xi_\tau}\right)}{U'\left(C_{\xi_t}\right)} = \phi_{\xi_\tau}(\xi_t), \tag{3.4}$$

sustituyendo (3.4) en la expresión general de valoración (3.1) se obtiene,

$$P_{jt}(\xi_t) = \sum_{\tau=t+1}^{T} \sum_{\substack{\xi_\tau \in \mathcal{F}_\tau \\ \xi_\tau \subseteq \xi_t}} \frac{\pi_{\xi_\tau}(\xi_t) U'\left(C_{\xi_\tau}\right)}{U'\left(C_{\xi_t}\right)} X_{j\xi_\tau}, \tag{3.5}$$

sumando sobre los sucesos posibles en la fecha siguiente y usando la definición de $P_{jt+1}(\xi_{t+1})$, de forma que se distingue entre el pago por dividendos y el pago proveniente del precio futuro, la expresión (3.5) puede escribirse de forma que se evite el sumatorio sobre fechas futuras:

$$P_{jt}(\xi_t) = \sum_{\substack{\xi_{t+1} \in \mathcal{F}_{t+1} \\ \xi_{t+1} \subseteq \xi_t}} \frac{\pi_{\xi_{t+1}}(\xi_t) U'\left(C_{\xi_{t+1}}\right)}{U'\left(C_{\xi_t}\right)} \left[D_{j\xi_{t+1}} + P_{jt+1}(\xi_{t+1})\right]. \tag{3.6}$$

Al tener un solo sumatorio sobre sucesos y sus respectivas probabilidades, se puede usar el operador de expectativa condicional, de forma que (3.6) resulta:

$$P_{jt} = E\left[\sum_{\tau=t+1}^{T} \frac{U'(C_\tau)}{U'(C_t)} \left(D_{j\tau} + P_{j\tau}\right) \middle| \mathcal{F}_t\right]. \tag{3.7}$$

Utilizando la definición de P_{jt+1} la expresión de valoración queda:

$$P_{jt} = E\left[\sum_{\tau=t+1}^{T} \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} \left(D_{jt+1} + P_{jt+1}\right) \middle| \mathcal{F}_t\right]. \tag{3.8}$$

que es muy útil expresarla de la siguiente forma:

$$U'(C_t) P_{jt} = E\left[U'(C_{t+1})\left(D_{jt+1} + P_{jt+1}\right) \middle| \mathcal{F}_t\right] \tag{3.9}$$

La expresión (3.9) es importante, pues se conoce como la *condición de optimalidad o condición de Euler de un problema de optimización dinámica del proceso consumo-inversión* de un agente representativo. Asimismo, que en el caso estático, la expresión (3.9) sugiere que un activo financiero que paga mucho (tiene altos dividendos y precio elevado) cuando el consumo agregado C_{t+1} es bajo (la $U'(C_{t+1})$ es alta) se valorara de forma especialmente positiva por el mercado en el momento actual.

El razonamiento que representa la igualdad de dos términos es el siguiente: 1) el lado izquierdo de (3.9) indica el costo en términos de consumo perdido al comprar una unidad adicional del activo financiero y 2) el lado derecho nos da el beneficio que se deriva del consumo esperado en el futuro gracias al precio (y en su caso al dividendo) de dicho activo financiero. En otras palabras, es una medida actualizada de la ganancia marginal esperada de la utilidad derivada del consumo que se obtiene al disponer de una unidad adicional del activo financiero. A su vez, la igualdad en ambos términos implica que, en el óptimo, el agente representativo se muestra indiferente entre consumir la última unidad monetaria o ahorrarla.

Por otro lado, la ecuación de Euler (3.9) puede escribirse en términos de rendimientos dividiendo ambos lados de la misma por el precio actual del activo j y recordando que el rendimiento (bruto) de dicho activo j es

$$\tilde{R}_{jt+1} = \frac{D_{jt+1} + P_{jt+1}}{P_{jt}} \tag{3.10}$$

por tanto,

$$E\left[\frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)}\tilde{R}_{jt+1}\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = 1; j = 1, \dots, N, \tag{3.11}$$

que no es más que la versión intertemporal de la expresión general de valoración (en equilibrio). Es una condición necesaria de óptimo en el problema de elección entre consumo e inversión (ahorro) en cada periodo t, asi como una condición sobre la distribución de la riqueza entre los activos en el mismo periodo t. En términos de elección de cartera, el sistema (3.11) implica que la demanda de activos en equilibrio debe ser tal que el precio de cada uno de ellos iguale el valor esperado de ese activo en el periodo siguiente, evaluado al precio relativo de una unidad marginal de consumo de ese periodo en términos del consumo en el periodo presente. Así, *los rendimientos esperados de todos los activos adecuadamente descontados y ponderados por la relación marginal de sustitución entre consumos de distintos periodos deben ser iguales en equilibrio*. El valor esperado ponderado de todos los rendimientos de los activos es el mismo, siendo las ponderaciones las relaciones marginales de sustitución, de forma que aquellos rendimientos que se perciben en periodos de utilidad marginal baja reciben poco peso, mientras los obtenidos en periodos de alta utilidad marginal tienen un peso importante.

Además, la expresión (3.11) también debe ser cierta para el activo libre de riesgo con tasa de rendimiento igual a r_{t+1}:

$$\left[\frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)}(1 + r_{t+1})\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = 1 \tag{3.12}$$

como (3.11) puede escribirse como:

$$E\left[\frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)}\tilde{R}_{jt+1}-1\middle|\,\mathcal{F}_t\right]=0; j=1,\dots,N$$

Obtenemos que,

$$E\left[U'(C_{t+1})\left(R_{jt+1}-r_{t+1}\right)\middle|\,\mathcal{F}_t\right]=0; j=1,\dots,N. \tag{3.13}$$

Luego utilizando la definición de covarianza se obtiene la versión intertemporal (condicional) del CCAPM más general:

$$E\left(R_{jt+1}-r_{t+1}\middle|\,\mathcal{F}_t\right)=-(1+r_{t+1})cov_t\left[\frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)},R_{jt+1}\right] \tag{3.14}$$

cuya interpretación es la habitual establecida desde la sección 2.

EJEMPLO 3.2:

Una versión popular del CCAMP en el contexto intertemporal sugiere que la prima esperada de cualquier activo incierto se relaciona de forma lineal y positiva con la beta del activo j con respecto al consumo agregado. Una forma de mostrar esto es suponer una función de utilidad cuadrática:

$$U(C_t)=\rho^t\left(aC_t-\frac{b}{2}C_t^2\right), \tag{3.15}$$

donde ρ es la tasa de preferencia temporal que está implícita en las funciones de utilidad y que para (3.15) se hace explicita.

Su utilidad marginal es

$$U'(C_t)=\rho^t(a-bC_t) \tag{3.16}$$

Por tanto, (3.14) bajo preferencias cuadráticas, puede escribirse como:

$$E\left(R_{jt+1}-r_{t+1}\middle|\,\mathcal{F}_t\right)=\frac{(1+r_{t+1})\rho b}{a-bC_t}cov_t\left(C_{t+1},R_{jt+1}\right). \tag{3.17}$$

Sea R_C el rendimiento de un activo o cartera perfectamente correlacionado con el consumo agregado de forma que:

$$cov_t\left(R_{C_{t+1}},C_{t+1}\right)=var_t\left(R_{C_{t+1}}\right). \tag{3.18}$$

Como la ecuación (3.17) también se satisface para este activo o cartera perfectamente correlacionado con el consumo agregado,

$$E(R_{Ct+1} - r_{t+1}|\,\mathcal{F}_t) = \frac{(1 + r_{t+1})\rho b}{a - bC_t} cov_t(C_{t+1}, R_{Ct+1})$$
$$= \frac{(1 + r_{t+1})\rho b}{a - bC_t} var_t\left(R_{C_{t+1}}\right) \tag{3.19}$$

Las expresiones (3.17) y (3.19) implican, finalmente, que

$$E\left(R_{jt+1} - r_{t+1}\middle|\,\mathcal{F}_t\right) = \underbrace{\frac{cov_t\left(C_{t+1}, R_{jt+1}\right)}{var_t\left(R_{C_{t+1}}\right)}}_{\beta_{jC}} E(R_{Ct+1} - r_{t+1}|\,\mathcal{F}_t) \tag{3.20}$$

Por tanto, de acuerdo con el CCAPM intertemporal, las betas de cada activo incierto j con respecto al consumo agregado deben explicar los rendimientos esperados de los activos. El consumo agregado como fuente fundamental de riesgo sistemático aparece de manera natural en un marco de equilibrio intertemporal con agente representativo. La prima por riesgo esperada de cualquier activo es positiva cuando el rendimiento del activo está positivamente correlacionado con el consumo agregado.

3.2.2. La programación dinámica.

A pesar de que bajo esta perspectiva se obtienen las mismas conclusiones, el agente representativo maximiza su función de utilidad esperada intertemporal consumiendo en el momento actual y escogiendo la cartera óptima de activos para cada momento de tiempo futuro. Sea $\omega_{j\tau}$ el porcentaje de los fondos destinados a inversión que el agente representativo asigna en cada periodo τ al activo j, donde $j = 1,2, \dots, N$. Bajo una función de utilidad con separabilidad aditiva, el problema de optimización intertemporal es:

$$\max_{\{C, \omega_{j\tau}; j=1,\dots,N\}} E\left[\sum_{\tau=t}^{T} U(C_\tau, \mathcal{F}_\tau)|\,\mathcal{F}_t\right] \tag{3.21}$$

sujeto a,

$$W_{t+1} = (W_t - C_t) \sum_{j=1}^{N} \omega_{jmt}\, \tilde{R}_{jt+1} \tag{3.22}$$

donde $\tilde{R}_{jt+1}$ es el rendimiento bruto de cada activo j, y $\sum_{j=1}^{N} \omega_{jmt}\, \tilde{R}_{jt+1} = \tilde{R}_{mt+1}$ que es, como sabemos, el rendimiento (bruto) de la cartera de mercado. Para el lector que desee profundizar más en detalles del problema de programación dinámica puede mirar el capítulo 11 de Ingersoll (1987). Es útil definir en este proceso a la *función indirecta de utilidad*, $\mathcal{J}(W_t, \mathcal{F}_t)$, y que representa la solución al problema (3.21) sujeto a la restricción (3.22). De esta forma, la técnica de programación dinámica se basa en la utilización del denominado principio de Bellman,

$$\mathcal{J}(W_t, \mathcal{F}_t) = \text{Max}\,\{U(C_t, \mathcal{F}_t) + E[\mathcal{J}(W_{t+1}, \mathcal{F}_{t+1})|\, \mathcal{F}_t]\}, \tag{3.23}$$

donde es importante notar que la función indirecta de utilidad se escribe en términos de la riqueza agregada y de la información disponible a lo largo del tiempo, de manera que se recojan los posibles efectos procedentes tanto de los cambios en el conjunto de oportunidades de inversión como en el conjunto de información.

La condición de optimalidad de la decisión consumo-ahorro suele escribirse como:

$$\mathcal{J}_W(W_t, \mathcal{F}_t) = U_C(C_t, \mathcal{F}_t) \tag{3.24}$$

donde $\mathcal{J}_W(.)$ y $U_C(.)$ son las primeras derivadas de la función indirecta de utilidad con respecto a la riqueza agregada y de la función de utilidad con respecto al consumo agregado, respectivamente. Esta expresión se conoce como la *condición de la envolvente* que puede interpretarse igual que la ecuación (3.9) y, por tanto, en equilibrio, el agente se mostrara indiferente entre consumir y ahorrar la última unidad monetaria recibida.

De lo expuesto hasta ahora se sabe que en un contexto de múltiples periodos, este tipo de modelos implican que todo lo que se necesita para valorar activos es la covarianza entre su rendimiento y el consumo agregado. Este resultado es una consecuencia de que el consumo agregado está perfectamente y negativamente correlacionado con la utilidad marginal de una unidad monetaria adicional de riqueza invertida según la condición de optimalidad (3.24). Por tanto, es siempre cierto que cuando el valor de una unidad monetaria adicional de riqueza en un estado es elevado, el consumo será bajo en ese mismo estado. Sin embargo, esta propiedad no es cierta para la riqueza agregada. Esto es, la *riqueza agregada* no está (necesariamente) perfecta y negativamente correlacionada con la utilidad marginal de una unidad monetaria adicional de riqueza invertida. En particular, no lo estará cuando las oportunidades de inversión futuras son inciertas. Esto implica que, en el contexto intertemporal, *no se puede utilizar la riqueza agregada en lugar del consumo agregado* y obtener relaciones de valoración en términos de la cartera de mercado y de una sola beta, tal como ocurría en el modelo estático. Para ver esto, nótese que existen estados en los que la riqueza agregada es tal y, al mismo tiempo, la utilidad marginal de una unidad monetaria adicional es también elevada debido a que existen excelentes oportunidades de inversión en dicho estado. De forma similar, nos podemos encontrar estados con riqueza agregada baja y con utilidad marginal de la riqueza también pequeña dadas las pobres oportunidades de inversión existentes. Formalmente, dadas unas preferencias, la riqueza no es un estadístico suficiente para la utilidad marginal de una unidad monetaria. El consumo (bajo el supuesto de aditividad temporal e independencia) sí lo es. Resultado cuyas consecuencias son importantes para la valoración de activos. Cuando en el modelo de valoración se emplea la riqueza agregada en el marco intertemporal como fuente de riesgo sistémico, aparecen necesariamente *múltiples betas* y no una sola beta como en el caso de utilizar consumo agregado. Las demandas de cobertura del agente representativo ante cambios desfavorables en el conjunto de oportunidades de inversión se vuelven de crucial relevancia para la formación de precios.

3.3. El modelo intertemporal con consumo agregado y preferencias con aversión relativa al riesgo constante.

La exposición aquí se hace siguiendo a Hansen and Singleton (1982, 1983). Retomando la expresión general de valoración derivada de la condición de optimalidad intertemporal de Euler dada por la ecuación (3.4) no tiene contenido empírico, ya que no se le especifica una determinada función de utilidad que permita conocer la forma funcional de la utilidad marginal del consumo agregado del agente representativo. Una posibilidad es usar una función cuadrática y derivar el modelo (3.11). En la literatura macroeconómica y financiera cuando se modela bajo un contexto intertertemporal se volvió común usar una función de utilidad potencial con aversión absoluta al riesgo decreciente y aversión relativa al riesgo constante. Ahora bien, supongamos que la función de utilidad del agente representativo viene dada por la siguiente expresión:

$$U(C_t) = \begin{cases} \rho^t \dfrac{C_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}; \; \gamma > 0, \gamma \neq 1 \\ \rho^t \ln(C_t); \;\; \gamma = 1\,, \end{cases} \tag{3.25}$$

donde ρ es la tasa de descuento de preferencia temporal que suponemos menor que la unidad, y γ es el coeficiente de aversión relativa al riesgo del agente representativo[15]:

$$R(C) = -C_t \frac{U''(C_t)}{U'(C_t)} = \gamma. \tag{3.26}$$

En el contexto intertemporal es importante definir la *elasticidad intertemporal de sustitución del consu*mo (EIS) y viene dada por η

$$EIS = \eta = \frac{\frac{d\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)}{\frac{C_{t+1}}{C_t}}}{\frac{dRMS}{RMS}} = \frac{\partial \ln\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)}{\partial \ln|RMS|} = \frac{1}{\gamma}, \tag{3.27}$$

donde RMS es la relación marginal de sustitución entre el consumo presente y futuro. De esta manera, *en el modelo con aditividad temporal e independencia en los estados y con aversión relativa al riesgo constante, la EIS de consumo es la inversa del coeficiente de aversión relativa al riesgo*. Conceptualmente, dicha elasticidad intertemporal indica los deseos que tiene el agente representativo para mover su consumo entre periodos de tiempo alternativos.

La crítica que se hace a las preferencias del tipo (3.25) es que el coeficiente de aversión y la elasticidad de sustitución del consumo están inevitablemente ligadas y, por otro lado, su relación es inversa. La clave para separarlos radica en comprender que la EIS trata de las preferencias del agente para intercambiar su consumo entre distintos periodos, mientras que el coeficiente de aversión al riesgo nos indica cómo desea el agente mover su consumo entre estados de la naturaleza alternativos. Por tanto, la EIS está perfectamente definida incluso bajo certeza, mientras que el coeficiente de aversión al riesgo está bien definido en un contexto estático. Esto justifica la razón por la cual no es necesario imponer una relación (inversa) entre estos dos conceptos a la hora de explicar el comportamiento sobre la sustitución del consumo y sobre aversión al riesgo de forma independiente. De acuerdo con la ecuación (3.27) cuando la aversión al riesgo es alta, el agente presenta unas preferencias tales que la EIS es baja, lo que implica una preferencia

[15] se definirá mejor en la siguiente sección.

por un consumo suavizado a lo largo del tiempo. Esta deficiencia en el modelo se debe a las preferencias de tipo (3.25).

En equilibrio la expresión de valoración (3.11) bajo las preferencias dadas por (3.25) es:

$$M_{t+1} = \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} = \rho \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} \tag{3.28}$$

y, por tanto,

$$E\left[\rho \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} \tilde{R}_{jt+1} \middle| \mathcal{F}_t \right] = 1; j = 1, \ldots N. \tag{3.29}$$

Este modelo ha sido ampliamente analizado mediante el método generalizado de momentos (Hansen, 1982), al acomodarse de manera natural con las condiciones de ortogonalidad de las condiciones de primer orden resultantes de la optimización intertemporal. En tal caso, las restricciones de ortogonalidad pueden escribirse como:

$$E[h(X_{t+1}, \theta_0) | \mathcal{F}_t] = 0,$$

donde X_{t+1} es el vector bidimensional de datos que observa el econometra; los rendimientos y la tasa de crecimiento del consumo, y θ_0 es el vector de parámetros desconocidos y que, en nuestro caso, es un vector bidimensional compuesto ρ γ.

De los contrastes empíricos del modelo se destacan las regularidades encontradas para el mercado estadounidense por Hansen and Singleton (1982,1983):

- Las condiciones de ortogonalidad (y, por tanto, el modelo) suelen rechazarse a menudo y los resultados obtenidos son muy sensibles al conjunto de instrumentos utilizados como parte del conjunto de información disponible.
- El coeficiente de aversión relativa al riesgo, γ, se estima con muy poca precisión (la varianza suele ser grande), de forma que no es posible rechazar que sea cero. Al mismo tiempo, sus estimaciones suelen ser sensibles al conjunto de instrumentos y a los datos empleados para medir el consumo agregado.
- El modelo que supone preferencias con aversión relativa al riesgo constante es incapaz de replicar la prima de riesgo observada históricamente para valores razonables del parámetro de aversión relativa al riesgo. Incluso para

valores de dicho coeficiente $\gamma = 50$ el modelo solo es capaz de generar primas de riesgo del orden del 1%. En cualquier caso, el aumento que se consigue gracias al incremento del coeficiente de aversión al riesgo se obtiene por el incremento exagerado (poco realista) de los tipos de interés sin riesgo. Si los agentes son muy aversos al riesgo y, por tanto, en este modelo, la EIS del consumo es pequeña, por lo que los individuos no estarían dispuestos a sustituir el consumo a lo largo del tiempo por lo que, en equilibrio, la compensación al ahorro en forma de tipos de interés debe ser muy alta. Este famoso resultado es el *Equity Premium Puzzle (la anomalía de la prima de riesgo)*.

- La versión del modelo intertemporal que utiliza la beta de los activos con respecto al consumo agregado, suele ser usual observar que la beta tradicional (con respecto al rendimiento de la cartera de mercado) explica mejor los rendimientos medios de los activos que la beta del consumo. No parece haber suficiente covariabilidad entre los rendimientos y el consumo agregado para ser capaz de explicar la variabilidad existente entre los rendimientos de los activos.

Esta evidencia tan negativa para este modelo ha generado propuestas, entre otras soluciones potenciales, preferencias alternativas para el agente representativo, agentes heterogéneos con riesgos idiosincráticos, sustitución del consumo agregado como forma de evitar la enorme dificultad que tiene su correcta medición y el reconocimiento explícito de costos de transacción diversos.

Ahora analicemos los supuestos bajo los cuales el modelo intertemporal con función de utilidad potencial es equivalente al modelo estático. Nombremos a la proporción que supone el consumo agregado del periodo t sobre la riqueza agregada del mismo periodo de la siguiente forma:

$$K_t = \frac{C_t}{W_t} \tag{3.30}$$

Sabemos por otro lado, que en equilibrio, la restricción presupuestaria intertemporal viene dada por:

$$W_{t+1} = (W_t - C_t)\tilde{R}_{mt+1}, \tag{3.31}$$

donde $\tilde{R}_{mt+1}$ es el rendimiento (bruto) de la cartera de mercado en $t+1$.

Dada la expresión (3.30) e iterando un periodo hacia adelante $K_{t+1} = \frac{C_{t+1}}{W_{t+1}}$. Esto implica que la tasa de crecimiento del consumo agregado puede escribirse como

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \frac{K_{t+1}}{K_t}(1 - K_t)\tilde{R}_{mt+1}. \tag{3.32}$$

Obsérvese que la tasa de crecimiento del consumo agregado hace parte de la variable agregada M_{t+1} en la ecuación (3.28) y, por tanto, la ecuación de valoración dada por (3.29) puede escribirse como:

$$E\left[\underbrace{\left(K_{t+1}^{-\gamma}\tilde{R}_{mt+1}^{-\gamma}\right)}_{M_{t+1}} R_{jt+1}\middle| \mathcal{F}_t\right] = \rho^{-1}\left(\frac{1-K_t}{K_t}\right)^{\gamma}; j = 1, \dots, N. \tag{3.33}$$

Dado que el lado derecho de la ecuación anterior no depende de ningún activo individual j, podemos hacer lo mismo para el activo libre de riesgo, así que restando ambas expresiones podemos obtener:

$$E\left[\underbrace{\left(K_{t+1}^{-\gamma}\tilde{R}_{mt+1}^{-\gamma}\right)}_{M_{t+1}} (R_{jt+1} - r_{t+1})\middle| \mathcal{F}_t\right] = 0; j = 1, \dots, N. \tag{3.34}$$

Así, para que el modelo estático sea correcto periodo tras periodo sin que sea necesario reconocer explícitamente el contexto intertemporal, la proporción de riqueza consumida, K_t, debe ser *constante* a lo largo del tiempo. De esta forma, la prima por riesgo de cualquier activo j dependería, como en el caso estático, de la covarianza de los rendimientos con el rendimiento de la cartera de mercado. Se concluye de Campbell (1993) que los dos escenarios teóricos en los que dicha proporción es constante son los siguientes:

- La incertidumbre está idéntica e independientemente distribuida a lo largo del tiempo, de manera que los rendimientos de los activos también lo estén y, en definitiva, dichos rendimientos no son fuente de información sobre la distribución de probabilidades futura de los mismos. Esto significa que el aspecto intertemporal del modelo se vuelve irrelevante.
- Que las preferencias sean logarítmicas de manera que $\gamma = 1$.

3.4. El modelo de valoración intertemporal con preferencias isoelásticas generalizadas y resolución de incertidumbre.

El modelo básico que ese expuso anteriormente no solo impone una relación perfecta (inversa) entre la actitud hacia el riesgo del agente representativo y la sustitución intertemporal del consumo, sino que además supone que dicho agente es indiferente ante la resolución temprana o tardía de la incertidumbre. Aquí se admitirá que la función de utilidad del agente representativo *no sea separable entre los estados de la naturaleza*. Esto es relajar un supuesto sobre la separabilidad de la función de utilidad, pero ahora se hace entre estados. Esto significa, que la utilidad marginal de un determinado estado afecta lo que ocurre en otro estado. Por ejemplo, la utilidad marginal de algo más de consumo en un estado de auge económico se ve afectada por el nivel de consumo en un estado que presenta una recesión económica. La distinción favorable entre la aversión al riesgo y la EIS y la no necesidad de introducir el consumo pasado para lograrla, se debe a la posibilidad de *no separabilidad* entre estados. A su vez, esto permite reconocer la importancia que la *resolución de incertidumbre* puede tener sobre los individuos. Para explicar esto se seguirá a Weil (1989) quien partió de una función de utilidad basada en las *preferencias recursivas* de Kreps y Porteus (1978), y se escribe de la siguiente forma:

$$V_t = U(C_t, E[V_{t+1}| \mathcal{F}_t]) \equiv U(C_t, E_t V_{t+1})$$
$$= \left[(1-\rho)C_t^{1-\kappa} + \rho(E_t V_{t+1})^{\frac{1-\kappa}{1-\gamma}}\right]^{\frac{1-\gamma}{1-\kappa}}, \quad (3.35)$$

donde γ es el coeficiente de aversión relativa al riesgo y, $\kappa = \frac{1}{\eta}$, es la inversa de la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo, de forma que tanto si $\gamma \to 1$ o $\kappa \to 1$ se tendrían las preferencias logarítmicas, mientras que si $\kappa = \gamma$ tendríamos la función de utilidad con aversión relativa al riesgo constante. Por otro lado, $U(.)$ se conoce como *función agregadora*, pues permite agregar como argumentos de la función de utilidad tanto al consumo actual como al valor esperado del propio consumo. Por medio de estas funciones se puede obtener determinadas actitudes hacia la temprana o tardía resolución de la incertidumbre. En síntesis, pueden aparecer tres casos que dependerán de la concavidad, convexidad o linealidad de la *función agregadora* con respecto a su segundo argumento:

(i) $\gamma > \kappa \Rightarrow$ preferencia por la resolución temprana de la incertidumbre.

(ii) $\gamma < \kappa \Rightarrow$ preferencia por la resolución tardía de la incertidumbre.

(iii) $\gamma = \kappa \Rightarrow$ indiferencia por la resolución temprana o tardía de la incertidumbre.

Para el caso (iii) se tendrían las funciones de utilidad tipo Von Neumann-Morgenstern, pues dicha indiferencia es consecuencia del axioma de *independencia de las alternativas irrelevantes*. Los casos (i) y (ii) son casos interesantes para el comportamiento individual. En ambos es posible demostrar que loterías en las que la incertidumbre se resuelve pronto son menos arriesgadas que loterías cuya distribución en los premios sea igual, presenten tardía resolución de la incertidumbre. No obstante, las mismas loterías con menos riesgo y temprana resolución de incertidumbre presentan una mayor fluctuación de la utilidad del consumo a lo largo del tiempo. Así, agentes que rechazan más el riesgo que las fluctuaciones intertemporales del consumo prefieren (para todo lo demás constante) la resolución temprana de incertidumbre. Caso contrario, individuos que rechazan las fluctuaciones elevadas del consumo en mayor medida que el riesgo preferirán una tardía resolución de incertidumbre. En el caso de las funciones tipo Von Neumann-Morgenstern *no son posibles estos tipos de comportamientos*. El costo o beneficio de cada lotería en términos de seguridad y estabilidad de la función de utilidad se cancelan, pues el mismo factor que hace despreciar el riesgo a los agentes económicos (γ alta) está necesariamente ligado a un fuerte rechazo de las fluctuaciones intertemporales al tener una baja elasticidad intertemporal de sustitución (η baja).Por tanto, este tipo de agentes se mostrarían necesariamente indiferentes ante la resolución de incertidumbre.

A continuación veremos las condiciones de primer orden del problema de optimización intertemporal de un agente representativo que tiene una función de utilidad dada por la expresión (3.35). El problema sería el siguiente:

$$\text{Max } U(C_t, E_t V_{t+1}) = \left[(1-\rho)C_t^{1-\kappa} + \rho(E_t V_{t+1})^{\frac{1-\kappa}{1-\gamma}}\right]^{\frac{1-\gamma}{1-\kappa}} \tag{3.36}$$

sujeto a

$$W_{t+1} = (W_t - C_t)\tilde{R}_{mt+1}$$

dicha restricción presupuestaria puede alternativamente escribirse como:

$$W_{t+1} = (W_t - C_t) \sum_{j=1}^{N} \omega_{jmt} \tilde{R}_{jt+1}$$

o como

$$W_{t+1} = (W_t - C_t) \left[r_{t+1} + \sum_{j=1}^{N} \omega_{jmt} (R_{jt+1} - r_{t+1}) \right].$$

La función de utilidad indirecta es:

$$\mathcal{J}(W_t, \mathcal{F}_t) = \text{Max}\{U(C_t) + E_t[\mathcal{J}(W_{t+1}, \mathcal{F}_{t+1})]\}.$$

Sean

$$U_{1t} \equiv \frac{\partial U}{\partial C_t}$$

$$U_{2t} \equiv \frac{\partial U}{\partial E_t V_{t+1}}$$

$$\mathcal{J}_{1t} \equiv \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial W_t}$$

La condiciones de primer orden del problema (3.36) son:

$$U_{1t} = U_{2t} E_t[\mathcal{J}_1(\mathcal{F}_{t+1}) \tilde{R}_{mt+1}] \tag{3.37}$$

$$E_t\left[\mathcal{J}_1(\mathcal{F}_{t+1})\left(R_{jt+1} - r_{t+1}\right)\right] = 0; j = 1, \dots, N \tag{3.38}$$

y donde

$$\mathcal{J}_{1t} = U_{1t} \frac{\partial C_t^*}{\partial W_t} + U_{2t} E_t \left(\mathcal{J}_{1t} \frac{\partial W_{t+1}^*}{\partial W_t} \right),$$

siendo C_t^* y W_{t+1}^* el consumo en t y la riqueza en $t + 1$ en el óptimo respectivamente.

Imponiendo la *condición de la envolvente* dada la expresión (3.24), $\mathcal{J}_{1t} = U_{1t}$, y operando con la condición de primer orden (3.37), se obtiene

$$E\left(\frac{U_{2t} U_{1t+1}}{U_{1t}} \tilde{R}_{jt+1} \middle| \mathcal{F}_t \right) = 1; j = 1, \dots N. \tag{3.39}$$

Por último, dada la función de utilidad (3.35), la relación marginal de sustitución o factor de descuento estocásticoM_{t+1} es:

$$M_{t+1}=\frac{U_{2t}U_{1t+1}}{U_{1t}}=\left[\rho\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\kappa}\right]^{\frac{1-\gamma}{1-\kappa}}\tilde{R}_{mt+1}^{\frac{1-\gamma}{1-\kappa}-1}, \tag{3.40}$$

de forma que el modelo de valoración intertemporal se escribe como:

$$E\left\{\left[\rho\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\kappa}\right]^{\frac{1-\gamma}{1-\kappa}}\tilde{R}_{mt+1}^{\frac{1-\gamma}{1-\kappa}-1}\tilde{R}_{jt+1}\middle|\ \mathcal{F}_t\right\}=1; j=1,\dots N. \tag{3.41}$$

Con el vector de parámetros dado por $\theta_0=(\rho,\gamma,\kappa)$, siendo $\kappa=\frac{1}{\eta}$ la inversa de la EIS, que como puede verse, queda desligada de la aversión relativa al riesgo.

Para los contrastes empíricos lo que se hace es linealizar las condiciones de primer orden mediante una especificación lognormal del modelo. Para ello se supone que la tasa de crecimiento del consumo agregado y los rendimientos de los activos inciertos siguen una distribución conjunta lognormal y definimos $\theta\equiv\frac{1-\gamma}{1-\kappa}$. La condición de primer orden puede escribirse como:

$$E\left\{\underbrace{\left[\rho\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\frac{1}{\eta}}\right]^{\theta}\left(\frac{1}{\tilde{R}_{mt+1}}\right)^{1-\theta}\tilde{R}_{jt+1}}_{Y_{t+1}}\middle|\ \mathcal{F}_t\right\}=1; j=1,\dots N, \tag{3.42}$$

donde se supone que $\ln Y_{t+1}\approx N(\mu,\sigma^2)$. Este supuesto permite hacer uso de las siguientes propiedades de una variable X que se distribuye de forma (condicionalmente) lognormal:

$$\ln E_tX=E_t\ln X+\frac{1}{2}var_t\ln X,$$

siendo E_t la expectativa condicional al conjunto de información en el periodo t y donde

$$var_t\ln X=E_t[(\ln X-\ln E_tX)^2]$$

Que, en caso de ser (condicionalmente) homocedástica,

$$var_t\ln X=var(\ln X-\ln E_tX).$$

Así, tomando logaritmos en ambos lados de (3.42), a su vez empleando estas propiedades y utilizando notación de letras minúsculas para denominar a las variables de consumo y rendimientos una vez tomados los logaritmos:

$$r_{jt+1} \equiv \ln \tilde{R}_{jt+1}$$
$$r_{mt+1} \equiv \ln \tilde{R}_{mt+1}$$
$$r_{ft+1} \equiv \ln(1 + r_{t+1})$$
$$E_t \Delta c_{t+1} \equiv E_t(\ln C_{t+1} - \ln C_t),$$

se tiene que

$$\theta \ln \rho - \frac{\theta}{\eta} E_t \Delta c_{t+1} - (1-\theta) E_t r_{mt+1} + E_t r_{jt+1} + \frac{1}{2} E \left\{ \left[-\frac{\theta}{\eta} \left(\underbrace{\Delta c_{t+1} - E_t \Delta c_{t+1}}_{c_{t+1} - c_t - E_t c_{t+1} + c_t} \right) - (1-\theta)(r_{mt+1} - E_t r_{mt+1}) + (r_{jt+1} - E_t r_{jt+1}) \right]^2 \right\} = 0$$

y despejando el rendimiento esperado del activo incierto j queda:

$$E_t r_{jt+1} = -\theta \ln \rho + \frac{\theta}{\eta} E_t \Delta c_{t+1} + (1-\theta) E_t r_{mt+1} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\theta}{\eta} \right)^2 \sigma_c^2 + (\theta - 1)^2 \sigma_m^2 + \sigma_j^2 - 2 \frac{\theta}{\eta} (\theta - 1) \sigma_{cm} - 2 \frac{\theta}{\eta} \sigma_{jc} + 2(\theta - 1) \sigma_{jm} \right], \tag{3.43}$$

donde $\sigma_c^2, \sigma_m^2, \sigma_j^2, \sigma_{cm}, \sigma_{jc}$ y σ_{jm} son las varianzas (condicionales) del crecimiento del consumo, mercado y activo j respectivamente, así como las covarianzas (condicionadas) del consumo agregado con la cartera de mercado, activo j con consumo agregado y activo j con mercado también respectivamente.

Evaluando la expresión anterior en el activo libre de riesgo se obtiene,

$$r_{ft+1} = -\theta \ln \rho + \frac{\theta}{\eta} E_t \Delta c_{t+1} + (1-\theta) E_t r_{mt+1} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\theta}{\eta} \right)^2 \sigma_c^2 + (\theta - 1)^2 \sigma_m^2 - 2 \frac{\theta}{\eta} (\theta - 1) \sigma_{cm} \right]. \tag{3.44}$$

Restando (3.44) de (3.43) obtenemos el modelo de valoración de activos (suponiendo lognormalidad) con preferencias isoelásticas generalizadas y resolución de incertidumbre, a su vez el término de varianza que aparece en el lado izquierdo de la ecuación se debe a la desigualdad de Jensen para funciones cóncavas.

Resulta de tomar expectativas sobre variables en logaritmos y puede eliminarse simplemente si se reescribe la expresión de la prima de riesgo como el logaritmo del cociente esperado entre tasas brutas de rendimiento:

$$E_t\left[r_{jt+1} - r_{ft+1}\right] + \frac{1}{2}\sigma_j^2 = \frac{\theta}{\eta}\sigma_{jc} + (1-\theta)\sigma_{jm}. \tag{3.45}$$

Este modelo es una combinación del CCAPM intertemporal y del CAPM tradicional, ya que la *prima de riesgo de cualquier activo incierto j se determina por las covarianzas del rendimiento de j con la tasa de crecimiento del consumo y con el rendimiento de la cartera de mercado*. En este caso, ambas covarianzas son simultáneamente relevantes al ser el consumo endógeno y depender de la riqueza. Tanto la tasa de crecimiento del consumo como el rendimiento de la riqueza de mercado forman parte de la relación marginal de sustitución intertemporal, o factor de descuento estocástico, M_{t+1}.

El modelo implica que la prima de riesgo de cualquier activo incierto j es un *promedio ponderado* de la covarianza del rendimiento de j con la tasa del crecimiento de consumo (dividido por la elasticidad intertemporal de sustitución) y de la covarianza de j con el mercado, donde las ponderaciones son θ y $(1-\theta)$ respectivamente. En el caso, en que $\theta = 1$, se tendría el CCAPM con función de utilidad potencial y cuando $\theta = 0$ sería el CAPM tradicional.

A pesar de todo, Jorion and Giovannini (1993) mostraron que la evidencia empírica sobre este modelo no parece ser demasiado positiva:

- Usando GMM sobre la expresión (3.41), las condiciones de ortogonalidad resultan muy sensibles a la elección de instrumentos que formen parte del conjunto de información.
- La restricción que permite contrastar el modelo de consumo con función de utilidad potencial (y, en definitiva, el modelo consistente con la utilidad esperada), $\gamma = \frac{1}{\eta}$, es difícil de rechazar.
- En cualquier caso, la estimación de ambos parámetros, γ y κ (el inverso de η), es muy imprecisa.
- No parece ser capaz de explicar con éxito la anomalía de la prima de riesgo.

- En el contraste de la versión lineal del modelo no pueden rechazarse las condiciones de ortogonalidad, y se rechaza la hipótesis nula de igualdad entre γ y $\frac{1}{\eta}$. Este último resultado es importante ya que implica rechazar la función de utilidad potencial isoelástica, tan empleada en la literatura tanto financiera como macroeconómica, y sugiere que los conceptos de aversión al riesgo y elasticidad intertemporal de sustitución del consumo son efectivamente diferentes.

A pesar de que se incorpora simultáneamente el consumo y el rendimiento de la cartera de mercado en las condiciones de primer orden, el modelo ignora que la restricción intertemporal del problema de optimización en (3.36) también liga el consumo agregado con el rendimiento de la cartera de mercado. Esto es fundamental pues permite eliminar el consumo del modelo de valoración intertemporal.

3.5. El modelo de valoración intertemporal sin consumo.

Ahora retomemos la condición de primer orden del modelo con aversión relativa al riesgo constante, donde se supone separabilidad de la función de utilidad del agente representativo tanto temporal como entre estados y donde, además, el coeficiente de aversión relativa al riesgo es el inverso de la elasticidad intertemporal de sustitución del consumo. Escribamos (3.29) como:

$$E_t\left[\rho\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}\tilde{R}_{jt+1}\middle|\,\mathcal{F}_t\right] = 1; j = 1, \dots N.$$

Tal como se hizo con (3.42), la expresión anterior se linealiza tomando logaritmos y suponiendo que la tasa de crecimiento del consumo agregado y el rendimiento son variables conjuntamente lognormales y homocedásticas:

$$\ln E_t\left[\rho\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}\tilde{R}_{jt+1}\middle|\,\mathcal{F}_t\right] = 0.$$

Utilizando las propiedades de las variables lognormales, se obtiene:

$$E_t\left\{\ln\left[\rho\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}\tilde{R}_{jt+1}\right]\right\}+\frac{1}{2}var_t\left\{\ln\left[\rho\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}\tilde{R}_{jt+1}\right]\right\}=$$

$$=E_t(\ln\rho)-\gamma E_t(\ln C_{t+1}-\ln C_t)+E_t\left[\ln\left(\tilde{R}_{jt+1}\right)\right]+\frac{1}{2}E_t\{(\ln[.]-E_t\ln[.])^2\}$$

$$=0.$$

Usando letras minúsculas para las variables en logaritmos,

$$E_t r_{jt+1}+\ln\rho-\gamma E_t\Delta c_{t+1}$$

$$+\frac{1}{2}E_t\left\{\left[-\gamma\left(\underbrace{\Delta c_{t+1}-E_t\Delta c_{t+1}}_{c_{t+1}-c_t-E_t c_{t+1}+c_t}\right)+\left(r_{jt+1}-E_t r_{jt+1}\right)\right]^2\right\}=0$$

Y despejando el rendimiento esperado del activo j se obtiene:

$$E_t r_{jt+1}=-\ln\rho+\gamma E_t\Delta c_{t+1}-\frac{1}{2}\left(\gamma^2\sigma_c^2+\sigma_j^2-2\gamma\sigma_{jc}\right), \tag{3.46}$$

donde $\sigma_c^2=var(\Delta c_{t+1})$, $\sigma_j^2=var\left(r_{jt+1}\right)$ y $\sigma_{jc}=cov\left(r_{jt+1},\Delta c_{t+1}\right)$, de forma que el rendimiento esperado de cualquier activo j es lineal en la tasa de crecimiento del consumo con pendiente igual al coeficiente de aversión relativa al riesgo.

Evaluando (3.46) en el activo libre de riesgo,

$$E_t r_{ft+1}=-\ln\rho+\gamma E_t\Delta c_{t+1}-\frac{1}{2}\gamma^2\sigma_c^2. \tag{3.47}$$

Restando ambas ecuaciones,

$$E_t\left[r_{jt+1}-r_{ft+1}\right]+\frac{1}{2}\sigma_j^2=\gamma\sigma_{jc};j=1,\dots,N, \tag{3.48}$$

donde la necesidad del ajuste en el lado izquierdo de la ecuación puede eliminarse reescribiendo dicha ecuación como el logaritmo del cociente esperado de los rendimientos (brutos) del activo incierto j y el activo libre de riesgo:

$$\ln\left[\frac{\left(1+R_{jt+1}\right)}{\left(1+r_{ft+1}\right)}\right]=\gamma\sigma_{jc}.$$

Por tanto, *el modelo intertemporal básico implica que la prima de riesgo de cualquier activo j esta lineal y positivamente relacionada con la tasa de crecimiento del consumo agregado, donde la pendiente de dicha relación es el coeficiente de aversión relativa al riesgo de la economía*.

A nivel empírico se puede destacar que para el mercado estadounidense Campbell, Lo and MacKinlay (1997) usando datos anuales entre 1889-1994, observaron una prima de riesgo anual del 4.18% con volatilidad del 17.74%, mientras que el crecimiento del consumo presenta una media anual del 1.72%, con una volatilidad del 3.28% y una covarianza entre el exceso de rendimiento del mercado bursátil y el crecimiento del consumo igual a 0.0029. El coeficiente de aversión al riesgo que se necesita para replicar la prima de riesgo de acuerdo con (3.48) sería igual a 19. Siendo un coeficiente exageradamente elevado que tiene *consecuencias absurdas sobre el tipo de interés*; tal como puede comprobarse si se emplea la media incondicional de la ecuación (3.47), y dado que el valor medio muestral del tipo de interés libre de riesgo es igual a 1.83%, se obtendría una tasa de descuento mayor que uno, en concreto una tasa igual a 1.12. Naturalmente, una tasa de preferencia temporal mayor que uno implica una tasa de preferencia temporal negativa, lo que es poco razonable. Por otro lado, si tomamos un valor positivo y razonable para la tasa de preferencia temporal de $\rho = 0.98$ y un coeficiente de aversión al riesgo tan elevado como 19 implicaría un tipo de interés libre de riesgo mucho mayor que el realmente observado (3.04%). Esta anomalía, que aparece al intentar racionalizar los coeficientes de aversión al riesgo alto, se conoce como *la anomalía del tipo de interés sin riesgo* y se debe a Weil (1989). De forma sencilla, si el agente representativo es muy averso al riesgo (γ alta) entonces, bajo el modelo básico, el agente se resistirá a sustituir consumo a lo largo del tiempo (η baja). Bajo estas condiciones, si la tasa de crecimiento medio del consumo es positiva y el tipo de interés fuera bajo, el agente con tasa de preferencia temporal positiva tendría un fuerte incentivo para pedir préstamos elevando desproporcionadamente el tipo de interés. La única posibilidad de observar un tipo de interés pequeño, es tener una tasa de preferencia temporal negativa que le haga disminuir su fuerte deseo de petición de préstamos.

3.6. Sustituyendo el consumo en el modelo de valoración intertemporal.

El problema del modelo intertemporal básico con consumo se puede deber al supuesto sobre las preferencias. Sin embargo, con extensiones del modelo que introducen preferencias, en principio, más ajustadas con la realidad no mejoran suficientemente el comportamiento del mismo. Otra alternativa que puede potencialmente explicar los malos resultados asociados a estos modelos en general es que el *consumo agregado esté mal medido*. En particular, dicho consumo se mide a lo largo de los intervalos de tiempo que configuran el periodo muestral y no en un momento puntual al de dicho intervalo, como si ocurre con los precios de los activos. Esta agregación temporal del consumo hace que la serie se suavice artificialmente provocando poca variabilidad en la relación marginal de sustitución y escasa covariabilidad con los rendimientos de los activos.

Así, Campbell (1993, 1996) sugiere que se podría sustituir el consumo del modelo de valoración intertemporal y obtener un modelo que relacione los rendimientos medios y las covarianzas con las variables estado subyacentes que determinan en último término el consumo agregado. Esto se puede ya que el consumo y el rendimiento de la cartera de mercado están relacionados en la restricción presupuestaria intertemporal, así como en el factor de descuento estocástico del modelo con preferencias isoelásticas generalizadas.

Sabemos que la restricción presupuestaria intertemporal es:

$$W_{t+1} = (W_t - C_t)\tilde{R}_{mt+1},$$

que la escribimos en términos relativos como:

$$\frac{W_{t+1}}{W_t} = \left(1 - \frac{C_t}{W_t}\right)\tilde{R}_{mt+1}. \quad (3.49)$$

Tomando logaritmos,

$$\Delta w_{t+1} = r_{mt+1} + \ln[1 - exp(c_t - w_t)], \quad (3.50)$$

donde las letras minúsculas reflejan las variables en logaritmos.

Sea $K_t = \frac{C_t}{W_t}$ la proporción consumida de la riqueza y $k_t = \ln(K_t) = c_t - w_t$.

Dado que el segundo término del lado derecho de (3.50) no es lineal, se aproxima mediante una expansión de series de Taylor alrededor de la media $\bar{k}$[16]. Por tanto, tenemos

[16]se utiliza la siguiente aproximación:

$$f(k_t) \cong f(\bar{k}) + f'(\bar{k})(k_t - \bar{k})$$

$$\ln[1-exp(k_t)] \cong \ln\left[1-exp\left(\bar{k}\right)\right] - \frac{exp\left(\bar{k}\right)}{1-exp\left(\bar{k}\right)}\left(k_t-\bar{k}\right). \tag{3.51}$$

Sea

$$-\frac{exp\left(\bar{k}\right)}{1-exp\left(\bar{k}\right)} = 1-\frac{1}{v} \tag{3.52}$$

por lo que $v = 1 - exp\left(\bar{k}\right)$.

Suponiendo que el logaritmo del cociente consumo entre riqueza sea constante, el coeficiente v es

$$v = \frac{W_t - C_t}{W_t} = \frac{\bar{W}-\bar{C}}{\bar{W}} = \frac{W-C}{W} \tag{3.53}$$

de esta forma, la expansión de Taylor queda como

$$\ln[1-exp(k_t)] \cong \ln v - \left(1-\frac{1}{v}\right)\bar{k} + \left(1-\frac{1}{v}\right)k_t = Cte + \left(1-\frac{1}{v}\right)k_t, \tag{3.54}$$

donde la Cte no será relevante para el desarrollo posterior del modelo. Sustituyendo (3.54) en la expresión (3.50),

$$\Delta w_{t+1} \cong r_{mt+1} + Cte + \left(1-\frac{1}{v}\right)(c_t - w_t) \tag{3.55}$$

nótese que la siguiente igualdad debe cumplirse,

$$\Delta w_{t+1} = \Delta c_{t+1} + (c_t - w_t) - (c_{t+1} - w_{t+1}). \tag{3.56}$$

Igualando los dos lados izquierdos de ambas ecuaciones, se obtiene una ecuación en diferencias en el logaritmo del cociente consumo-riqueza, $c_t - w_t$. Sustituyendo sucesivamente hasta el infinito dicho cociente consumo-riqueza y suponiendo

$$\lim_{\tau\to\infty} v^{\tau}\left(c_{t+\tau} - w_{t+\tau}\right) = 0,$$

resulta la siguiente expresión:

$$c_t - w_t = \sum_{\tau=1}^{\infty} v^{\tau}\left(r_{mt+\tau} - \Delta c_{t+\tau}\right) + \frac{v}{1-v}Cte, \tag{3.57}$$

que es simplemente la restricción presupuestaria intertemporal escrita convenientemente sin ningún tipo de supuesto sobre el comportamiento del agente representativo.

Tomando expectativas condicionales en la ecuación (3.57), tenemos que:

$$c_t - w_t = E_t \sum_{\tau=1}^{\infty} v^{\tau} \left(r_{mt+\tau} - \Delta c_{t+\tau}\right) + \frac{v}{1-v} Cte \tag{3.58}$$

La expresión anterior sugiere que la proporción de consumo en un periodo respecto de la riqueza en ese periodo será mayor cuanto mayor sea la expectativa del rendimiento de la riqueza futura o menor el crecimiento esperado del consumo futuro.

Sustituyendo (3.58) en (3.55) y (3.56) tenemos

$$c_{t+1} - E_t c_{t+1} = (E_{t+1} - E_t) \sum_{\tau=0}^{\infty} v^{\tau} r_{mt+1+\tau} - (E_{t+1} - E_t) \sum_{\tau=1}^{\infty} v^{\tau} \Delta c_{t+1+\tau}. \tag{3.59}$$

Esta expresión se combina con el modelo de valoración de preferencias isoelásticas generalizadas cuya condición de primer orden viene dada por la ecuación (3.42). Como dicha condición de optimalidad se cumple para todo activo incierto j, también debe cumplirse para el rendimiento de la cartera de mercado. Así, se cumple que:

$$E_t \left\{ \left[\rho \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\frac{1}{\eta}} \tilde{R}_{mt+1} \right]^{\theta} \right\} = 1, \tag{3.60}$$

donde nuevamente, η es la elasticidad intertemporal de sustitución y $\theta = \frac{(1-\gamma)}{\left(1-\frac{1}{\eta}\right)}$.

Tomando logaritmos para linealizar la ecuación anterior se obtiene,

$$E_t \Delta c_{t+1} = \mu_m + \eta E_t r_{mt+1} \tag{3.61}$$

donde,

$$\mu_m = \eta \ln \rho + \frac{1}{2} \left[\frac{\theta}{\eta} \sigma_c^2 + \theta \eta \sigma_m^2 - 2\theta \sigma_{cm} \right].$$

Así, el valor esperado del crecimiento del consumo es una constante más la elasticidad intertemporal de sustitución del consumo multiplicada por la expectativa del rendimiento del mercado o riqueza agregada.

En vista que la ecuación (3.61) es válida para todo periodo t, también se satisface,

$$E_{t+\tau} \Delta c_{t+\tau+1} = \mu_m + \eta E_{t+\tau} r_{mt+\tau+1} \tag{3.62}$$

volviendo a (3.59), la ecuación puede escribirse como:

$$c_{t+1} - E_t c_{t+1} = r_{mt+1} - E_t r_{mt+1} + (E_{t+1} - E_t) \sum_{\tau=1}^{\infty} v^{\tau}\, r_{mt+1+\tau} \qquad (3.63)$$
$$- (E_{t+1} - E_t) \sum_{\tau=1}^{\infty} v^{\tau}\, \Delta c_{t+1+\tau}$$

Ahora desarrollando un poco el último término del lado derecho de (3.63),

$$(E_{t+1} - E_t) \sum_{\tau=1}^{\infty} v^{\tau}\, \Delta c_{t+1+\tau} = \sum_{\tau=1}^{\infty} v^{\tau}\, E_{t+1} \Delta c_{t+1+\tau} - \sum_{\tau=1}^{\infty} v^{\tau}\, E_t \Delta c_{t+1+\tau}$$

y aplicando la ley de las expectativas iteradas,

$$(E_{t+1} - E_t) \sum_{\tau=1}^{\infty} v^{\tau}\, \Delta c_{t+1+\tau}$$
$$= \sum_{\tau=1}^{\infty} v^{\tau}\, E_{t+1} (E_{t+\tau} \Delta c_{t+1+\tau}) - \sum_{\tau=1}^{\infty} v^{\tau}\, E_t (E_{t+\tau} \Delta c_{t+1+\tau}),$$

usando luego (3.62),

$$(E_{t+1} - E_t) \sum_{\tau=1}^{\infty} v^{\tau}\, \Delta c_{t+1+\tau}$$
$$= \sum_{\tau=1}^{\infty} v^{\tau}\, E_{t+1} (\mu_m + \eta E_{t+\tau} r_{mt+\tau+1})$$
$$- \sum_{\tau=1}^{\infty} v^{\tau}\, E_t (\mu_m + \eta E_{t+\tau} r_{mt+\tau+1})$$

usando nuevamente la ley de expectativas iteradas,

$$
\begin{aligned}
(E_{t+1} - E_t) \sum_{\tau=1}^{\infty} v^{\tau}\, \Delta c_{t+1+\tau}& \\
&= \sum_{\tau=1}^{\infty} v^{\tau}\, E_{t+1}(\mu_m + \eta E_{t+1} r_{mt+\tau+1}) \\
&- \sum_{\tau=1}^{\infty} v^{\tau}\, E_t(\mu_m + \eta E_t r_{mt+\tau+1}) \\
&= \sum_{\tau=1}^{\infty} v^{\tau}\, \mu_m + \eta E_{t+1} \sum_{\tau=1}^{\infty} v^{\tau}\, r_{mt+\tau+1} - \sum_{\tau=1}^{\infty} v^{\tau}\, \mu_m \\
&- \eta E_t \sum_{\tau=1}^{\infty} v^{\tau}\, r_{mt+\tau+1} = \eta (E_{t+1} - E_t) \sum_{\tau=1}^{\infty} v^{\tau}\, r_{mt+\tau+1},
\end{aligned}
$$

donde, $(E_{t+1} - E_t) \sum_{\tau=1}^{\infty} v^{\tau}\, r_{mt+\tau+1}$ es una expresión crucial que *representa la revisión de las expectativas que realiza el agente representativo sobre los rendimientos futuros del mercado*. Este último resultado lo sustituimos en el último término de la ecuación (3.63)

$$
c_{t+1} - E_t c_{t+1} = r_{mt+1} - E_t r_{mt+1} + (1-\eta)(E_{t+1} - E_t) \sum_{\tau=1}^{\infty} v^{\tau}\, r_{mt+1+\tau} \qquad (3.64)
$$

La ecuación (3.64) que permitirá sustituir el consumo de la ecuación de valoración intertemporal. A su vez, sugiere una interesante relación entre las innovaciones en el crecimiento del consumo y las innovaciones en el rendimiento de la riqueza. Un incremento en el rendimiento esperado futuro del mercado disminuye o aumenta el consumo del agente representativo dependiendo de la elasticidad intertemporal de sustitución. Si $\eta < 1$, el agente se mostraría reacio a sustituir consumo a lo largo del tiempo y el efecto renta asociado a un mayor rendimiento domina al efecto sustitución, elevando el consumo hoy en relación a la riqueza. Si $\eta > 1$, el efecto sustitución domina y el cociente consumo-riqueza disminuye cuando el rendimiento esperado aumenta, ya que se espera consumir más en el futuro.

Igualmente se ve que en el lado derecho de (3.64) que ya no aparece el consumo, lo que implica que *la covarianza del rendimiento de cualquier activo j con la tasa de crecimiento del consumo puede escribirse en términos de las covarianzas con el rendimiento de la cartera de mercado y con las revisiones de las expectativas sobre el rendimiento futuro del mercado*:

$$cov_t(r_{jt+1}, \Delta c_{t+1}) \equiv \sigma_{jc} = \sigma_{jm} + (1-\eta)\sigma_{jh}, \tag{3.65}$$

donde

$$\sigma_{jh} = cov_t\left[r_{jt+1}, (E_{t+1} - E_t)\sum_{\tau=1}^{\infty} v^{\tau}\, r_{mt+1+\tau}\right]. \tag{3.66}$$

En conclusión, σ_{jh} se define como la covarianza del rendimiento del activo j con buenas o malas noticias sobre el futuro rendimiento del mercado; significa, que hay revisiones al alza o baja en las expectativas sobre el futuro rendimiento del mercado.

Ahora retomando la expresión de valoración del modelo con preferencias isoelásticas generalizadas venia dada por la ecuación (3.45):

$$E_t[r_{jt+1} - r_{ft+1}] + \frac{1}{2}\sigma_j^2 = \frac{\theta}{\eta}\sigma_{jc} + (1-\theta)\sigma_{jm},$$

donde

$$\theta \equiv \frac{1-\gamma}{1-\kappa} = \frac{1-\gamma}{1-\frac{1}{\eta}} = \eta\frac{1-\gamma}{\eta-1}$$

Así podemos escribir que

$$E_t[r_{jt+1} - r_{ft+1}] + \frac{1}{2}\sigma_j^2 = \frac{\eta\frac{1-\gamma}{\eta-1}}{\eta}\sigma_{jc} + \sigma_{jm} - \eta\frac{1-\gamma}{\eta-1}\sigma_{jm} \tag{3.67}$$

usando las expresiones (3.65) y (3.66), obtenemos

$$\begin{aligned} E_t[r_{jt+1} - r_{ft+1}] &+ \frac{1}{2}\sigma_j^2 \\ &= \frac{1-\gamma}{\eta-1}\sigma_{jm} + \frac{1-\gamma}{\eta-1}(1-\eta)\sigma_{jh} + \sigma_{jm} - \eta\frac{1-\gamma}{\eta-1}\sigma_{jm} \\ &= (\gamma-1)\sigma_{jh} + \sigma_{jm}\left[1 + \frac{1-\gamma}{\eta-1}(1-\eta)\right] \end{aligned}$$

por lo que, finalmente, el modelo de valoración intertemporal sin consumo puede escribirse como:

$$E_t[r_{jt+1} - r_{ft+1}] + \frac{1}{2}\sigma_j^2 = \gamma\sigma_{jm} + (\gamma-1)\sigma_{jh}. \tag{3.68}$$

El modelo se puede interpretar como la extensión más general de la ecuación fundamental de valoración, ya que permite entender el comportamiento optimizador del agente representativo teniendo en cuenta las revisiones sobre las expectativas futuras del mercado. De hecho, *esto conduce a un modelo con múltiples covarianzas o múltiples factores de riesgo ante los cuales el agente adopta estrategias de cobertura que precisamente le permiten invertir adecuadamente ante movimientos desfavorables en el conjunto de oportunidades de inversión intertemporal*.

A diferencia de lo que ocurría con el CAPM tradicional donde el coeficiente de aversión relativa al riesgo es la prima por riesgo por unidad de riesgo, mientras que el modelo intertemporal lleva a incorporar factores o covarianzas adicionales que incorporen las características de un entorno cambiante. Señalemos varios mensajes importantes del modelo:

- Es posible valorar activos financieros en un contexto intertemporal sin hacer referencia alguna a la tasa de crecimiento del consumo, así se pueden evitar potenciales errores de medición y a su vez se introduce una mayor covariabilidad entre la relación marginal de sustitución intertemporal (ahora en términos tanto de riqueza como de los cambios en las expectativas sobre la variación de la misma) y el rendimiento de los activos inciertos.
- La expresión (3.68) se puede interpretar como la versión en tiempo discreto del denominado modelo intertemporal de valoración (ICAPM) en tiempo continuo de Merton (1973), donde el agente representativo valora activos utilizando las covarianzas de los rendimientos con respecto a ciertas carteras de cobertura (no identificadas) pero que capturan cambios en el conjunto de oportunidades de inversión.
- Se puede observar en (3.68) que el único parámetro de la función de utilidad del agente representativo que forma parte de la expresión de valoración es el coeficiente de aversión relativa al riesgo. Cuando desaparece el consumo de la ecuación de valoración, también lo hace la elasticidad intertemporal de sustitución del consumo. Se puede observar de (3.64) que una elasticidad de sustitución η baja reduce las fluctuaciones anticipadas en el consumo, pero al mismo tiempo, pero al mismo tiempo, según (3.45), incrementa la prima de riesgo requerida para compensar cualquier posible contribución a dichas fluctuaciones. Ambos efectos se cancelan en la expresión final de valoración en (3.68).

- Si se ignora el ajuste debido a la desigualdad de Jensen, la prima de riesgo de cualquier activo j se descompone en dos partes de acuerdo con el modelo intertemporal de valoración:
  (i) La covarianza del rendimiento de j con el rendimiento de la cartera de mercado; termino que recibe una ponderación igual a γ.
  (ii) La covarianza del rendimiento de j con noticias sobre el futuro comportamiento del mercado; termino que recibe una ponderación igual a $(\gamma - 1)$.

  Cuando $\gamma < 1$, los activos que se comportan bien (mal) cuando existen noticias positivas sobre el comportamiento futuro del mercado tienen rendimientos medios más bajos (altos), pero los mismos activos tienen rendimientos medios más altos (bajos) cuando $\gamma > 1$. *Estos activos son deseables porque permiten al agente beneficiarse de las posibles mejoras en el conjunto de oportunidades de inversión, pero al mismo tiempo rechazables, pues reducen la capacidad del agente para cubrirse contra un posible deterioro en el conjunto de oportunidades de inversión*. El primer efecto domina cuando $\gamma < 1$, ya que el agente representativo estaría dispuesto a aceptar un rendimiento medio más bajo por mantener en su cartera activos que tienden a pagar cuando la riqueza se hace más productiva. No obstante, cuando $\gamma > 1$ el segundo efecto es el dominante y el agente exigirá un rendimiento medio mayor como compensación por mantener tales activos. Es lógico que el efecto asociado a su capacidad de cubrirse ante movimientos desfavorables en el conjunto de oportunidades de inversión se haga más relevante cuanto más averso al riesgo sea un individuo.
- El modelo implica que el rendimiento esperado de cualquier activo j (y su prima de riesgo esperada) es variable a lo largo del tiempo debido a los cambios que se producen en las noticias sobre el comportamiento futuro del mercado.
- Bajo preferencias logarítmicas, el modelo intertemporal básico es equivalente al modelo estático. Bajo dichas preferencias, la única covarianza relevante en (3.68) es la covarianza del mercado. Al mismo tiempo, cuando

el conjunto de oportunidades de inversión es constante, $\sigma_{jh} = 0$, también se valorarán los activos en función de su covarianza con el mercado.

- Finalmente, el modelo intertemporal (3.68) se puede interpretar en términos del rendimiento conjunto del mercado. Escribiendo la expresión neta de la desigualdad de Jensen para el rendimiento de mercado, se tiene

$$E_t[r_{mt+1} - r_{ft+1}] \cong \gamma\sigma_m^2 + (\gamma - 1)\sigma_{mh}. \quad (3.69)$$

  Cuando el rendimiento de la cartera de mercado no está correlacionado con las revisiones de las expectativas sobre el futuro rendimiento del propio mercado, entonces el coeficiente de aversión relativa al riesgo se puede estimar como el cociente de la prima de riesgo esperada del mercado sobre su varianza. Aunque dicho procedimiento es muy utilizado en la práctica, se puede llevar a conclusiones erróneas si la covarianza σ_{mh} es muy importante.

3.7. El modelo de hábitos en el consumo de Campbell and Cochrane (1999).

Parece que el consumo agregado o, más rigurosamente, la utilidad marginal del consumo agregado no son un factor de riesgo sistémico que sea capaz de explicar los precios de los activos financieros y su comportamiento temporal. Lo que se ha hecho en la literatura ha sido sustituir el consumo agregado del factor de descuento estocástico, M_{t+1}, por factores de riesgo asociados a la *riqueza agregada* de manera aproximada en el caso del modelo de Campbell (1993) y de forma más precisa en tiempo continuo con la modelización de Merton (1973). Sin embargo, hay trabajos que modelan directamente el consumo y ofrecen respuestas razonables e intuitivas a las conocidas anomalías de los modelos de valoración basados en la utilidad marginal del consumo agregado con un agente representativo.

La comprensión de los mercados bursátiles que ofrecen Campbell and Cochrane (1999) parte de suponer un agente representativo cuyas preferencias vienen dadas por la siguiente función de utilidad:

$$U(C_t - X_t) = \frac{1}{1-\kappa}(C_t - X_t)^{1-\kappa}, \quad (3.70)$$

donde X_t es el nivel del hábito de consumo del agente representativo, por lo que el argumento de la función de utilidad (y de la utilidad marginal) es la diferencia entre el nivel de consumo y el nivel de habito. Recuérdese que κ es la inversa de la elasticidad intertemporal de sustitución del consumo, η. Para indicar que la curvatura de la curvatura de la función de utilidad y la aversión al riesgo no es igual a κ. Bajo estas preferencias, cuando el agente tiene un determinado hábito de consumo, la curvatura de la función de utilidad depende de que tan alejado o cerca esté el consumo de un periodo particular de dicho nivel de habito como del parámetro κ, tomando la definición de lo que es el coeficiente relativo de aversión al riesgo:

$$\gamma \equiv -\frac{C_t U''(C_t - X_t)}{U'(C_t - X_t)} = \kappa \frac{C_t}{C_t - X_t}. \tag{3.71}$$

Así, cuando el consumo disminuye hacia el nivel de habito, el agente representativo se vuelve muy reacio a soportar caídas adicionales en el consumo, ya que se vuelve muy averso al riesgo. Sin embargo, esto no implica que el coeficiente κ aumente, sino que tal situación puede ser compatible con un κ más bajo. Ahora bien, si κ se reduce, la elasticidad intertemporal de sustitución aumenta, por lo que el agente podría estar dispuesto a modificar su consumo a lo largo del tiempo en mayor medida. Por tanto, se hace compatible una gran aversión al riesgo junto con una mayor elasticidad intertemporal de sustitución del consumo. De hecho el cociente $\frac{C_t}{C_t - X_t}$ es lo que rompe con la relación directa entre γ y κ.

Ahora usaremos el inverso del cociente $\frac{C_t}{C_t - X_t}$ que se le denomina cociente del exceso de consumo, S_t:

$$S_t = \frac{C_t - X_t}{C_t}, \tag{3.72}$$

de manera que el factor de descuento estocástico o la relación marginal de sustitución intertemporal en este modelo se escribe como:

$$M_{t+1} = \left[\rho \frac{U'(C_{t+1} - X_{t+1})}{U'(C_t - X_t)}\right] = \rho \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\kappa}, \tag{3.73}$$

La expresión (3.73) sugiere una nueva fuente de covariabilidad con los rendimientos de los activos que puede explicar mejor su comportamiento.

Recuérdese de líneas anteriores que un mayor coeficiente de aversión al riesgo, implicaba un aumento del tipo de interés libre de riesgo que no corresponde en absoluto con los niveles observados para dicho tipo de interés a lo largo del tiempo.

La contribución de Campbell and Cochrane es que no es necesario tal aumento del tipo de interés, a pesar del incremento en la aversión relativa al riesgo, debido al aumento en el deseo de ahorrar por parte del agente representativo por motivo de precaución.

Para explicar la intuición de esto, imaginemos una época de recesión económica en la que el consumo es bajo con relación al nivel de hábito. Al inicio, el agente querrá pedir prestado para poder obtener un mayor consumo futuro, lo que llevara a aumentar los tipos de interés y poder así consumir más ahora de tal forma que la sustituibilidad del consumo en el tiempo sea pequeña. No obstante, es un hecho que el agente representativo es más averso al riesgo debido a que el nivel de consumo hoy es más pequeño. Es esta aversión al riesgo lo que lo hace ser más precavido, y por tanto, le lleva a incrementar su deseo de ahorrar puesto que la situación puede ser aún peor en el futuro. Nótese que este mayor ahorro hace que el consumo actual sea efectivamente más bajo, situación que el agente, en el nuevo modelo, está dispuesto a admitir ya que no le importa incrementar la sustituibilidad del consumo en el tiempo, es decir, consumo bajo hoy y consumo alto mañana es admisible en el modelo a pesar de tener una elevada aversión al riesgo.

Analíticamente esto se ve así, primero recuérdese la expresión del tipo de interés dada por (3.47)

$$E_t r_{f t+1} = -\ln \rho + \gamma E_t \Delta c_{t+1} - \frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_c^2$$

que para el caso del modelo de Campbell and Cochrane, se incorpora un término que refleja el ahorro por motivo de precaución:

$$E_t r_{f t+1} = -\ln \rho + \kappa E_t \Delta c_{t+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{\bar{S}}\right)^2 \sigma_c^2, \tag{3.74}$$

donde $\bar{S}$ denota la media a largo plazo del cociente $\frac{C_t - X_t}{C_t}$, de forma que el termino κ controla la relación entre el crecimiento del consumo y los tipos de interés (admitiendo tipos bajos de interés a pesar de una elevada aversión al riesgo), mientras que el coeficiente de curvatura de la función de utilidad, $\gamma = \kappa\, \bar{S}^{-1}$, controla la prima por riesgo (así, la elevada prima por riesgo del mercado puede explicarse por una elevada aversión al riesgo que no tiene efectos secundarios adicionales que distorsionen alguna otra evidencia empírica). En síntesis, el modelo admite una elevada aversión al riesgo con una disposición también elevada a sustituir intertemporalmente consumo, lo que hace que las implicaciones del modelo, sean consistentes con el comportamiento tanto del consumo como de los tipos de interés. El mensaje es que, *a los individuos no les preocupa la disminución de los rendimientos de los activos en sí misma, sino que se muestran temerosos ante la disminución de su riqueza financiera porque precisamente suele ocurrir en épocas de recesión económica*.

Es importante comentar algo, y es que efectivamente los modelos con un agente representativo son muy cuestionables. No es sino recordar los exigentes supuestos necesarios para justificar la presencia del agente representativo. El trabajo de Constantinides and Duffie (1996) es un esfuerzo por introducir agentes heterogéneos y riesgo idiosincrático, cuya idea es básicamente construir modelos de valoración donde los individuos heterogéneos soporten elevados riesgos idiosincráticos asociados con sus propios niveles de ingresos. Sin embargo, lo que resulta muy difícil de evitar es argumentar que los individuos no tengan una suficiente capacidad de aseguramiento contra dichos riesgos idiosincráticos, lo que les haría exigir una prima de riesgo pequeña, lo que lleva al problema de poder explicar las elevadas primas de riesgos observadas. Lo importante aquí es que cualquier renta idiosincrática que se considere en un modelo, donde dicha renta se permita estar correlacionada con el rendimiento del mercado, será diversificable. Esto es reconocer que estamos frente a una estructura de *mercado incompleto* "rompiendo" la relación entre riesgos idiosincráticos y riesgo agregado al existir alguna causa que impide el aseguramiento de los riesgos individuales o, lo que es igual, la correlación entre el mercado y los ingresos de los individuos. *Constantinides and Duffie lo hacen suponiendo que la varianza de los riesgos idiosincráticos aumenta cuando el rendimiento de cartera de mercado disminuye*, además, imponen preferencias potenciales que no admitan casos particulares como las preferencias cuadráticas. A pesar de que el contraste empírico es complejo, la implicación fundamental del mismo es que una parte importante de la prima de riesgo de mercado puede venir explicada por la covarianza entre los rendimientos de los activos con la varianza (de corte transversal) de la tasa de crecimiento del consumo entre los individuos. Se trata de conocer la varianza en un momento dado del tiempo que presentan los consumos entre los individuos. Cuanto mayor sea la covarianza entre esta varianza de sección cruzada y los rendimientos de los activos mayor sería la prima de riesgo exigida en agregado.

3.8. El CAPM Intertemporal (ICAPM).

Se sabe por la expresión (3.14) que el CCAPM puede escribirse como:

$$E\left(R_{jt+1} - r_{t+1} \middle| \mathcal{F}_t\right) = -(1 + r_{t+1}) cov_t \left[\frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)}, R_{jt+1}\right],$$

Recordemos que el signo de la covarianza entre el rendimiento del activo j y la utilidad marginal del consumo agregado en $t + 1$ es el determinante fundamental de la prima de riesgo de j. Sabemos que en un marco intertemporal, que no es posible reemplazar sin más el consumo agregado, por la riqueza agregada. De hecho, la sustitución del consumo por la riqueza en modelos dinámicos conduce necesariamente a modelos con múltiples factores de riesgo y, por tanto, múltiples covarianzas o betas como determinantes de los precios de los activos.

La *condición de la envolvente* del problema de maximización intertemporal viene dada por la expresión (3.24):

$$\mathcal{J}_W(W_t, \mathcal{F}_t) = U_C(C_t, \mathcal{F}_t),$$

donde nuevamente recordemos que $\mathcal{J}_W(.)$ y $U_C(.)$ son las primeras derivadas de la función indirecta de utilidad con respecto a la riqueza agregada y de la función de utilidad con respecto al consumo agregado respectivamente. Luego, por la concavidad estricta de la función de utilidad $U(.)$, así como de la función indirecta $J(.)$, sabemos que las correspondientes utilidades marginales $\mathcal{J}_W(.)$ y $U_C(.)$ son estrictamente decrecientes. De esta forma, debe de existir una función necesariamente creciente, $f(.)$, tal que para el agente representativo,

$$C_t = f(W_t, \mathcal{F}_t) \tag{3.75}$$

Por tanto, la ecuación de valoración (3.14) se puede escribir de la siguiente manera:

$$E\left(R_{jt+1} - r_{t+1} \middle| \mathcal{F}_t\right) = -(1 + r_{t+1}) cov_t \left[\frac{U'(W_{t+1}, \mathcal{F}_{t+1})}{U'(W_t, \mathcal{F}_t)}, R_{jt+1}\right], \tag{3.76}$$

por lo que se puede concluir que el signo de la covarianza en esta ecuación puede no estar determinado por el signo de la covarianza entre la riqueza agregada y el rendimiento del activo j, $cov\left(W_{t+1}, R_{jt+1}\right)$. En un marco intertemporal, la relación entre el consumo agregado y la riqueza agregada, C_{t+1} y W_{t+1}, es determinista y, por tanto, independiente de los sucesos en $\mathcal{F}_{t+1}$, solamente cuando el conjunto de oportunidades de inversión es constante. Básicamente, estas son las dos ideas relacionadas con el modelo intertemporal sin consumo de Campbell (1993,1996). La consecuencia última es la aparición de múltiples betas en la ecuación de precios.

En la literatura se debe tener cuidado con respecto al enfoque usado por Campbell, pues conviene presentar una alternativa, en donde se lleven a las máximas consecuencias las oportunidades que se presentan cuando el mercado se abre a lo largo del tiempo. El trabajo de Merton (1973) que es una versión exacta en tiempo continuo del modelo de Campbell, este modelo se conoce en la literatura como el ICAPM.

3.8.1. Los movimientos brownianos.

Para hablar de los movimientos brownianos nos podemos ir al siglo XX. El movimiento browniano surge de la observación del movimiento de partículas de polen suspendidas en agua y que se movían sin cesar en forma errática. Ya Einstein en 1905 abordó el problema desde la mecánica estadística y desarrolla la formulación matemática del movimiento browniano; en donde la dispersión promedio del desplazamiento de la partícula, en un tiempo dado, es proporcional a dicho tiempo. Pero para el análisis económico nos interesa la contribución de Bachelier (1900), trabajo en el que incorpora el modelado del comportamiento aleatorio de los precios de las acciones de la bolsa de París. La literatura financiera de hoy incorpora implícitamente o explícitamente el movimiento browniano en tiempo continuo y en ambientes estocásticos tanto a nivel teórico como practico.

Básicamente la idea del movimiento browniano se usará para describir el comportamiento de los precios de los activos. El ICAPM supone un contexto en tiempo continuo donde las variaciones de los precios de los activos tienen una deriva más un ruido blanco que, precisamente, viene caracterizado por las propiedades que definen del denominado movimiento browniano. Esta caracterización de la aleatoriedad se transmite al comportamiento de los precios de los activos. Definiéndolo de manera más formal, un movimiento browniano equivale a un proceso estocástico de trayectorias o senderos muestrales continuos pero no diferenciables, $(B_t; t \in \mathbb{R}_+)$ definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \pi)$, tal que:

i. $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n \Rightarrow B_{tk} - B_{tk-1}; k = 1, \ldots, n$ son independientes. Es decir, los incrementos del movimiento browniano entre dos intervalos cualesquiera son independientes.

ii. $B_0 = 0$ y $B_t - B_\tau \approx N(0, \sqrt{t - \tau})$ para todo $\tau \leq t$. Los movimientos brownianos son gaussianos.

De esta forma, podemos expresar el proceso estocástico que caracteriza al precio de cualquier activo como:

$$p_t = \bar{\mu}t + \sigma B_t; t \in [0, T], \tag{3.77}$$

donde

i. $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n \Rightarrow p_{tk} - p_{tk-1}; k = 1, \ldots, n$ son independientes. Esto significa que, los incrementos de los precios de los activos entre dos intervalos de tiempo cualesquiera son independientes.

ii. $p_t - p_\tau \approx N(\bar{\mu}(t - \tau), \sigma\sqrt{t - \tau})$ para todo $\tau \leq t$.

iii. Las trayectorias o senderos muestrales de los precios son continuos pero no diferenciables.

Vale la pena aclarar que aquí estamos considerando una variable aleatoria dependiente de estado de la naturaleza, X_s. Igualmente podemos ir modificando la estructura de la variable a lo largo del tiempo, X_{ts}, tendremos un proceso estocástico. Recuérdese, que si el dominio de definición en t es finito, estaremos ante un proceso estocástico discreto (modelo binomial); si es infinito (no numerable), tendremos un proceso estocástico continuo.

Lógicamente, si hacemos $\bar{\mu} = 0$ y $\sigma = 1$ resulta un proceso que es precisamente el movimiento browniano. Los primeros momentos condicionales del proceso p_t son

$$E[p_t | p_0] = p_0 + \bar{\mu}(t - t_0)$$
$$var[p_t | p_0] = \sigma^2(t - t_0),$$

por lo que la media condicional y la varianza condicional son lineales en t, que es exactamente lo mismo para el paseo aleatorio en tiempo discreto. Es muy importante tener en cuenta que el movimiento browniano implica una trayectoria en el precio de los activos continua, dentada y errática. Intuitivamente estas características se deducen del hecho de que hay independencia entre incrementos. Es más, la trayectoria continua del browniano nunca podría ser suave ya que, si lo fuera, $B_{t+\Delta_t} - B_t$ seria predecible gracias a la variación anterior $B_t - B_{t-\Delta_t}$. De esta forma, *la derivada de un movimiento browniano con respecto al tiempo no existe en el sentido tradicional*. Es decir, que

$$\Delta B_t = B_{t+\Delta_t} - B_t \approx N\left(0, \sqrt{\Delta t}\right),$$

además, supóngase que $\frac{\Delta B_t}{\Delta t} \to h$. Entonces, dada la característica de normalidad del movimiento browniano, h debe de ser una variable que es normal con media cero y varianza $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sqrt{\Delta t}}{\Delta t} = \infty$, lo cual no tiene sentido.

Aunque el proceso es continuo y no diferenciable, el incremento infinitesimal de un movimiento browniano cuando Δt se aproxima a un intervalo temporal infinitesimal dt, $\lim_{\Delta t \to dt} \frac{B_{t+\Delta_t} - B_t}{\Delta t}$, tiene su propia interpretación y se escribe como dB_t. Se podría pensar en $B_{t+\Delta_t} - B_t$ como en un ruido blanco gaussiano, de tal manera que cuando Δt se hace infinitesimalmente pequeño, $\Delta t \to 0$, dB_t sería la versión en tiempo continuo de dicho ruido blanco. En conclusión, dB_t es una diferencial estocástica que tiene sus propias reglas derivadas del cálculo estocástico, por lo que no se considera como una diferencial en el sentido tradicional, para ello se requiere del concepto de integral estocástica de Ito y el lema de Ito para poder trabajar con estos diferenciales estocásticos, para mayores detalles ver Oksendal (2003).

En este orden de ideas, la expresión (3.77) se puede escribir como una ecuación diferencial estocástica cuya forma es:

$$dp_t = \bar{\mu} dt + \sigma dB_t \tag{3.78}$$

Téngase en cuenta que para cualquier variable aleatoria normal X con media cero y varianza σ^2, se verifica que: $E[X^2] = \sigma^2$ y $var(X^2) = 2\sigma^4$. Entonces, dado que $\Delta B_t = B_{t+\Delta t} - B_t \approx N\left(0, \sqrt{\Delta t}\right)$, tendremos que:

$$E[(\Delta B_t)^2] = \Delta t \text{ y } var[(\Delta B_t)^2] = 2(\Delta t)^2,$$

por lo que en el "limite", en el sentido estocástico del movimiento browniano, $(dB_t)^2 = dt$, lo que tiene importantes consecuencias para el cálculo matemático de procesos estocásticos continuos. Asimismo, se puede probar que $dB_t dt = 0$.

Ahora bien, imagínese una función f de una variable p, que se caracteriza, por seguir un movimiento browniano, y del tiempo. El *lema de Ito* lo que hace es calcular la ecuación diferencial estocástica que gobierna el comportamiento dinámico de dicha función $f(p,t)$:

$$df(p,t) = \frac{\partial f}{\partial p}dp + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}(dp)^2, \tag{3.79}$$

donde el ultimo termino del lado derecho no aparecería en el cálculo tradicional y es una consecuencia de la propiedad $(dB_t)^2 = dt$.

Debido a que el supuesto de normalidad sobre los precios de los activos es un limitante, se supone como modelo de comportamiento alternativo el movimiento geométrico browniano a diferencia del descrito anteriormente que es el movimiento aritmético browniano. Supóngase que p_t sigue un movimiento aritmético browniano caracterizado por la dinámica descrita por la expresión (3.78). Definamos $p_t \equiv \ln P_t$, de forma que el precio del activo se supone lognormal. De esta manera, $P_t = e^{p_t}$ siempre es no negativo y satisface la propiedad de responsabilidad limitada. El proceso del precio $P_t = e^{p_t}$ se conoce como movimiento geométrico browniano, el cual es muy utilizado en la literatura en Economía Financiera.

Para determinar la dinámica que caracteriza al proceso $P_t = e^{p_t}$ se hace uso del *lema de Ito* y se obtiene:

$$\begin{aligned} dP &= \frac{\partial P}{\partial p}dp + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial p^2}(dp)^2 = e^p dp + \frac{1}{2}e^p(dp)^2 \\ &= P(\bar{\mu}dt + \sigma dB) + \frac{1}{2}P\sigma^2 dt = P\underbrace{\left(\bar{\mu} + \frac{1}{2}\sigma^2\right)}_{\mu}dt + \sigma P dB. \end{aligned}$$

Por tanto, se concluye que la dinámica que gobierna el precio de los activos financieros se escribe como:

$$\frac{dP}{P} = \mu dt + \sigma dB, \tag{3.80}$$

donde la tasa de rendimiento del activo sigue un proceso aritmético browniano o paseo aleatorio en tiempo continuo, con rendimiento esperado instantáneo igual a μ y volatilidad constante σ.

3.8.2. El modelo de valoración intertemporal con cartera de mercado (ICAPM).

Es importante ahora mirar las consecuencias que tiene para la valoración de activos la posibilidad de que el conjunto de oportunidades de inversión se mueva a lo largo del tiempo. Para la exposición, primero se supone en el modelo que dicho conjunto permanece constante, para luego incorporar el supuesto que es más realista bajo el cual el conjunto de oportunidades de inversión es estocástico.

1. Conjunto de oportunidades de inversión constante.

Supóngase que el precio de cualquier activo incierto j sigue un proceso geométrico browniano de la forma representada por la ecuación (3.80):

$$\frac{dP_j}{P_j} = \mu_j dt + \sigma_j dB_j. \tag{3.81}$$

El agente representativo maximiza su utilidad esperada intertemporal,

$$\max_{\{C,\omega\}} E_t \left\{ \int_t^T U[C_\tau, \tau] d\tau + H[W_T, T] \right\}, \tag{3.82}$$

sujeto a la restricción intertemporal,

$$dW = \sum_{j=1}^{N} \omega_{jm} W \frac{dP_j}{P_j} - C dt, \tag{3.83}$$

donde E_t es la expectativa condicional en el momento inicial t, $H[W_T, T]$ es una función herencia de utilidad, que es solamente valida al final de la vida del agente representativo, con las mismas propiedades que se suponen para $U(.)$ y, ω_{jm} es el porcentaje de la riqueza del agente representativo que se asigna al activo incierto j. Nótese que tanto el consumo como la riqueza son en términos agregados por lo que, en equilibrio, los porcentajes en los que invierte el agente representativo en cada uno de los activos serán necesariamente los porcentajes de cada activo en la cartera de mercado.

Definimos la función indirecta de utilidad como $J(.)$:

$$J(W, t) \equiv \max_{\{C,\omega\}} E_t \left\{ \int_t^T U[C_\tau, \tau] d\tau + H[W_T, T] \right\}. \tag{3.84}$$

En Merton (1990) se demuestra que la condición necesaria para encontrar un óptimo, en cualquier momento del tiempo, suponiendo que los precios de los activos siguen una distribución lognormal es

$$
\begin{aligned}
0 = \max_{\{C,\omega\}} \Bigg[& U(C,t) + J_t + J_W \left(W \sum_{j=1}^{N} \omega_{jm}\mu_j - C \right) \\
& + \frac{W^2}{2} J_{WW} \sum_{q=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \omega_{jm}\omega_{qm}\sigma_{jq} \Bigg],
\end{aligned} \tag{3.85}
$$

sujeto a $J[W_T, T] = H[W_T, T]$, y donde σ_{jq} es la covarianza entre los rendimientos instantáneos de dos activos inciertos cualesquiera j y q.

Nótese que introduciendo un activo libre de riesgo podemos escribir

$$
\sum_{j=1}^{N} \omega_{jm}\mu_j = \sum_{j=1}^{N} \omega_{jm}(\mu_j - r) + r.
$$

Resolviendo el problema de optimización (3.85), se obtienen las $N + 1$ condiciones de primer orden:

$$
\begin{aligned}
& 0 = U_C(C,t) - J_W(W,t) \\
& 0 = J_W W(\mu_j - r) + J_{WW} W^2 \sum_{q=1}^{N} \omega_{qm}\sigma_{jq}\, ; j = 1, \dots, N.
\end{aligned} \tag{3.86}
$$

Por tanto,

$$
-\frac{J_W}{J_{WW}}(\mu_j - r) = W \sum_{q=1}^{N} \omega_{qm}\sigma_{jq}, \tag{3.87}
$$

donde $A^{-1}(W) = -\frac{J_W}{J_{WW}}$ es la inversa de la aversión absoluta al riesgo de la economía en agregado. Despejando la prima de riesgo esperada (instantánea) del activo j,

$$
\mu_j - r = \frac{W}{A^{-1}(W)} \sigma_{jm}; j = 1, \dots, N, \tag{3.88}
$$

donde $\sigma_{jm} = \sum_{q=1}^{N} \omega_{qm}\sigma_{jq}$ es la covarianza instantánea entre el rendimiento del activo j y el rendimiento de la cartera de mercado.

Como (3.88) es válido para cualquier activo j también lo será para la cartera de mercado

$$\mu_m - r = \frac{W}{A^{-1}(W)}\sigma_m^2, \tag{3.89}$$

donde μ_m es el rendimiento esperado instantáneo de la cartera de mercado. Por tanto, usando las expresiones (3.88) y (3.89),

$$\frac{\mu_j - r}{\sigma_{jm}} = \frac{\mu_m - r}{\sigma_m^2}$$

$$\mu_j - r = \frac{\sigma_{jm}}{\sigma_m^2}(\mu_m - r)$$

de donde se obtiene el CAPM en tiempo continuo (intertemporal) pero suponiendo que el conjunto de oportunidades de inversión es constante:

$$\mu_j - r = \beta_{jm}(\mu_m - r). \tag{3.90}$$

2. *Conjunto de oportunidades de inversión estocástico.*

Supóngase que existe una única variable estado, Z, que describe las variaciones en el conjunto de oportunidades de inversión. En este caso más realista al reconocer explícitamente que las oportunidades de inversión a las que se enfrenta el agente representativo tiene cambios, la función de utilidad indirecta también depende de Z y, por tanto, $J(W, Z, t)$.

Se hace el supuesto de que la variable estado Z sigue un movimiento geométrico browniano con deriva y volatilidad constantes:

$$\frac{dZ}{Z} = \alpha dt + s dB_z,$$

de forma que el problema de maximización (3.85) queda en este caso como:

$$0 = \max_{\{C,\omega\}} \left[U(C,t) + J_t + J_W \left(W \sum_{j=1}^{N} \omega_{jm}\mu_j - C \right) \right.$$
$$+ \frac{W^2}{2} J_{WW} \sum_{q=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \omega_{jm}\omega_{qm}\sigma_{jq} + J_Z\alpha + \frac{1}{2}J_{ZZ}s^2$$
$$\left. + J_{WZ} \sum_{j=1}^{N} \omega_{jm}\sigma_{jZ} \right]$$

Donde σ_{jZ} es la covarianza instantánea entre el rendimiento del activo j y la variable estado que describe el conjunto de oportunidades de inversión Z. Nótese que hay cierta similitud entre el modelo de Merton y el modelo sin consumo de Campbell al hacerse modificaciones en las oportunidades de inversión. Las $N+1$ condiciones de primer orden son

$$\begin{aligned} 0 &= U_C(C,t) - J_W(W,Z,t) \\ 0 &= J_W W(\mu_j - r) + J_{WW} W^2 \sum_{q=1}^{N} \omega_{qm}\sigma_{jq} + J_{WZ} W \sigma_{jZ}; j = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{3.91}$$

Despejando las ponderaciones óptimas de cada activo se obtiene,

$$\omega_{jm} W = \underbrace{-\frac{J_W}{J_{WW}} \sum_{j=1}^{N} \upsilon_{jq} \left(\mu_j - r\right)}_{(1)} \underbrace{-\frac{J_{WZ}}{J_{WW}} \sum_{j=1}^{N} \upsilon_{jq}\, \sigma_{jZ},}_{(2)} \tag{3.92}$$

donde $\upsilon_{jq} = \left[\sigma_{jq}\right]^{-1}$.

La demanda óptima de activos financieros tiene dos componentes:

(1) Es idéntico a la demanda individual que se obtiene en el marco estático de media-varianza o, lo que es igual, en las condiciones de primer orden (3.86) con un conjunto de oportunidades de inversión constante.

(2) Refleja la demanda del activo j-ésimo como una forma de protegerse ante cambios desfavorables en el conjunto de oportunidades de inversión. Se comprenderá por cambio desfavorable a cualquier cambio positivo en Z tal que el consumo (futuro) disminuye para un nivel dado de riqueza (futura). Es decir, un cambio desfavorable ocurrirá cuando $\frac{\partial C}{\partial Z} < 0$ al mismo tiempo que Z aumente. El agente representativo averso al riesgo intentara cubrirse contra dichos cambios desfavorables demandando más del activo j cuanto más correlacionado esta j con la variable estado Z. Si el conjunto de oportunidades de inversión ex-post es menos favorable de lo que se había anticipado, el agente representativo esperará ser compensado con un mayor nivel de riqueza gracias a la correlación positiva entre el rendimiento del activo j y la variable Z. De igual forma, si los rendimientos ex-post son menores, el agente esperará un entorno de inversión más favorable. Nótese que este tipo de comportamiento sugiere un deseo de suavizar el patrón de consumo a

lo largo del tiempo al intentar minimizar la variabilidad no anticipada del consumo en el tiempo. Asimismo, este segundo término implica que la separación en dos fondos del tradicional entorno de media-varianza no se satisface cuando existe un conjunto de oportunidades de inversión estocástico.

4. AHORRO POR MOTIVO DE PRECAUCIÓN Y RESTRICCIONES DE ENDEUDAMIENTO.

Hasta el momento se ignoró en la exposición la presencia de restricciones de crédito. Por tanto, se iniciara esta sección con la siguiente pregunta: ¿Cuándo se hacen efectivas las restricciones de crédito? En la sección 1 se impuso la condición de esquema No Ponzi, pero nunca se miró si efectivamente operaban las restricciones de crédito. ¿Puede ser una buena abstracción para el análisis? A continuación responderemos que dependerá del tipo de proceso que siga el ingreso.

4.1. Prudencia: Un modelo de dos periodos.

Considere un problema simple de consumo-ahorro de dos periodos simplificando la presentación usada en Kimball and Weil (2009):

$$\begin{aligned}
&\max_{\{c_0,c_1,a_1\}} u(c_0) + \beta E[u(c_1)] \\
&s.t. \\
&c_0 + a_1 = y_0 \\
&c_1 = Ra_1 + \tilde{y}_1
\end{aligned}$$

donde y_0 es dado, el ingreso del periodo siguiente $\tilde{y}_1$ es también exógeno pero estocástico[17]. Sin pérdida de generalidad se supone que $\beta R = 1$, solamente para simplificar el álgebra, así que la ecuación de Euler para el problema es

$$u'(y_0 - a_1) = E[u'(Ra_1 + \tilde{y}_1)],$$

la cual es una ecuación con solo una variable desconocida, a_1. El lado izquierdo de la ecuación anterior es creciente en a_1 desde que $u'' < 0$, y el lado derecho es decreciente por la misma razón, por tanto a_1^* es determinado de forma única. Notar que el consumo corriente c_0 está determinado por la restricción presupuestaria del periodo cero

$$c_0^* = y_0 - a_1^*,$$

por tanto un incremento en los ahorros lleva a una caída en el consumo corriente.

[17] El manejo de los tiempos en este problema es ligeramente diferente del adoptado en la exposición de la PIH. Ahí se había asumido que los individuos recibían el ingreso y el consumían al inicio del periodo y los pagos de los intereses ocurrían al final del periodo. Aquí, asumiremos que el pago de los intereses ocurre al inicio del periodo, el ingreso es pagado al final del periodo y los individuos consumen al final del periodo. Es finalmente una cuestión de conveniencia en la especificación de los tiempos.

Preservación de la media en propagación- ¿Qué ocurre al consumo óptimo en el periodo $t = 0$ si la incertidumbre en el ingreso del siguiente periodo $\tilde{y}_1$ aumenta, por ejemplo, en la medida que el ingreso futuro se vuelve más riesgoso? Considere una preservación de la media en propagación de $\tilde{y}_1$. Definido como

$$\tilde{y}_1 = \bar{y}_1 + \varepsilon_1,$$

donde ε_1 es el componente estocástico y $\bar{y}_1$ es la media. Supóngase que $E(\varepsilon_1) = 0$ y $var(\varepsilon_1) = \sigma_\varepsilon^2$. La ecuacion de Euler se vuelve

$$u'(y_0 - a_1) = E[u'(Ra_1 + \bar{y}_1 + \varepsilon_1)],$$

La cual muestra que si u' *es convexa*, entonces por la desigualdad de Jensen, una preservación de la media de ε_1 incrementará el valor del lado derecho de la ecuación anterior, la cual se desplaza hacia arriba, induciendo un aumento en a_1^* y una caída en c_0^*. Esto se deriva del famoso resultado de Rotschild y Stiglitz (1970).

Prudencia- La convexidad de la utilidad marginal (o $u''' > 0$) es llamado "prudencia" y es una propiedad de las preferencias, como la aversión al riesgo: la *aversión al riesgo* se refiere a la curvatura de la función de utilidad, mientras que la *prudencia* se refiere a la curvatura de la función de la utilidad marginal. De hecho, de forma más precisa el trabajo de Kimball (1990) definió el índice de prudencia absoluta como la razón $\frac{-u'''(c)}{u''(c)}$, que es una forma muy similar al índice Arrow-Pratt de aversión absoluta al riesgo $\frac{-u''(c)}{u'(c)}$. De dicho trabajo se tomara el siguiente resultado:

Si la utilidad marginal es convexa $(u''' > 0)$, *entonces el individuo es "prudente" y un incremento en la incertidumbre en el ingreso llevará a aumentar el ahorro corriente y una disminución en el consumo corriente.*

Se puede ver que cualquier función de utilidad con aversión absoluta decreciente al riesgo, por ejemplo de clase DARA[18] (la cual incluye CRRA), muestra tercera derivada positiva. Sea $\theta_A(c)$ el coeficiente de aversión absoluta al riesgo. Entonces:

$$\theta_A(c) = \frac{-u''(c)}{u'(c)} \Rightarrow \theta_A'(c) = \frac{-u'''(c)u'(c) + [u''(c)]^2}{[u'(c)]^2}.$$

[18] *decreasing/increasing relative risk aversion* (DRRA/IRRA)

Desde que se tenga una función de utilidad de clase DARA $\theta_A'(c) < 0$, entonces tendremos que

$$-u'''(c)u'(c) + [u''(c)]^2 < 0 \Rightarrow u'''(c) > \frac{[u''(c)]^2}{u'(c)} > 0.$$

Intuitivamente, un incremento en la incertidumbre reduce el ingreso del equivalente cierto del siguiente periodo y con preferencias tipo DARA se incrementa el grado de aversión al riesgo del agente, induciéndolo a ahorrar más.

La *prudencia* es un motivo para ahorro adicional con el fin de tomar precaución contra todas las posibles realizaciones negativas de un choque al ingreso en el siguiente periodo. En este sentido, los ahorros inducidos por la prudencia son llamados "ahorros por motivos de precaución" o "auto seguro". En este modelo de equilibrio parcial de dos periodos uno puede definir *riqueza por precaución* debido a la incertidumbre en el ingreso σ_ε^2 como la diferencia entre la elección óptima de un activo bajo incertidumbre $a_1^*(\sigma_\varepsilon^2)$ y la elección óptima bajo certeza durante el ingreso del siguiente periodo, por ejemplo, $a_1^*(0)$.

4.2. Motivos de Ahorro.

Es momento de señalar ahora los "motivos de ahorro". El motivo por ahorro está asociado a $\beta R > 1$, lo cual empuja al individuo a posponer su consumo debido a la paciencia y/o a los rendimientos que se generan por ahorrar, esto es llamado *motivo intertemporal*. El motivo por ahorro de la PIH cuando la utilidad es cuadrática (por tanto la incertidumbre no tiene ningún papel) y $\beta R = 1$ (por tanto, el *motivo intertemporal* está inactivo) es llamado *motivo por suavización*, es decir, el individuo desea suavizar su consumo a través de los choques al ingreso. Finalmente, como fue explicado anteriormente, el motivo por ahorro asociado a la incertidumbre en el ingreso futuro es llamado *motivo por precaución o autoseguro*. Éste se adiciona al modelo de ciclo de vida donde los individuos se enfrentan a un periodo de retiro, durante su etapa de trabajo del ciclo de vida el individuo tendría un *motivo por ciclo de vida* para ahorrar, asociado a su deseo de suavizar consumo entre su vida laboral y su periodo de retiro. En presencia de altruismo hacia sus descendientes, se tiene un motivo por ahorro adicional destinado a dejar un *legado*.

4.3. Restricciones crediticias.

Ahora vamos a analizar el papel de las *restricciones crediticias* en el *ahorro por motivo de precaución*. Nos abstraeremos de la *prudencia* y nos enfocaremos en el caso de utilidad cuadrática. Para dar cuenta de la posibilidad de que las *restricciones crediticias* están operando, la ecuación de Euler debe de ser modificada. Supóngase que el hogar no se enfrenta a *restricciones de crédito,* $a_{t+1} \geq 0$. Entonces, se vuelve

$$c_t = \begin{cases} E_t c_{t+1} & \text{si } a_{t+1} > 0 \\ y_t + a_t & \text{si } a_{t+1} = 0 \end{cases}$$

donde la primera línea es simplemente la condición de primer orden del agente cuando la restricción no está operando ($a_{t+1} > 0$), mientras que la segunda línea desciende directamente de la restricción presupuestaria $a_{t+1} = R(y_t + a_t - c_t)$ cuando la restricción si está operando ($a_{t+1} = 0$). Como el hogar está restringido, desearía pedir prestado crédito para financiar su consumo, como no se le permite, se consume todos sus recursos.

Es necesario hacerse la siguiente pregunta: ¿En cuál escenario la *restricción crediticia* opera? Por ejemplo imaginemos que $a_t = 0$ y que el ingreso es $y_t = \bar{y} + \varepsilon_t$, donde ε_t sigue un proceso *iid* con media cero. En este caso, sabemos que usando (1.22) el consumo óptimo sin restricciones será $c_t^* = \bar{y} + \frac{r}{1+r}\varepsilon_t$ mientras que sus recursos totales son $y_t = \bar{y} + \varepsilon_t$. Por tanto, si ε_t es negativo, el agente, para suavizar el ingreso, le gustaría consumir $c_t > y_t$ (lo cual haría si pudiera pedir prestado) pero como él está restringido en $c_t = y_t$. En general, la restricción es probable que opere siempre que y_t siga un proceso de reversión hacia la media[19]. El par de condiciones enunciadas anteriormente puede ser escrito en forma compuesta como lo hace Deaton (1991):

$$c_t = \min\{\, y_t + a_t, E_t c_{t+1}\} = \min\{\, y_t + a_t, E_t[\min\{\, y_{t+1} + a_{t+1}, E_{t+1} c_{t+2}\}]\}.$$

Ahora, supóngase que la incertidumbre sobre el ingreso y_{t+1} se incrementa. Realizaciones muy bajas para el ingreso y_{t+1} y que cada vez sean más probables, hacen que la restricción crediticia más probablemente opere en el futuro y así reducen el valor de $E_t[\min\{\, y_{t+1} + a_{t+1}, E_{t+1} c_{t+2}\}]$. Esto, a su vez, reduce el valor de

[19] En las finanzas, reversión a la media es el supuesto de que el precio de una acción tenderá a moverse con el precio medio en el tiempo.

$E_t c_{t+1}$. Así que si la restricción crediticia no está operando en el periodo t pero podría operar en el futuro, entonces el agente consumiría menos hoy.

Intuitivamente, cuando los agentes se enfrentan a las *restricciones crediticias*, tendrían miedo de tener consecutivamente varias realizaciones malas acerca de sus ingresos de forma que los empujen hacia la restricción crediticia y los forcé a consumir sus ingresos sin capacidad de suavizar el consumo. Para poder prevenir esta situación, ellos ahorran para *autoasegurarsen (motivo por precaución)*. Así, tenemos un importante resultado:

La Prudencia no es estrictamente necesaria para el comportamiento del ahorro por precaución. En otras palabras, incluso en ausencia de prudencia (por ejemplo con preferencias cuadráticas), en presencia de restricciones crediticias un aumento de la incertidumbre en el ingreso futuro lleva a un aumento de los ahorros corrientes por precaución y una disminución en el consumo corriente.

Aunque se mostró este resultado para una función de utilidad cuadrática, es un resultado que se cumple para cualquier función de utilidad cóncava.

4.4. Un problema de decisión de consumo y ahorro.

El problema de decisión de consumo y ahorro que se considera será con incertidumbre en el ingreso. Inicialmente el consumidor está dotado con algunos ahorros. En cada periodo él percibe un ingreso laboral incierto. Él entonces decide cuánto consumir y cuánto ahorrar con el fin de maximizar su utilidad esperada descontada bajo un horizonte de tiempo finito. Formularemos este problema siguiendo el modelo de decisión de Markov:

$$\max E\left[\sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t)\right], \tag{4.1}$$

sujeto a

$$c_t + a_{t+1} = Ra_t + y_t, a_0 \geq 0 \text{ dado}, \tag{4.2}$$

donde $R > 0$ es la tasa de interés bruta y c_t, a_t, y y_t representan el consumo, ahorro e ingreso laboral respectivamente. Supóngase que $u' > 0$, $u'' < 0$, $\lim_{c\to 0} u'(c) = \infty$, y $\lim_{c\to\infty} u'(c) = 0$. Supóngase además, que cada y_t es idénticamente extraído de una distribución a lo largo de $[y_{min}, y_{max}]$. Notar que no habrá recompensa en el estado terminal a_{T+1}. Debe de imponerse tal restricción en a_{T+1}; caso contrario, el consumidor podría endeudarse y consumir una cuantía infinita. Así, impondremos una restricción crediticia de la forma $a_{T+1} \geq -b_T$ donde $b_T \geq 0$ representa un límite de endeudamiento. En general, puede haber restricciones de crédito en cada periodo debido a las fricciones que hay en el mercado financiero:

$$a_{t+1} \geq -b_t, \text{para algún } b_t \geq 0, t = 0, 1, \dots, T,$$

donde el límite de endeudamiento b_t puede ser tiempo y estado dependiente. Aquí para simplificar la exposición tomaremos una restricción *ad hoc* simple: $b_t = b \geq 0$. Sea $\hat{a}_t = a_t + b$. Definamos el *cash-on-hand* como $x_t = Ra_t + y_t + b$, que es el máximo que se puede gastar en el consumo. Entonces podemos reescribir la restricción presupuestaria y de crédito usando el hecho de que $R = (1 + r)$, respectivamente como:

$$x_{t+1} = R(x_t - c_t) + y_{t+1} - rb,$$

$$c_t + \hat{a}_{t+1} = x_t, \quad \hat{a}_{t+1} \geq 0.$$

Por el *Principio de Optimalidad*, consideremos el siguiente problema de programación de dinámica:

$$V_t(x_t) = \max_{0 \leq \hat{a}_{t+1} \leq x_t} u(x_t - \hat{a}_{t+1}) + \beta E V_{t+1}(R\hat{a}_{t+1} + y_{t+1} - rb),$$

para $t = 0,1, \dots, T - 1$, donde la expectativa es tomada con respecto a y_{t+1}. Claramente, en el último periodo $c_T = x_T$ y por tanto $V_T(x_T) = u(x_T)$. Se debe tener en cuenta que el cambio anterior de variables reduce la dimensión del espacio de estado porque solo tenemos que considerar una variable de estado, x_t, en lugar de dos variables estado, a_t y y_t. Este método típicamente funciona para modelos con choques *iid*, pero no para modelos con choques de Markov.

Sera útil definir $n = T - t$, el cual es interpretado como un índice para el "time-to-go" siguiendo la terminología empleada por Whittle (1996). Podemos entonces reescribir la ecuación de Bellman precedente como:

$$v_0(x) = u(x),$$

$$v_n(x) = \max_{s \in [0,x]} u(x - s) + \beta E v_{n-1}(Rs + y - rb), n = 1, \dots, T.$$

En particular, deducimos que v_n hereda las propiedades básicas de u, por ejemplo, v_s es estrictamente creciente, estrictamente cóncava y continuamente diferenciable en $\mathbb{R}_{++}$. En adición, existen funciones de política óptima para el ahorro y el consumo, $f_n(x)$ y $g_n(x) = x - f_n(x)$, respectivamente. Las siguientes propiedades se cumplen:

- $v_n'(x)$ es creciente en n.
- $g_0(x) = x$ y $f_0(x) = 0$.
- $g_n(x)$ y $f_n(x)$ son continuas y crecientes en x.
- $g_n(x)$ es decreciente en n y $f_n(x)$ es creciente en n.
- $g_n(x)$ y $f_n(x)$ satisface las condiciones de primer orden y las condiciones de envolvente:

$$v_n'(x) = u'\big(g_n(x)\big) \geq \beta RE[v_{n-1}'(Rf_n(x) + y - rb)],$$

con igualdad si $f_n(x) > 0$ para $n = 1, \ldots, T$.

Transformando el problema original en términos de tiempo calendario, escribiremos las funciones de consumo y ahorro en el periodo t como $c_t(x) = g_{T-t}(x)$ y $\hat{a}_{t+1}(x) = f_{T-t}(x)$, respectivamente.

Comparando con el caso determinístico, sea $c_t(x;\ y_{min})$ que denota la política de consumo óptimo cuando $y_t = y_{min}$, para $t = 0, 1, \ldots, T$. Una interpretación similar aplica a la notación $c_t(x;\ y_{max})$. Así tendremos el siguiente resultado: $c_t(x;\ y_{max}) \geq c_t(x) \geq c_t(x;\ y_{min})$.

Ahora consideremos el problema de consumo y ahorro pero con un horizonte de tiempo infinito:

$$\max_{\{c_t\}} E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)\right], \beta \in (0, 1)$$

sujeto a

$$c_t + a_{t+1} = Ra_t + y_t, \tag{4.3}$$

$$c_t \geq 0, a_{t+1} \geq -b, (a_0, y_0) > 0 \text{ dado}, \tag{4.4}$$

aquí, c_t, a_t, y y_t representa el consumo, tenencias de activos e ingreso laboral en el periodo de tiempo t, respectivamente. Supóngase que la tasa de interés bruta $R > 1$ y que la función de utilidad u satisface las condiciones usuales: $u' > 0$, $u'' < 0$,

$\lim_{c\to 0} u'(c) = \infty$, y $\lim_{c\to\infty} u'(c) = 0$. Sea y_t un proceso de Markov con una función de transición Q. Supóngase que es respaldado por $[y_{min}, y_{max}] \subset \mathbb{R}_+$. Esto implica que el valor presente del ingreso laboral es casi seguro que sea finito.

La constante $b \geq 0$ representa una restricción exógena de límite de endeudamiento. Sin cualquier restricción en el endeudamiento, el consumidor puede alcanzar cualquier nivel de consumo pidiendo prestado y refinanciando la deuda. De esta forma, su nivel de utilidad tiende a infinito. Esta estrategia es frecuentemente llamada juego Ponzi o esquema Ponzi. Para descartar esta estrategia, la condición de juego no-Ponzi a menudo se impone:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{a_{T+1}}{R^T} \geq 0. \tag{4.5}$$

Para ver qué ocurre si esta condición es violada, usaremos la restricción (4.3) para derivar:

$$\sum_{t=0}^{T} \frac{c_t}{R^t} + \frac{a_{T+1}}{R^T} = Ra_0 + \sum_{t=0}^{T} \frac{y_t}{R^t}. \tag{4.6}$$

Tomando el límite cuando $T \to \infty$, encontramos que si (4.5) es violada, entonces el valor presente del consumo excede la suma del valor presente del ingreso laboral y la riqueza inicial porque el nivel de deuda de los consumidores nunca se paga. Por ejemplo, el consumidor puede mantener un balance sobre su nivel de deuda inicial, digamos $a_1 < 0$, a la tasa de interés $r = R - 1$ así que su deuda crece a la tasa de interés $a_{T+1} = R^t a_1$. Nosotros entonces tenemos que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{a_{T+1}}{R^T} = \lim_{T\to\infty} \frac{R^T a_1}{R^T} = a_1 < 0$$

4.5. Un nivel de endeudamiento natural.

El siguiente resultado es adaptado de Aiyagari (1994):

TEOREMA 4.1: *Sea* $R = 1 + r > 1$. *Supóngase que* (y_t) *es respaldado por* $[y_{min}, y_{max}] \subset \mathbb{R}_+$. *Si* $a_{t+1} \geq -b$ *para todo* $t \geq 0$ *y cualquier* $b \geq 0$, *entonces la condición de juego no-Ponzi (4.5) se satisface. A la inversa, si la condición de juego no-Ponzi se satisface entonces*

$$a_t \geq -\frac{y_{min}}{r} \, a.s. \, para \; t \geq 0.$$

Prueba: Primero, sea $a_{t+1} \geq -b$ para todo $t \geq 0$. Se sigue de (4.6) que

$$Ra_0 + \sum_{t=0}^{T} \frac{y_t}{R^t} = \sum_{t=0}^{T} \frac{c_t}{R^t} + \frac{a_{T+1}}{R^T} \geq \sum_{t=0}^{T} \frac{c_t}{R^t} - \frac{b}{R^T}.$$

Tomando el límite cuando $T \to \infty$, obtenemos que:

$$Ra_0 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{y_t}{R^t} \geq \sum_{t=0}^{\infty} \frac{c_t}{R^t}.$$

Usando nuevamente (4.6) llegamos a:

$$\frac{a_{T+1}}{R^T} = Ra_0 + \sum_{t=0}^{T} \frac{y_t}{R^t} - \sum_{t=0}^{T} \frac{c_t}{R^t}.$$

Tomando el límite cuando $T \to \infty$ llegamos a (4.5).

Ahora, dejemos que (4.5) se mantenga. Supóngase que $a_t = -\frac{y_{min}}{r} - \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$ y para algún t con probabilidad positiva. Por supuesto, hay una probabilidad positiva que $y_t \leq y_{min} + r\frac{\varepsilon}{2}$. Usando (4.3) y $c_t \geq 0$, derivamos que $a_{t+1} \leq -\frac{y_{min}}{r} + r\frac{\varepsilon}{2} - (1+r)\varepsilon$. Repitiendo este argumento, deducimos que

$$a_{t+1} \leq -\frac{y_{min}}{r} + r\frac{\varepsilon}{2}[1 + (1+r) + \cdots + (1+r)^{n-1}] - (1+r)^n\varepsilon,$$

con probabilidad positiva. Por tanto, con probabilidad positiva,

$$\frac{a_{t+n}}{(1+r)^n} \leq -\frac{1}{(1+r)^n}\left(\frac{y_{min}}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} < -\frac{\varepsilon}{2}.$$

Así, con probabilidad positiva, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{t+n}}{(1+r)^n} < 0$, contradiciendo con (4.5).

Siguiendo Aiyagari (1994), llamaremos a $\frac{y_{min}}{r}$ el límite de deuda natural. Este es el mayor nivel de deuda que es factible para el consumidor para poder pagar casi seguro. Si $b > \frac{y_{min}}{r}$, entonces la restricción crediticia no será vinculante. Uno puede imponer límites de deuda más estrictos. Aquí suponemos que $b < \frac{y_{min}}{r}$ en (4.4).

Otra forma de ver el problema de endeudamiento es imponer una restricción de crédito exógena como $a_{t+1} \geq -b$, supóngase que el proceso del ingreso $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$ es determinístico[20]. Imponemos no-negatividad en el consumo a lo largo de la vida del hogar, por ejemplo, $c_t \geq 0$ para todo t e iteramos hacia adelante en la restricción presupuestaria

$$c_t = a_t + y_t - \frac{a_{t+1}}{R} \geq 0 \Longrightarrow a_t \geq -y_t + \frac{a_{t+1}}{R}$$

$$a_t \geq -y_t + \frac{a_{t+1}}{R} \geq -y_t + \frac{1}{R}\left[-y_{t+1} + \frac{a_{t+1}}{R}\right] \geq \cdots$$

$$a_t \geq -\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{R}\right)^j y_{t+j}.$$

En otras palabras, haber impuesto dicha restricción, al hogar no se le permitirá acumular más deuda que lo que él nunca será capaz de pagar por el consumo de solo cero en cada periodo.

Si el proceso del ingreso es estocástico, entonces cómo podemos estar seguros de que todo lo que el hogar toma prestado será pagado casi con toda seguridad (por ejemplo, con probabilidad 1)? Entonces, necesitamos reemplazar y_t en cada t con la menor realización posible del choque al ingreso, lo llamaremos y_{min}, y tendremos el *limite natural de deuda*

$$a_t \geq -\left(\frac{1+r}{r}\right) y_{min}.$$

Este es el límite de deuda más holgada posible. Sin restricción crediticia exógena nunca puede ser más holgada que el límite de deuda natural. Sin embargo, se debe notar que si $y_{min} = 0$, entonces el límite de endeudamiento natural es cero.

4.6. Condiciones de Inada y Limite Natural de Endeudamiento.

Se debe tener en mente una propiedad importante: Si la función de utilidad satisface la condición de Inada $u(0) = -\infty$, entonces el consumidor nunca querrá pedir prestado hasta su límite de endeudamiento natural. Un ejemplo cuya función que cumpla con dicha condición anterior es la función CRRA con $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$ con $\gamma \geq$

[20] Son procesos en los que conociendo las condiciones iniciales siempre siguen el mismo curso y producen el mismo resultado final, o sea que no hay elementos aleatorios presentes, por lo que podemos predecir en el tiempo todos los posibles estados y el estado final siempre será el mismo dadas unas mismas condiciones iniciales.

1. Supongamos que el consumidor no deseara pedir prestado hasta $a_t = -\left(\frac{1+r}{r}\right) y_{min}$ y suponga a su vez que la realización en el ingreso y_t es precisamente y_{min} el cual tiene una probabilidad positiva de que efectivamente ocurra. Tomando la restricción presupuestaria del periodo t:

$$\begin{aligned} c_t &= a_t + y_{min} - \frac{a_{t+1}}{1+r} = -\left(\frac{1+r}{r}\right) y_{min} + y_{min} - \frac{a_{t+1}}{1+r} \\ &= -\frac{1}{r} y_{min} - \frac{a_{t+1}}{1+r} \leq -\frac{1}{r} y_{min} - \frac{1}{1+r}\left[-\left(\frac{1+r}{r}\right) y_{min}\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde la expresión $-\left(\frac{1+r}{r}\right) y_{min}$ es el máximo que puede ser prestado. El resultado muestra, que con probabilidad positiva el siguiente periodo, el consumidor consumirá cero. Sin embargo, esto lo llevaría a una utilidad infinitamente negativa, y así el consumidor no querrá llegar nunca a ese estado. De esta manera las preferencias por si solas aseguraran que el límite de endeudamiento natural nunca operara. En otras palabras, solucionando el problema de consumo óptimo uno puede asumir con seguridad soluciones interiores para la ecuación de Euler. Pero esto no es cierto para límites de endeudamiento ad-hoc.

Redefiniendo de forma conveniente las variables. Sea $\hat{a}_t = a_t + b$. Definamos el *cash on hand* o el recurso disponible como $x_t = Ra_t + y_t + b$. Podemos reescribir las restricciones presupuestarias y crediticias como:

$$x_{t+1} = R(x_t - c_t) + y_{t+1} - rb,$$

$$c_t + \hat{a}_{t+1} = x_t, \;\; \hat{a}_{t+1} \geq 0, x_0 \geq 0 \text{ dado.}$$

Por el *Principio del Máximo*, podemos derivar la desigualdad de Euler:

$$u'(c_t) \geq \beta RE[u'(c_{t+1})], \text{con igualdad si } \hat{a}_{t+1} > 0, \tag{4.7}$$

y la condición de transversalidad:

$$\lim_{t \to \infty} E\beta^t u'(c_t) x_t = 0. \tag{4.8}$$

Estas condiciones son suficientes para garantizar optimalidad.

Podemos escribir la ecuación de Bellman asociada como:

$$V(x_t, y_t) = \max_{\hat{a}_{t+1} \in [0, x_t]} u(x_t - \hat{a}_{t+1}) + \beta E[V(R\hat{a}_{t+1} + y_{t+1} - rb, y_{t+1})].$$

Si (y_t) es *iid*, entonces y_t no es una variable estado y x_t es la única variable estado. En este caso, escribimos la función valor como $V(x)$. Cuando u no es acotada, el análisis de la ecuación de Bellman no es trivial. Un enfoque seguido es por Schechtman and Escudero (1977) y Sotomayor (1984) son primeros estudios con problemas truncados con horizonte finito, y luego analizan el límite del horizonte en la medida que tiende a infinito. Para simplificar la exposición, supóngase que existe una solución única V a la ecuación de Bellman y que V hereda las propiedades de u en que $V(x)$ es estrictamente creciente, estrictamente cóncava y continuamente diferenciable en x. Además, la condición de envolvente, $V'(x) = u'(c)$, se cumple. Escribimos las funciones de política de consumo y ahorro como $c(x)$ y $\hat{a}(x)$. De la condición de envolvente y la concavidad de V, podemos ver que $c(x)$ es estrictamente creciente en x. Las propiedades de las políticas del consumo y ahorro dependerá de la incertidumbre en el proceso del ingreso y la relación que hay entre el factor de descuento β y la tasa de interés R. La intuición es la siguiente: *La incertidumbre afecta la suavización del consumo y el ahorro por motivo de precaución a lo largo de los estados y tiempo. Descuento afecta también la suavización del consumo a lo largo del tiempo incluso sin incertidumbre.*

4.7. Ingreso determinístico.

Supóngase que y_t es determinístico para cada t. Vamos a considerar tres casos. En los dos primeros casos, supóngase que $y_t = y > rb$ para todo t. La ecuación de Bellman está dada por:

$$V(x) = \max_{\hat{a}(x) \in [0, x]} u(x - \hat{a}) + \beta V(R\hat{a}(x) + y - rb). \tag{4.9}$$

Vamos a permitir que u sea no acotada.

Caso 1: $\beta R < 1$.

Este caso ha sido analizado por Schechtman and Escudero (1977) y Stokey, Lucas, and Prescott (1989). En este caso, el consumidor es tan impaciente que prefiere consumir más en periodos tempranos. Si él tiene un bajo nivel de riqueza, él también prefiere pedir prestado y puede agotar el límite de endeudamiento. Así, su nivel inicial de riqueza juega un papel importante. Hacemos la conjetura de que hay niveles críticos $x_0^* < x_1^* < x_2^* < \cdots$ para el *cash-on-hand* tal que si $x \in [x_{t-1}^*, x_t^*]$ con

$x_{-1}^* = y - rb$, entonces el consumidor no va a agotar el límite de endeudamiento de los periodos desde 0 hasta $t-1$ y agotara el límite de endeudamiento desde el periodo t hacia adelante para $t \geq 0$. Construyamos un plan de consumo-ahorro basado en esta conjetura y verifiquemos que este plan es óptimo. También caracterizaremos la función valor explícitamente.

Primero, consideremos $t = 0$. Notar que si $u'(x)$ es continua y decreciente en x. Desde que $u'(y - rb) > \beta R u'(y - rb)$ y $u'(\infty) = 0 < \beta R u'(y - rb)$, existe un valor único $x_0^* > y - rb$ tal que

$$u'(x_0^*) = \beta R u'(y - rb). \tag{4.10}$$

Entonces para cualquier $x \in [x_{t-1}^*, x_t^*)$,

$$u'(x) > u'(x_0^*) = \beta R u'(y - rb).$$

Entonces definiremos las políticas de consumo y ahorro por:

$$g_0(x) = x, f_0(x) = 0 \text{ para } x \in [x_{-1}^*, x_0^*], \tag{4.11}$$

la cual satisface la desigualdad de Euler anterior. Desde que $x' = R\big(x - f_0(x)\big) + y - rb = y - rb < x_0^*$, deducimos que $g_0(x') = x'$ y $f_0(x') = 0$. Esto significa que si el *cash-on-hand* del consumidor $x_0 \in [x_{-1}^*, x_0^*]$, entonces él siempre agotara el límite de endeudamiento ($a_{t+1} = -b, t \geq 0$) y consumirá todo su ingreso laboral neto de los pagos de los intereses de la deuda ($c_0 = x_0 = Ra_0 + y + b$ y $c_t = y - rb, t \geq 1$). Este plan es óptimo porque satisface la desigualdad de Euler (4.7) y la condición de transversalidad (4.8). Dado este plan, podemos computar explícitamente la función valor como:

$$V_0(x) = u(x) + \frac{\beta}{1-\beta} u(y - rb), x \in [x_{-1}^*, x_0^*].$$

esto satisface la ecuación de Bellman (4.9). Claramente, se satisface la condición de envolvente, $V_0'(x) = u'(x)$ para $x \in [x_{-1}^*, x_0^*]$.

Ahora, consideremos $t = 1$. Nosotros hacemos la conjetura que para el cash-on-hand inicial x en algún intervalo $[x_0^*, x_1^*]$, el plan óptimo del consumidor es consumir parte de sus recursos disponibles en el periodo 0 y ahorrar lo restante $\hat{a} > 0$ tal que su cash-on-hand en el siguiente periodo $z = R\hat{a} + y - rb$ es en el intervalo $[x_{-1}^*, x_0^*]$. Como un resultado, desde el periodo $t = 1$, el consumidor sigue un plan como el descrito previamente para el caso con $t = 0$.

Necesitamos primero determinar el valor de x_1^*. Porque $u'(0) = \infty$ y $u'(\infty) = 0$, se puede verificar de que existe una solución única $x > \frac{(z-y+rb)}{R}$ para la ecuación:

$$u'\left(x - \frac{(z - y + rb)}{R}\right) = \beta R u'(z) = \beta R V_0'(z), \tag{4.12}$$

Para cualquier $z \in [x_{-1}^*, x_0^*]$. Definamos esta solución x como una función de z, $x = h_0(z)$ para $z \in [x_{-1}^*, x_0^*]$. Debido a que u' es continua y estrictamente decreciente, podemos verificar que h_0 es continua y estrictamente creciente. De las ecuaciones (4.10) y (4.12), vemos que como $z \to x_{-1}^* = y - rb, h_0(z) \to x_0^*$. Definamos $x_1^* = \lim_{z \to x_0^*} h_0(z) > x_0^*$. Entonces, $h_0\colon [x_{-1}^*, x_0^*] \to [x_0^*, x_1^*]$.

Ahora, verifiquemos que el plan conjeturado previamente es óptimo. Definamos las políticas iniciales de ahorro y consumo, respectivamente, por

$$f_1(x) = \frac{h_0^{-1}(x) - y + rb}{R}, g_1(x) = x - f_1(x), \text{para } x \in [x_0^*, x_1^*],$$

el cual entregara el cash-on-hand en el siguiente periodo $z = h_0^{-1}(x) \in [x_{-1}^*, x_0^*]$. Desde el periodo 1, el consumidor sigue el plan para $t = 0$ cuyo cash-on-hand inicial $h_0^{-1}(x_0) \in [x_{-1}^*, x_0^*]$. Porque podemos mostrar que (i) las políticas iniciales satisfacen la ecuación de Euler (4.12) entre los periodos 0 y 1, (ii) el plan desde el periodo 1 también satisface la desigualdad de Euler, y (iii) la condición de transversalidad se mantiene, al satisfacer todo esto concluimos que el plan construido desde el periodo 0 es de hecho óptimo.

Este plan da la función valor:

$$V_1(x) = u\big(g_1(x)\big) + \beta V_0\big(h_0^{-1}(x)\big), x \in [x_0^*, x_1^*].$$

Por construcción, esto satisface:

$$V_1(x) = \max_{\hat{a} \in [0,x]} u(x - \hat{a}) + \beta\, V_0(R\hat{a}(x) + y - rb), x \in [x_0^*, x_1^*].$$

Por la condición de la envolvente, $V_1'(x) = u'\big(g_1(x)\big)$ para $x \in [x_0^*, x_1^*]$. Se puede mostrar que V_1 hereda las propiedades de V_0 en que V_1 es estrictamente creciente y estrictamente cóncava.

En general, para cualquier $t \geq 1$, supóngase que obtenemos lo siguiente:

- Una sucesión no trivial de intervalos $[x_{s-1}^*, x_s^*]$ para $s = 0,1, \dots, t$;

- Una sucesión de funciones continuas y estrictamente crecientes,

$$h_{s-1}: [x_{s-2}^*, x_{s-1}^*] \to [x_{s-1}^*, x_s^*],$$

con $h_{s-1}(x_{s-2}^*) = x_{s-1}^*$ y $h_{s-1}(x_{s-1}^*) = x_s^*$, para $s = 1, \dots, t$;

- Una sucesión de políticas de consumo y ahorro $g_s(x)$ y $f_s(x)$ para $x \in [x_{s-1}^*, x_s^*]$, $s = 0,1, \dots, t$;
- Una sucesión de funciones valor V_s: $[x_{s-1}^*, x_s^*] \to \mathbb{R}$ para $s = 0,1, \dots, t$.

Estas funciones satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$u'\left(h_s(z) - \frac{z - y + rb}{R}\right) = \beta R u'\left(z - \frac{h_{s-1}^{-1}(z) - y + rb}{R}\right)$$
$$= \beta R V_s'(z), z \in [x_{s-1}^*, x_s^*],$$

$$f_s(x) = \frac{h_{s-1}^{-1}(z) - y + rb}{R}, g_s(x) = x - f_s(x), x \in [x_{s-1}^*, x_s^*],$$
$$V_s(x) = u\big(g_s(x)\big) + \beta V_{s-1}\big(h_{s-1}^{-1}(x)\big), x \in [x_{s-1}^*, x_s^*],$$

para $s = 0,1, \dots, t$. Cada función valor V_s es estrictamente creciente, estrictamente cóncava, y satisface la condición de envolvente $V_s'(x) = u'\big(g_s(x)\big)$ para $, x \in [x_{s-1}^*, x_s^*]$. Para cada valor crítico x_s^*, $h_s(x_s^*) = h_{s+1}(x_s^*), f_s(x_s^*) = f_{s+1}(x_s^*), V_s(x_s^*) = V_{s+1}(x_s^*)$, y $V_s'(x_s^*) = V_{s+1}'(x_s^*)$ para $s = 0,1, \dots, t-1$.

Ahora, en $s = t + 1$, definiremos otra función $h_t(z)$ como la solución única de la ecuación:

$$u'\left(h_t(z) - \frac{z - y + rb}{R}\right) = \beta R u'\left(z - \frac{h_{t-1}^{-1}(z) - y + rb}{R}\right) \tag{4.13}$$
$$= \beta R V_t'(z),$$

para $z \in [x_{t-1}^*, x_t^*]$. La última igualdad se sigue de la condición de envolvente para $z \in [x_{t-1}^*, x_t^*]$ y $g_t(z) = z - \frac{[h_{t-1}^{-1}(z) - y + rb]}{R}$. Desde que V_t sea estrictamente cóncava en $[x_{t-1}^*, x_t^*]$, la función h_t es estrictamente creciente en $[x_{t-1}^*, x_t^*]$. Por definición, $h_t(x_{t-1}^*) = x_t^*$. Definamos $x_{t+1}^* = h_t(x_t^*)$. Ajustando $z = x_t^*$ en la ecuación (4.13) y usando $h_{t-1}^{-1}(x_t^*) = x_{t-1}^*$ y $\beta R < 1$, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
u'\left(x_{t+1}^{*}-\frac{x_t^{*}-y+rb}{R}\right)=\beta R u'\left(x_t^{*}-\frac{x_{t-1}^{*}-y+rb}{R}\right)\\
<u'\left(x_t^{*}-\frac{x_{t-1}^{*}-y+rb}{R}\right)\\
<u'\left(x_t^{*}-\frac{x_t^{*}-y+rb}{R}\right).
\end{aligned}
$$

Así, $x_{t+1}^{*}>x_t^{*}$. Se sigue que $h_t\colon [x_{t-1}^{*},x_t^{*}]\to[x_t^{*},x_{t+1}^{*}]$.

Definamos las políticas de ahorro y consumo como:

$$
f_{t+1}(x)=\frac{h_t^{-1}(x)-y+rb}{R}>0, g_{t+1}(x)=x-f_{t+1}(x), \tag{4.14}
$$

para cualquier nivel inicial de *cash-on-hand* $x\in(x_t^{*},x_{t+1}^{*}]$. Porque estas políticas entregan *cash-on-hand* en el periodo 1 $z=h_t^{-1}(x)\in(x_t^{*},x_{t+1}^{*}]$, desde el periodo 1 en el consumidor seguirán planes de ahorro y consumo comenzando desde el *cash-on-hand* $z\in(x_t^{*},x_{t+1}^{*}]$. Continuando por inducción hacia atrás, deducimos que el consumidor no agotara el límite de endeudamiento hasta el periodo t y su endeudamiento llegara a un limite desde el periodo $t+1$. Dadas estas políticas, podemos calcular la función valor como:

$$
V_{t+1}(x)=u\big(g_{t+1}(x)\big)+\beta V_t\big(h_t^{-1}(x)\big), x\in[x_t^{*},x_{t+1}^{*}].
$$

Por construcción, esto satisface la ecuación:

$$
V_{t+1}(x)=\max_{\hat{a}\in[0,x]} u(x-\hat{a})+\beta\, V_t(R\hat{a}(x)+y-rb), x\in[x_t^{*},x_{t+1}^{*}].
$$

Se puede mostrar que V_{t+1} es estrictamente creciente, estrictamente cóncava, y satisface la condición de envolvente, $V_{t+1}'(x)=u'\big(g_{t+1}(x)\big)$ para $x\in[x_t^{*},x_{t+1}^{*}]$. Además, podemos mostrar que $V_t(x_t^{*})=V_{t+1}(x_t^{*})$ y $V_t'(x_t^{*})=V_{t+1}'(x_t^{*})$.

Por inducción, podemos definir el consumo, ahorro, y la función valor respectivamente, en todo el espacio estado $[y-rb,\infty)$ por

$$
c(x)=g_t(x), \hat{a}=f_t(x), V(x)=V_t(x), \text{si } x\in[x_{t-1}^{*},x_t^{*}],
$$

Para cualquier $t\geq 0$. Podemos verificar que la función valor satisface la ecuación de Bellman (4.9). Asimismo podemos verificar que para cualquier nivel inicial de *cash-on-hand* $x_0\geq y-rb$, las siguientes sucesiones,

$$
\hat{a}_{t+1}=\hat{a}(x_t), c_t=x_t-\hat{a}(x_t),
$$

$$x_{t+1} = R\hat{a}(x_t) + y - rb, t \geq 0,$$

dan los planes de ahorro y consumo óptimos, respectivamente.

En términos de dinámica, comenzando desde cualquier nivel inicial de riqueza, hay un nivel finito T tal que el consumo c_t, los ahorros a_{t+1}, y el *cash-on-hand* x_t todos decrecen hasta el periodo T, y después del periodo T, ellos son constantes a lo largo del tiempo en que $c_t = x_t = y - rb$ y $a_{t+1} = -b$ para $t > t$.

Caso 2: $\beta R > 1$.

En este caso, el consumidor es tan paciente que él preferirá ahorrar y posponer consumo. Afirmaremos que la restricción crediticia nunca es vinculante. Supóngase por el contrario que en el periodo t, la restricción crediticia es vinculante en que $\hat{a}_{t+1} = 0$. Entonces $x_{t+1} = y - rb$. Por la desigualdad de Euler y la condición de la envolvente,

$$V'(x_t) \geq \beta R V'(x_{t+1}) > V'(x_{t+1}),$$

donde la última desigualdad es debido a que $\beta R > 1$. Porque V es estrictamente cóncava, $x_t < x_{t+1}$. Por la restricción presupuestaria, $x_t = R\hat{a}_t + y - rb \geq y - rb = x_{t+1}$, lo cual es una contradicción.

¿Cuáles son las propiedades limitantes de los planes óptimos de consumo y ahorro? Por la ecuación de Euler,

$$u'(c_t) = \beta R u'(c_{t+1}) > u'(c_{t+1}).$$

Se sigue que $c_t < c_{t+1}$. Así, (c_t) es una sucesión creciente y por tanto tiene un límite en la medida que $t \to \infty$. Supóngase $\lim_{t\to\infty} c_t = c^* < \infty$. Entonces tomando el límite en la ecuación de Euler anterior en la medida que $t \to \infty$, obtenemos $u'(c^*) = \beta R u'(c^*)$, lo cual contradice $\beta R > 1$. Así, el $\lim c_t = \infty$. Esto también implica que el $\lim x_t = \lim \hat{a}_{t+1} = \infty$ por la restricción presupuestaria.

Caso 3: $\beta R = 1$.

En este caso, supóngase que y_t es determinístico, pero puede no ser constante en el tiempo. Sin restricciones crediticias, el consumidor disfrutara de un flujo constante de consumo. En presencia de restricciones crediticias, su consumo presente es menor que el futuro siempre que él actualmente agote el límite de endeudamiento. Formalmente, por la desigualdad de Euler,

$$u'(c_t) \geq u'(c_{t+1}) \text{ con desigualdad si } \hat{a}_{t+1} = 0.$$

Por tanto, ya sea $c_t = c_{t+1}$ o $c_t < c_{t+1}$ cuando $\hat{a}_{t+1} = 0$. Cuando $\hat{a}_{t+1} = 0, x_{t+1} = y - rb$. Supóngase que el consumidor llega al periodo t y está con endeudamiento limitado. Si él sabe que la restricción crediticia no será vinculante de nuevo en el futuro, él encontrara una elección óptima para un nivel de consumo sostenible constante lo más alto posible, dado el valor anual del flujo de ingresos (neto del pago de intereses de la deuda) comenzando desde el periodo t,

$$A_t = r \sum_{j=1}^{\infty} R^{-j} \left(y_{t+j} - rb\right).$$

Chamberlain and Wilson (2000) muestran que el impacto de la restricción crediticia no desaparecerá hasta que el consumidor alcanza el periodo con el valor de la anualidad más alta del resto del proceso de ingreso en que

$$c^* \equiv \lim_{t \to \infty} c_t = \sup_t A_t \equiv A^*,$$

donde (c_t) es un plan óptimo. Ahora probemos este resultado.

Primero mostraremos que $c^* \leq A^*$. Supóngase lo contrario que $c^* > A^*$. Entonces hay un t tal que el consumidor está con endeudamiento limitado en el periodo $t-1$ así que $\hat{a}_t = 0$, $x_t = y_t - rb$, y $c_j > A_t$ para todo $j \geq t$. Así, existe un τ suficientemente grande tal que

$$0 < \sum_{j=t}^{\tau} R^{t-j} \left(c_j - y_j + rb\right) = R^{t-\tau}(c_\tau - x_\tau),$$

donde la igualdad usa $x_t = y_t - rb$ e iteraciones sucesivas en la restricción presupuestaria. Esto es una contradicción porque $c_\tau \leq x_\tau$.

Para mostrar que $c^* \geq A^*$, supóngase lo contrario que $c^* < A^*$. Entonces hay un A_t tal que $c_j < A_t$ para todo $j \geq t$, y por tanto

$$\sum_{j=t}^{\infty} R^{t-j} c_j < \sum_{j=t}^{\infty} R^{t-j} A_t = \sum_{j=t}^{\infty} R^{t-j} \left(y_j - rb\right)$$
$$\leq x_t + \sum_{j=t+1}^{\infty} R^{t-j} \left(y_j - rb\right),$$

donde la última desigualdad usa la desigualdad $x_t \geq y_t - rb$. Así, existe un $\varepsilon > 0$ y $\tau^* > t$ tal que para todo $\tau > \tau^*$,

$$\sum_{j=t}^{\tau} R^{t-j}\, c_j < x_t + \sum_{j=t}^{\tau} R^{t-j}\left(y_j - rb\right) - \varepsilon.$$

Usando la restricción presupuestaria repetidamente, obtenemos

$$R^{t-\tau} c_\tau < R^{t-\tau} x_\tau - \varepsilon$$

o equivalentemente,

$$c_\tau < x_\tau - R^{\tau-t}\varepsilon.$$

Podemos entonces construir un plan factible de consumo $\left(c_j'\right)$ tal que $c_j' = c_j$ para todo $j \neq \tau^*$ y $c_j' = c_j + \varepsilon$ para $j = \tau^*$. Este plan lleva a un mayor nivel de utilidad que el plan $\left(c_j\right)$, lo cual es una contradicción.

A continuación usaremos dos ejemplos tomados de Ljungqvist and Sargent (2012) capitulo 10 para ilustrar el anterior resultado.

EJEMPLO 4.1:

Supóngase que $a_0 = 0, b = 0$, y que el flujo de ingreso $\{y_t\} = \{y_h, y_l, y_h, y_l, \ldots\}$ donde $y_h > y_l > 0$. El valor presente del ingreso laboral es

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{y_t}{(1+r)^t} = \frac{y_h + {}^{y_l}\!/_{R}}{1 - R^{-2}}.$$

El valor anual $\bar{c}$ que tiene el mismo valor presente como el flujo del ingreso laboral está dado por:

$$\frac{R\bar{c}}{r} = \frac{y_h + {}^{y_l}\!/_{R}}{1 - R^{-2}} \text{ ó } \bar{c} = \frac{y_h + {}^{y_l}\!/_{R}}{1 + {}^{1}\!/_{R}}.$$

Consumiendo $\bar{c}$ en cada periodo se satisface la ecuación de Euler. Usando la restricción presupuestaria, podemos hallar el plan de ahorro asociado: $a_{t+1} = (y_h - y_l)\, {}^{R}\!/_{(1+R)}$ para t par y $a_{t+1} = 0$ para t impar. Se debe notar que $a_{t+1} = 0$ no necesariamente implica que el consumidor tiene endeudamiento limitado. Si y solo si el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción de crédito es positiva, el consumidor tiene endeudamiento limitado.

EJEMPLO 4.2:

Supóngase que $a_0 = 0$, $b = 0$, que el flujo de ingreso $\{y_t\} = \{y_l, y_h, y_l, y_h, y_l, \dots\}$ donde $y_h > y_l > 0$. La solución es $c_0 = y_l$ y $a_1 = 0$, y a partir del periodo 1 en adelante, la solución es la misma como en el ejemplo anterior. Por tanto, el consumidor está con endeudamiento limitado en el primer periodo.

En el caso de ingreso laboral constante $y_t = y$ para todo t, las políticas $c_t = y + ra_0$ y $a_{t+1} = a_0$, $t \geq 0$, para cualquier tenencia de activos iniciales $a_0 \geq -b$, satisface la ecuación de Euler y la condición de transversalidad. Así, las políticas son óptimas. Esto significa que es óptimo rodar sobre el nivel del activo inicial (o deuda) por siempre.

4.8. Ingreso estocástico.

Ahora supóngase que el ingreso laboral y_t sigue un proceso *iid*. Mostraremos que el comportamiento limitado de las políticas de consumo y ahorro son un poco diferentes que en el caso determinístico. Establezcamos primero algunas propiedades de las políticas de consumo y ahorro.

LEMA 4.1: *Sea $\beta \in (0,1)$ y $R > 0$. La función de política de consumo $c(x)$ es estrictamente creciente para $x \geq x_{min}$ y la función de política de ahorro $\hat{a}(x)$ satisface*

$$0 \leq \hat{a}(x') - \hat{a}(x) < x' - x \; para\ todo\ x_{min} \leq x < x',$$

Con igualdad si y solo si $\hat{a}(x') = \hat{a}(x) = 0$.

Prueba. Por condición de la envolvente, $V'(x) = u'(c(x))$. Se sigue de la concavidad estricta de V que c es estrictamente creciente.

Dado cualquier $x \geq x_{min} = y_{min} - rb$, definamos la función f por:

$$f(s;x) = u'(x-s) - \beta REV'(Rs + y - rb), s \geq 0, \qquad (4.15)$$

donde la expectativa E es tomado con respecto al ingreso laboral estocástico y. Sea $x' > x$. Consideraremos dos casos. Primero, supóngase que $\hat{a}(x) = 0$. Entonces $\hat{a}(x') \geq \hat{a}(x) = 0$. Si $\hat{a}(x') = 0$, entonces el resultado es trivial. Considérese $\hat{a}(x') > 0$. Supongase que $\hat{a}(x') > x' - x > 0$. Entonces por la ecuacion de Euler en x' y la concavidad estricta de u y V,

$$
\begin{aligned}
0 &= u'\big(x' - \hat{a}(x')\big) - \beta REV'(R\hat{a}(x') + y - rb) \\
&> u'(x) - \beta REV'(R(x' - x) + y - rb) \\
&> u'(x) - \beta REV'(y - rb),
\end{aligned}
$$

lo cual contradice la desigualdad de la ecuación de Euler en x desde que $\hat{a}(x) = 0$.

En el segundo caso, $\hat{a}(x) > 0$. Entonces usamos la ecuación de Euler en x para deducir que $f(\hat{a}(x); x') < f(\hat{a}(x); x) = 0$. Además,

$$
\begin{aligned}
&f(\hat{a}(x) + x' - x;\ x') \\
&= u'\big(x - \hat{a}(x)\big) - \beta REV'(R\hat{a}(x) + R(x' - x) + y - rb) \\
&= \beta REV'(R\hat{a}(x) + y - rb) - \beta REV'(R\hat{a}(x) + R(x' - x) + y - rb) \\
&> 0.
\end{aligned}
$$

desde $f(s; x')$ sea estrictamente creciente en s, se sigue del Teorema del Valor Intermedio de que existe una solución única $\hat{a}(x') \in (\hat{a}(x), \hat{a}(x) + x' - x)$ para la ecuación (4.15) para cada $x' > x$.

El lema 1 implica que siempre que la restricción de endeudamiento no sea vinculante, entonces las funciones de consumo y ahorro son estrictamente crecientes y tienen una pendiente menor que 1. Desde la misma prueba, podemos observar que este resultado se satisface para el caso determinístico y también es independiente de si $\beta R > 1, = 1$ o < 1.

Caso 1 $\beta R < 1$.

Similar al caso determinístico, las sucesiones de consumo optimo, ahorros y *cash-on-hand* bajo incertidumbre se establecerán en un estado estacionario. Sin embargo, este estado estacionario no implica sendas constantes, pero implica la existencia de una distribución estacionaria. Usaremos dos lemas muy útiles a continuación.

LEMA 2: *(Schechtman and Escudero (1977)) Sea* $\beta R < 1$. *Supóngase que* $x_{min} \equiv y_{min} - rb > 0$. *Entonces existe un* $\hat{x} > x_{min}$ *tal que si* $x_t \leq \hat{x}$, *entonces* $\hat{a}_{t+1} = 0$, *y si* $x_t > \hat{x}$, *entonces* $\hat{a}_{t+1} > 0$.

Prueba. Supóngase que la restricción de endeudamiento nunca vinculante, Entonces por la ecuación de Euler y la condición de la envolvente,

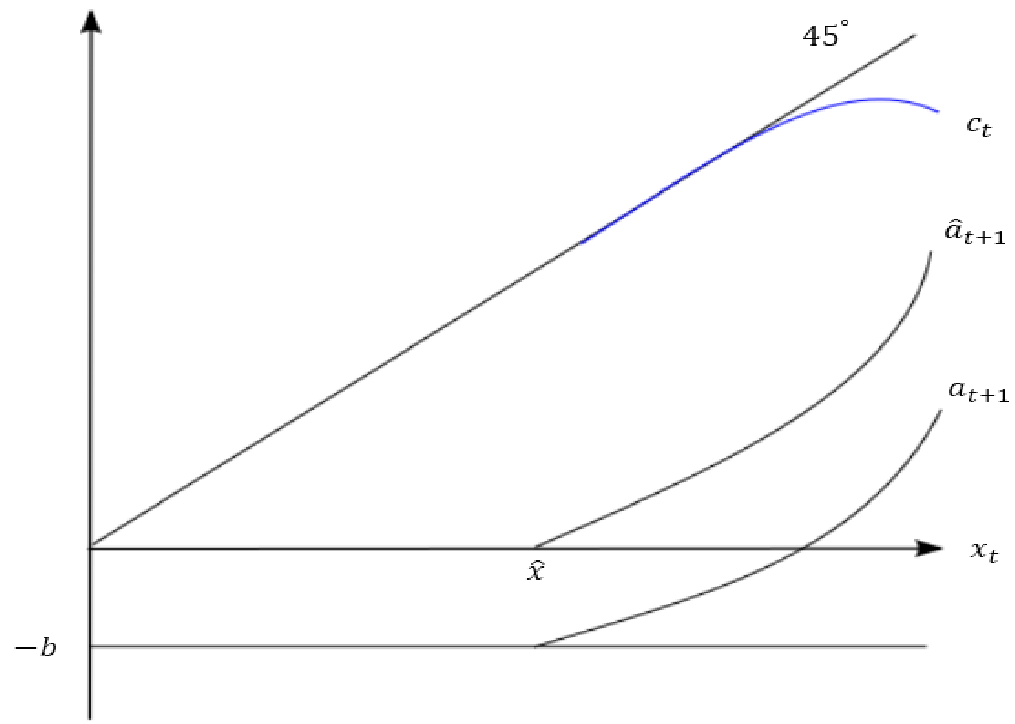
$$V'(x_t) = \beta RE_t[V'(x_{t+1})] \leq \beta RV'(x_{min}) < V'(x_{min}),$$

Donde la primera desigualdad se sigue de la concavidad de V. Dejando $x_t \to x_{min}$ se llega a una contradicción. Así, existe un t y $\bar{x}_t \geq x_{min}$ tal que $\hat{a}_{t+1} = 0$ y la desigualdad de Euler

$$u'(\bar{x}_t) > \beta R E_t V'(y_{t+1} - rb) > 0,$$

se satisface. Desde que $u'(\infty) = 0$, y u' es continua y estrictamente decreciente, existe un único $\hat{x} > \bar{x}_t$ tal que $u'(\hat{x}) = \beta R E_t V'(y_{t+1} - rb)$. Para cualquier $x_t < \hat{x}$, se sigue que la desigualdad de Euler se cumple: $u'(x_t) > \beta R E_t V'(y_{t+1} - rb)$. Así, para cualquier $x_t \leq \hat{x}$, el consumidor agotara su límite de endeudamiento tal que $c_t = x_t$ y $\hat{a}_{t+1} = 0$. Si $x_t > \hat{x}$, entonces $u'(x_t) < \beta R E_t V'(y_{t+1} - rb)$, implicando que $\hat{a}_{t+1} > 0$. Este resultado es similar que en el caso determinístico. La intuición aquí es que un alto descuento del futuro induce al consumidor pedir prestado más y así consumir más relativamente en el presente con respecto al futuro. Si su riqueza es lo suficientemente baja, él agotara su límite de endeudamiento. La siguiente figura es un gráfico del consumo y los activos como funciones del *cash-on-hand*.

Figura 4.1: Funciones de política del consumo y los activos en función del *cash-on-hand.*



LEMA 2: *(Schechtman and Escudero (1977)) Sea* $\beta R < 1$. *Si* $\frac{-cu''(c)}{u'(c)} < \gamma$ *para todo* c *lo suficientemente grande para algún* $\gamma > 0$, *entonces existe un* x^* *tal que si* $x_t > x^*$, *entonces* $x_{t+1} < x_t$.

Prueba. Recuérdese que las políticas de consumo y ahorro son $c(x)$ y $\hat{a}(x)$ respectivamente. Si $\hat{a}(x)$ está acotado en $\hat{a}(x) \leq K$ para todo $x \geq x_{min} = y_{min} - rb$. Entonces tomamos $x^* = RK + y_{max} - rb$. Se sigue que $x_{t+1} = R\hat{a}(x_t) + y_{t+1} - rb \leq RK + y_{max} - rb = x^*$. Así, si $x_t > x^*$, entonces $x_{t+1} \leq x^* < x_t$.

Ahora, suponga que $\hat{a}(x)$ no está acotado en la medida que $x \to \infty$. Usando la condición de la envolvente y la concavidad de V, derivamos que para un x_t lo suficientemente grande,

$$\frac{E_t V'(x_{t+1})}{V'\big(y_{max} - rb + R\hat{a}(x_t)\big)} \leq \frac{V'\big(y_{min} - rb + R\hat{a}(x_t)\big)}{V'\big(y_{max} - rb + R\hat{a}(x_t)\big)}$$

$$= \frac{u'\left(c\big(y_{min} - rb + R\hat{a}(x_t)\big)\right)}{u'\left(c\big(y_{max} - rb + R\hat{a}(x_t)\big)\right)}$$

$$\leq \left[\frac{c\big(y_{max} - rb + R\hat{a}(x_t)\big)}{c\big(y_{min} - rb + R\hat{a}(x_t)\big)}\right]^{\gamma},$$

donde γ es la cota superior de $\frac{-cu''(c)}{u'(c)}$. Tómese en cuenta que, si $\frac{-cu''(c)}{u'(c)} \leq \gamma$ para todo $c > c_0$, entonces $\frac{u'(c)}{u'(c_0)} \geq \left(\frac{c_0}{c}\right)^{\gamma}$ para todo $c > c_0$. Por definición,

$$c\big(y_{max} - rb + R\hat{a}(x_t)\big) = c\big(y_{min} - rb + R\hat{a}(x_t)\big) + y_{max} - y_{min}.$$

Así,

$$1 \leq \frac{E_t V'(x_{t+1})}{V'\big(y_{max} - rb + R\hat{a}(x_t)\big)} \leq \left[1 + \frac{y_{max} - y_{min}}{c\big(y_{min} - rb + R\hat{a}(x_t)\big)}\right]^{\gamma}. \quad (4.16)$$

Primero mostramos que cuando $c(x)$ tiende hacia infinito en la medida que $x \to \infty$, si $\hat{a}(x_t) \to \infty$. Cuando $\hat{a}(x_t) \to \infty$ en la medida que $x_t \to \infty$, la restricción de endeudamiento no será vinculante en x_t cuando x_t sea lo suficientemente grande. En este caso la desigualdad de Euler se vuelve en una igualdad:

$$u'\big(c(x_t)\big) = \beta R E_t u'\big(c(x_{t+1})\big).$$

Si el $\lim_{x\to\infty} c(x) = \bar{c} > 0$, entonces tomando el límite cuando $x_t \to \infty$ lleva a que $x_{t+1} = R\hat{a}(x_t) + y_{t+1} - rb \to \infty$ y por tanto la ecuación de Euler anterior implica que $\bar{c} = \beta R \bar{c}$, llevando a una contradicción. Así, debemos tener que el $\lim_{x\to\infty} c(x) = \infty$.

Se sigue de (4.16) que

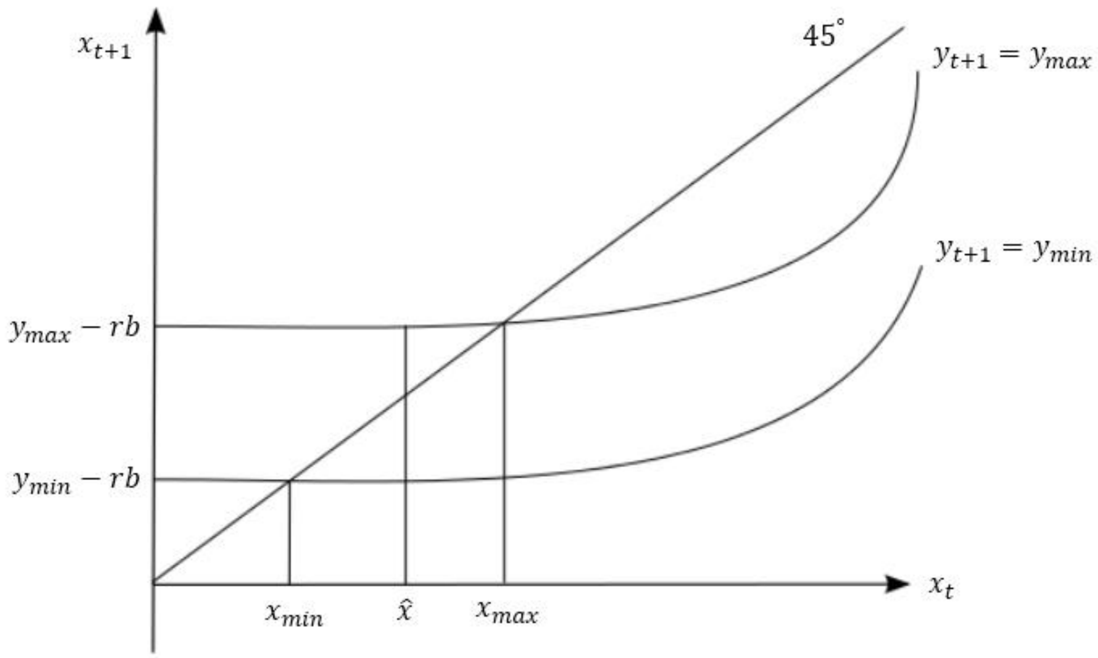
$$\lim_{x\to\infty} \frac{E_t V'(x_{t+1})}{V'\big(y_{max} - rb + R\hat{a}(x_t)\big)} = 1.$$

Elijase un épsilon positivo tal que $\varepsilon < \frac{(1-\beta R)}{(\beta R)}$ y notar de que existe un x^* lo suficientemente grande tal que $x_t > x^*$, $\frac{EV'(x_{t+1})}{V'\big(y_{max} - rb + R\hat{a}(x_t)\big)} < 1 + \varepsilon$. Usando la ecuación de Euler,

$$V'(x_t) = \beta R E_t V'(x_{t+1}) < (1+\varepsilon)\beta R V'\big(y_{max} - rb + R\hat{a}(x_t)\big)$$

$$\leq V'\left(y_{max} - rb + R\hat{a}(x_t)\right).$$

Figura 4.2: La evolución del cash-on-hand.



La figura 4.2 grafica x_{t+1} como una función de x_t para los mayores y menores niveles de ingresos. Se sigue de la concavidad de V que si $x_t \geq x^*$, entonces $x_t > y_{max} - rb + R\hat{a}(x_t) \geq x_{t+1}$.

El lema 2 implica que siempre y cuando el *cash-on-hand* es mayor que un valor crítico x^*, el cash-on-hand en el siguiente periodo caerá. Sea x_{max} el valor crítico más pequeño que satisface la propiedad en este lema. Entonces el cash-on-hand en el largo plazo se establecerá en el intervalo cerrado $[x_{min}, x_{max}]$ como se ilustro en la figura.

Caso 2 $\beta R > 1$.

En el caso determinístico, se mostró que (c_t) es una sucesión creciente y por tanto tiene un límite. En el caso estocástico, un proceso estocástico (M_t) con la propiedad $M_t \geq (\leq) E_t[M_{t+1}]$, análogo a la monotonicidad en el caso determinístico, es llamado supermartingala (submartingala)[21]. Chamberlain and Wilson (2000) analizan el comportamiento de largo plazo del consumo y el ahorro usando el poderoso *Teorema de Convergencia de la Supermartingala*. Sea $M_t = \beta^t R^t u'(c_t) \geq 0$. Entonces se sigue de la desigualdad de Euler que $\{M_t\}$ es una supermartingala no negativa. Por el Teorema de Convergencia de la Supermartingala, $\{M_t\}$ converge a un límite no negativo. Si $\beta R > 1$. Entonces deberíamos tener el límite $\lim_{t\to\infty} u'(c_t) = 0$ y por tanto $\lim_{t\to\infty} c_t = \infty$. Por la restricción presupuestaria, también tenemos que el $\lim_{t\to\infty} x_t = \infty$ y $\lim_{t\to\infty} \hat{a}_{t+1} = \infty$.

Caso 3 $\beta R = 1$.

Chamberlain and Wilson (2000) muestran que el consumo también converge a infinito casi seguro para $\beta R = 1$ para un proceso muy general estocástico en el ingreso laboral si el valor presente del ingreso laboral es lo suficientemente estocástico. Sotomayor (1984) y Aiyagari (1994) proveen una simple prueba en el caso de *iid*. Cuando $\beta R = 1$, el Teorema de Convergencia de la Supermartingala no necesariamente implica que $u'(c_t)$ converge a cero. Supóngase que $u'(c_t)$ converge a un límite positivo así que c_t converge a un límite casi seguro. Entonces x_t también converge a un límite finito casi seguro. Desde que el conjunto de trayectorias de la muestra para los que no son infinitos t tal que $y_{t+1} = y_{min}$ y $y_{t+1} = y_{max}$ ambos tienen probabilidad uno, suponemos que el conjunto de trayectorias en los cuales x_t converge también tienen esta propiedad. Esto contradice con la restricción presupuestaria $x_{t+1} = R\hat{a}(x_t) + y_{t+1} - rb$ dada la continuidad de $\hat{a}$.

Comparado al caso determinístico, este resultado limitado es notable. Como se discutió por Chamberlain and Wilson (2000), la intuición económica de este resultado es aun objeto de investigación y no hay un consenso para explicar este tipo de proceso. El argumento clave descansa en el poderoso Teorema de Convergencia de la Supermartingala.

[21] Ver Anexo.

CONCLUSIONES.

Desde un punto de vista abstracto, mirar el consumo como acción, como el mismo acto de consumir, se debe de interpretar a partir del Estructuralismo, agarrando la base de las estructuras simbólicas, cuyo significado se logra mediante diferenciación externa que ha sido endogenizada en el proceso de socialización (Baudrillard, 2009). El uso del concepto de comunicación por diferenciación lógica del consumo (por ejemplo, en la proyección del estatus socioeconómico de una familia a partir de lo que poseen en términos de riqueza frente a la sociedad) se va más allá del hecho que las familias consumen más allá de su restricción de recursos, sino que están integrados a una lógica de estructuras con significación social, cuyas implicaciones positivas y normativas por parte de la teoría económica ortodoxa no han sido suficientemente discutidas, ya que en el momento en que se toma el consumo como fin, se rompe con la misma estructura del consumo y su conexión con el flujo circular del ingreso (el flujo de gastos de un grupo de unidades de decisión, los hogares, que en su mayoría están altamente relacionados con la actividad laboral e incluso con factores externos como la misma cultura).

Por otro lado, la teoría del consumo tal y como se encuentra en su estado actual se concentra en el fenómeno del consumo de objetos (el sistema de los objetos), que en la mayoría de exposiciones se desliga del sistema de producción para explicar dicha acción, dando el ingreso como variable exógena, lo cual es un error, pues el consumo se trata de una forma activa de relación dentro de la sociedad, convirtiendo así al ser humano un ser funcional, funcional en función del Deseo (Deleuze and Guattari, 1985). Lo anterior se refleja cuando se pone atención a la utilización y distribución de la riqueza, pues es, en ese momento donde se establece tanto la diferenciación como la discriminación social. Es a partir de la interpretación de los signos como se va construyendo en la sociedad la acción de consumo. Pero a su vez esto está enfrascado en un círculo vicioso del crecimiento y en donde la distribución de recursos es la clave para explicar tales diferencias en los patrones de consumo en los hogares. La crisis reciente ha agudizado la inseguridad por parte de los agentes con respecto a su fuente de ingresos (empleo), la incertidumbre crea presión psicológica sobre ellos, el estatus y la competencia misma generan un consumo que no entra dentro de una lógica racional, y por tanto, las decisiones de consumo no terminen siendo óptimas.

Principios de 1980s se vivió un proceso de intensa liberación financiera en el contexto de una disminución de la tasa de ahorro y una fuerte movilidad de capital a nivel mundial. El desarrollo de los mercados financieros hasta el 2000 produjo un significativo aumento de la riqueza, llamando particular atención los activos más sensibles a las tasas de interés. Luego, desde 1990s se comienza a vivir el fenómeno de hijos que aun dependen de sus padres, debido a las tasas de desempleo que se viven en las economías, dicho fenómeno se agudiza más con la crisis del 2008, llevando así a romper actualmente con la LCH. Esto lleva al debate sobre la intervención pública en problemas asociados no solamente al desempleo, sino al problema de las pensiones y edad de retiro por parte de los hogares en la economía, esto está ligado a las reformas laborales que permitan generar empleo, con el fin de estimular el consumo. De hecho, la tradición fisheriana establece que cada hogar establece un patrón de consumo intertemporal el cual va a depender de los ingresos y activos corrientes, los ingresos futuros esperados y las tasas de interés presentes y futuras esperadas. Sin embargo, la lógica intertemporal viene a cobrar fuerza para aquellos hogares que logran satisfacer su nivel de consumo básico, de ahí se deriva el carácter doble de los hogares que son sensibles a las variables intertemporales y los que son sensibles a los recursos corrientes que poseen. Solo los hogares con recursos limitados pueden consumir por encima de su nivel básico en el momento que logren acceder a mercados de crédito tal y como se vio en la sección 4.

La inclusión de las expectativas racionales en la PIH y la LCH 1970s se convirtió en el soporte teórico a la hora de analizar las decisiones de consumo y ahorro, pero para aquel entonces la incorporación de información futura seguía sin contrastarse de forma explícita. A nivel empírico para validar estas hipótesis se contaba con el problema de que las series para el tratamiento econométrico eran no estacionarias y la técnica de Panel Data aún no estaba desarrollada, además de que la metodología para la construcción de datos, seguía careciendo de variables claves como las expectativas futuras y la riqueza neta de los consumidores a la hora de realizar el análisis. Esto llevo a que la literatura empírica para el aquel entonces periodo fuese muy puntual en la PIH y la LCH, como contrastes descriptivos tales como la relación edad-stock de riqueza, o diferenciar por genero de individuos o razas y el nivel de ingresos respectivos y su consumo, pero no se hizo un análisis general de dichas hipótesis.

El problema con las expectativas futuras fue que se buscó solucionar la construcción de indicadores de los ingresos permanentes a partir de variables retardadas. En este aspecto se debe de señalar que Hall (1978) plantea la HER de forma imprecisa, pues no exigió un espacio temporal determinado, sino solo que ese espacio temporal incluya periodos futuros. Con ello la crítica de Lucas (1976) señalo la inviabilidad de los modelos estructurales que suponen la estabilidad de los parámetros de las variables explicativas, lo que lleva a que no hay razón alguna para esperar una relación fija entre el ingreso permanente y el observado. Pero es el mismo Hall (1978) quien cambia la discordancia de las decisiones intertemporales y evade la crítica de Lucas tomando como base a Modigliani and Brumberg (1954) y Friedman (1957), planteando un modelo de ciclo vital con ingreso permanente en el que las decisiones de consumo se realizan a partir de la base de la información presente y futura de las variables relevantes. De esta forma, los problemas de endogeneidad generados de extrapolar el comportamiento futuro de algunas variables a partir de información pasada, se resolvió introduciendo la HER. La inclusión de la HER en la PIH y la LCH supone la internalización de toda la información pasada, así como la percepción de la evolución futura de las variables relevantes. Bajo la HER toda la información pasada se supone que es conocida por el consumidor, por tanto, su inclusión no debe generar ninguna capacidad adicional explicativa al modelo, de esta forma la información pasada puede ser usada como variable instrumental. La información pasada termina siendo redundante para estimar la función de consumo, pues el comportamiento presente del consumidor revela las expectativas presentes de su situación futura y su evolución pasada.

Para poder conducir políticas útiles para el consumo se debe hablar del “nivel de consumo”, la literatura se ha enfocado en el crecimiento y variaciones de éste. Es importante testear cómo y qué perciben los consumidores como choques temporales y específicos. El uso de métodos numéricos y simulaciones que introduzcan las percepciones y los conjuntos de información, a su vez el papel que juegan las instituciones para condicionar el comportamiento del consumo en los humanos. La comprensión de las asignaciones intertemporales de recursos y las funciones de política que gobiernan estas variables se deben de introducir en modelos de equilibrio general junto con la intuición que ofrece la naturaleza de los procesos estocásticos, pues como se vio en esta revisión de literatura, el ingreso sigue siendo exógeno en los modelos y no se introduce de forma endógena. Es decir, que las empresas juegan un papel importante a la hora de determinar el consumo.

Finalmente, si bien es cierto que la ecuación de Euler ha sido el caballo de batalla en la teoría macroeconómica para tratar el consumo de manera intertemporal. Su crítica viene del hecho de que no se ajusta bien con los datos; la cosa es que podemos medir el consumo de las personas, y podemos medir las tasas de interés. Si hacemos una suposición acerca de las preferencias de la gente, sólo podemos ir a ver si la ecuación de Euler es correcto o no. En efecto, En Hansen and Singleton (1982) encontró poco apoyo a la ecuación. Sin embargo, en Canzoneri, Cumby and Diba (2007) se proporciona de forma más simple pero más contundente evidencia en contra de la ecuación de Euler. Básicamente, en la ecuación de Euler, la tasa de interés "r" se supone que es la tasa de interés libre de riesgo. Canzoneri et al (2007) analizaron a los fondos del mercado de dinero, que son básicamente seguros, y comparan sus tasas de interés a las tasas previstas por la ecuación de Euler. Lo que encuentran es un poco sorprendente: hay una correlación negativa entre los dos.

En otras palabras, la ecuación de Euler dice que si las tasas de interés son altas, se pospone más el consumo presente, lo cual tiene sentido. Los mercados de dinero básicamente remuneran por no consumir hoy. Cuanto más te remuneran, más se debe mantener el dinero en el mercado de dinero y esperar a consumir hasta el futuro. Pero Canzoneri et al (2007) muestran que así no se comporta la gente. Los momentos en que las tasas de interés están altas son las épocas en que la gente tiende a estar consumiendo más, no menos. Pero esto se podría quizás justificar en el cambio del tipo de preferencias que se utilizan, será esto suficiente para poder explicar esto: ¿por qué los hogares consumen más durante los periodos cuando las tasas de interés son altas?

A pesar de que Canzoneri et al (2006) usan una función de utilidad con hábitos de consumo, siguen encontrando que la ecuación de Euler todavía sigue contradiciendo los datos. Incluso usan preferencias de tipo Epstein-Zin y encuentran que la correlación negativa nunca desaparece. No importa lo que se suponga acerca de las preferencias de los hogares, su comportamiento no es consistente con la ecuación de Euler. Tal vez si seguimos probando diferentes funciones de utilidad quizás se concuerde con la evidencia empírica. Tal vez es sólo el caso de que los hogares no toman decisiones de consumo de la forma en que la ecuación de Euler dice que hace, y no hay preferencias tales que puedan solucionar el problema.

La cuestión crítica aquí radica en lo siguiente: si empíricamente la ecuación de Euler no es válida, se cuestiona los resultados intermedios por parte de los macroeconomistas la ecuación de Euler en los DSGE. Sin embargo, necesitamos toda una literatura de trabajos analizando si la ecuación de Euler se puede utilizar o no. Se debe señalar que las ecuaciones de Euler del consumo también se utilizan ampliamente en los modelos de Asset Pricing. Esto es cierto, y es esencialmente imposible hablar sobre dicha literatura sin dejar de usar este enfoque, lo que hace que muchos de los enigmas a nivel empírico se deban a esta especificación. El trabajo de Carroll (2001b) básicamente resume que las ecuaciones son imposibles de estimar, lo que arroja muchas dudas sobre la literatura que se dedica a su estimación. Sin embargo, los problemas de optimización dinámica tienen más de un período de tiempo, por lo que pueden tener condiciones de primer orden en el consumo en diferentes períodos de tiempo. Las formas que se revisaron en este trabajo para deshacerse de la ecuación de Euler es añadir otras restricciones (restricciones de liquidez, mercados incompletos), o recoger relaciones en las preferencias a como se hace tradicionalmente en la utilidad no separable tiempo, al estilo Campbell and Cochrane (1999).

A nivel empírico el survey de Ludvigson (2013) ofrece una buena visión general de la literatura empírica sobre asset pricing basado en el consumo. Ludvigson explica que los primeros estudios empíricos encontraron que el modelo fue rechazado tanto a nivel formal como informalmente en una variedad de ajustes empíricos. A pesar de, en respuesta a estos hallazgos, los investigadores han alterado el modelo basado en el consumo estándar para dar cuenta de los nuevos ordenamientos de preferencias basadas en hábitos o utilidad recursiva, o nuevas restricciones a la dinámica de los fundamentos de flujo de caja, o nuevas estructuras de mercado mercados basadas en heterogeneidad y mercados incompletos, o limitando la participación en el mercado de valores. En síntesis, son muchos los desafíos por explorar tanto a nivel teórico como empírico, pero todo partiendo de la incertidumbre y los mercados incompletos para dar mejor respuesta a los problemas en el consumo.

REFERENCIAS.

1) Attanasio, Orazio (1999) “Consumption” in Taylor, J. and Woodford, M. (eds.), *Handbook of Macroeconomics Vol 1B*. North-Holland.
2) Attanasio, Orazio & Weber, Guglielmo (1995) "Is Consumption Growth Consistent with Intertemporal Optimization? Evidence from the Consumer Expenditure Survey”, *Journal of Political Economy*, 103(6), pp. 1121-57.
3) Attanasio, Orazio & Weber, Gublielmo (2010) “Consumption and Saving: Models of Intertemporal Allocation and Their Implications for Public Policy” *Journal of Economic Literature 48* (September 2010): 693-751.
4) Aiyagari, Rao (1994) “Uninsured Idiosyncratic Risk and Aggregate Saving. *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 109, No. 3, pp. 659-684.
5) Bachelier, Louis (1900) Théorie de la Speculation, Thésis de Docteur és Sciences Mathématiques. Université Paris Sorbonne. Gauthier-Villars, Paris.
6) Bagliano, Fabio- Cesare & Bertola, Giuseppe (2004) *Models for Dynamic Macroeconomics*. Oxford. University Press.
7) Baudrillard, Jean (2009) *La sociedad de consumo. Sus mitos, sus estructuras*. Ed. Siglo XXI, Madrid.
8) Bewley, Truman (1977) “The Permanent Income Hypothesis: A Theoretical Formulation” *Journal of Economic Theory*, Vol. 16, pp. 252-259.
9) Blinder, Alan & Deaton, Angus (1985) “The Time Series Consumption Function Revisited” Brooking Papers on Economic Activity (2), pp. 465-521.
10) Campbell, John (1987) “Does Saving Anticipate Declining Labor Income? An Alternative Test of the Permanent Income Hypothesis”. *Econometrica*, Vol. 55, pp. 1249-73.
11) Campbell, John (1993) “Intertemporal Asset Pricing Model without Consumption Data”, *American Economic Review*, Vol. 83, No. 3, pp. 487-512.
12) Campbell, John (1996) “Understanding Risk and Return”, *Journal of Political Economy*, Vol. 104, No. 2, pp. 298-345.
13) Campbell, John & Cochrane, John (1999) “By Force of Habit: A Consumption-Based Explanation of Aggregate Stock Market Behavior”, *Journal of Political Economy*, Vol. 107, No. 2, pp. 205-251.
14) Campbell, John & Deaton, Angus (1989) “Why is Consumption So Smooth?” *Review of Economic Studies* 56, 357-374.

15) Campbell, John, Lo, Andrew & MacKinlay, Craig (1997) *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press.
16) Canzoneri, Matthew, Cumby, Robert & Diba, Behzad (2007) "Euler Equations and Money Market Interest Rates: A Challenge for Monetary Policy Models", *Journal of Monetary Economics*, Vol. 54, pp. 1863-1881.
17) Carroll, Christopher (2001a) "A Theory of the Consumption Function, With and Without Liquidity Constraints". *Journal of Economic Perspectives Volume* 15 (Summer): 23-45.
18) Carroll, Christopher D. (2001b) "Death to the Log-Linearized Consumption Euler Equation! (And Very Poor Health to the Second-Order Approximation)", Advances in Macroeconomics: Vol. 1: No. 1, Article 6
19) Carroll, Christopher & Samwick, Andrew (1998) "How Important is Precautionary Saving?" *The Review of Economics and Statistics* 80 (August): 410-419.
20) Chamberlain, Gary & Wilson, Charles (2000) "Optimal Intertemporal Consumption under Uncertainty" *Review of Economic Dynamics*, Vol (3), pp. 365-395.
21) Cochrane, John (1991) "A Simple Test of Consumption Insurance" *Journal of Political Economy*, Vol. 99 (5), pp. 957-976.
22) Constantinides, George & Duffie, Darrell (1996) "Asset Pricing with Heterogeneous Consumers", *Journal of Political Economy*, Vol. 104, pp. 219-240.
23) Deaton, Angus (1991) "Saving and Liquidity Constraints", *Econometrica*, Vol. 59, No. 5, pp. 1221-1248.
24) Deaton, Angus (1992) *Understanding Consumption.* Oxford: Oxford University Press.
25) Deleuze, Gilles & Guattari, Félix (1985) *El Anti Edipo. Capitalismo y Esquizofrenia*. Ediciones Paidós Ibérica, S.A.
26) Dynan, Karen, Elmendorf, Douglas & Sichel, Daniel (2006) "Can financial innovation help to explain the reduced volatility of economic activity?" *Journal of Monetary Economics*, Vol. 53, pp. 123-150.
27) Fama, Eugene (1970) "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work" *Journal of Finance*, Vol. 25 (2), pp. 383-417.

28) Flavin, Marjorie (1981) "The Adjustment of Consumption to Changing Expectations About Future Income". *Journal of Political Economy 89* (October): 974-1009.

29) Flavin, Marjorie (1985) "Excess Sensitivity of Consumption to Current Income: Liquidity Constraints or Myopia?" *The Canadian Journal of Economics* 18 (February): 117-136.

30) Friedman, Milton (1957) *A Theory of the Consumption Function*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

31) Friedman, Milton (1963) "Windfalls, the 'Horizon', and Related Concepts in the Permanent Income Hypothesis", in C. F. Christ (ed.), *Measurement in Economics*, Stanford: Standford University Press.

32) Guvenen, Fatih & Smith, Anthony (2014) "Inferring Labor Income Risk and Partial Insurance from Economic Choices" *Econometrica*, Vol. 82 (6), pp. 2085-2129.

33) Hall, Robert E. (1978) "Stochastic Implications of the Life Cycle – Permanent Income Hypothesis: Theor y and Evidence." *Journal of Political Economy 86* (December): 971-987.

34) Hall, Robert E. (1988) "Intertemporal Substitution in Consumption." *Journal of Political Economy 96* (April): 339-357.

35) Hall, Robert & Mishkin, Frederic (1982) "The Sensitivity of Consumption to Transitory Income: Estimates from Panel Data on Households". *Econometrica*, Vol. 50 (2), pp. 461-481.

36) Hansen, Lars Peter (1982)"Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators", Econometrica, 50, pp. 1029-1054.

37) Hansen, Lars Peter (2012) Challenges in Identifying and Measuring Sistemic Risk. NBER Working Paper 18505.

38) Ingersoll, Jonathan (1987) *Theory of Financial Decision Making: Studies in Financial Economics*, Rowman & Littlefield.

39) Jappelli, Tullio & Pistaferri, Luigi (2006) "Intertemporal Choice and Consumption Mobility". *Journal of the European Economic Association*, 4 (1), pp. 75-115.

40) Jappelli, Tullio & Pistaferri, Luigi (2010) "The Consumption Response to Income Changes". *Annual Review of Economics*. Vol. 2, pp. 479-506.

41) Jorion, Philippe. & Giovannini, Alberto. (1993) "Time-series Tests of Non-expected Utility Model of Asset Pricing", *European Economic Review*, 37, pp. 1083-1100.

42) Keynes, J. M. (1936) *The General Theory of Employment, Interest and Money*, London: Macmillan.

43) Kimball, Miles (1990) "Precautionary Saving in the Small and in the Large" *Econometrica*, Vol. 58, pp. 53-73.

44) Kimball, Miles & Weil, Philippe (2009) "Precautionary Saving and Consumption Across Time and Possibilities" *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 41, No. 2-3, pp. 245-284.

45) Kreps, David (1990) *A Course in Microeconomic Theory*. Princeton University Press.

46) Lucas, Robert (1976) "Econometric Policy Evaluation: A Critique". In Brunner, K.; Meltzer, A. The Phillips Curve and Labor Markets. Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy 1. New York: American Elsevier. pp. 19–46.

47) Ludvigson, Sydney (2013) "Advances in Consumption-Based Asset Pricing: Empirical Tests" in Constantinides, George, Harris, Milton & Stulz, Rene (eds) *Handbook of the Economics of Finance, Vol 2B*, chapter 12.

48) Ljungqvist, Lars & Sargent, Thomas. J. (2012) *Recursive Macroeconomic Theory*. Third Edition. The MIT Press.

49) Mace, Barbara (1991) "Full Insurance in the Presence of Aggregate Uncertainty" *Journal of Political Economy*, vol. 99 (5), pp. 928-956.

50) Machina, Mark & Viscusi, W. Kip (2014) *Handbook of the Economics of Risk and Uncertainty Vol 1*. North Holland.

51) Marin, José & Rahi, Rohit (2000) "Information Revelation and Market Incompleteness" *The Review of Economic Studies* Vol. 67, No. 3 (Jul., 2000), pp. 563-579.

52) Merton, Robert (1973) "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model" *Econometrica*, Vol 41, No 5, pp. 867-887.

53) Merton, Robert (1990) *Continuous-Time Finance*. Blackwell Publishing Ltd.

54) Modigliani, F. (1986). "Life Cycle, Individual Thrift and the Wealth of Nations", *American Economic Review,* 76, 297-313.

55) Modigliani, F. and Brumberg, R. (1954). "Utility Analysis and Aggregate Consumption Functions: An Interpretation of Cross-Section Data", in K.K. Kurihara (ed), *Post-Keynesian Economics*, New Brunswick: Rutgers University Press.

56) Oksendal, Bernt (2003) *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer, Universitext.

57) Pistaferri, Luigi (2001) "Superior Information, Income Shocks, and the Permanent Income Hypothesis" *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 83 (3), pp. 465-476.

58) Poterba, James (1988) "Are Consumers Forward Looking? Evidence from Fiscal Experiments" *American Economic Review*, Vol. 78. pp. 413-18.

59) Romer, David (2012) *Advanced Macroeconomics*. Fourth Edition. McGraw-Hill – Irwin.

60) Schechtman, Jack and Vera L. S. Escudero (1977) "Some Results on An Income Fluctuation Problem". *Journal of Economic Theory*, Vol. 16, pp. 151-166.

61) Shea, John (1995) "Union Contracts and the Life-Cycle/Permanent-Income Hypothesis". *The American Economic Review 85* (March): 186-200.

62) Snowdon, Brian & Vane, Howard (2005) *Modern Macroeconomics Its Origins, Development and Current State.* Edward Elgar Publishing Limited.

63) Sotomayor, Marlida A. de Oliveira (1984) "On Income Fluctuations and Capital Gains". *Journal of Economic Theory*, Vol. 32, pp. 14-35.

64) Stokey, Nancy, Lucas, Robert & Prescott, Edward C. (1989) *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Cambridge: Harvard University Press.

65) Weil, Philippe (1989) "The Equity Premium Puzzle and the Risk-Free Rate Puzzle" *Journal of Monetary Economics* 24, pp. 401-421.

66) Whittle, Peter (1996) "*Optimal Control: Basics and Beyond*" University of Cambridge, UK.

67) Zeldes, Stephen (1989) "Consumption and Liquidity Constraints: An Empirical Investigation". *Journal of Political Economy*, vol. 97, no. 2.

ANEXO.

VALORACIÓN DE ACTIVOS FINANCIEROS: RENDIMIENTOS, MARTINGALAS Y PROBABILIDADES NEUTRALES AL RIESGO.

Considérese una economía de un solo periodo en la que se caracteriza la incertidumbre a través de los estados de la naturaleza que pueden ocurrir al final del periodo analizado. Partiendo de la ecuación fundamental de valoración:

$$P_j = \sum_{s=1}^{S} \phi_s X_{js},$$

donde ϕ_s es el valor hoy de una unidad de consumo que se pagaría al final del único periodo de esta economía si el estado s ocurre y nada en caso contrario. Es lo que se conoce como el precio del activo Arrow-Debreu que paga una unidad de consumo en el estado s.

Por otro lado, al ser una economía de un solo periodo se tendrían dos fechas. Para simplificar notación acudiremos a que t es la fecha actual y la fecha futura será T, a su vez pueden existir $s = 1, \dots, S$ estados de la naturaleza. Se distinguirá explícitamente las *probabilidades verdaderas* (π_s) asociadas a los S estados de la naturaleza de las *probabilidades neutrales al riesgo* (π_s^*).

Así, la ecuación de valoración de no arbitraje puede escribirse usando las verdaderas probabilidades, como

$$P_j = \sum_{s=1}^{S} \phi_s X_{js} = \sum_{s=1}^{S} \pi_s \left(\frac{\phi_s}{\pi_s}\right) X_{js} \tag{1}$$

donde aparece una nueva variable aleatoria (al depender de s) que se denominara M_s y que viene dada por la expresión

$$M_s \equiv \frac{\phi_s}{\pi_s} \tag{2}$$

y que se interpretara como el precio del activo Arrow-Debreu s-ésimo por unidad de probabilidad verdadera del propio estado s. Por tanto (1) puede escribirse como

$$P_j = \sum_{s=1}^{S} \pi_s M_s X_{js} = E\left[M X_j\right]; j = 1, \dots, N. \tag{3}$$

De esta forma, el precio de cualquier activo financiero j es el valor esperado, bajo la verdadera probabilidad π_s, de sus pagos o flujos de caja futuros ponderadas por una variable agregada(al igual que el precio de los activos Arrow-Debreu, la variable M no depende de cada activo individual j). *Dichas variable agregada M debe ser tanto un* ***factor de descuento*** *como una variable que* ***pondere*** *los flujos generados por j, según sea el estado de la naturaleza donde se reciben.*

En los trabajos empíricos lo que se suele utilizar son tasas de rendimiento esperados en lugar de precios para explicar las relaciones fundamentales existentes entre riesgo y rendimiento. De hecho, la ecuación (3) se escribe en términos de tasas de rendimiento, dividamos (1) o (3) por el precio del activo j:

$$1 = \sum_{s=1}^{S} \phi_s \tilde{R}_{js} = \sum_{s=1}^{S} \pi_s M_s \tilde{R}_{js} = E\left[M\tilde{R}_j\right];\ j = 1, \dots, N. \tag{4}$$

Donde $\tilde{R}_{js}$es el rendimiento bruto obtenido por el activo j si ocurre en el estado s ($\tilde{R}_j$ es, por tanto, $1 + R_j$). La interpretación de (4) dice que la expectativa, bajo probabilidad verdadera, de los rendimientos esperados ponderados de todos los activos financieros inciertos debe ser constante e igual para todos ellos. Dicho de otra forma, estos rendimientos esperados son iguales una vez ponderados por la variable agregada M. Dado que M refleja la importancia que tiene recibir flujos de caja en uno u otro estado.

DEFINICIÓN: Sea $X_1, X_2, \dots$ una sucesión de variables aleatorias sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y sea $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ una sucesión de $\sigma-$algebras en $\mathcal{F}$. La sucesión $\{(X_n, \mathcal{F}_n)\}$, es una martingala si las siguientes condiciones se cumplen:

a) $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$
b) X_n es $\mathcal{F}_n$ $-$medible
c) $E(|X_n|) < \infty$
d) $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$

La sucesión $X_1, X_2, \dots$, se dice que es una martingala con respecto a las $\sigma-$algebras $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ La condición a) se expresa diciendo que $\mathcal{F}_n$ forma una filtración, mientras que la condición b) se expresa diciendo que X_n, es adaptado a la filtración $\mathcal{F}_n$.

Una supermartingala relativa $(\mathcal{F}_n, P)$, es definida similarmente, excepto que d) es reemplazada por

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq X_n$$

Y una submartingala es definida con d) reemplazada por

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n.$$

La definición anterior implica que, con la información disponible hasta un momento dado, a parte del valor actual de las series, no existe ningún tipo de información adicional que pueda mejorar la habilidad de los agentes para anticipar su evolución futura. Fama (1970), desarrolla la hipótesis de los mercados eficientes y concluye que los movimientos en los precios de las acciones son impredecibles siguiendo así un camino aleatorio. Otro ejemplo de martingala son los "Animal Spirits" de Keynes (1936), la influencia en el comportamiento humano para medir la confianza de los consumidores-inversionistas.

En aplicaciones financieras, la filtración $\mathcal{F}$ esta básicamente generada por los precios de los activos observados. Por ello, un requisito natural es que la selección de una cartera de valores en el instante t dependa solo de la información disponible hasta dicho momento. Supóngase que en el momento t los agentes disponen de un conjunto de información relevante para su toma de decisiones que viene resumido por $\mathcal{F}_t$ y que contiene el valor actual y los valores pasados de la propia variable aleatoria. Una variable aleatoria o un proceso estocástico P_t es una martingala bajo una determinada probabilidad, π, si satisface la siguiente condición:

$$E[P_{t+\tau}|\mathcal{F}_t] = E[P_{t+\tau}|P_t, P_{t-1}, P_{t-2}, \dots] = P_t; \text{ para todo } \tau > 0 \quad (5)$$

o, de forma equivalente,

$$E[P_{t+\tau} - P_t|\mathcal{F}_t] = E[P_{t+\tau}|P_t, P_{t-1}, P_{t-2}, \dots] = 0; \text{ para todo } \tau > 0 \quad (6)$$

Asumamos que P_t representa las ganancias acumuladas o riqueza en una fecha t resultante de un determinado juego de azar en el que hemos participado en cada una de las posibles fechas pasadas. En la literatura esto se conoce como un *juego actuarialmente neutro*, juego que para el cual la ganancia esperada para el siguiente periodo es simplemente igual a la riqueza de este periodo, una vez que dicha expectativa la hemos condicionado a la historia del juego. De (6) se interpreta como si las ganancias incrementales esperadas en cualquier momento son cero, cuando dicha expectativa la condicionamos a la historia del juego.

Ahora pensando esto en un contexto de inversión de activos financieros podemos tener en cuenta una variable aleatoria como el tipo de interés, y mirar si se trata de una situación donde el precio de los activos es una martingala o pueden entenderse como inversiones actuarialmente neutros. De acuerdo (3), se sabe que el precio de no arbitraje de un activo financiero j en cualquier momento t puede expresarse como la expectativa, bajo la verdadera probabilidad, de sus pagos ponderados en cualquier fecha futura $t+1$, y todo ello teniendo en cuenta la información relevante en t:

$$P_{jt} = E\left[M_{t+1}X_{jt+1}\middle|\mathcal{F}_t\right]. \tag{7}$$

Naturalmente los pagos futuros incluyen el propio precio del activo j en dicha fecha más todas las rentas (dividendos o intereses) distribuidas entre ambos momentos de tiempo. Suponiendo cero dichas rentas, para evitar hablar de rentas acumuladas, vale la pena preguntarse lo siguiente: ¿son martingalas los precios de los activos? *Bajo la verdadera probabilidad los precios de los activos no son martingalas. Sin embargo, los precios de los activos se convierten en martingalas bajo probabilidades neutrales al riesgo*.

Para ver la afirmación anterior escribamos los precios de los activos en unidades del bono cupón cero sin riesgo. Es decir, escribamos los precios de los activos en unidades del activo seguro, que es lo mismo que denominar *precios descontados* de los activos. Se sabe que el precio de un bono (básico) cupón cero que paga una unidad monetaria al final del periodo es

$$b = \frac{1}{1+r} = \sum_{s=1}^{S} \phi_s. \tag{8}$$

así, el precio de cualquier activo j puede escribirse como:

$$\frac{P_j}{b} = \sum_{s=1}^{S} \frac{\phi_s}{b} X_{js} \Rightarrow P_j = b\sum_{s=1}^{S} \frac{\phi_s}{b} X_{js} \tag{9}$$

Ahora bien, ¿Qué significa $\frac{\phi_s}{b}$? Recordemos que la probabilidad neutral al riesgo, π_s^*, es precisamente el valor futuro del precio del activo Arrow-Debreu

$$\pi_s^* = (1+r)\phi_s = \frac{1}{b}\phi_s \tag{10}$$

Por tanto, el precio del activo financiero j es:

$$P_j = b\sum_{s=1}^{S}\frac{\phi_s}{b}X_{js} = b\sum_{s=1}^{S}\pi_s^* X_{js} = bE^*[X_j] = \frac{1}{1+r}E^*[X_j], \tag{11}$$

Este resultado permite comprobar efectivamente que *el precio de cualquier activo financiero es una martingala bajo la probabilidad neutral al riesgo o, lo que es equivalente, el precio descontado de cualquier activo o precio en unidades del bono cupón cero sin riesgo es una martingala* (para múltiples periodos se desarrolla en tiempo discreto mediante el modelo binomial).

En conclusión, haciendo uso de subíndices temporales, el precio de cualquier activo financiero j es:

$$P_{jt} = \frac{1}{1+r}E^*[X_{jt+1}|\mathcal{F}_t]. \tag{12}$$

Las probabilidades neutrales al riesgo que permiten, por tanto, que los precios de los activos financieros sean martingalas se conocen también como *medidas equivalentes de martingala*. Por eso es indiferente tomar el nombre de probabilidad neutral al riesgo o medida equivalente de martingala.

Por último, relacionemos la variable agregada M definida en (2) con las probabilidades neutrales al riesgo:

$$M_s = \frac{\phi_s}{\pi_s} = \frac{b\pi_s^*}{\pi_s} \Rightarrow \pi_s^* = \frac{\pi_s M_s}{b} \tag{13}$$

Así, usando (11), el precio del activo j en función de la variable agregada M:

$$P_j = b\sum_{s=1}^{S}\pi_s^* X_{js} = b\sum_{s=1}^{S}\frac{\pi_s M_s}{b}X_{js} = \sum_{s=1}^{S}\pi_s M_s X_{js} = E[MX_j]. \tag{14}$$

En este contexto, se verifica cómo las probabilidades neutrales al riesgo *internalizan* la prima por riesgo de los activos inciertos. Tengamos en cuenta las siguientes dos expresiones de valoración:

$$P_j = \frac{1}{1+r}E^*[X_j] \tag{15}$$

$$P_j = E[MX_j] \qquad (16)$$

Donde (15) es el precio bajo la probabilidad neutral al riesgo y (16) es el mismo precio bajo la probabilidad verdadera. Usando la definición de covarianza entre dos variables aleatorias, M y X_j, tenemos que:

$$P_j = E[MX_j] = E[M]E[X_j] + cov(M, X_j) \qquad (17)$$

Recordando que

$$E[M] = \sum_{s=1}^{S} \pi_s M_s = \sum_{s=1}^{S} \pi_s \frac{\phi_s}{\pi_s} = \sum_{s=1}^{S} \phi_s = \frac{1}{1+r}.$$

Por tanto, precio del activo j es:

$$P_j = \frac{E[X_j]}{(1+r)} + \underbrace{cov(M, X_j)}_{\text{prima de riesgo}} \qquad (18)$$

Cuando las expectativas se toman respecto a la verdadera probabilidad, necesitamos, a diferencia de (15), ajustar el valor actual (al tipo libre de riesgo) de los pagos futuros por una prima de riesgo que, además tiene forma de covarianza entre la variable aleatoria agregada y los pagos del activo j.

Si comparamos la martingala con la caminata aleatoria se requiere que sus incrementos sean independientes e idénticamente distribuidos, la martingala permite incrementos no correlacionados con una forma general de heterocedasticidad. Mientras que la martingala es una versión débil de la caminata aleatoria (más adecuada para seres de tiempo financieras que muestran un alto grado de heteroscedasticidad condicional). Si la serie de tiempo de un precio de un activo sigue un comportamiento martingala, su retorno es puramente no predecible, no determinístico y los inversionistas no pueden hacer rentabilidades anormales en el tiempo, es decir, no arbitraje. Si lo comparamos con un proceso de Markov, que es un proceso estocástico con la propiedad de Markov o sin memoria, es uno para el cual la probabilidad condicional sobre el estado presente, futuro y pasado del sistema son independientes; la martingala se trata de un proceso que evoluciona en forma equilibrada, es decir, sin tendencia.