

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ.



INSTITUTO DE FÍSICA



DR. MANUEL SANDOVAL VALLARTA

# ANÁLISIS DEL FACTOR DE FORMA DE PAULI PARA BARIONES.

## TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

**L.F. FELIPE DE JESÚS ROSALES ALDAPE.**

DIRECTOR DE TESIS:

DR. RUBÉN FLORES MENDIETA.

SAN LUIS POTOSÍ, S.L.P. A 3 de FEBRERO DE 2017.



# Dedicatoria

*Dedicado a Dios y a mi  
mi familia.*

# Agradecimientos

Hoy que termino la Maestría en Ciencias (Física), quiero agradecer a:

A Dios, por lo mucho que me ha dado y todo lo que soy; desde los muy difíciles momentos de mi infancia, hasta este momento de gran satisfacción personal.

A mis papás y mi hermana, por tantos momentos compartidos y su apoyo en las adversidades.

A los profesores con los que me cultivé antes de ingresar a la Licenciatura porque me dieron herramientas, habilidades, conocimientos y virtudes que siempre me acompañan.

A los profesores que me acompañaron en la incipiente trayectoria profesional en especial a mi director de tesis el Dr. Rubén Flores Mendieta, los Doctores Antonio Morelos Pineda, Enrique González Tovar, Ricardo Alberto Guirado López y otros más, además del examinador externo, el Dr. Alfonso Martínez Valdez.

Agradezco al personal tanto del Instituto de Física como de la Facultad de Ciencias, las atenciones que recibí durante mi estancia tanto de Licenciatura como de Maestría.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo administrativo, así como el honor de otorgarme la beca con el número **393199** y con el número de registro **336879**.

A mis compañeros de estudio, amigos, conocidos que durante toda mi vida fueron tendiendo la mano en la adversidad y vieron mis avances con gozo.

# Resumen

En la física de partículas elementales, se pueden estimar los momentos magnéticos de bariones por el empleo de diferentes modelos teóricos como el Modelo de Quarks, la Teoría de Perturbaciones Quirales, la Expansión  $1/N_c$  o mediante el empleo de un formalismo que combina la Teoría de Perturbaciones Quirales y la Expansión  $1/N_c$ . Es precisamente este formalismo combinado el que usamos para obtener correcciones de orden  $\mathcal{O}(m_s^{1/2})$  al factor de forma de Pauli para bariones tanto del octete como del decuplete, donde  $m_s$  es la masa del quark  $s$ .

# Índice general

<b>1. Introducción General</b>	<b>1</b>
1.1. Preámbulo . . . . .	1
1.2. Contenido . . . . .	2
<b>2. Antecedentes del Modelo Estándar y Simetría</b>	<b>3</b>
2.1. Introducción . . . . .	3
2.2. La estructura atómica y las partículas . . . . .	4
2.2.1. Los primeros modelos atómicos . . . . .	4
2.2.2. Los detalles de la estructura atómica . . . . .	4
2.2.3. Sobre las ecuaciones relativistas y las antipartículas . . . . .	6
2.2.4. Sobre el Mesón de Yukawa y los mesones . . . . .	9
2.3. Simetrías . . . . .	10
<b>3. Sobre los fundamentos básicos del estudio de los Factores de Forma en Partículas Elementales</b>	<b>12</b>
3.1. Introducción . . . . .	12
3.2. El Modelo Primitivo de Quarks . . . . .	13
3.2.1. Inicios del modelo y los mesones . . . . .	13
3.2.2. Los multipletes de bariones . . . . .	15

---

3.2.3.	Interacciones fundamentales y teorías de unificación . . . . .	18
3.2.4.	Un primer acercamiento al Modelo Estándar . . . . .	20
3.3.	La simetría quiral . . . . .	21
3.3.1.	Un ejemplo clásico de la simetría quiral: el tratamiento del modelo lineal $\sigma$ . . . . .	26
3.4.	Cromodinámica Cuántica: Formalismo y métodos perturbativos . . . . .	29
3.4.1.	Acerca de la QCD . . . . .	29
3.4.2.	Expansión $1/N_c$ de la QCD . . . . .	32
3.4.3.	Teoría de perturbaciones quirales . . . . .	38
3.4.4.	Formalismo combinado en $m_s$ y $1/N_c$ . . . . .	38
<b>4.</b>	<b>Acerca del Cálculo del Factor de Forma de Pauli</b>	<b>41</b>
4.1.	Preámbulo . . . . .	41
4.2.	El radio giromagnético del electrón . . . . .	42
4.3.	Propiedades electromagnéticas de los bariones. . . . .	46
4.4.	Correcciones a un loop al factor de forma de Pauli . . . . .	49
4.5.	El radio magnético cuadrático medio de bariones . . . . .	70
<b>5.</b>	<b>Conclusiones y perspectivas.</b>	<b>71</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>73</b>

# Índice de figuras

3.1. El nonete de mesones pseudoescalares. . . . .	14
3.2. Los multipletes de bariones. . . . .	17
3.3. Modelo Estándar de la Física de Partículas Elementales. . . . .	20
4.1. Correcciones de orden $\mathcal{O}(m_q^{1/2})$ al factor de forma de Pauli. . . . .	50





# Capítulo 1

## Introducción General

### 1.1. Preámbulo

Desde tiempos muy antiguos, la curiosidad ha llevado al hombre a hurgar sobre qué es lo que constituye a la materia y cuáles de estos constituyentes son fundamentales [1–3].

Para ello se recurre tanto a la experimentación como a la formulación de modelos matemáticos adecuados que representen de la mejor manera posible los resultados de los experimentos ya realizados y hagan predicciones. No obstante, vale la pena recordar que existen por consiguiente, tanto partículas fundamentales como compuestas.

A partir de aquí, es importante saber cómo se clasifican las partículas, lo cual conduce a revisar los modelos sobre partículas compuestas y aquellas que son los constituyentes fundamentales de la materia, a las cuales se les denomina *Partículas Elementales*.

En la búsqueda de dichos constituyentes es importante estudiar y determinar sus propiedades físicas inherentes como masa, carga eléctrica, momento magnético intrínseco, momento magnético, entre otras.

Del estudio de dichas propiedades, se puede(n) determinar la(s) simetría(s) que permitan deducir leyes de conservación, las cuales están dadas de acuerdo al *Teorema de Noether* [4–9] y a su vez son vehículos que permiten entender mejor dichas propiedades o hacerles correc-

ciones a los valores teóricos para que ajusten mejor la información experimental.

Este trabajo se enfoca en el estudio y determinación explícita del factor de forma de Pauli para bariones a orden  $\mathcal{O}(m_s^{1/2})$  en el formalismo que combina la teoría de perturbaciones quirales y la expansión  $1/N_c$  de la QCD.

## 1.2. Contenido

Este tesis se estructurará como sigue:

En el Capítulo 2 se darán los antecedentes históricos en la investigación sobre partículas elementales, incluidos los diferentes modelos atómicos existentes [1–3], con el objetivo de entender cómo se daban los diferentes modelos y señalar qué aspectos de dichos modelos son de utilidad para la realización de este trabajo. También se dará una introducción al concepto de simetría y un ejemplo, para poder entender mejor los modelos de partículas.

En el Capítulo 3 se discutirá de manera extendida la evolución de los modelos de partículas, tanto en la parte experimental como en el formalismo matemático, lo cual permitirá entender cómo evolucionó la forma de deducir las simetrías de cada uno de estos modelos hasta llegar al Modelo Estándar [1, 3–6]; se dará una descripción breve del mismo y las características de las interacciones fundamentales. Además, se dará un repaso breve y conciso sobre la simetría quiral, la cual no se entiende sin el teorema de Noether y la ecuación de Dirac [7–19], cuyo estudio permite describir qué sucede con las partículas ante una transformación de paridad; así mismo se dará un ejemplo de dicha simetría, que será clave para describir las técnicas que se emplearán en este trabajo. Se dará una introducción breve y concisa a la Cromodinámica Cuántica [4, 5, 19], teoría de campo no abeliana. Se discutirán las teorías efectivas a bajas energías, a partir de métodos perturbativos, los cuales vienen de entender la simetría quiral y por analogía con la expansión perturbativa de la Electrodinámica Cuántica.

En el Capítulo 4, se hablará sobre el cálculo del *factor de forma de Pauli*, el cual se ha de proponer su forma explícita con ayuda de lo que se sabe de los factores de forma de Sachs [20, 21].

# Capítulo 2

## Antecedentes del Modelo Estándar y Simetría

### 2.1. Introducción

En este capítulo se dará un repaso sobre los fundamentos de los diferentes modelos atómicos, así como de las investigaciones tanto teóricas como experimentales que buscaron explicar las propiedades e interacciones en los átomos, las cuales condujeron al descubrimiento de diferentes partículas subatómicas y la observación explícita de algunas simetrías, lo cual es señal clara de la existencia de *leyes de conservación*; entonces, se dará un concepto general sobre la simetría.

Con el manejo de la simetría y la existencia de diferentes partículas subatómicas, permitirá el estudio del Modelo Estándar de la Física de Partículas Elementales, tanto en su evolución como la descripción de las diferentes interacciones, así como del concepto de la *Simetría Quiral*, la Electrodinámica Cuántica, la Teoría de Unificación Electrodébil y la Cromodinámica Cuántica, los cuales nos serán de utilidad en el desarrollo de este trabajo.

## 2.2. La estructura atómica y las partículas

### 2.2.1. Los primeros modelos atómicos

Debemos recordar que desde la antigüedad, el hombre se ha preguntado sobre cuáles han sido los constituyentes fundamentales de la materia [1, 2].

En la antigua Grecia destaca Demócrito al ser el primero en postular la existencia de los átomos como constituyentes indivisibles de la materia tal cual existe en la naturaleza. Esta propuesta sólo se efectuó como una serie de ideas, las cuales no podían comprobarse en esa época.

Después de muchos siglos, el en siglo XIX, apareció la teoría de Dalton, donde planteó la existencia de átomos, postulados indivisibles, los cuales forman todos los compuestos químicos conocidos en su época. Es claro que en esta teoría la formación de compuestos químicos entraba en conflicto por la indivisibilidad del átomo. Avogadro propuso que para formar agua, hay que considerar 4 átomos de hidrógeno por 2 de oxígeno, lo cual resolvió este dilema. Este concepto evolucionó con los modelos donde hay divisibilidad de los átomos.

En 1866 Mendeleev descubrió que de entre los elementos químicos, había familias de elementos que tienen propiedades químicas semejantes. Esto se caracterizó al definir la propiedad denominada número atómico, dado por  $Z$ , asignando los números atómicos  $Z = 1, 2$  al hidrógeno y al helio, respectivamente.

Luego, predijo la existencia de varios elementos químicos, entre ellos, destaca el descubrimiento del argón por Ramsay y Rayleigh en 1894, lo cual permitió que se agregaran nuevas columnas para predecir y descubrir más elementos químicos.

### 2.2.2. Los detalles de la estructura atómica

Esta búsqueda de definir la estructura interna de los átomos se remonta al siglo XIX, cuando por medio del conocimiento de la interacción electromagnética se describieron los rayos catódicos, que se originan al aplicársele una diferencia de potencial a una placa metálica y en

consecuencia la placa emite luz; luego se hicieron experimentos con este tipo de radiación en presencia de un campo magnético, ante cual se desviaban de su trayectoria; ésto confirmaba el hallazgo teórico de Maxwell, el cual permitió reunir en una sola teoría la electricidad y el magnetismo porque los fenómenos eléctricos y magnéticos están íntimamente ligados. La teoría electromagnética es la primera teoría de unificación que se formuló.

Luego, Thomson hizo un experimento con rayos catódicos, donde describió dicha forma de radiación como corrientes de electrones, lo cual le permitió describir al átomo como una nube de carga positiva sobre la cual está un mar de electrones, los cuales tienen carga negativa. A este modelo se le conoce coloquialmente como *modelo de budín pasas*, esto debido a que actualmente sabemos que las cargas tanto del protón como del electrón son iguales, pero de signo contrario, pero el protón es dos mil veces más masivo que el electrón.

Posteriormente, Rutherford efectuó un experimento donde bombardeó una placa de oro con partículas alfa provenientes de una fuente, las cuales desvían la radiación emitida. La sección eficaz de la dispersión está dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ZZ'e^2}{E_0} \right)^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\Theta}{2}\right)}, \quad (2.1)$$

donde  $E_0$  es la energía inicial de la partícula dispersada. A dicha relación se le conoce como *sección eficaz de dispersión Rutherford*.

Esta relación se puede deducir mediante el formalismo de la Mecánica Clásica [8–10] y con la Mecánica Cuántica [3, 22–28].

Posteriormente, Bohr postula su modelo donde el electrón orbita circularmente alrededor del protón, pudiendo tener transiciones entre diferentes niveles discretos de energía, tal que a cada nivel correspondía una órbita circular, de tal manera que el electrón no radiaba porque giraba y tenía un valor de momento angular con unidades de  $\hbar^2$ , lo cual impedía que el electrón llegase hasta el centro con el protón por el predominio de la interacción electromagnética y colapsara. Este esquema reproducía muy bien las *líneas espectrales del átomo de hidrógeno*, pero no ajustaba los espectros de otros elementos químicos y además no consideraba el espín de cada partícula al interior del átomo.

En 1932, Chadwick descubrió el neutrón, el cual también es parte del átomo, en específico del núcleo atómico, pero no tiene carga eléctrica y su existencia fue predicha porque Rutherford vio que el átomo no se desintegraba, pero esto no fue suficiente para saber por qué el átomo era estable.

### 2.2.3. Sobre las ecuaciones relativistas y las antipartículas

Para describir las interacciones entre las partículas, es importante considerar el formalismo de la Mecánica Cuántica, el cual se completó muy rápido entre 1923 y 1926. De ese momento histórico, Schrödinger formuló su ecuación en forma relativista, pero como no logró reproducir los niveles de energía del átomo de hidrógeno, abandonó la idea, para formular una ecuación de onda no relativista, la cual se puede obtener partiendo del Hamiltoniano [1,22–28]

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m_0} + V(\vec{x}) = \hat{E}, \quad (2.2)$$

donde hacemos

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.3)$$

y

$$\hat{P} = i\hbar \vec{\nabla}. \quad (2.4)$$

Efectuando la sustitución de las ecuaciones (2.3) y (2.4) en la ecuación (2.2), obtenemos la *ecuación de Schrödinger* dada por

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m_0} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{x}) \right) \Psi(\vec{x}, t). \quad (2.5)$$

Al considerar el *potencial de Coulomb* en esta ecuación fue posible reproducir los niveles de energía del átomo de hidrógeno, estableciendo que la energía del estado base es  $-13.9 \text{ eV}/c^2$ , lo cual confirmó el gran acierto del modelo de Bohr, que dice que la energía de un átomo hidrogenoide está discretizada como

$$E_n = -\frac{1}{2}\mu c^2 \frac{(Z\alpha)^2}{n^2}. \quad (2.6)$$

Luego, el caso relativista lo retomaron Klein y Gordon, lo cual les permitió describir las partículas de *momento angular intrínseco o espín 0*, por lo cual dicha ecuación se denomina *ecuación de Klein-Gordon*, la cual se puede deducir a partir de

$$P^\mu P_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{P}^2 = m_0^2 c^2, \quad (2.7)$$

y sustituyendo las ecuaciones (2.3) y (2.4) en la ecuación (2.7), obtenemos

$$\left(\square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right)\Psi = -\hbar^2 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right)\Psi = 0. \quad (2.8)$$

En las soluciones de (2.8) las funciones de onda  $\Psi^{(+)}$  representan las partículas y las  $\Psi^{(-)}$  a las antipartículas. Por otro lado, las partículas para las cuales sus funciones de onda satisfacen  $\Psi = \Psi^*$  son partículas neutras de espín 0.

Ahora, mencionaremos la *ecuación de Dirac*, la cual permite describir de manera satisfactoria las interacciones de las partículas de espín  $\frac{1}{2}$  y proviene de trabajar a través de la ecuación (2.7) de manera análoga a como Schrödinger dedujo la ecuación de Klein-Gordon, buscando que la densidad de probabilidad sea positiva definida, lo cual no ocurre con la ecuación de Klein-Gordon, con lo que a su vez se introduce un conjunto de matrices dadas por  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\beta}$ , las cuales después de estudiar algunas de sus propiedades de simetría se determina que la menor dimensionalidad admisible físicamente y que simplifica el estudio de las propiedades



físicas de las partículas de espín  $\frac{1}{2}$  es  $n = 4$ .

Por consiguiente, la ecuación de Dirac está dada por [12, 14–18]

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[ \frac{\hbar c}{i} \left( \hat{\alpha}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \hat{\alpha}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \hat{\alpha}_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) + \hat{\beta} mc^2 \right] \psi \equiv \hat{H}\psi. \quad (2.9)$$

Las soluciones  $\psi^1$  y  $\psi^2$  se identifican con la energía positiva [12, 14], mientras que las soluciones  $\psi^3$  y  $\psi^4$  se identifican con la energía negativa, algo análogo a como se identifican las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon. Esto fue en un principio un contratiempo para Dirac, por lo que propuso la existencia de un hipotético *mar de Dirac*, el cual es un conjunto de partículas de energía negativa que forman el vacío. Posteriormente se vio que esta posibilidad satisface la *conservación de energía-momento* de la Relatividad Especial, por lo cual propuso la existencia de las antipartículas, lo cual se confirmó en 1932, cuando se descubrió el positrón.

Una propiedad interesante de la ecuación (2.9) es que en el límite no relativista se reduce a la *ecuación de Schrödinger-Pauli* que aparece en [22–28].

Por otro lado, la ecuación de Dirac será una herramienta muy importante para el estudio de la Simetría Quiral, a través de los covariantes bilineales, los cuales se pueden expresar en términos de la base de *matrices de Dirac*,  $\gamma^\mu$ , definidas por

**Definición 2.2.1** Sean las matrices  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\beta}$  provenientes de la Ecuación de Dirac, tenemos que la base propia de las matrices de Dirac  $\gamma^\mu$  está definida como productos de matrices  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\beta}$  por

$$\gamma^0 \equiv \hat{\beta} \quad \gamma^i \equiv \hat{\beta}\hat{\alpha}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.10)$$

las cuales conforman una base linealmente independiente de matrices  $4 \times 4$ .

**Definición 2.2.2** Sean las matrices  $\gamma^0$  y  $\gamma^i$  con  $i = 1, 2, 3$ , que representan a la parte temporal y la parte espacial dadas por (2.10), definimos las formas bilineales de las matrices de Dirac como

$$\begin{aligned} \Gamma^S &= 1, & \Gamma_\mu^V &= \gamma_\mu, & \Gamma_{\mu\nu}^T &= \sigma_{\mu\nu}, \\ \Gamma^P &= i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_5 \equiv \gamma^5, & \Gamma_\mu^A &= \gamma_5\gamma_\mu, \end{aligned} \quad (2.11)$$

las cuales conforman un conjunto de 16 matrices linealmente independientes de  $4 \times 4$ .

Estas relaciones serán fundamentales para la comprensión de la simetría quiral, tanto la ecuación de Dirac y la matriz  $\gamma_5$ , y de paso este tipo de simetría será muy útil para el objetivo de cálculo de este trabajo de tesis que trata sobre el factor de forma de Pauli.

#### 2.2.4. Sobre el Mesón de Yukawa y los mesones

En la década de 1930 con el conocimiento que se tenía de la estructura interna de los átomos se formularon teorías que intentaron explicar el origen y la naturaleza de la fuerza que cohesionaba los neutrones y los protones en el núcleo atómico, se dedujo que la fuerza entre un par neutrón-protón es mayor que la fuerza de repulsión eléctrica. Esto permitió la introducción de la interacción fuerte como forma de explicar la cohesión al interior de los átomos como se verá en el siguiente capítulo.

En 1935, el físico japonés Yukawa propuso la primer teoría que explica exitosamente la naturaleza de las interacciones nucleares, afirmando que dicha naturaleza de la interacción nuclear se debe a la existencia de una partícula la cual es intercambiada entre distintos nucleones en el átomo y cuya masa debe tener un valor de masa entre la masa del electrón y la del protón. A dicha partícula se denominó *mesón de Yukawa* [3].

En 1932, Anderson juntos a sus colaboradores descubren el *muón*, partícula que en principio se consideró con propiedades muy similares al mesón de Yukawa, posteriormente se demostró que dicha partícula no es portadora de la interacción nuclear pero sí interviene en las interacciones electromagnética y débil por ser un leptón. Las propiedades del muón son tener

carga eléctrica negativa, ser una partícula inestable y tener vida media de  $2.2 \times 10^{-8}$  s.

En 1947 se descubrió el *pión* el cual según la *teoría de Yukawa* era un portador de la interacción fuerte (nuclear en ese entonces), la cual es responsable de la cohesión al interior de los núcleos atómicos [11, 19].

Posteriormente se encontró que no hay un sólo pión sino una familia de partículas que son  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  y  $\pi^0$ , es decir, que se presenta el pión con los tres tipos de carga: negativa, neutra y positiva. Las partículas  $\pi^\pm$  tienen una masa de  $139.6 \text{ MeV}/c^2$  y la masa del  $\pi^0$  vale  $135.0 \text{ MeV}/c^2$ , lo cual encaja con la afirmación de Yukawa que asevera que la masa del mesón debe tener un valor entre la masa del electrón y la masa del protón. El tiempo de vida media para los  $\pi^\pm$  es de  $2.6 \times 10^{-8}$  s, decayendo principalmente en un muón (antimuón) y un neutrino, mediante la interacción débil. El tiempo de vida media del  $\pi^0$  tiene una vida media  $8.4 \times 10^{-17}$  s y decae en dos fotones en virtud de la interacción electromagnética [20].

Ésto último, nos refiere que al ser los piones partículas inestables cuyos decaimientos se producen por las interacciones electromagnética o débil únicamente, los piones no son portadores de la interacción fuerte, es decir, no son responsables de la cohesión interna de los núcleos atómicos.

Aunque esta teoría de Yukawa aporta muchos datos y procesos correctamente descritos, se dejó de lado, debido a sus limitaciones, los cuales se incluyeron en la formulación de la Cromodinámica Cuántica [6, 20], que es la teoría que describe la interacción fuerte, donde los piones ya no se consideran como portadores de dicha interacción sino los gluones.

### 2.3. Simetrías

Para entender lo que representa una simetría es importante señalar que el lenguaje matemático de la simetría es el formalismo de la *Teoría de Grupos* [28–35].

Específicamente, asociamos la simetría con la invariancia de un objeto matemático, como funciones, puntos o ecuaciones bajo transformaciones de un grupo en particular, como se ve en el siguiente ejemplo [29–35].

**Ejemplo 2.3.1** *Sea una esfera que sufre una rotación sobre cualquiera de sus ejes, en este caso elegimos uno en particular sobre el que se hace la rotación, y al terminar la rotación la esfera preserva su forma, por lo cual es simétrica ante una rotación.*

De ahora en adelante, diremos en física que la simetría es el criterio de invariancia de un sistema físico ante ciertas transformaciones de alguna de sus propiedades en particular [5, 34].

En cuanto a los sistemas físicos puntuales cuyas transformaciones preservan la geometría del sistema, como están descritas por grupos discretos, podemos decir que estos sistemas tienen una simetría discreta [24, 25].

Por otro lado, hay otros sistemas físicos cuyas transformaciones preservan la forma de sus expresiones matemáticas, como es el caso de las rotaciones, pueden ser descritos en términos de operadores unitarios de grupos continuos o de Lie, los cuales tienen un parámetro libre, se dice que estos sistemas tienen una simetría continua [34, 35].

A partir de ahora, será de interés en la física de partículas elementales, la invariancia de las funciones de ondas de las partículas compuestas ante el intercambio de partículas constituyentes [6].

En el resto de trabajo se explotará el concepto de simetría en particular las simetrías asociadas al Modelo de Quarks, el Modelo Estándar, la Cromodinámica Cuántica, la Teoría de Perturbaciones Quirales y la Expansión  $1/N_c$ , así como las simetrías del formalismo que combina la Teoría de Perturbaciones Quirales y la Expansión perturbativa sobre el parámetro  $1/N_c$  las cuales serán de gran ayuda en el estudio del factor de forma magnético.

# Capítulo 3

## Sobre los fundamentos básicos del estudio de los Factores de Forma en Partículas Elementales

### 3.1. Introducción

En este capítulo se hará un estudio breve y conciso acerca del Modelo Estándar de la Física de Partículas, desde sus orígenes para poder entender las simetrías que lo fundamentan y cómo evolucionó, de tal manera que permita luego hablar sobre que son los quarks, los avances de la descripción de las interacciones fundamentales y las teorías de unificación que han surgido [1–6, 11]. También se discutirán algunos detalles más avanzados de dichas interacciones y de los campos que intervienen, donde adquiere importancia la comprensión de la ecuación de Dirac, sus soluciones, interacciones y los covariantes bilineales, en especial la matriz  $\gamma_5$  que es importante para que en este capítulo se realice el desarrollo conceptual de la simetría quiral, así como de algunos aspectos de la Cromodinámica Cuántica y sus técnicas de trabajo a bajas energías a través de expansiones perturbativas como la  $1/N_c$  y la Teoría de Perturbaciones Quirales, que son la base de un formalismo combinado.

## 3.2. El Modelo Primitivo de Quarks

Los descubrimientos sobre las partículas y las antipartículas, así como la formulación de la primera teoría de interacción nuclear por Yukawa, condujeron a la formulación del modelo de quarks [19, 20].

### 3.2.1. Inicios del modelo y los mesones

El modelo de quarks, propuesto en 1964, fue desarrollado para explicar la estructura interna de los hadrones, donde un hadrón se define de la siguiente manera:

**Definición 3.2.1 (Hadrón)** *Es una partícula compuesta de quarks los cuales están unidos debido a la interacción fuerte, sin estar aislados, sino rodeados por un mar de quarks*

El tamaño de un hadrón es del orden de  $10^{-15}$  m (1 fm) [3, 5].

En este modelo, Gell-Mann agrupó los mesones entonces conocidos y que tenían las características predichas por Yukawa, sobresaliendo el hecho de que son partículas con espín entero, en un *multiplete*, el cual se muestra en la figura (3.1).

En dicha figura se observan los mesones pseudoescalares que fueron agrupados en dicho multiplete por Gell-Mann, debido a que tienen espín  $S = 0$ , donde entre los multipletes se pueden hacer líneas en tres direcciones diferentes. Dichas direcciones son la horizontal a la derecha que representa el isoespín, la diagonal a la derecha que representa v-espín y diagonal a la izquierda u-espín, lo cual también es aplicable para el octete de mesones de espín 1, el octete de bariones de espín  $\frac{1}{2}$  y el decuplete de bariones de espín  $\frac{3}{2}$ .

Al hacer la agrupación de este multiplete se tenía en consideración la teoría de Gell-Mann. En la década de los 60 's se descubrieron los primeros 3 quarks, a los cuales se les denominan "up", "down" y "strange".

Podemos apreciar que las partículas que forman los multipletes de bariones y el octete de me-

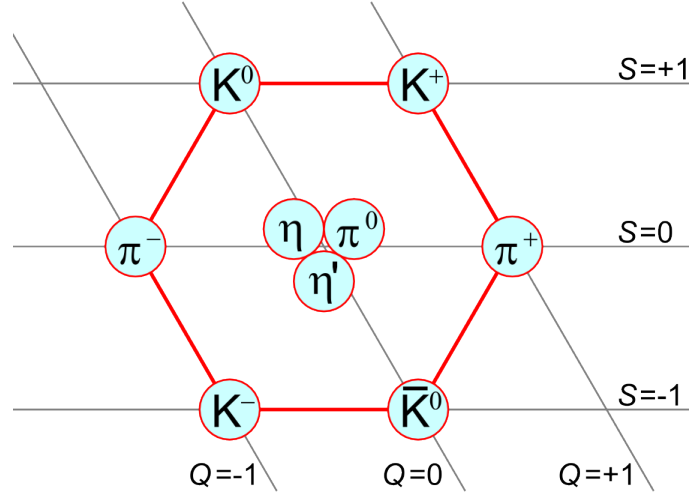


Figura 3.1: El nonete de mesones pseudoescalares.

sones pseudoescalares, que se colocan en diagramas esquemáticos donde tienen dos ejes, en el eje vertical aparece la *hipercarga* denotada por  $Y$  y en el eje horizontal el valor del *tercer generador de isoespín*, relacionados a través de la fórmula de Gell-Mann y Nishijima como [5,6]

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}, \quad (3.1)$$

con

$$Y = B + S, \quad (3.2)$$

donde el isoespín posee una simetría  $SU(2)$  con un álgebra  $su(2)$  muy semejante a la del momento angular, la cual se expresa como [11,19]

$$[T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk}T_k \quad \text{donde } i, j, k = 1, 2, 3. \quad (3.3)$$

Se discute un poco sobre si la simetría es exacta, llegando a la conclusión de que ésta es aproximada, porque (3.3) no satisface el hecho de que el Hamiltoniano total conmute con

$T_i$  [5, 22–28].

Por otro lado es importante notar que los mesones son partículas que satisfacen la *estadística de Bose-Einstein*, con valor de espín entero, lo cual implica que un mesón está formado por un quark y un antiquark, tal que éstos no están solos sino que aparecen rodeados de un mar de quarks comúnmente denominados *quarks de valencia*. Por consiguiente dicho nonete se descompone de la siguiente manera [6, 11, 19].

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}.$$

### 3.2.2. Los multipletes de bariones

Por otro lado, trabajaremos con los multipletes de bariones más usuales, que son el octete, cuyos bariones tienen espín  $S = \frac{1}{2}$  y el decuplete de espín  $S = \frac{3}{2}$ .

Ahora, nos concentraremos en los multipletes de bariones, notando que éstos al ser fermiones obedecen la *estadística de Fermi-Dirac* [36–40].

A propósito de los fermiones y bosones, enunciaremos el siguiente postulado donde se describe lo que sucede con sistemas de muchas partículas, respecto a una simetría la cual es discreta, en este caso es la *operación de intercambio de partículas*, de la cual se mostró un ejemplo en el capítulo anterior.

Dicho postulado establece que [22–28]

**Postulado 3.2.1** 1.- *En sistemas de  $N$  partículas idénticas con valor de momento angular intrínseco (espín) semi-entero  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots)$ , dichas partículas son descritas por funciones de onda antisimétricas ante la operación de intercambio de partículas.*

2.- *En sistemas de  $N$  partículas idénticas con valor de momento angular intrínseco (espín) entero  $(0, 1, 2, \dots)$ , dichas partículas son descritas por funciones de onda*



*simétricas ante la operación de intercambio de partículas.*

Del primer punto del postulado anterior, podemos inferir que existe un criterio que habla de la imposibilidad que dos fermiones estén simultáneamente en el mismo estado. A este principio se le denomina *Principio de Exclusión de Pauli*, el cual está formulado de la siguiente manera [22–28].

**Postulado 3.2.2 (Principio de Exclusión de Pauli.)** *Dos fermiones idénticos no pueden ocupar el mismo estado.*

Así dicho principio se puede extender sin problemas a sistemas de  $N$  partículas .

Con estos postulados, no sólo prevenimos que los fermiones satisfagan la *estadística de Fermi-Dirac*, sino también que satisfacen el *Principio de Exclusión de Pauli*, de tal manera que podemos tener multipletes de bariones.

Los bariones ordinarios están compuestos de los quarks  $u$ ,  $d$ , y  $s$ . Los tres sabores implican una simetría aproximada  $SU(3)$ , la cual requiere que los bariones hechos de esos tres quarks pertenezcan a los multipletes del lado derecho de

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10}_S \oplus \mathbf{8}_M \oplus \mathbf{8}_M \oplus \mathbf{1}_A.$$

En la figura (3.2) se puede apreciar los dos multipletes más conocidos de bariones, el octete y el decuplete, los cuales como ya se ha citado agrupan partículas de espín  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{3}{2}$  respectivamente.

La evolución del modelo primitivo de quarks hacia el modelo estándar se dio cuando se formuló la Teoría de Unificación Electro débil, donde se postuló que a una cierta escala las interacciones electromagnética y débil son manifestaciones de una interacción unificada, siendo a su vez estas dos interacciones fundamentales. Ésto condujo al descubrimiento del quark charm.

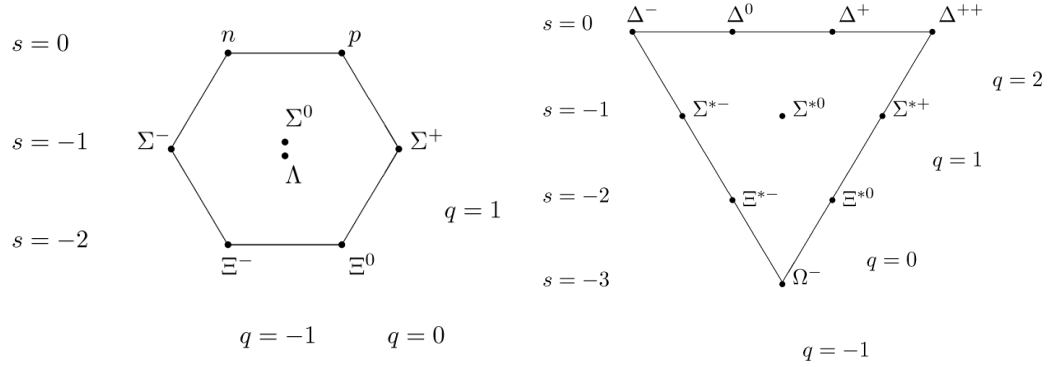


Figura 3.2: Los multipletes de bariones.

Espín y sabor pueden ser englobados en una simetría aproximada espín-sabor  $SU(2N_f)$  [5,11], donde  $N_f$  es el número de sabores de quarks ligeros. Para  $N_f = 3$ ,

$$SU(2) \otimes SU(3) \subset SU(6).$$

En otras palabras, para los bariones ordinarios, espín y sabor pueden combinarse en una simetría aproximada espín-sabor  $SU(6)$ . Los bariones pertenecen a las representaciones

$$\mathbf{6} \otimes \mathbf{6} \otimes \mathbf{6} = \mathbf{54}_S \oplus \mathbf{70}_M \oplus \mathbf{70}_M \oplus \mathbf{20}_A.$$

Esto se debe a que en dicha simetría aparecen estados excitados de dichos multipletes, mejor conocidos como *resonancias*.

Por otro lado, al trabajar las funciones de onda de los bariones bajo la simetría  $SU(6)$ , se llegaba al hecho de que se violaba el *Principio de Exclusión de Pauli*, lo cual se resolvió introduciendo el número cuántico de color. Éste está asociado a la parte antisimétrica de las funciones de onda de los bariones, para a su vez incentivar en su tiempo el desarrollo de la física hacia la comprensión de las interacciones fundamentales de la naturaleza, de las cuales se hablará a continuación donde será de particular interés el comprender un poco la

interacción fuerte que es descrita por la Cromodinámica Cuántica.

### 3.2.3. Interacciones fundamentales y teorías de unificación

Para referirnos a nuestro tema de tesis, es importante estudiar y profundizar brevemente sobre las interacciones fundamentales de la naturaleza: la gravitacional, electromagnética, fuerte y débil.

#### La interacción gravitacional

La interacción gravitacional es la más débil de las cuatro interacciones fundamentales. Es descrita de manera completamente satisfactoria por la Teoría de la Relatividad General de Einstein. Es muy importante considerarla al efectuar investigaciones en Cosmología [20].

Del éxito de la Teoría Cuántica de Campos, se abre la posibilidad de cuantizar la gravedad, aunque los esfuerzos teóricos en dicha cuantización son realmente infructuosos, pues no tienen predicciones que puedan comprobarse a través de observaciones y/o experimentos [20].

#### La interacción electromagnética

La interacción electromagnética escala como  $1/r$  y es de largo alcance, por lo cual, a medida que se incrementa la distancia, los efectos del potencial van disminuyendo y viceversa [7, 41–48].

Esta interacción es la responsable de cohesionar a los electrones, neutrones y protones, para formar átomos, éstos a su vez, para formar moléculas y en el caso del estado sólido, a las moléculas para formar cristales. El portador de la interacción es el fotón [38, 41].

La teoría de campo que corresponde a esta interacción es la Electrodinámica Cuántica (QED), formulada por Feynman, siendo una teoría de norma abeliana [5, 49, 50].

Por otro lado, debemos reconocer que dicha interacción es de nuestro interés porque estudiamos fenómenos donde los bariones poseen una estructura la cual asociamos al predominio de la interacción electromagnética. Para el estudio de dichos fenómenos se emplea una serie perturbativa en potencias de  $\alpha$ , que es la constante de estructura fina [5, 49, 50].

### La interacción débil

La interacción débil es efectiva a muy corto alcance, en este caso a un orden de fm, la cual es responsable de los procesos de desintegración de los núcleos atómicos, debido a que genera inestabilidad en los mismos [3, 11].

Dicha interacción gobierna la física de los procesos de desintegración radiactiva, los neutrinos y las supernovas. Los portadores de la interacción son los bosones de norma  $W^+$ ,  $W^-$  y  $Z^0$ , los cuales tienen espín 1 [3, 5].

La interacción débil sólo es más fuerte que la interacción gravitacional, porque sus portadores son muy pesados [3, 11].

### La interacción fuerte

Dicha interacción se siente a muy corta distancia, alrededor de 1 fm, por lo que en la vida cotidiana es despreciable [3–5].

Los portadores de dicha interacción son los gluones, los cuales no tienen carga eléctrica ni masa, pero sí carga de color, existiendo 8 tipos diferentes, los cuales tienen combinaciones de color-anticolor [3, 5].

La teoría de campo que describe la interacción fuerte se llama Cromodinámica Cuántica, la cual es invariante bajo transformaciones del álgebra de  $SU(3)_c$ , no Abeliانا y renormalizable, lo cual le da un poder predictivo muy importante [4, 5].

### Teorías de unificación

En el siglo XIX, Maxwell logró unificar las teorías sobre electricidad y magnetismo, dando paso al electromagnetismo, mostrando que los fenómenos eléctricos y magnéticos están relacionados [7, 41].

En 1974 Weinberg, Glashow y Salam ganaron el nobel de física por la Teoría de Unificación Electro débil que consiste en que a energías muy altas se manifiestan de manera simultánea en las partículas tanto la interacción débil como la electromagnética, lo cual nos dice que ambas son manifestaciones de una interacción débil unificadora. Dicha teoría predice las masas de los bosones  $W$  y  $Z^0$  de  $82 \text{ GeV}/c^2$  y  $93 \text{ GeV}/c^2$  respectivamente [3, 6].

### 3.2.4. Un primer acercamiento al Modelo Estándar

El modelo estándar de partículas elementales viene esquematizado en la figura (3.3).

Las tres generacioness de la  
Materia (Fermiones)

	I	II	III	
masa →	3 MeV	1.24 GeV	172.5 GeV	0
carga →	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
spin →	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
nombre →	<b>u</b> up	<b>c</b> charm	<b>t</b> top	<b><math>\gamma</math></b> photon
	6 MeV	95 MeV	4.2 GeV	0
	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
Quarks	<b>d</b> down	<b>s</b> strange	<b>b</b> bottom	<b>g</b> gluon
	<2 eV	<0.19 MeV	<18.2 MeV	90.2 GeV
	0	0	0	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	<b><math>\nu_e</math></b> electron neutrino	<b><math>\nu_\mu</math></b> muon neutrino	<b><math>\nu_\tau</math></b> tau neutrino	<b><math>Z^0</math></b> fuerza débil
	0.511 MeV	106 MeV	1.78 GeV	80.4 GeV
	-1	-1	-1	$\pm 1$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
Leptones	<b>e</b> electron	<b><math>\mu</math></b> muon	<b><math>\tau</math></b> tau	<b><math>W^\pm</math></b> fuerza débil
				Bosons (Fuerzas)

Figura 3.3: Modelo Estándar de la Física de Partículas Elementales.

Notemos que contiene 6 quarks los cuales son “up” ( $u$ ), “down” ( $d$ ), “charm” ( $c$ ), “strange” ( $s$ ), “top” ( $t$ ) y “bottom” ( $b$ ), agrupados en 3 generaciones: ( $u,d$ ), ( $c,s$ ) y ( $t,b$ ) [3, 11].

Además a cada generación de quarks le corresponde un leptón, donde el leptón de la primera generación es el electrón  $e$ , el leptón de la segunda generación es el muón  $\mu$  y el leptón de la tercer generación es el  $\tau$ . Por otro lado, a cada leptón le corresponde un neutrino, en consecuencia al electrón le corresponde el  $\nu_e$ , al muón le corresponde  $\nu_\mu$  y al  $\tau$  le corresponde el  $\nu_\tau$  [4, 6, 19].

Ahora, mencionamos que dentro del modelo estándar aparecen incluidos los portadores de las interacciones fuerte, débil y electromagnética, dados por los gluones  $g$ , los bosones  $W^\pm$  y  $Z^0$  y el fotón  $\gamma$  respectivamente [3, 11].

Por otro lado, la figura (3.3) no menciona la existencia del bosón de Higgs, el cual a diferencia de los bosones de Nambu-Goldstone, es un bosón de norma y no un bosón de materia, anticipando que los bosones de Goldstone son partículas sin masa, así este concepto es clave para el estudio de la simetría quiral. Además del bosón de Higgs, aparece una constante de acoplamiento cuántica [11, 50].

No obstante, vale la pena recordar que en el modelo estándar aparecen también 3 constantes de acoplamiento, 3 ángulos de mezcla, una fase compleja y el ángulo de vacío de la Cromodinámica Cuántica [3, 4, 11].

### 3.3. La simetría quiral

La simetría quiral se refiere a que una partícula puede tener un comportamiento simétrico en un sistema de referencia de mano derecha o de mano izquierda, de tal manera que es invariante ante una transformación de paridad de un campo fermiónico de Dirac. Ésto puede verse a partir del teorema de Noether, dado por [5].

**Teorema 3.3.1 (Teorema de Noether)** *Si un lagrangiano tiene una simetría continua, entonces existe una corriente asociada a dicha simetría que es conservada cuando las ecua-*

*ciones de movimiento son satisfechas, esto es [7, 50]*

$$\frac{dQ(t)}{dt} = 0 \quad \text{donde} \quad Q(t) = \int d^3x J_0(x). \quad (3.4)$$

Esto lo hacemos a partir del estudio del álgebra de las corrientes [5], para lo cual proponemos que el Hamiltoniano del sistema se exprese como [13]

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \lambda \mathcal{H}', \quad (3.5)$$

donde  $\mathcal{H}_0$  es el Hamiltoniano de la parte invariante ante una transformación de paridad de un campo fermiónico de Dirac,  $\lambda$  es el parámetro perturbativo, donde  $\mathcal{H}'$  es la perturbación que no es invariante ante una transformación de paridad de un campo fermiónico de Dirac.

En virtud del teorema de Noether dado por (3.4) , podemos asociar la conservación de  $\mathcal{H}_0$  con la existencia la corriente conservada  $J_a^\mu(x)$ , esto es

$$Q_a(x_0) = \int J_a^0(x) d^3x. \quad (3.6)$$

Teniendo de la ecuación (3.5) dos casos: cuando  $\lambda = 0$ , se encuentra que las cargas  $Q_a(x_0)$  son independientes del tiempo, en consecuencia se conservan [13] y cuando  $\lambda \neq 0$  no hay conservación de carga.

Es importante notar que la teoría más importante sobre las simetrías aproximadas fue formulada por Gell-Mann. En dicha teoría los operadores forman una representación del grupo de simetría considerando dos corrientes de la forma (3.6) [13]

$$[Q_a(x_0), Q_b(x_0)] = if_{abc} Q_c(x_0). \quad (3.7)$$

Existen dos realizaciones de la simetría del Hamiltoniano  $\mathcal{H}_0$ , las cuales son [5, 13]

- La realización de Wigner-Weyl,

$$Q_a(x_0)|0\rangle = 0 \tag{3.8}$$

- La realización de Nambu-Goldstone,

$$Q_a(x_0)|0\rangle \neq 0. \tag{3.9}$$

En la realización de Wigner-Weyl dada por (3.8) la simetría se muestra directamente en el espectro de  $\mathcal{H}_0$  como una degeneración de los multipletes, si  $\lambda = 0$  [13].

Una consecuencia de la realización de Nambu-Goldstone dada por (3.9), es la existencia de bosones sin masa si  $\lambda = 0$ , por lo que no mostrará degeneración alguna la estructura de multipletes. A este tipo de realización se le denomina *ruptura espontánea de la simetría*, lo cual nos dice que los operadores de carga  $Q_a(x_\mu)$  no son renormalizables [49, 50].

Gell-Mann hizo un postulado adicional el cual establece que los generadores de simetrías hadrónicas  $Q_a(x_0)$  coinciden con las cargas, las cuales están relacionadas tanto con las corrientes electromagnéticas como con las débiles. Además las corrientes débiles cumplen las relaciones de conmutación dadas por [13]

$$\delta(x_0 - y_0)[J_a^0(x), J_b^0(y)] = i\delta^4(x - y)f_{abc}J_c^0(x), \tag{3.10}$$

donde  $J_a^0(x)$  son las corrientes débiles. Lo que nos dice que las corrientes débiles nos serán de mucha utilidad para obtener información sobre las simetrías y las rupturas de las simetrías de las interacciones fuertes, lo cual dio origen al *álgebra de corrientes* en la física de partículas



elementales.

A partir del decaimiento  $\beta$  se postuló la existencia de las corrientes vectoriales y axialvectoriales, debida a Feynman, Gell-Mann, Marshak y Sudarshan [6, 11, 13].

También Gell-Mann postuló para las corrientes vectoriales y axialvectoriales, satisfacen relaciones similares a (3.8) que conforman el álgebra dada por [4, 13]

$$\begin{aligned}
 \delta(x_0 - y_0)[V_a^0(x), V_b^0(y)] &= i\delta^4(x - y)f_{abc}V_c^0(x), \\
 \delta(x_0 - y_0)[V_a^0(x), A_b^0(y)] &= i\delta^4(x - y)f_{abc}A_c^0(x), \\
 \delta(x_0 - y_0)[A_a^0(x), A_b^0(y)] &= i\delta^4(x - y)f_{abc}A_c^0(x).
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

Ahora, a partir de las corrientes vectoriales y axialvectoriales que aparecen en (3.11) podemos definir los nuevos operadores de carga, [5]

$$\begin{aligned}
 F_a(x) &= \int d^3x V_a^0(x), \\
 F_a^5(x) &= \int d^3x A_a^0(x).
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

Estos operadores dados por (3.12) generan el álgebra de Lie de  $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$  dada por

$$\begin{aligned}
 [F_a(x_0), F_b(x_0)] &= if_{abc}F_c(x_0), \\
 [F_a(x_0), F_b^5(x_0)] &= if_{abc}F_c^5(x_0), \\
 [F_a^5(x_0), F_b^5(x_0)] &= if_{abc}F_c(x_0).
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

Para entender mejor la estructura de esta álgebra de  $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$  dada por (3.13), podemos definir los operadores  $F_a^\pm(x_0)$  como

$$F_a^\pm(x_0) = \frac{1}{2}[F_a(x_a) \pm F_a^5(x_0)], \quad (3.14)$$

reemplazando (3.14) en las relaciones de conmutación (3.13) obtenemos las relaciones

$$\begin{aligned} [F_a^\pm(x_0), F_b^\pm(x_0)] &= if_{abc}F_c^\pm(x_0), \\ [F_a^+(x_0), F_b^-(x_0)] &= 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

lo cual demuestra que los generadores  $F_a(x_0)$  y  $F_a^5(x_0)$  generan el producto directo  $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ , hablándose de **simetría quiral**.

Como la simetría  $SU(3)$  exige que todas las partículas que conforman un mismo multiplete tengan la misma masa, en cambio la simetría  $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$  no exigen multipletes de partículas, pero poseen ocho mesones pseudoescalares, en virtud del teorema de Goldstone, es decir, tres piones ( $\pi^0$ ,  $\pi^+$  y  $\pi^-$ ), cuatro kaones ( $K^0$ ,  $\bar{K}^0$ ,  $K^+$  y  $K^-$ ) y  $\eta$ , los cuales corresponde al multiplete de mesones pseudoescalares.

Ahora, supongamos que  $\mathcal{H}$  sea quiralmente invariante, lo que significa que  $F_a^\pm(x_0)$  que aparece en (3.15) satisface la relación

$$[F_a^\pm(x_0), \mathcal{H}] = 0. \quad (3.16)$$

Adicionalmente, podemos suponer que el operador de carga  $F_a(x_0)$  deja invariante el vacío, esto es

$$F_a(x)|0\rangle = 0. \quad (3.17)$$

Es pertinente recordar que no podemos hacer la misma suposición para las cargas axiales, ya que en el espectro de los hadrones no se encuentran en el mismo multiplete partículas con

diferente paridad. En lugar de esta suposición, consideremos que el vacío no es quiralmente invariante, esto es [5, 13]

$$F_a^0(x)|0\rangle \neq 0. \quad (3.18)$$

De aquí dicha simetría pide que los mesones pseudoescalares tengan masa igual a cero. Este hecho teórico se denomina *teorema de Goldstone*. En consecuencia, la simetría quiral no es exacta y es conocida en la literatura por el producto directo dado por [5, 6]

$$SU(3)_L \otimes SU(3)_R \otimes U(1)_V. \quad (3.19)$$

### 3.3.1. Un ejemplo clásico de la simetría quiral: el tratamiento del modelo lineal $\sigma$

Considere el siguiente lagrangiano dado por [5, 49]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}[(\partial_\mu \pi)^2 + (\partial_\mu \sigma)^2] + \bar{N}i\gamma^\mu \partial_\mu N + g\bar{N}(\sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi})N + \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2) \\ & - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2, \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde

$$N = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

el cual es un vector columna para un campo de isoespín 1/2 del nucleón, así como los vectores  $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$  y  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  representan los campos de isoespín de un pión y el escalar

de isoespín 0.

Por otro lado, es conveniente expresar los campos escalares de de isoespín 0 como [5]

$$\Sigma = \sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}. \quad (3.22)$$

A su vez se identifica el potencial

$$V(\sigma^2 + \pi^2) = -\frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2) + \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2. \quad (3.23)$$

Por ahora, ignoraremos la presencia del campo de isoespín 1/2 del nucleón (3.21), tenemos que la ecuación (3.20) se reduce a

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}[(\partial_\mu \pi)^2 + (\partial_\mu \sigma)^2] + \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2) \\ & - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2, \end{aligned} \quad (3.24)$$

el cual tiene las simetrías  $U(1)$  y  $O(2)$ . Al minimizar el potencial respecto de los campos  $\sigma$  y  $\pi$ , da como resultado cuando  $\mu > 0$  que

$$\sigma^2 + \pi^2 = v^2. \quad (3.25)$$

Por otro lado, si definimos que

$$\sigma' \equiv \sigma - v, \quad (3.26)$$

donde

$$v \equiv \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}, \quad (3.27)$$

tenemos que al sustituir las ecuaciones (3.26) y (3.27) en la ecuación (3.24) se tiene el Lagrangiano

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}[(\partial_\lambda \sigma')^2 + (\partial_\lambda \pi)^2] - \mu^2 \sigma' - \lambda v \sigma' (\sigma'^2 + \pi^2) \\ & - \frac{\lambda}{4} (\sigma'^2 + \pi^2)^2. \end{aligned} \quad (3.28)$$

A partir de este lagrangiano, se encuentra que la partícula  $\pi$  no tiene masa ni isoespín, cuando tiene una masa pequeña por lo cual se le considera un *bosón de Nambu-Goldstone*, debido a que satisface el *teorema de Goldstone*

El teorema de Goldstone se deduce considerando una corriente conservada, la cual en virtud del teorema de Noether implica que la carga eléctrica es una constante de movimiento. Ésto permite encontrar la carga a través de la integración de  $J_0(\vec{x}, t)$ , pero, se encuentra que la carga no está definida en el vacío, por la convergencia del operador de campo del integrando, en consecuencia, se introduce un elemento de matriz que no existe.

Enseguida se expresa  $\langle 0|Q^2|0 \rangle$  considerando la invariancia traslacional de los estados de vacío, calculando el elemento de matriz del conmutador de la conservación de la corriente con el operador de campo  $\phi(x)$  evaluado en  $x = 0$ , donde en  $x_0$  de  $e^A f(x)e^{-a}$  se pueden excluir los términos de orden superior porque no son despreciables para el valor de  $\phi(x_0)$ . Finalmente, se integra sobre el espacio el conmutador  $[\partial^\mu J_\mu(\vec{x}, t), \phi(0)]$ , para luego reescribir en términos de  $\phi(0)$  y  $J_0$  dicho conmutador [5, 49].

Este procedimiento se repite para el lagrangiano de (3.24), estableciendo su corriente conservada a través de sucesivas conmutaciones, obteniendo para el pión un resultado semejante

al del conmutador  $[\partial^\mu J_\mu(\vec{x}, t), \phi(0)]$ , se encuentra que el pión es una partícula sin masa, lo cual es una aproximación razonable, esto es  $m_\pi = 0$  y  $m_\sigma = \sqrt{2}\mu$ .

Al considerar (3.21) tomando en cuenta la ecuación (3.20), tenemos que se puede descomponer la corriente en dos partes, la axial y la vectorial. Se encuentra que el lagrangiano es invariante bajo transformaciones  $SU(2)_R$  y  $SU(2)_L$  axiales simultáneamente. Es decir, para el modelo lineal sigma la simetría es de manera análoga a (3.19)

$$SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1) \tag{3.29}$$

Al tomar en cuenta las ecuaciones (3.26) y (3.27) la simetría del lagrangiano (3.20) se rompe porque se llega a  $m_\pi = 0$  y  $m_\sigma = \sqrt{2}\mu$ , que son los mismos valores de masa que para el tratamiento a través de la minimización del potencial y aplicación del *teorema de Goldstone* que se efectuaron para el lagrangiano de (3.24) debido a que  $Q^a|0\rangle = 0$  para  $a = 1, 2, 3$ .

Por otro lado, el término de acoplamiento de Yukawa al transformarse bajo (3.26) y (3.27) introduce el término  $gv\bar{N}N$ , por tanto se tiene que la masa del isodoublet del Nucleón es  $m_N = gv$ .

Este resultado diferirá del que se obtenga cuando se considere que  $\mu < 0$ , lo que permitirá mostrar que en dicho caso la simetría quiral  $SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)$  se conserva.

## 3.4. Cromodinámica Cuántica: Formalismo y métodos perturbativos

### 3.4.1. Acerca de la QCD

La QCD es una teoría de norma no abeliana, la cual es la parte del modelo estándar y se encarga de estudiar la interacción entre quarks y gluones bajo una simetría  $SU(3)_c$ .

Los hadrones son combinaciones de 3 quarks, que a sus vez tienen 3 colores diferentes es decir,  $N_c = 3$  tal que  $q^\alpha$ , con el índice  $\alpha = 1, 2, 3$  (rojo, verde, azul).

Esto implica que tanto bariones como mesones son singletes de color.

Los bariones se componen de 3 quarks y los mesones de un quark y un antiquark

$$B = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} |q_\alpha\rangle |q_\beta\rangle |q_\gamma\rangle \quad y \quad M = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta^{\alpha\beta} |q_\alpha\rangle |\bar{q}_\beta\rangle . \quad (3.30)$$

Ahora, consideramos el Lagrangiano de la QCD, el cual está dado por [5, 13]

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^\alpha G^{\mu\nu\alpha} + \bar{\psi}(x) (\not{v}\gamma^\mu D_\mu - \hat{m}) \psi(x), \quad (3.31)$$

donde el espinor  $\bar{\psi}(x)$  es el conjugado del espinor  $\psi(x)$  que aparece en (3.31) dado por [51, 52]

$$\psi(x) = (u(x), \quad d(x), \quad s(x), \quad c(x), \quad t(x), \quad b(x)) \quad (3.32)$$

que es el campo de quarks con 6 sabores y 3 colores [20, 52].

Ahora, expresamos la derivada covariante  $D_\mu$  y el *tensor de campo gluónico*  $G_{\mu\nu}^\alpha$  que aparecen en (3.31) en términos de los campos gluónicos de Yang-Mills  $A_\mu^\alpha$  como

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^\alpha &= \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha + g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \\ D_\mu &= \partial_\mu - ig_s T^a A_\mu^a, \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde  $g_s$  es la *constante de acoplamiento de la interacción fuerte* y  $f^{abc}$  es una constante de estructura del álgebra  $su(3)_c$  cualquiera y el término  $\hat{m}$  que aparece en (3.31) está dado por

$$\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d, m_c, m_s, m_t, m_b) \quad (3.34)$$

contiene en sus componentes diagonales las masas de los quarks.

Existen diferencias entre las teorías de norma abelianas y las no abelianas. En las teorías abelianas las partículas portadoras sólo propagan la interacción, en cambio, en las teorías no abelianas las partículas portadoras no sólo propagan sino que participan en la interacción.

Del hecho de que la QCD es una teoría no abeliana, se tiene como consecuencia que los gluones que son las partículas portadoras de la interacción fuerte tienen carga de color y al participar de la misma pueden acoplarse entre ellos [52].

Por ser una teoría de norma no abeliana cuyo lagrangiano está escrito en términos de los campos gluónicos de Yang-Mills de acuerdo a (3.31) y (3.33), podemos afirmar que la QCD es una teoría de Yang-Mills, lo cual nos dice que es renormalizable, por lo cual a la hora de trabajar con tratamientos perturbativos, se pueden absorber los infinitos, para lograr resultados finitos, lo que explica su poder predictivo.

Es un hecho interesante que la constante de acoplamiento  $g_s$  que aparece en (3.33), es pequeña a altas energías y la QCD admite un tratamiento perturbativo, lo que nos dice que a energías grandes los quarks están muy próximos los entre sí, por lo que se comportan como partículas libres, a dicho fenómeno se le conoce como *libertad asintótica*. A bajas energías dicha constante es muy grande, por lo cual dicho método no es aplicable, de ahí que se implementen otros formalismos que contienen fundamentos de la QCD, los cuales son descritos en términos de otros campos, como la teoría de perturbaciones quirales y la expansión  $1/N_c$ , entre otros.



### 3.4.2. Expansión $1/N_c$ de la QCD

Para el cálculo de las propiedades estáticas de bariones, como masas, constantes de acoplamiento vectoriales y axialvectoriales y momentos magnéticos, la Cromodinámica Cuántica no puede utilizarse en el límite de bajas energías porque no permite un tratamiento perturbativo. En 1974, t' Hooft propuso un método de manera muy semejante a la expansión perturbativa de la Electrodinámica Cuántica cuyo parámetro es la *constante de estructura fina*. Para la expansión  $1/N_c$  de la QCD, el parámetro es  $1/N_c$ .

En dicha expansión se hace  $N_c \rightarrow \infty$ , lo cual permite entender aspectos de la QCD al estudiar una teoría de norma basada en el grupo  $SU(N_c)$ . En el límite  $N_c$  grande, el sector de bariones posee la simetría contraída espín-sabor  $SU(2N_f)$ , donde  $N_f$  es el número de quarks ligeros [53, 54].

Los generadores de  $SU(6)_{SF}$  escritos en términos de los  $J^i$ ,  $T^a$  y  $G^{ia}$ , son.

$$\begin{aligned}
 J^i &= q \dagger \left( \frac{\sigma^i}{2} \otimes 1 \right) q, \\
 T^a &= q \dagger \left( 1 \otimes \frac{\lambda^a}{2} \right) q, \\
 G^{ia} &= q \dagger \left( \frac{\sigma^i}{2} \otimes \frac{\lambda^a}{2} \right) q,
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

los cuales satisfacen el álgebra

$$\begin{aligned}
 [J^i, J^j] &= \imath \epsilon^{ijk} J^k, \\
 [T^a, T^b] &= \imath f^{abc} T^c, \\
 [J^i, T^a] &= 0, \\
 [J^i, G^{ja}] &= \imath \epsilon^{ijk} G^{ka}, \\
 [T^a, G^{ib}] &= \imath f^{abc} G^{ic}, \\
 [G^{ia}, G^{jb}] &= \frac{\imath}{4} \delta^{ij} f^{abc} T^c + \frac{\imath}{2N_F} \delta^{ab} \epsilon^{ijl} J^k + \frac{\imath}{2} \epsilon^{ijk} d^{abc} G^{kc},
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

tal que  $i, j, k = 1, 2, 3$  y  $a, b, c = 1, \dots, 8$ .

Las correcciones al límite  $N_c$  grande están dadas en términos de operadores suprimidos por  $1/N_c$  con propiedades bien definidas bajo espín-sabor [54]; esto da lugar a la expansión  $1/N_c$  de la QCD. Para  $N_f = 3$  los bariones caen en representaciones del grupo  $SU(6)$ . Para  $N_c = 3$ , ésto corresponde a la representación **56** de  $SU(6)$ .

Ahora, también es importante señalar que cualquier operador de la QCD que se transforme de acuerdo con  $SU(2) \otimes SU(3)$ , se puede expresar en términos de una serie de potencias de  $1/N_c$  como [53]

$$\mathcal{O}_{QCD} = \sum_{n=1}^{N_c} c_{(n)} \frac{1}{N_c^{n-1}} \mathcal{O}^{(n)} \tag{3.37}$$

donde podemos truncar y obtener resultados físicamente admisibles al hacer  $N_c = 3$ , así como hacer predicciones que son muy precisas al aproximar los valores experimentales. En dicha, expansión los coeficientes  $c_{(n)}$  son desconocidos y los operadores  $\mathcal{O}^{(n)}$  se pueden expresar en términos de  $J^i$ ,  $T^a$  y  $G^{ia}$  dados por (3.35) y sus relaciones entre ellos dadas por (3.36).

### Propiedades estáticas de los bariones

En este apartado, describiremos de manera breve y concisa como se definen los operadores que permiten estimar las propiedades estáticas de los bariones a través del formalismo de la expansión  $1/N_c$  las cuales son:

1. Masa de los bariones.

Los bariones de  $J = 1/2$  tienen una función de onda total antisimétrica la cual es el producto de una función de onda simétrica que corresponde a los números cuánticos de espín, sabor, entre otros y una función antisimétrica que corresponde al número cuántico de color, con índices  $iN_c$  [51, 53]

Dicha función se expresa como

$$\frac{1}{\sqrt{N!}} \epsilon_{i_1 i_2 i_3 \dots i_{N_c}} (q_1)^{(i_1)} (q_2)^{(i_2)} (q_3)^{(i_3)} \dots (q_{N_c})^{(i_{N_c})}. \quad (3.38)$$

Ahora, consideramos que tanto el número de quarks como la masa se incrementan conforme crece  $N_c$  ya que

$$\mathcal{M}_{\text{barión}} \sim \mathcal{O}(N_c), \quad (3.39)$$

lo que nos dice que si  $N_c \rightarrow \infty$  la masa del barión dada por (3.39) será infinita, sin embargo, el tamaño del barión es fijo, porque está regido por  $\Lambda_{QCD}$ ,

$$\mathcal{M}_{\text{barión}} \sim N_c \Lambda_{QCD}. \quad (3.40)$$

Es pertinente señalar que  $\Lambda_{QCD}$  es el único parámetro dimensional de la QCD para  $N_c$  grande y establece el límite inferior absoluto de validez de la teoría de perturbaciones,

que es aproximadamente el de una escala hadrónica típica [20].

Definimos el operador de masa como un objeto de espín  $J = 0$ , lo cual nos permite escribir dicha expansión en la forma  $N_c \mathcal{P}(J^2/N_c^2)$ , lo cual se expresa de manera explícita como [20, 21]

$$\mathcal{M} = m_0 N_c 1 + \sum_{n=2,4}^{N_c-1} m_n \frac{1}{N_c^{n-1}} J^n, \quad (3.41)$$

donde los coeficientes  $m_n$  son los parámetros adimensionales de  $\mathcal{O}(N_c)$ . El primer término es que da la misma masa  $\mathcal{O}(N_c)$  a todos los bariones en la representación espín-sabor.

Esta ecuación nos dice que las masas de los bariones de un mismo multiplete son degeneradas [51]. Para ello veamos el siguiente ejemplo

**Ejemplo 3.4.1** *Considere las partículas  $N$ ,  $\Lambda$ ,  $\Sigma$  y  $\Xi$  de octete de bariones y las partículas  $\Delta$ ,  $\Sigma^*$ ,  $\Xi^*$  y  $\Omega$  del decuplete de bariones.*

*Para las partículas  $N$ ,  $\Lambda$ ,  $\Sigma$  y  $\Xi$  de octete de bariones, tenemos de (3.41) que*

$$\begin{aligned} \langle N|M_B|N\rangle &= \langle \Lambda|M_B|\Lambda\rangle = \langle \Sigma|M_B|\Sigma\rangle = \langle \Xi|M_B|\Xi\rangle = \\ &N_c \left[ a_0 + \frac{3}{4} \frac{1}{N_c^2} a_1 + \frac{9}{16} \frac{1}{N_c^4} a_2 + \dots \right], \end{aligned} \quad (3.42)$$

*mientras que para las partículas  $\Delta$ ,  $\Sigma^*$ ,  $\Xi^*$  y  $\Omega$  del decuplete de bariones, tenemos de (3.41) que*

$$\begin{aligned} \langle \Delta|M_B|\Delta\rangle &= \langle \Sigma^*|M_B|\Sigma^*\rangle = \langle \Xi^*|M_B|\Xi^*\rangle = \langle \Omega|M_B|\Omega\rangle = \\ &N_c \left[ a_0 + \frac{15}{4} \frac{1}{N_c^2} a_1 + \frac{225}{16} \frac{1}{N_c^4} a_2 + \dots \right], \end{aligned} \quad (3.43)$$

donde los coeficientes  $a_i$ , se determinan con la información experimental disponible.

Y en el caso de ruptura de simetría de sabor asociada al grupo  $SU(3)_f$  debida a  $m_s$ , tenemos que el operador de masa de la expansión  $1/N_c$  dado por (3.41), tiene la forma

$$\frac{\mathcal{M}}{N_c} = \mathcal{P}\left(\frac{G^{ia}}{N_c}, \frac{J^i}{N_c}, \frac{T^a}{N_c}\right). \quad (3.44)$$

Y para las representaciones de sabor asociadas al grupo  $SU(3)_f$ , tenemos que (3.44) tiene la forma

$$M_B = M^{\mathbf{1}} + M^{\mathbf{8}} + M^{\mathbf{27}} + M^{\mathbf{64}}, \quad (3.45)$$

donde el singlete, el octete, el **27** y el **64** corresponden a orden cero, uno, dos y tres respectivamente de la ruptura de la simetría de sabor. Podemos expresar cada multiplete que aparece en (3.45) en términos de una expansión de operadores suprimidos por  $N_c$  como [20, 51]

$$M^{\mathbf{1}} = N_c 1 + \frac{1}{N_c} J^2, \quad (3.46)$$

$$M^{\mathbf{8}} = T^8 + \frac{1}{N_c} \{J^i, G^{i8}\} + \frac{1}{N_c^2} \{J^2, T^8\}, \quad (3.47)$$

$$M^{\mathbf{27}} = \frac{1}{N_c} \{T^i, T^8\} + \frac{1}{N_c^2} \{T^8, \{J^2, G^{i8}\}\}, \quad (3.48)$$

$$M^{\mathbf{64}} = \frac{1}{N_c^2} \{T^8, \{J^2, G^{i8}\}\}, \quad (3.49)$$

donde cada operador es multiplicado por un coeficiente desconocido.

2. Acoplamiento axial.

Por otro lado, definamos al operador de *acoplamiento axial de bariones*  $A^{ia}$  como un objeto de espín  $J = 1$  que se transforma como un octete bajo el álgebra de  $SU(3)_f$ . Ahora, podemos expresar dicho operador cuando  $N_c = 3$  como

$$A^{kc} = a_1 G^{kc} + b_2 \frac{1}{N_c} \mathcal{D}_2^{kc} + b_3 \frac{1}{N_c^2} \mathcal{D}_3^{kc} + c_3 \frac{1}{N_c^2} \mathcal{O}_3^{kc}, \quad (3.50)$$

donde los operadores  $\mathcal{D}_2^{kc}$ ,  $\mathcal{D}_3^{kc}$  y  $\mathcal{O}_3^{kc}$  que aparecen en (3.50) están definidos por [20]

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_2^{kc} &= J^k T^c, \\ \mathcal{D}_3^{kc} &= \{J^k, \{J^r, G^{rc}\}\}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

y

$$\mathcal{O}_3^{kc} = \{J^2, G^{kc}\} - \frac{1}{2} \{J^k, \{J^r, G^{rc}\}\}. \quad (3.52)$$

3. Momento magnético

Cuando se describe los momentos magnéticos en el límite  $N_c$  grande, se encuentra que tienen las mismas propiedades cinemáticas de los acoplamientos axialvectoriales, lo cual permite expresar los momentos magnéticos en términos de los operadores que permiten describir los citados acoplamientos. Esto permite definir al operador de momento magnético  $M^{kc}$  como un objeto de espín  $J = 1$  que se transforma como un octete bajo el álgebra de  $SU(3)_f$ . Por semejanza con  $A^{ia}$  dado por (3.50), expresamos  $M^{kc}$  cuando  $N_c = 3$  en términos de (3.51) y (3.52) como

$$M^{kc} = m_1 G^{kc} + m_2 \frac{1}{N_c} \mathcal{D}_2^{kc} + m_3 \frac{1}{N_c^2} \mathcal{D}_3^{kc} + m_4 \frac{1}{N_c^2} \mathcal{O}_3^{kc}. \quad (3.53)$$

El operador  $M^{kc}$  dado por (3.53) se puede descomponer en las componentes isoescalares e isovectoriales  $M^{k3}$  y  $M^{k8}$  respectivamente, en consecuencia, se tiene

$$M^k = M^{kQ} \equiv M^{k3} + \frac{1}{\sqrt{3}}M^{k8}. \quad (3.54)$$

De aquí en adelante, el índice de sabor  $Q$  representará  $Q = 3 + (1/\sqrt{3})8$ , así que cualquier operador de la forma  $X^Q$  se debe entender como  $X^3 + (1/\sqrt{3})X^8$ . Análogamente,  $\bar{Q}$  representará  $\bar{Q} = 3 - (1/\sqrt{3})8$ , así cualquier operador de la forma  $X^{\bar{Q}}$  se debe entender como  $X^3 - (1/\sqrt{3})X^8$  [20, 51].

Calculando los elementos de matriz correspondientes al operador  $M^k$  dado por (3.54) para los estados de  $SU(6)$  se obtienen los momentos magnéticos para los bariones tanto del octete como del decuplete y las transiciones octete-decuplete.

### 3.4.3. Teoría de perturbaciones quirales

Esta teoría permite acercarnos a entender aspectos no perturbativos de la QCD y para ello nos valemos de la simetría quiral  $SU(3)_L \otimes SU(3)_R \otimes U(1)_V$  dada por (3.19) del lagrangiano de QCD dado por (3.31) cuando las masas de los quarks  $u, d$  y  $s$  tienden a 0, es decir, las respectivas componentes de (3.34). En el caso de la ruptura de dicha simetría bajo las transformaciones de paridad, aparece el octete de bosones de Goldstone pseudoescalares. El estudio de las propiedades de los hadrones se hace en términos de una expansión perturbativa en  $\frac{m_q}{\Lambda_\chi}$ .

### 3.4.4. Formalismo combinado en $m_s$ y $1/N_c$

El formalismo que junta tanto la expansión  $\frac{1}{N_c}$  como la Teoría de Perturbaciones Quirales, el cual es más efectivo que el empleo de cualquiera de las dos expansiones por separado, se llama *Teoría de Perturbaciones Quirales para  $N_c$  grande* [51].

Esto conduce a generar una expansión en términos de  $\frac{1}{N_c}$  y  $\frac{m_q}{\Lambda_\chi}$  y considerar el doble límite cuando  $m_q \rightarrow 0$  y  $N_c \rightarrow \infty$ . El lagrangiano en la teoría es [51]

$$\mathcal{L}_{barión} = i\mathcal{D}^0 - \mathcal{M}_{hiperfina} + Tr(\mathcal{A}^k \lambda^c) A^{kc} + \frac{1}{N_c} Tr\left(\mathcal{A}^k \frac{2I}{\sqrt{\sqrt{6}}}\right) A^k, \quad (3.55)$$

con

$$\mathcal{D}^0 = \partial^0 1 + Tr(\mathcal{V}^0 \lambda^c) T^c, \quad (3.56)$$

donde  $c = 1, \dots, 9$ .

Es necesario comprender que es un operador de  $n$ -cuerpos, para ello partimos de la ecuación (3.37), de donde inmediatamente vemos lo siguiente.

- El operador 1 es un operador de cero cuerpos porque

$$N_c^0 = 1. \quad (3.57)$$

- Los operadores de un cuerpo son un conjunto de  $n$  operadores  $q$  y  $n$  operadores  $q^\dagger$  que se pueden escribir como polinomios de  $J^i$ ,  $T^a$  y  $G^{ia}$  de orden  $n$ .
- Los operadores de dos cuerpos se pueden expresarse en el producto de dos operadores de un cuerpo, una anticonmutación de operadores de un cuerpo o una doble conmutación de operadores de un cuerpo.

Esto permite generalizar, sobre conmutaciones y anticonmutaciones de operadores de  $n$  cuerpos dados por (3.37).



**Definición 3.4.1 (Operador de  $n$  cuerpos.)** Sean  $\mathcal{O}^n$  y  $\mathcal{O}^m$  operadores de  $n$  y  $m$  cuerpos respectivamente, satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} [\mathcal{O}^n, \mathcal{O}^m] &\sim \mathcal{O}^{n+m-1}, \\ \{\mathcal{O}^n, \mathcal{O}^m\} &\sim \mathcal{O}^{n+m}. \end{aligned} \tag{3.58}$$

A partir de estas relaciones, podemos prever de que orden son los operadores que aparecen en las relaciones de conmutación y anticonmutación de  $J^i$ ,  $T^a$  y  $G^{ia}$ , así como de los operadores derivados de estos.

# Capítulo 4

## Acerca del Cálculo del Factor de Forma de Pauli

### 4.1. Preámbulo

Cuando exploramos las propiedades de las partículas con estructura como el protón y el neutrón, queremos saber cuales son las interacciones predominantes, en este caso la interacción electromagnética [50].

De ahí que se necesiten saber tanto la carga eléctrica, como sus momentos tanto eléctrico como magnético.

En este trabajo se busca realizar el cálculo del factor de forma de Pauli, a partir de todos los conceptos previos señalados en este trabajo, no sin antes abordar una explicación breve sobre el factor de forma de Dirac y lo que representa el radio de carga eléctrica en comparación con el radio magnético promedio.

## 4.2. El radio giromagnético del electrón

Ahora, vamos a ver con más detalles el tema de los factores de forma tanto eléctrico como magnético para el electrón, donde primero estudiamos el caso clásico, sin correcciones y para ello partimos del Hamiltoniano dado por [22–28, 50],

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) + \frac{e}{2m} \vec{B} \cdot (\vec{L} + g\vec{S}), \quad (4.1)$$

donde se considera que  $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ , y  $g$  es la *constante de acoplamiento giromagnético*.

A continuación, calculamos el valor de  $g$ , partiendo de de la ecuación de Dirac con potencial dada por

$$(i\not{D} - m)\psi = 0, \quad (4.2)$$

la cual es multiplicada por  $(\not{D} + m)$ , produciendo la ecuación

$$\begin{aligned} (\not{D}^2 + m^2)\psi &= \left( D_\mu^2 + \frac{e}{2} F_{\mu\nu} \hat{\sigma}^{\mu\nu} + m^2 \right) \psi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde  $F_{\mu\nu}$  y  $\hat{\sigma}^{\mu\nu}$ , están definidos por [4–6]

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu), \\ \hat{\sigma}^{\mu\nu} &= \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu], \end{aligned} \quad (4.4)$$

Además, el producto  $\frac{e}{2}F_{\mu\nu}\hat{\sigma}^{\mu\nu}$  se expresa en la representación de Weyl como [50]

$$\frac{e}{2}F_{\mu\nu}\hat{\sigma}^{\mu\nu} = -e \begin{pmatrix} (\vec{B} + i\vec{E}) \cdot \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & (\vec{B} - i\vec{E}) \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Empleando(4.4) y (4.5), tenemos que (4.3) implica

$$\frac{(H - eA_0)^2}{2m}\psi = \left( \frac{m}{2} + \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} - 2\frac{e}{2m}\vec{B} \cdot \vec{S} \pm i\frac{e}{m}\vec{E} \cdot \vec{S} \right)\psi. \quad (4.6)$$

Por comparación entre las ecuaciones (4.1) y (4.6), bajo la suposición  $\vec{S} = \frac{\vec{\sigma}}{2}$  para espín  $\frac{1}{2}$ , conduce a  $g = 2$ , si (4.6) tuviese el término  $g'\frac{e}{4}F_{\mu\nu}\hat{\sigma}^{\mu\nu}$ , podemos llegar a  $g' = g$ .

Dicho resultado fue presentado por Dirac en 1932 [22, 50], suponiendo que era exacto, pero más tarde se encontró que su valor estaba cercano a 2, lo cual significaba que admitía correcciones cuánticas.

Por otro lado, haremos el procedimiento para calcular las correcciones cuánticas a  $g$ , consideramos el caso a nivel más bajo o nivel árbol, cuando la partícula no tiene estructura, calculamos para el elemento de matriz S [50]

$$i\mathcal{M}_0^\mu = -ie\bar{u}(q_2)\gamma^\mu u(q_1), \quad (4.7)$$

se considera que para dicha partícula el proceso es el de un fotón con momento  $p$ , que es absorbido por una partícula con momento inicial  $q_1$  y con momento final  $q_2$ , teniendo por conservación del momento que

$$p^\mu = q_2^\mu - q_1^\mu. \quad (4.8)$$

Con ayuda de la relación para  $p^\mu$  dada por (4.8) y de la *identidad de Gordon*, dada por [50],

$$\bar{u}(q_2)(q_1^\mu + q_2^\mu)u(q_1) = 2m\bar{u}(q_2)\gamma^\mu u(q_1) + i\bar{u}(q_2)\hat{\sigma}^{\mu\nu}(q_1^\nu - q_2^\nu)u(q_1), \quad (4.9)$$

podemos reexpresar  $i\mathcal{M}_0^\mu$  dado por (4.7) como

$$\mathcal{M}_0^\mu = -e\left(\frac{(q_1^\mu + q_2^\mu)}{2m}\right)\bar{u}(q_2)u(q_1) - \frac{e}{2m}i\bar{u}(q_2)p_\nu\hat{\sigma}^{\mu\nu}u(q_1), \quad (4.10)$$

siendo el primer término asociado con un interacción escalar de la QED, acoplándose el fotón al momento, dando a su vez la regla de Feynman para dicha interacción. Además el segundo término es dependiente del espín y da el momento, donde  $g$  se puede identificar como  $\frac{4m}{e}$  el coeficiente de  $i\bar{u}(q_2)p_\nu\hat{\sigma}^{\mu\nu}u(q_1)$ , lo cual nos dice que requerimos calcular correcciones a un loop, para encontrar dicho coeficiente, lo cual implica que ahora, la partícula tendrá estructura.

Además, formularemos la forma general de calcular el momento magnético a cualquier orden, independientemente de si se trata solo del nivel árbol, para ello partimos de la descripción de una partícula con estructura, para lo cual se propone que para cualquier orden a un loop el momento magnético tenga la forma [50]

$$i\mathcal{M}^\mu = \bar{u}(q_2)(f_1\gamma^\mu + f_2p^\mu + f_3q_1^\mu + f_4q_2^\mu)u(q_1) \quad (4.11)$$

De la ecuación anterior recordamos que todos los coeficientes  $f_i$  nos son independientes, entonces, proponemos que  $f_2 = 0$  donde con ayuda de la ecuación de Dirac dada por [14, 49, 50]

$$\bar{u}(q_2)q_2 = m\bar{u}(q_2) \quad \text{ó} \quad q_1u(q_1) = mu(q_1), \quad (4.12)$$

además de que los  $f_i$  son funciones de  $p^2 = 2m^2 - 2q_1 \cdot q_2$  y  $m^2 = q_1^2 = q_2^2$ , con ayuda de (4.12), tenemos que

$$\begin{aligned}
0 &= p_\mu \bar{u}(q_2)(f_1 \gamma^\mu + f_3 q_1^\mu + f_4 q_2^\mu)u(q_1) \\
&= f_1 \bar{u}(q_2) \not{p} u(q_1) + (p \cdot q_1) f_3 \bar{u}(q_2) u(q_1) + \\
&\quad (p \cdot q_2) f_4 \bar{u}(q_2) u(q_1) \\
&= (p \cdot q_1) f_3 \bar{u}(q_2) u(q_1) + (p \cdot q_2) f_4 \bar{u}(q_2) u(q_1), \tag{4.13}
\end{aligned}$$

donde además se puede simplificar la ecuación anterior con las relaciones  $p \cdot q_1 = q_1 \cdot q_2 - m^2 = -p \cdot q_2$  y  $f_3 = f_4$ . A partir de la ecuación (4.9), podemos escribir la expresión para el momento magnético en términos de  $p_\nu$  y  $\hat{\sigma}^{\mu\nu}$ , como [50]

$$i\mathcal{M}^\mu = (-ie) \bar{u}(q_2) \left[ F_1 \left( \frac{p^2}{m^2} \right) \gamma^\mu + \frac{i\hat{\sigma}^{\mu\nu}}{2m} p_\nu F_2 \left( \frac{p^2}{m^2} \right) \right] u(q_1), \tag{4.14}$$

donde  $F_1(p^2/m^2)$  y  $F_2(p^2/m^2)$  son los factores de forma de Dirac y Pauli.

A nivel árbol, se tiene que

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 0, \tag{4.15}$$

que corresponde al factor de forma eléctrico del electrón, lo cual implica que el factor de forma magnético, no tiene contribuciones a nivel árbol, sino únicamente correcciones cuánticas, lo cual se explica por la presencia del momento magnético anómalo. Esta implica que la constante  $g$  sea diferente de 2, esto es

$$g = 2 + 2F_2(0) \tag{4.16}$$

Dicho resultado fue encontrado por Schinwer, Tomonaga y Feynman en 1948 [50].

Ahora, trabajaremos con dichos factores de forma para bariones los cuales serán función de  $q^2$ , con el objetivo de calcular las correcciones cuánticas con ayuda del formalismo de la Teoría de Perturbaciones Quirales para Bariones Pesados, que como se indicó en el capítulo anterior, es un formalismo que combina la Teoría de Perturbaciones Quirales y la Expansión  $1/N_c$  [13, 20, 21].

### 4.3. Propiedades electromagnéticas de los bariones.

Algunas propiedades de la corriente electromagnética  $J_\mu^{em}$ , pueden ser entendidas empleando el hecho de que dicha corriente conserva su simetría para todas las interacciones. El operador de carga hadrónica se expresa como [13, 20, 21]

$$Q_h^{em} = \int J_0^{em} d^3x, \quad (4.17)$$

tal que satisface la relación de Gell-Mann y Nishijima dada por (3.1) y (3.2), lo que permite como en el capítulo anterior expresar la ecuación (4.17) en términos de la tercer componente de isospín y la hipercarga [20, 21]

$$Q_h^{em} = I_z + \frac{Y}{2}, \quad (4.18)$$

donde la hipercarga  $I_z$  y  $Y/2$  que aparecen en (4.18) están a su vez expresadas en términos de los generadores de  $SU(3)$   $T^3$  y  $T^8$  como [5, 20, 21]

$$I_z = T^3, \quad Y = \frac{2}{\sqrt{3}}T^8. \quad (4.19)$$

Entonces, la carga eléctrica se transforma como un miembro de la representación  $\mathbf{8}$  de  $SU(3)$ . En consecuencia, se puede suponer que  $J_\mu^{em}$  tiene las mismas propiedades de transformación que  $Q_h^{em}$ , así que es la suma de dos partes: la primera que se transforma como un isotriplete y la segunda que se transforma como singulete, es decir, que podemos expresar la corriente electromagnética de manera análoga a (4.18) en términos de (4.19) como [20, 21]

$$J_{h\mu}^{em} = J_\mu^3 + \frac{1}{2}J_\mu^Y. \quad (4.20)$$

En el formalismo de bariones pesados, los elementos de matriz de la corriente electromagnética dada por (4.20) entre bariones del octete, están dados por

$$\langle \bar{B}(p_2) | J_\mu^{em} | B(p_1) \rangle = \bar{u}(p_2) \left[ v_\mu F_1(q^2) + \frac{[S_\mu, S_\nu]}{M_B} q^\nu F_2(q^2) \right] u(p_1), \quad (4.21)$$

donde  $u(p_i)$  es el espinor del barión con momento  $p_i$ ,  $q^2 = (p_2 - p_1)^2 > 0$  es el momento transferido cuadrático,  $S_\mu$  es el operador de espín, y  $F_1(q^2)$  y  $F_2(q^2)$  son los factores de forma de Dirac y Pauli, respectivamente [20, 21].

Para los bariones del decuplete los elementos de matriz de la corriente electromagnética dada por (4.20) son [13, 20, 21]

$$\langle \bar{T}(p_2) | J_\mu^{em} | T(p_1) \rangle = -\bar{u}^\alpha(p_2) O_{\alpha\mu\beta} u^\beta(p_1), \quad (4.22)$$

donde  $u_\alpha(p_i)$  es un espinor de Rarita-Schwinger para un barión pesado sobre la capa de la masa y el tensor  $O_{\alpha\mu\beta}$  se expresa en término de los factores de forma  $F_1(q^2)$  y  $F_2(q^2)$  que aparecen en (4.21), además de los factores de forma  $G_1(q^2)$  y  $G_2(q^2)$  como [20, 21]

$$O_{\alpha\mu\beta} = g_{\alpha\beta} \left[ v_\mu F_1(q^2) + \frac{[S_\mu, S_\rho]}{M_B} q^\rho F_2(q^2) \right] + \frac{q_\alpha q_\beta}{4M_B^2} \left[ v_\mu G_1(q^2) + \frac{[S_\mu, S_\rho]}{M_B} q^\rho G_2(q^2) \right], \quad (4.23)$$



Para realizar dicho cálculo, hay que tener en cuenta, que la literatura indica la conveniencia de expresar los factores de forma de Sachs en términos de  $F_1(q^2)$  y  $F_2(q^2)$  que aparecen en (4.21) y (4.22) como

$$\begin{aligned} G_{E0}(q^2) &= F_1(q^2) + \frac{q^2}{4M_B^2} F_2(q^2), \\ G_{M1}(q^2) &= F_1(q^2) + F_2(q^2), \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde  $F_1(q^2)$  es el factor de forma de Dirac calculado en [20,21] y  $F_2(q^2)$  es el factor de forma de Pauli.

Así, es conveniente recordar que a nivel árbol se cumple

$$\begin{aligned} F_1(q^2 = 0) &= Q, \\ F_2(q^2 = 0) &= \kappa_B, \end{aligned} \quad (4.25)$$

siendo  $Q$  la carga eléctrica y  $\kappa_B$ , el *momento magnético anómalo*.

Lo cual implica que ocurre algo semejante a la ecuación (4.15) a nivel árbol de la determinación de los factores de forma de Dirac y Pauli para el electrón de la sección anterior, donde se preserva la propiedad de que  $F_2(q^2)$  sólo tiene correcciones cuánticas. Cuando  $q^2 = 0$ , tenemos a nivel árbol de (4.24) que  $G_{M1}(q^2)$  se reduce a

$$\begin{aligned} G_{M1}(0) &= F_1(0) + F_2(0) \\ &= Q + \kappa_B \\ &= \mu. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Esta ecuación nos dice como calcular a nivel árbol el momento magnético total de los bariones.

En las siguientes secciones se obtendrán las correcciones a un loop al factor de forma de Pauli y se comprobará la precisión de dichas estimaciones, al calcular los radios magnéticos cuadráticos medios y compararlos con los radios eléctricos cuadráticos medios, siendo ambas observables experimentales, podemos ver la consistencia de nuestra formulación, por ahora, este tema de los radios magnéticos, será algo que solo se mencionará en este trabajo y se convierte en una de las perspectivas a futuro de este trabajo.

## 4.4. Correcciones a un loop al factor de forma de Pauli

Para obtener el factor de forma de Pauli es necesario construir un operador a un loop cuyos elementos de matriz entre estados bariónicos den  $F(q^2)$ . Para  $q^2 = 0$  se debe reducir al momento magnético anómalo del barión,  $\kappa_B$ , es decir,

$$F_2(0) = \kappa_B. \quad (4.27)$$

Un aspecto importante que debemos tomar en cuenta en el análisis es que ni la teoría de perturbaciones quirales ni la expansión  $1/N_c$  predicen el momento magnético anómalo. Entonces debemos tomar los valores empíricos definidos en la ec. (4.27) para fijar los valores del factor de forma de Pauli en  $q^2 = 0$ ; por ejemplo,

$$F_{1,p}(0) = 1, \quad F_{1,n}(0) = 0, \quad F_{2,p}(0) = \kappa_p = 1.793, \quad F_{2,n} = \kappa_n = -1.913. \quad (4.28)$$

El factor de forma de Pauli adquiere correcciones a partir del diagrama a un loop representado en la Fig. (4.1). El diagrama puede expresarse como el producto de un operador bariónico con una estructura de grupo bien definida y una integral, la cual contiene toda la dependencia en  $q^2$ .

Específicamente,

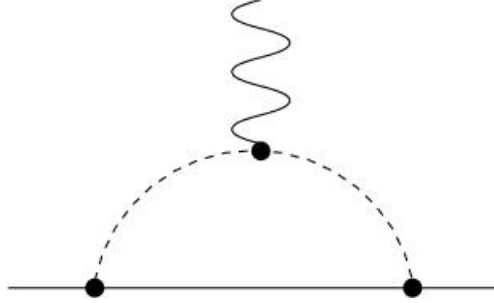


Figura 4.1: Correcciones de orden  $\mathcal{O}(m_q^{1/2})$  al factor de forma de Pauli.

$$F_2(q^2) = \langle \delta O_{(a)} \rangle, \quad (4.29)$$

donde

$$\delta O_{(a)} = \sum_j A^{ia} \mathcal{P}_j A^{jb} P^{ab}(\Delta_j). \quad (4.30)$$

Aquí los operadores de corriente axial  $A^{ia}$  y  $A^{jb}$  han sido utilizados en los vértices mesón-barión,  $\mathcal{P}_j$  es el operador de proyección de espín para espín  $J = j$  así que el propagador del barión resulta ser [51]

$$\frac{i\mathcal{P}_j}{k^0 - \Delta_j}, \quad (4.31)$$

y  $\Delta_j$  representa la diferencia de masa hiperfina entre el barión intermediario con espín  $J = j$  y el barión externo; específicamente,

$$\Delta_j = \mathcal{M}_{\text{hiperfina}}|_{J^2=j(j+1)} - \mathcal{M}_{\text{hiperfina}}|_{J^2=j_{\text{ext}}(j_{\text{ext}}+1)}. \quad (4.32)$$

En la Ec.(4.30) la suma sobre espín  $j$  está indicada explícitamente mientras que las sumas sobre los índices repetidos de espín y de sabor del álgebra  $SU(2) \times SU(3)$  se sobreentienden.

Para los bariones del estado base,  $N_c = 3$ , los proyectores de espín y las particiones de masa son [51]

$$\mathcal{P}_{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3} \left( J^2 - \frac{15}{4} \right), \quad (4.33a)$$

$$\mathcal{P}_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \left( J^2 - \frac{3}{4} \right), \quad (4.33b)$$

y

$$\Delta_{\frac{1}{2}} = \begin{cases} 0, & j_{\text{ext}} = \frac{1}{2}, \\ -\Delta, & j_{\text{ext}} = \frac{3}{2}, \end{cases} \quad (4.34a)$$

$$\Delta_{\frac{3}{2}} = \begin{cases} \Delta, & j_{\text{ext}} = \frac{1}{2}, \\ 0, & j_{\text{ext}} = \frac{3}{2}, \end{cases} \quad (4.34b)$$

donde  $\Delta$  es la diferencia de masa decuplete-octete,  $\Delta \equiv M_T - M_B$ .

Por otra parte,  $P^{ab}$  es un tensor antisimétrico que contiene las integrales sobre los loops. Éste puede ser descompuesto como [55]

$$P^{ab}(\Delta_j) = A_0(\Delta_j) i\Gamma_0^{ab} + A_1(\Delta_j) i\Gamma_1^{ab} + A_2(\Delta_j) i\Gamma_2^{ab}, \quad (4.35)$$

donde los tensores  $\Gamma_i^{ab}$  están dados por

$$\Gamma_0^{ab} = f^{abQ}, \quad (4.36a)$$

$$\Gamma_1^{ab} = f^{ab\bar{Q}}, \quad (4.36b)$$

$$\Gamma_2^{ab} = f^{aeQ}d^{be8} - f^{beQ}d^{ae8} - f^{abe}d^{eQ8}. \quad (4.36c)$$

$\Gamma_0^{ab}$  y  $\Gamma_1^{ab}$  son octetes de SU(3); ambos se transforman como la carga eléctrica, excepto que el segundo está rotado por  $\pi$  en el espacio de isospín.  $\Gamma_2^{ab}$ , por su parte, rompe SU(3) como  $\mathbf{10} + \overline{\mathbf{10}}$  [55].

Notemos que en las Ecs. (4.36) aparece el índice de sabor  $Q$ . Éste está relacionado con transiciones electromagnéticas y adquiere el valor

$$Q \equiv 3 + \frac{1}{\sqrt{3}}8. \quad (4.37)$$

Por ejemplo, la carga eléctrica del barión se obtiene como

$$Q_B = \langle B|T^Q|B \rangle \equiv \langle B|T^3|B \rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\langle B|T^8|B \rangle. \quad (4.38)$$

La integral sobre el loop,  $I_a(m, \delta, \mu; q^2)$ , la cual contiene la dependencia completa en el momento transferido, aparece en las combinaciones lineales

$$A_0(\Delta_j) = \frac{1}{3}[I_a(m_\pi, \Delta_j, \mu; q^2) + 2I_a(m_K, \Delta_j, \mu; q^2)], \quad (4.39a)$$

$$A_1(\Delta_j) = \frac{1}{3}[I_a(m_\pi, \Delta_j, \mu; q^2) - I_a(m_K, \Delta_j, \mu; q^2)], \quad (4.39b)$$

$$A_2(\Delta_j) = -\frac{1}{\sqrt{3}}[I_a(m_\pi, \Delta_j, \mu; q^2) - I_a(m_K, \Delta_j, \mu; q^2)]. \quad (4.39c)$$

La forma más general de la integral está dada por

$$J_{ij}^\mu \equiv -\frac{i}{f^2} M_B (\mu^2)^{\frac{4-d}{2}} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(2k+q)^\mu k_i (k+q)_j}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)[(k+q)^2 - m^2 + i\varepsilon](p^0 - k^0 - \Delta + i\varepsilon)}, \quad (4.40)$$

donde  $k$  es el momento de mesón y  $m$  es su masa,  $p$  es el momento del barión,  $q$  es el momento transferido y  $\mu$  es la escala de regularización dimensional. El propagador del barión en teoría de perturbaciones quirales para bariones pesados tiene la estructura

$$\frac{i}{l \cdot v} \quad (4.41)$$

donde  $l_\mu$  es el momento que lleva el barión en esa línea del diagrama y  $v_\mu = (1, \mathbf{0})$  es su velocidad, con  $v^2 = 1$ .

La integral en (4.40) se descompone en una parte temporal  $J_{ij}^0$  y otra espacial  $J_{ij}^k$ . La primera de ellas está relacionada con el factor de forma de Dirac mientras que la segunda es la estructura que se requiere en este trabajo. Usando la relación de Feynman para combinar denominadores [50],

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{[xA + yB + zC]^3}, \quad (4.42)$$

la integral puede llevarse a una forma del tipo

$$J_{ij}^k \sim \beta_1 q^k q_i q_j + \beta_2 q^k \delta_{ij} + \beta_3 q_i \delta_j^k + \beta_4 q_j \delta_i^k. \quad (4.43)$$

Omitiendo detalles, la parte de la integral que nos interesa es

$$\begin{aligned}
& \frac{4f^2\pi^2}{M_B} I_a(m, \Delta, \mu; q^2) \\
&= \frac{\Delta}{2} \left[ \lambda_\epsilon + 4 - \ln \left[ \frac{m^2}{\mu^2} \right] \right] \\
& - \frac{\Delta}{8} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2}{q^2}} \right]^2 \ln \left[ \frac{-1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2}{q^2}}}{1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2}{q^2}}} \right] \\
& - \frac{\Delta}{8} \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2}{q^2}} \right]^2 \ln \left[ \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2}{q^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2}{q^2}}} \right] \\
& - \int_0^1 dx x \sqrt{\Delta^2 - q^2(1-x)x - m^2} \left[ 2i\pi \ln \left[ \frac{\Delta - \sqrt{\Delta^2 - q^2(1-x)x - m^2}}{\Delta + \sqrt{\Delta^2 - q^2(1-x)x - m^2}} \right] \right] \quad (4.44)
\end{aligned}$$

Los límites de esta integral de interés en nuestro análisis son:

$$\begin{aligned}
\frac{4f^2\pi^2}{M_B} I_a(m, \Delta, \mu) &= \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{4f^2\pi^2}{M_B} I_a(m, \Delta, \mu; q^2) \\
&= \frac{\Delta}{2} \left[ \lambda_\epsilon + 2 - \ln \left[ \frac{m^2}{\mu^2} \right] \right] \\
&+ \begin{cases} \sqrt{m^2 - \Delta^2} \left[ \frac{\pi}{2} - \arctan \left[ \frac{\Delta}{\sqrt{m^2 - \Delta^2}} \right] \right], & m > |\Delta| \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\Delta^2 - m^2} \left[ 2i\pi - \ln \left[ \frac{\Delta - \sqrt{\Delta^2 - m^2}}{\Delta + \sqrt{\Delta^2 - m^2}} \right] \right], & m < |\Delta|, \end{cases} \quad (4.45)
\end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\frac{4f^2\pi^2}{M_B} I_a(m, \mu) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{4f^2\pi^2}{M_B} I_a(m, \Delta, \mu) = \frac{\pi m}{2}, \quad (4.46)$$

con

$$\lambda_\epsilon = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi), \quad (4.47)$$

$\epsilon = 4 - d$  y  $\gamma = 0.577216$  es la constante de Euler.

Es importante señalar que el resultado de la Ec. (4.46) es el originalmente obtenido en el análisis de momentos magnéticos de bariones en teoría de perturbaciones quirales para bariones pesados [56]. Este resultado nos permite concluir que la integral (4.44) es consistente.

Una vez que la integral  $I_a(m, \Delta, \mu; q^2)$  ha sido obtenida, la corrección de orden  $\mathcal{O}(m_q^{1/2})$  al factor de forma de Pauli puede ser obtenida usando las estructuras de grupo de presentadas en la Ref. [57]. Estas estructuras caracterizan a los operadores contenidos en la Ec. (4.35). En otras palabras,  $\delta O_{(a)}$  contiene operadores de  $n$  cuerpos<sup>1</sup>, con  $n > N_c$ , los cuales son estructuras matemáticas complicadas dadas en términos de los operadores  $J^k$ ,  $T^c$  y  $G^{kc}$ . Todas esas estructuras deber ser reducidas y rescritas en términos de la base de operadores, con  $n \leq N_c$ . A pesar de que la base de operadores es completa e independiente, en la práctica la reducción puede ser un problema bastante complejo.

La dependencia en  $N_c$  de los elementos de matriz de los operadores  $J^i$ ,  $T^a$  y  $G^{ia}$  es altamente no trivial [58]. En trabajos previos ([57] y referencias ahí contenidas) se ha usado un sistema de conteo de potencias simplificado para los generadores de la simetría espín-sabor aplicable para bariones con espín de orden 1. Esta regla simplificada es

$$T^a \sim N_c, \quad G^{ia} \sim N_c, \quad J^i \sim 1, \quad (4.48)$$

la cual indica que factores de  $J^i$  están suprimidos por  $1/N_c$  con respecto a  $T^a$  y  $G^{ia}$ .

---

<sup>1</sup>Un operador de un cuerpo es aquél con  $n$  operadores de quarks  $q$  y  $n$  operadores  $q^\dagger$  y que puede ser escrito como un polinomio de orden  $n$  en  $J^i$ ,  $T^a$  y  $G^{ia}$



Como un ejemplo práctico, veamos el caso del operador

$$i f^{acb} G^{ia} G^{ib}. \quad (4.49)$$

De forma burda, este operador es de orden  $\mathcal{O}(N_c^2)$ : un factor de  $N_c$  por cada factor de  $G$ . Sin embargo, la estructura (4.49) se puede reescribir como

$$i f^{acb} G^{ia} G^{ib} = \frac{i}{2} f^{acb} [G^{ia}, G^{ib}] + \frac{i}{2} f^{acb} \{G^{ia}, G^{ib}\}. \quad (4.50)$$

El segundo sumando del lado derecho de la expresión anterior es trivialmente cero, mientras que el primero, de acuerdo a las relaciones de conmutación (3.20), sigue un patrón dado por

$$[O^m, O^n] \sim O^{n+m-1}, \quad (4.51)$$

lo cual implica que el conmutador de un operador de  $n$  cuerpos con un operador de  $m$  cuerpos es a lo más un operador de  $(n + m - 1)$  cuerpos. Entonces, el lado derecho de la ec. (4.50) debe ser un operador de un cuerpo. El cálculo algebraico de esta expresión conduce a

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} f^{acb} [G^{ia}, G^{ib}] &= \frac{i}{2} f^{acb} \left[ \frac{i}{4} \delta^{ii} f^{abe} T^e + \frac{i}{2N_f} \delta^{ab} \epsilon^{iik} J^k + \frac{i}{2} \epsilon^{iik} d^{abe} G^{ke} \right] \\ &= \frac{3}{8} N_f T^c, \end{aligned} \quad (4.52)$$

el cual es en efecto un operador de un cuerpo.

El cálculo explícito de las estructuras de grupo contenidas en la Ec. (4.30) ha sido realizado en la Ref. [57] así que las expresiones ahí presentadas serán utilizadas en nuestro análisis.

Las estructuras necesarias son

$$if^{acb}A^{ia}A^{ib} = \sum_{n=1}^7 a_n^{\mathbf{8}} S_n^c, \quad (4.53)$$

y

$$if^{acb}A^{ia}J^2A^{ib} = \sum_{n=1}^7 \bar{a}_n^{\mathbf{8}} S_n^c, \quad (4.54)$$

para la representación  $\mathbf{8}$ , y

$$i(f^{aec}d^{be8} - f^{bec}d^{ae8} - f^{abe}d^{ec8})A^{ia}A^{ib} = \sum_{n=1}^{13} b_n^{\mathbf{10}+\bar{\mathbf{10}}} O_n^c, \quad (4.55)$$

y

$$i(f^{aec}d^{be8} - f^{bec}d^{ae8} - f^{abe}d^{ec8})A^{ia}J^2A^{ib} = \sum_{n=1}^{13} \bar{b}_n^{\mathbf{10}+\bar{\mathbf{10}}} O_n^c, \quad (4.56)$$

para la representación  $\mathbf{10} + \bar{\mathbf{10}}$ . Los coeficientes  $a_n^{\mathbf{8}}$ ,  $\bar{a}_n^{\mathbf{8}}$ ,  $b_n^{\mathbf{10}+\bar{\mathbf{10}}}$  y  $\bar{b}_n^{\mathbf{10}+\bar{\mathbf{10}}}$  están listados en el apéndice de la Ref. [59]. Las base de operadores utilizadas son

$$\begin{aligned} S_1^c &= T^c, & S_2^c &= \{J^r, G^{rc}\}, & S_3^c &= \{J^2, T^c\}, \\ S_4^c &= \{J^2, \{J^r, G^{rc}\}\}, & S_5^c &= \{J^2, \{J^2, T^c\}\}, & S_6^c &= \{J^2, \{J^2, \{J^r, G^{rc}\}\}\}, \\ S_7^c &= \{J^2, \{J^2, \{J^2, T^c\}\}\}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

y

$$\begin{aligned}
O_1^c &= d^{c8e} T^e, & O_2^c &= d^{c8e} \{J^r, G^{re}\}, \\
O_3^c &= d^{c8e} \{J^2, T^e\}, & O_4^c &= \{T^c, \{J^r, G^{r8}\}\}, \\
O_5^c &= \{T^8, \{J^r, G^{rc}\}\}, & O_6^c &= d^{c8e} \{J^2, \{J^r, G^{re}\}\}, \\
O_7^c &= d^{c8e} \{J^2, \{J^2, T^e\}\}, & O_8^c &= \{J^2, \{T^c, \{J^r, G^{r8}\}\}\}, \\
O_9^c &= \{J^2, \{T^8, \{J^r, G^{rc}\}\}\}, & O_{10}^c &= d^{c8e} \{J^2, \{J^2, \{J^r, G^{re}\}\}\}, \\
O_{11}^c &= d^{c8e} \{J^2, \{J^2, \{J^2, T^e\}\}\}, & O_{12}^c &= \{J^2, \{J^2, \{T^c, \{J^r, G^{r8}\}\}\}\}, \\
O_{13}^c &= \{J^2, \{J^2, \{T^8, \{J^r, G^{rc}\}\}\}\}.
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Los elementos de matriz de los operadores de las bases (4.57) y (4.58) se encuentran listados en las tablas I-IV de la Ref. [21] y no serán repetidos aquí.

Las formas finales del operador (4.30) son

$$\begin{aligned}
\delta O_{(a)} &= \mathcal{P}_{1/2} A^{ia} \mathcal{P}_{1/2} A^{ib} [A_0(0) i\Gamma_0^{ab} + A_1(0) i\Gamma_1^{ab} + A_2(0) i\Gamma_2^{ab}] \mathcal{P}_{1/2} \\
&\quad + \mathcal{P}_{1/2} A^{ia} \mathcal{P}_{3/2} A^{ib} [A_0(\Delta) i\Gamma_0^{ab} + A_1(\Delta) i\Gamma_1^{ab} + A_2(\Delta) i\Gamma_2^{ab}] \mathcal{P}_{1/2},
\end{aligned} \tag{4.59}$$

para el octete de bariones y

$$\begin{aligned}
\delta O_{(a)} &= \mathcal{P}_{3/2} A^{ia} \mathcal{P}_{1/2} A^{ib} [A_0(-\Delta) i\Gamma_0^{ab} + A_1(-\Delta) i\Gamma_1^{ab} + A_2(-\Delta) i\Gamma_2^{ab}] \mathcal{P}_{3/2} \\
&\quad + \mathcal{P}_{3/2} A^{ia} \mathcal{P}_{3/2} A^{ib} [A_0(0) i\Gamma_0^{ab} + A_1(0) i\Gamma_1^{ab} + A_2(0) i\Gamma_2^{ab}] \mathcal{P}_{3/2},
\end{aligned} \tag{4.60}$$

para el decuplete de bariones.

Aparte de las contribuciones a un loop, existen contribuciones a nivel árbol que juegan el papel de contratérminos locales para la parte divergente de la integral. Específicamente, estos términos serán parametrizados a través de un factor indeterminado  $\zeta_1$  y simultáneamente la parte divergente de la integral, el término  $1/\epsilon$ , será removido de ésta. Este proceso será indicado en lo sucesivo a través del remplazo  $I_a(m, \Delta, \mu; q^2) \rightarrow \tilde{I}_a(m, \Delta, \mu; q^2)$ .

Reuniendo todas la piezas, los factores de forma de Pauli para el octete y el decuplete de bariones son

$$\begin{aligned}
F_{2,n}(q^2) &= \frac{\psi_n}{\Lambda_\chi} \zeta_1 \\
&+ \left[ -\frac{25}{24}a_1^2 - \frac{5}{12}a_1b_2 - \frac{25}{36}a_1b_3 - \frac{1}{24}b_2^2 - \frac{5}{36}b_2b_3 - \frac{25}{216}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ \frac{1}{24}a_1^2 - \frac{1}{12}a_1b_2 + \frac{1}{36}a_1b_3 + \frac{1}{24}b_2^2 - \frac{1}{36}b_2b_3 + \frac{1}{216}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ \frac{2}{3}a_1^2 + \frac{2}{3}a_1c_3 + \frac{1}{6}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, \Delta, \mu; q^2) \\
&+ \left[ \frac{1}{3}a_1^2 + \frac{1}{3}a_1c_3 + \frac{1}{12}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, \Delta, \mu; q^2), \tag{4.61}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,p}(q^2) &= \frac{\psi_p}{\Lambda_\chi} \zeta_1 \\
&+ \left[ \frac{25}{24}a_1^2 + \frac{5}{12}a_1b_2 + \frac{25}{36}a_1b_3 + \frac{1}{24}b_2^2 + \frac{5}{36}b_2b_3 + \frac{25}{216}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ \frac{7}{12}a_1^2 + \frac{1}{3}a_1b_2 + \frac{7}{18}a_1b_3 + \frac{1}{12}b_2^2 + \frac{1}{9}b_2b_3 + \frac{7}{108}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ -\frac{2}{3}a_1^2 - \frac{2}{3}a_1c_3 - \frac{1}{6}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, \Delta, \mu; q^2) \\
&+ \left[ \frac{1}{6}a_1^2 + \frac{1}{6}a_1c_3 + \frac{1}{24}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, \Delta, \mu; q^2), \tag{4.62}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,\Lambda}(q^2) &= \frac{\psi_\Lambda}{\Lambda_\chi} \zeta_1 \\
&+ \left[ -\frac{1}{2}a_1^2 - \frac{1}{4}a_1b_2 - \frac{1}{3}a_1b_3 - \frac{1}{12}b_2b_3 - \frac{1}{18}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ \frac{1}{2}a_1^2 + \frac{1}{2}a_1c_3 + \frac{1}{8}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, \Delta, \mu; q^2) \tag{4.63}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,\Sigma^0}(q^2) &= \frac{\psi_{\Sigma^0}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 \\
&+ \left[ \frac{1}{2}a_1^2 + \frac{1}{4}a_1b_2 + \frac{1}{3}a_1b_3 + \frac{1}{12}b_2b_3 + \frac{1}{18}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ -\frac{1}{2}a_1^2 - \frac{1}{2}a_1c_3 - \frac{1}{8}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, \Delta, \mu; q^2), \tag{4.64}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,\Sigma^+}(q^2) &= \frac{\psi_{\Sigma^+}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 \\
&+ \left[ \frac{7}{12}a_1^2 + \frac{1}{3}a_1b_2 + \frac{7}{18}a_1b_3 + \frac{1}{12}b_2^2 + \frac{1}{9}b_2b_3 + \frac{7}{108}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ \frac{25}{24}a_1^2 + \frac{5}{12}a_1b_2 + \frac{25}{36}a_1b_3 + \frac{1}{24}b_2^2 + \frac{5}{36}b_2b_3 + \frac{25}{216}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ \frac{1}{6}a_1^2 + \frac{1}{6}a_1c_3 + \frac{1}{24}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, \Delta, \mu; q^2) \\
&+ \left[ -\frac{2}{3}a_1^2 - \frac{2}{3}a_1c_3 - \frac{1}{6}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, \Delta, \mu; q^2), \tag{4.65}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,\Sigma^-}(q^2) &= \frac{\psi_{\Sigma^-}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 \\
&+ \left[ -\frac{7}{12}a_1^2 - \frac{1}{3}a_1b_2 - \frac{7}{18}a_1b_3 - \frac{1}{12}b_2^2 - \frac{1}{9}b_2b_3 - \frac{7}{108}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ -\frac{1}{24}a_1^2 + \frac{1}{12}a_1b_2 - \frac{1}{36}a_1b_3 - \frac{1}{24}b_2^2 + \frac{1}{36}b_2b_3 - \frac{1}{216}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ -\frac{1}{6}a_1^2 - \frac{1}{6}a_1c_3 - \frac{1}{24}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, \Delta, \mu; q^2) \\
&+ \left[ -\frac{1}{3}a_1^2 - \frac{1}{3}a_1c_3 - \frac{1}{12}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, \Delta, \mu; q^2) \tag{4.66}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,\Xi^0}(q^2) &= \frac{\psi_{\Xi^0}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 \\
&+ \left[ \frac{1}{24}a_1^2 - \frac{1}{12}a_1b_2 + \frac{1}{36}a_1b_3 + \frac{1}{24}b_2^2 - \frac{1}{36}b_2b_3 + \frac{1}{216}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ -\frac{25}{24}a_1^2 - \frac{5}{12}a_1b_2 - \frac{25}{36}a_1b_3 - \frac{1}{24}b_2^2 - \frac{5}{36}b_2b_3 - \frac{25}{216}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ \frac{1}{3}a_1^2 + \frac{1}{3}a_1c_3 + \frac{1}{12}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, \Delta, \mu; q^2) \\
&+ \left[ \frac{2}{3}a_1^2 + \frac{2}{3}a_1c_3 + \frac{1}{6}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, \Delta, \mu; q^2) \tag{4.67}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,\Xi^-}(q^2) &= \frac{\psi_{\Xi^-}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 \\
&+ \left[ -\frac{1}{24}a_1^2 + \frac{1}{12}a_1b_2 - \frac{1}{36}a_1b_3 - \frac{1}{24}b_2^2 + \frac{1}{36}b_2b_3 - \frac{1}{216}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ -\frac{7}{12}a_1^2 - \frac{1}{3}a_1b_2 - \frac{7}{18}a_1b_3 - \frac{1}{12}b_2^2 - \frac{1}{9}b_2b_3 - \frac{7}{108}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ -\frac{1}{3}a_1^2 - \frac{1}{3}a_1c_3 - \frac{1}{12}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, \Delta, \mu; q^2) \\
&+ \left[ -\frac{1}{6}a_1^2 - \frac{1}{6}a_1c_3 - \frac{1}{24}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, \Delta, \mu; q^2) \tag{4.68}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,\Delta^{++}}(q^2) &= \frac{\psi_{\Delta^{++}}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 \\
&+ \left[ \frac{5}{8}a_1^2 + \frac{5}{4}a_1b_2 + \frac{25}{12}a_1b_3 + \frac{5}{8}b_2^2 + \frac{25}{12}b_2b_3 + \frac{125}{72}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ \frac{5}{8}a_1^2 + \frac{5}{4}a_1b_2 + \frac{25}{12}a_1b_3 + \frac{5}{8}b_2^2 + \frac{25}{12}b_2b_3 + \frac{125}{72}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ \frac{1}{2}a_1^2 + \frac{1}{2}a_1c_3 + \frac{1}{8}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, -\Delta, \mu; q^2) \\
&+ \left[ \frac{1}{2}a_1^2 + \frac{1}{2}a_1c_3 + \frac{1}{8}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, -\Delta, \mu; q^2), \tag{4.69}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,\Delta^+}(q^2) &= \frac{\psi_{\Delta^+}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 \\
&+ \left[ \frac{5}{24}a_1^2 + \frac{5}{12}a_1b_2 + \frac{25}{36}a_1b_3 + \frac{5}{24}b_2^2 + \frac{25}{36}b_2b_3 + \frac{125}{216}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ \frac{5}{12}a_1^2 + \frac{5}{6}a_1b_2 + \frac{25}{18}a_1b_3 + \frac{5}{12}b_2^2 + \frac{25}{18}b_2b_3 + \frac{125}{108}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ \frac{1}{6}a_1^2 + \frac{1}{6}a_1c_3 + \frac{1}{24}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, -\Delta, \mu; q^2) \\
&+ \left[ \frac{1}{3}a_1^2 + \frac{1}{3}a_1c_3 + \frac{1}{12}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, -\Delta, \mu; q^2) \tag{4.70}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,\Delta^0}(q^2) &= \frac{\psi_{\Delta^0}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 \\
&+ \left[ -\frac{5}{24}a_1^2 - \frac{5}{12}a_1b_2 - \frac{25}{36}a_1b_3 - \frac{5}{24}b_2^2 - \frac{25}{36}b_2b_3 - \frac{125}{216}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ \frac{5}{24}a_1^2 + \frac{5}{12}a_1b_2 + \frac{25}{36}a_1b_3 + \frac{5}{24}b_2^2 + \frac{25}{36}b_2b_3 + \frac{125}{216}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ -\frac{1}{6}a_1^2 - \frac{1}{6}a_1c_3 - \frac{1}{24}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, -\Delta, \mu; q^2) \\
&+ \left[ \frac{1}{6}a_1^2 + \frac{1}{6}a_1c_3 + \frac{1}{24}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, -\Delta, \mu; q^2) \tag{4.71}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,\Delta^-}(q^2) &= \frac{\psi_{\Delta^-}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 \\
&+ \left[ -\frac{5}{8}a_1^2 - \frac{5}{4}a_1b_2 - \frac{25}{12}a_1b_3 - \frac{5}{8}b_2^2 - \frac{25}{12}b_2b_3 - \frac{125}{72}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ -\frac{1}{2}a_1^2 - \frac{1}{2}a_1c_3 - \frac{1}{8}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, -\Delta, \mu; q^2) \tag{4.72}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,\Sigma^{*+}}(q^2) &= \frac{\psi_{\Sigma^{*+}}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 \\
&+ \left[ \frac{5}{12}a_1^2 + \frac{5}{6}a_1b_2 + \frac{25}{18}a_1b_3 + \frac{5}{12}b_2^2 + \frac{25}{18}b_2b_3 + \frac{125}{108}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ \frac{5}{24}a_1^2 + \frac{5}{12}a_1b_2 + \frac{25}{36}a_1b_3 + \frac{5}{24}b_2^2 + \frac{25}{36}b_2b_3 + \frac{125}{216}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ \frac{1}{3}a_1^2 + \frac{1}{3}a_1c_3 + \frac{1}{12}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, -\Delta, \mu; q^2) \\
&+ \left[ \frac{1}{6}a_1^2 + \frac{1}{6}a_1c_3 + \frac{1}{24}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, -\Delta, \mu; q^2) \tag{4.73}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,\Sigma^{*-}}(q^2) &= \frac{\psi_{\Sigma^{*-}}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 \\
&+ \left[ -\frac{5}{12}a_1^2 - \frac{5}{6}a_1b_2 - \frac{25}{18}a_1b_3 - \frac{5}{12}b_2^2 - \frac{25}{18}b_2b_3 - \frac{125}{108}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ -\frac{5}{24}a_1^2 - \frac{5}{12}a_1b_2 - \frac{25}{36}a_1b_3 - \frac{5}{24}b_2^2 - \frac{25}{36}b_2b_3 - \frac{125}{216}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ -\frac{1}{3}a_1^2 - \frac{1}{3}a_1c_3 - \frac{1}{12}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, -\Delta, \mu; q^2) \\
&+ \left[ -\frac{1}{6}a_1^2 - \frac{1}{6}a_1c_3 - \frac{1}{24}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, -\Delta, \mu; q^2), \tag{4.74}
\end{aligned}$$

$$F_{2,\Sigma^{*0}}(q^2) = 0, \tag{4.75}$$



$$\begin{aligned}
F_{2,\Xi^{*0}}(q^2) &= \frac{\psi_{\Xi^{*0}}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 \\
&+ \left[ \frac{5}{24}a_1^2 + \frac{5}{12}a_1b_2 + \frac{25}{36}a_1b_3 + \frac{5}{24}b_2^2 + \frac{25}{36}b_2b_3 + \frac{125}{216}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ -\frac{5}{24}a_1^2 - \frac{5}{12}a_1b_2 - \frac{25}{36}a_1b_3 - \frac{5}{24}b_2^2 - \frac{25}{36}b_2b_3 - \frac{125}{216}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ \frac{1}{6}a_1^2 + \frac{1}{6}a_1c_3 + \frac{1}{24}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, -\Delta, \mu; q^2) \\
&+ \left[ -\frac{1}{6}a_1^2 - \frac{1}{6}a_1c_3 - \frac{1}{24}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, -\Delta, \mu; q^2)
\end{aligned} \tag{4.76}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,\Xi^{*-}}(q^2) &= \frac{\psi_{\Xi^{*-}}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 \\
&+ \left[ -\frac{5}{24}a_1^2 - \frac{5}{12}a_1b_2 - \frac{25}{36}a_1b_3 - \frac{5}{24}b_2^2 - \frac{25}{36}b_2b_3 - \frac{125}{216}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ -\frac{5}{12}a_1^2 - \frac{5}{6}a_1b_2 - \frac{25}{18}a_1b_3 - \frac{5}{12}b_2^2 - \frac{25}{18}b_2b_3 - \frac{125}{108}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ -\frac{1}{6}a_1^2 - \frac{1}{6}a_1c_3 - \frac{1}{24}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_\pi, -\Delta, \mu; q^2) \\
&+ \left[ -\frac{1}{3}a_1^2 - \frac{1}{3}a_1c_3 - \frac{1}{12}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, -\Delta, \mu; q^2)
\end{aligned} \tag{4.77}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,\Omega^-}(q^2) &= \frac{\psi_{\Omega^-}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 \\
&+ \left[ -\frac{5}{8}a_1^2 - \frac{5}{4}a_1b_2 - \frac{25}{12}a_1b_3 - \frac{5}{8}b_2^2 - \frac{25}{12}b_2b_3 - \frac{125}{72}b_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\
&+ \left[ -\frac{1}{2}a_1^2 - \frac{1}{2}a_1c_3 - \frac{1}{8}c_3^2 \right] \tilde{I}_a(m_K, -\Delta, \mu; q^2)
\end{aligned} \tag{4.78}$$

En términos de los invariantes  $D$ ,  $F$ ,  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{H}$  definidos en teoría de perturbaciones quirales para bariones pesados [60, 61], los cuales se relacionan con los coeficientes de los operadores

de la expansión  $1/N_c$  de  $A^{kc}$  a través de las relaciones [51]

$$D = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{6}b_3, \quad (4.79a)$$

$$F = \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{6}b_2 + \frac{1}{9}b_3, \quad (4.79b)$$

$$\mathcal{C} = -a_1 - \frac{1}{2}c_3, \quad (4.79c)$$

$$\mathcal{H} = -\frac{3}{2}a_1 - \frac{3}{2}b_2 - \frac{5}{2}b_3, \quad (4.79d)$$

los factores de forma de Pauli para el octete y decuplete de bariones se reexpresan como

$$\begin{aligned} F_{2,n}(q^2) &= \frac{\psi_n}{\Lambda_\chi} \zeta_1 - \frac{3}{2}(D+F)^2 \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) + \frac{3}{2}(D-F)^2 \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\ &\quad + \frac{2}{3}\mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_\pi, \Delta, \mu; q^2) + \frac{1}{3}\mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_K, \Delta, \mu; q^2), \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned} F_{2,p}(q^2) &= \frac{\psi_p}{\Lambda_\chi} \zeta_1 + \frac{3}{2}(D+F)^2 \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) + (D^2 + 3F^2) \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\ &\quad - \frac{2}{3}\mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_\pi, \Delta, \mu; q^2) + \frac{1}{6}\mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_K, \Delta, \mu; q^2), \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$F_{2,\Lambda}(q^2) = \frac{\psi_\Lambda}{\Lambda_\chi} \zeta_1 - 3DF \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) + \frac{1}{2}\mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_K, \Delta, \mu; q^2), \quad (4.82)$$

$$F_{2,\Sigma^0}(q^2) = \frac{\psi_{\Sigma^0}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 + 3DF \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) - \frac{1}{2}\mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_K, \Delta, \mu; q^2), \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned}
F_{2,\Sigma^+}(q^2) &= \frac{\psi_{\Sigma^+}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 \\
&+ (D^2 + 3F^2) \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) + \frac{3}{2}(D + F)^2 \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\
&+ \frac{1}{6} \mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_\pi, \Delta, \mu; q^2) - \frac{2}{3} \mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_K, \Delta, \mu; q^2),
\end{aligned} \tag{4.84}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,\Sigma^-}(q^2) &= \frac{\psi_{\Sigma^-}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 \\
&- (D^2 + 3F^2) \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) - \frac{3}{2}(D - F)^2 \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\
&- \frac{1}{6} \mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_\pi, \Delta, \mu; q^2) - \frac{1}{3} \mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_K, \Delta, \mu; q^2),
\end{aligned} \tag{4.85}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,\Xi^0}(q^2) &= \frac{\psi_{\Xi^0}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 \\
&+ \frac{3}{2}(D - F)^2 \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) - \frac{3}{2}(D + F)^2 \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\
&+ \frac{1}{3} \mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_\pi, \Delta, \mu; q^2) + \frac{2}{3} \mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_K, \Delta, \mu; q^2),
\end{aligned} \tag{4.86}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,\Xi^-}(q^2) &= \frac{\psi_{\Xi^-}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 \\
&- \frac{3}{2}(D - F)^2 \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) - (D^2 + 3F^2) \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\
&- \frac{1}{3} \mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_\pi, \Delta, \mu; q^2) - \frac{1}{6} \mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_K, \Delta, \mu; q^2),
\end{aligned} \tag{4.87}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,\Delta^{++}}(q^2) &= \frac{\psi_{\Delta^{++}}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 + \frac{5}{18} \mathcal{H}^2 \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) + \frac{5}{18} \mathcal{H}^2 \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\
&+ \frac{1}{2} \mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_\pi, -\Delta, \mu; q^2) + \frac{1}{2} \mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_K, -\Delta, \mu; q^2),
\end{aligned} \tag{4.88}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,\Delta^+}(q^2) &= \frac{\psi_{\Delta^+}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 + \frac{5}{54} \mathcal{H}^2 \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) + \frac{5}{27} \mathcal{H}^2 \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\
&\quad + \frac{1}{6} \mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_\pi, -\Delta, \mu; q^2) + \frac{1}{3} \mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_K, -\Delta, \mu; q^2)
\end{aligned} \tag{4.89}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,\Delta^0}(q^2) &= \frac{\psi_{\Delta^0}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 - \frac{5}{54} \mathcal{H}^2 \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) + \frac{5}{54} \mathcal{H}^2 \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\
&\quad - \frac{1}{6} \mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_\pi, -\Delta, \mu; q^2) + \frac{1}{6} \mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_K, -\Delta, \mu; q^2),
\end{aligned} \tag{4.90}$$

$$F_{2,\Delta^-}(q^2) = \frac{\psi_{\Delta^-}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 - \frac{5}{18} \mathcal{H}^2 \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) - \frac{1}{2} \mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_\pi, -\Delta, \mu; q^2), \tag{4.91}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,\Sigma^{*+}}(q^2) &= \frac{\psi_{\Sigma^{*+}}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 + \frac{5}{27} \mathcal{H}^2 \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) + \frac{5}{54} \mathcal{H}^2 \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\
&\quad + \frac{1}{3} \mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_\pi, -\Delta, \mu; q^2) + \frac{1}{6} \mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_K, -\Delta, \mu; q^2),
\end{aligned} \tag{4.92}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,\Sigma^{*-}}(q^2) &= \frac{\psi_{\Sigma^{*-}}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 - \frac{5}{27} \mathcal{H}^2 \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) - \frac{5}{54} \mathcal{H}^2 \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\
&\quad - \frac{1}{3} \mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_\pi, -\Delta, \mu; q^2) - \frac{1}{6} \mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_K, -\Delta, \mu; q^2),
\end{aligned} \tag{4.93}$$

$$F_{2,\Sigma^{*0}}(q^2) = 0, \tag{4.94}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,\Xi^{*0}}(q^2) &= \frac{\psi_{\Xi^{*0}}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 + \frac{5}{54} \mathcal{H}^2 \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) - \frac{5}{54} \mathcal{H}^2 \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\
&\quad + \frac{1}{6} \mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_\pi, -\Delta, \mu; q^2) - \frac{1}{6} \mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_K, -\Delta, \mu; q^2),
\end{aligned} \tag{4.95}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,\Xi^*-}(q^2) &= \frac{\psi_{\Xi^*-}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 - \frac{5}{54} \mathcal{H}^2 \tilde{I}_a(m_\pi, 0, \mu; q^2) - \frac{5}{27} \mathcal{H}^2 \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) \\
&\quad - \frac{1}{6} \mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_\pi, -\Delta, \mu; q^2) - \frac{1}{3} \mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_K, -\Delta, \mu; q^2),
\end{aligned} \tag{4.96}$$

$$F_{2,\Omega^-}(q^2) = \frac{\psi_{\Omega^-}}{\Lambda_\chi} \zeta_1 - \frac{5}{18} \mathcal{H}^2 \tilde{I}_a(m_K, 0, \mu; q^2) - \frac{1}{2} \mathcal{C}^2 \tilde{I}_a(m_K, -\Delta, \mu; q^2), \tag{4.97}$$

donde  $\Lambda_\chi = 4\pi f$  y los coeficientes  $\psi_B$  son [21]

$$\psi_n = -(\mathcal{C}^2 - 6DF), \tag{4.98}$$

$$\psi_p = \frac{1}{2}(\mathcal{C}^2 - 5D^2 - 6DF - 9F^2), \tag{4.99}$$

$$\psi_{\Sigma^-} = \frac{1}{2}(\mathcal{C}^2 + 5D^2 - 6DF + 9F^2), \tag{4.100}$$

$$\psi_{\Sigma^0} = \frac{1}{2}(\mathcal{C}^2 - 6DF), \tag{4.101}$$

$$\psi_{\Sigma^+} = \frac{1}{2}(\mathcal{C}^2 - 5D^2 - 6DF - 9F^2), \tag{4.102}$$

$$\psi_{\Xi^-} = \frac{1}{2}(\mathcal{C}^2 + 5D^2 - 6DF + 9F^2), \tag{4.103}$$

$$\psi_{\Xi^0} = -(\mathcal{C}^2 - 6DF), \tag{4.104}$$

$$\psi_\Lambda = -\frac{1}{2}(\mathcal{C}^2 - 6DF), \tag{4.105}$$

$$\psi_{\Delta^{++}} = -\frac{1}{2}(\mathcal{C}^2 + \frac{5}{9}\mathcal{H}^2), \tag{4.106}$$

$$\psi_{\Delta^+} = -\frac{1}{2}(\mathcal{C}^2 + \frac{5}{9}\mathcal{H}^2), \tag{4.107}$$

$$\psi_{\Delta^0} = 0, \tag{4.108}$$

$$\psi_{\Delta^-} = -\frac{1}{2}(\mathcal{C}^2 + \frac{5}{9}\mathcal{H}^2), \quad (4.109)$$

$$\psi_{\Sigma^{*+}} = -\frac{1}{2}(\mathcal{C}^2 + \frac{5}{9}\mathcal{H}^2), \quad (4.110)$$

$$\psi_{\Sigma^{*0}} = 0, \quad (4.111)$$

$$\psi_{\Sigma^{*-}} = -\frac{1}{2}(\mathcal{C}^2 + \frac{5}{9}\mathcal{H}^2), \quad (4.112)$$

$$\psi_{\Xi^{*0}} = 0, \quad (4.113)$$

$$\psi_{\Xi^{*-}} = -\frac{1}{2}(\mathcal{C}^2 + \frac{5}{9}\mathcal{H}^2), \quad (4.114)$$

$$\psi_{\Omega^-} = -\frac{1}{2}(\mathcal{C}^2 + \frac{5}{9}\mathcal{H}^2). \quad (4.115)$$

Las expresiones anteriores dependen del parámetro libre  $\zeta_1$ , el cual debe ser determinado del experimento.

Sin embargo, estas expresiones son consistentes en el formalismo combinado en  $m_s$  y  $1/N_c$ .

## 4.5. El radio magnético cuadrático medio de bariones

Un observable interesante que puede obtenerse a partir de los resultados anteriores es el radio magnético cuadrático medio de los bariones. Por definición,

$$\begin{aligned} \langle r_B^2 \rangle &= -\frac{6}{\kappa_B} \frac{d}{dq^2} G_{M0}(q^2) \Big|_{q^2=0} \\ &= -\frac{6}{\kappa_B} \frac{d}{dq^2} [F_1(q^2) + F_2(q^2)] \Big|_{q^2=0}. \end{aligned} \quad (4.116)$$

Ante la falta de información, esta observable deberá ser obtenida posteriormente cuando los parámetros se conozcan con precisión.

# Capítulo 5

## Conclusiones y perspectivas.

El trabajo de investigación desarrollado en esta tesis involucra el cálculo del factor de forma de Pauli de bariones,  $F_2(q^2)$ , en un formalismo combinado en teoría de perturbaciones quirales y la expansión  $1/N_c$  de QCD. Este factor de forma, en el límite  $q^2 \rightarrow 0$ , se parametriza en términos del momento magnético anómalo de barión, es decir,  $F_2(0) = \kappa_B$ . El factor de forma de Pauli adquiere correcciones a un loop a orden  $\mathcal{O}(m_s^{1/2})$  a partir del diagrama mostrado en la Fig. (4.1). El cálculo analítico del diagrama resultante consta de dos partes. Una de ellas consiste en evaluar la estructura de grupo de los operadores de bariones involucrados y la otra consiste en calcular la integral sobre el loop resultante.

El cálculo explícito de la estructura de grupos para el diagrama ha sido evaluado en su totalidad en la Ref. [57]. Por tanto, la contribución más importante de este trabajo ha sido el cálculo semianalítico de la integral sobre el loop, conteniendo explícitamente la diferencia de masas entre el octete y el decuplete de bariones,  $\Delta \sim 0.231$  MeV. Este análisis tiene algunas peculiaridades que vale la pena mencionar. La integral sobre el loop tiene una estructura de Lorentz bien definida. La parte temporal se asocia al factor de forma de Dirac mientras que la parte espacial está asociada al factor de forma de Pauli. Mediante un análisis general, se ha aislado la estructura que nos concierne. Los métodos utilizados para realizar el cálculo son los convencionales, es decir, utilizar la parametrización de Feynman para simplificar en lo posible la expresión resultante. La divergencia de esta integral se ha identificado, junto con los términos finitos que la acompañan; en este sentido se tiene un resultado completamente analítico. Sin embargo, existe una parte de la integral que no ha sido posible calcular analíticamente y ha sido expresada en términos de una integral sobre uno de los parámetros de Feynman introducidos originalmente. Esto no es un retroceso, pues

---

pues el resultado semianalítico así obtenido cumple con los límites y condiciones a la frontera físicamente admisibles.

Una vez que se obtienen la estructura de grupo y la integral sobre el loop, el factor de forma  $F_2(q^2)$  puede obtenerse sin dificultad. Un aspecto importante que hay que resaltar es que las distintas contribuciones de sabor al factor de forma pueden identificarse de forma explícita. Una ventaja adicional es que los coeficientes de los operadores de la expansión  $1/N_c$  utilizados pueden ser relacionados con los invariantes de  $SU(3)$  introducidos en teoría de perturbaciones quirales para bariones pesados,  $D$ ,  $F$ ,  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{H}$ , a través de las formas lineales (4.79). Estas expresiones en principio podrían compararse con sus contrapartes obtenidas en la teoría quiral. Esta comparación deberá ser hecha cuando existan expresiones en la literatura.

Un observable que puede ser evaluado con las expresiones resultantes es el radio magnético cuadrático medio para bariones. Desafortunadamente la información experimental disponible [62] es escasa; ésto constituye un trabajo a futuro que deberá completarse.

Mientras tanto, las expresiones obtenidas representan un primer avance importante en el tema.



# Bibliografía

- [1] J. W. Rohlf, *Modern Physics from  $\alpha$  to  $Z^0$* , primera edición, Wiley, New York, 1994.
- [2] R. M. Eisberg, *Fundamentos de Física Moderna*, primera edición, Limusa, México, 2000.
- [3] B. Povh, K. Rith, C. Scholz y F. Zetsche *Particles and Nuclei. An Introduction to the Physical Concepts*, tercera edición, Springer, Berlin, 2002.
- [4] W. Greiner, S. Schramm y E. Stein *Quantum Chromodynamics*, segunda edición, Spriger, Berlin, 2002.
- [5] Ta-Pei Cheng y Ling-Fong Li *Gauge theory of elementary particles physics*, primera edición, Oxford, London, 2004.
- [6] F. E. Close *An introduction to quarks and partons*, primera edición, Academic Press, London, 1979.
- [7] Ulrich F. Schröder, *Special Relativity*, primera edición, World Scientific, New York, 1990.
- [8] S. T. Thornton y J. B. Marion, *Classical dynamics of particles and systems*, quinta edición, Thomson Brooks-Cole, New York, 1994.
- [9] Herbert Goldstein, *Classical Mechanics*, segunda edición, Wiley, New York, 1994.
- [10] L. D. Landau y E. Lifshitz, *Mecánica*, segunda edición, Reverté, México, 1970.
- [11] Fayyazuddin y Riazuddin *A modern introduction to particle physics*, segunda edición, World Scientific, New York, 2000.
- [12] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics. Wave equations*, tercera edición, Springer, Berlin, 1994.

- 
- [13] María de los Ángeles Hernández-Ruíz *Tesis de doctorado. Universidad Autónoma de San Luis Potosí*, 2012.
- [14] J. D. Bjorken y S. D. Drell *Relativistic Quantum Mechanics*, primera edición, McGraw-Hill, New York, 1998.
- [15] A. Wachter *Relativistic Quantum Mechanics*, primera edición, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [16] H. M. Pilkuhn *Relativistic Quantum Mechanics*, primera edición, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [17] F. J. Ynduráin *Mecánica Cuántica Relativista*, primera edición, Alianza Editorial, Madrid, 1990.
- [18] J. J. Sakurai *Advanced Quantum Physics*, primera edición, Thomson Brooks-Cole, New York, 2002.
- [19] S. Gasiorowicz *Elementary particle physics*, primera edición, Wiley, London, 1979.
- [20] Mayra Alejandra Rivera-Ruíz *Tesis de Licenciatura. Universidad Autónoma de San Luis Potosí*, 2015.
- [21] R. Flores-Mendieta y M. A. Rivera-Ruíz, *Phys. Rev. D* **9** 094026 (2015)
- [22] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, primera edición, Thomson Brooks-Cole, New York, 1994.
- [23] S. Gasiorowicz *Quantum Physics*, tercera edición, Wiley, New York, 2002.
- [24] L. D. Landau y E. M. Lifshitz *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*, tercera edición, Butterworth-Heinemann, New York, 1981.
- [25] K. Gottfried y T. M. Yan *Quantum Mechanics: Fundamentals*, segunda edición, Springer, New York, 2003.
- [26] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloe *Quantum Mechanics*, primera edición, Wiley, New York, 1978.
- [27] D. J. Griffiths *Introduction to Quantum Mechanics*, segunda edición, Pearson Prentice Hall, New York, 2004.
- [28] E. Merzbacher *Quantum Physics*, primera edición, Wiley, New York, 1997.
-

- 
- [29] A. W. Joshi *Elements of Group Theory for Physicists*, primera edición, Wiley, New York, 1982.
- [30] I. N. Herstein *Álgebra Moderna*, primera edición, Editorial Trillas, México, 1970.
- [31] N. Jeevanjee *An Introduction to Tensors and Group Theory for Physicists*, primera edición, Birkh'auser, New York, 2010.
- [32] S. Sternberg *Group Theory and Physics*, primera edición, Cambridge University Press, New York, 1994.
- [33] W. K. Tung *Group theory in physics*, tercera edición, Wiley, New York, 2002.
- [34] G. B. Arfken, H. J. Weber y F. E. Harris *Mathematical Methods for Physicists: A comprehensive guide*, séptima edición, Academic Press, New York, 2013.
- [35] M. L. Boas *Mathematical Methods in the physical sciences*, tercera edición, Wiley, New York, 2005.
- [36] D. A. McQuarrie *Statistical Mechanics*, primera edición, Harper & Row Publishers, New York, 1973.
- [37] C. Kittel *Elementary Statistical Physics*, primera edición, Wiley, New York, 1958.
- [38] C. Kittel *Introduction to Solid State Physics*, tercera edición, Wiley, New York, 1996.
- [39] F. Reif *Física Estadística*, segunda edición, Editorial Reverté, México, 1999.
- [40] S. R. A. Salinas *Introduction to Statistical Physics*, primera edición, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [41] J. D. Jackson *Classical Electrodynamics*, tercera edición, Wiley, New York, 1999.
- [42] R. K. Wangsness *Campos Electromagnéticos*, primera edición, Noriega Limusa Editores, México, 2001.
- [43] M. A. Heald y J. B. Marion *Classical Electromagnetic Radiation*, tercera edición, Brooks Cole, New York, 1994.
- [44] P. Lorrain y D. R. Corson *Electromagnetism: Principles and applications*, tercera edición, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1978.
-

- 
- [45] J. R. Reif, F. J. Milford y R. W. Christy *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*, tercera edición, Adisson-Wesley, México, 1979.
- [46] D. J. Griffiths *Introduction to Electrodynamics*, tercera edición, Prentice-Hall, London, 1999.
- [47] L. Eyges *The Classical Electromagnetic Field*, primera edición, Dover Publicacions, New York, 1980.
- [48] W. H. K. Panofsky y M. Phillips Gasiorowicz *Quantum Physics*, primera edición, Dover Publications, New York, 1962.
- [49] L. H. Ryder *Quantum Field Theory*, segunda edición, Cambridge University Press, London, 1996.
- [50] M. D. Schwartz *Quantum Field Theory and the Standard Model*, primera edición, Cambridge University Press, London, 2013.
- [51] E. Jenkins *Chiral Lagrangian for baryons in the  $1/N_c$  expansion*, Phys. Rev. D **53**, 2325 (1996).
- [52] Giovanna Ahuatzin-Flores *Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de San Luis Potosí*, 2010.
- [53] R. Dashen y A. V. Manohar, Phys. Lett. B **315**, 425 (1993).
- [54] J-L. Gervais y B. Sakita, Phys. Rev. Lett. **52**, 87 (1984); Phys. Rev. D **30**,1795(1984)..
- [55] J. Dai, R. Dashen, E. Jenkins y A. V. Manohar *Flavor symmetry breaking in the  $1/N_c$  expansion*, Phys. Rev. D **53**,273 (1996).
- [56] E. Jenkins *Barion masses in chiral perturbation theory*, Phys. Rev. B, **368**, 190 (1992).
- [57] R. Flores-Mendieta y J. L. Goity *Baryon vector current in the chiral and  $1/N_c$  expansions*, Phys. Rev. D, **90**, 114008 (2014).
- [58] R. Dashen, E. Jenkins y A. V. Manohar *Spin-flavor structure of large  $N_c$  baryons*, Phys. Rev. D **51**, 3697 (1995).
- [59] R. Flores-Mendieta, M. A. Hernández-Ruíz y C. P. Hofmann, Phys. Rev. D **74**, 094001 (2006).
- [60] E. Jenkins *Chiral corrections to the baryon axial currents*, Phys. Rev. B **259**, 353 (1991).
-

- 
- [61] E. Jenkins *Baryon chiral perturbation theory using a heavy fermion lagrangian*, Phys. Rev. B **255**, 558 (1991).
- [62] K. A. Olive et al (Particle Data Group Collaboration), Chin. Phys. C **38**, 090001 (2014).