

“Con fundamento en los artículos 21 y 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor y como titular de los derechos moral y patrimonial de la obra titulada ***“Efecto del Diámetro del Haz de Excitación en Gravimetría Atómica”***, Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias (Física), otorgo de manera gratuita y permanente a la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, la autorización para que difunda la obra en cualquier medio, incluido el electrónico, y la divulgue entre sus usuarios, profesores, estudiantes o terceras personas, sin que pueda percibir por tal divulgación una contraprestación”

Fecha presentación: 31/Enero/2020

Fecha autorización: 31/Enero/2020

Juan Mario Cervantes Martínez Estudiante

Dr. Eduardo Gómez García Asesor

Dr. John Alexander Franco Villafañe Co-asesor

Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Facultad de Ciencias

Instituto de Física Manuel Sandoval Vallarta

Laboratorio de Átomos Fríos

San Luis Potosí, México

2019



Efecto del Diámetro del Haz de Excitación en Gravimetría Atómica

Tesis para obtener el grado de Maestría en
Ciencias (Física)

Juan Mario Cervantes Martínez

Asesor

Dr. Eduardo Gómez García

Co-Asesor

Dr. John Alexander Franco Villafañe

Dedicado a...

Mi padre (Q.E.P.D.) y mi madre.

Índice

1. Resumen	1
2. Agradecimientos	2
3. Introducción	3
3.1. Visión General	3
3.2. Oscilaciones de Rabi	3
3.3. Esfera de Bloch	8
4. Campos separados, transiciones de momento y caída libre	10
4.1. Interferómetros de Ramsey y Mach-Zehnder	10
4.2. Transiciones de momento	15
4.3. Átomos en caída libre	16
5. Campos separados con un ancho de momentos	18
5.1. Transiciones de momento en una distribución de velocidades	18
5.2. Contraste como función de la temperatura en Ramsey	22
6. Mach-Zehnder con ancho de momentos	25
6.1. Spin-Echo en Átomos	25
6.2. Cancelación de fase acumulada	27
6.3. Contraste como función de la temperatura en Mach-Zehnder	30
7. Pulso selector de velocidades	33
7.1. Efecto de un pulso selector	33
7.2. Contraste como función de la frecuencia de Rabi del pulso selector	35
8. Ancho ideal del Raman	37
8.1. Simulación de Monte-Carlo	37
8.2. Efecto de un gradiente de intensidad sobre una distribución espacial de átomos	40
8.3. Curvas de Población y Contraste como función del ancho del Raman	42
9. Conclusión	48
10. Apéndice	49
11. Listado de programas para el laboratorio y su función	52

Índice de figuras

1.	Oscilaciones de Rabi entre dos niveles, el eje de tiempo esta en unidades de $\tau_\pi = \frac{\pi}{\Omega}$, esto es el tiempo en que le toma de pasar de $ \psi_1\rangle$ a $ \psi_2\rangle$, para esta gráfica $\Omega = 2\pi \times 10^3 Hz$ y $\delta = 0$	6
2.	Oscilaciones de Rabi con múltiples desintonías, $\Omega = 2\pi \times 10^3 Hz$	7
3.	Pico de resonancia en $\delta = 0$, para este caso $t = \tau_\pi$ y $\Omega = 2\pi \times 10^3 Hz$	8
4.	Oscilaciones de Rabi en la esfera de Bloch, la flecha azul representa al vector \vec{R} y la roja a $\vec{\Omega}$	9
5.	Esquema de interferometría de los campos separados de Ramsey.	10
6.	Patrón de interferencia de Ramsey. Para generar esta gráfica se tomaron los siguientes valores: $\Omega = 2\pi \times 10^3 Hz$, $\tau_1 = 2.5 \times 10^{-4} s$, $T_0 = 2.5 \times 10^{-3} s$	12
7.	Secuencia de pulsos para un interferómetro atómico Mach-Zehnder.	13
8.	Franjas de interferencia del interferómetro Mach-Zehnder. Para generar esta gráfica se tomaron los valores de $\Omega = 2\pi \times 10^3 Hz$, $\tau_1 = 2.5 \times 10^{-4} s$, $T_1 = 5 \times 10^{-3} s$, $\tau_2 = 5 \times 10^{-4} s$, $T_2 = 10^{-2} s$, $\tau_3 = 2.5 \times 10^{-4} s$	14
9.	Pulso π , con $\sigma_p = mv_R$, $\Omega = 2\pi \times 2 \times 10^3 Hz$, $\tau = 2.5 \times 10^{-4} s$, $\lambda = 780.241 nm$. (a) distribución inicial de velocidades en el estado $ g\rangle$. (b) distribución final de velocidades, la curva azul representa el estado $ g\rangle$ y la curva roja representa el estado $ e\rangle$	20
10.	Interferencia de Ramsey, aquí se muestran por separado las dos partes que contribuyen a $P_e(v)$, en este caso $ g(v) ^2$ fue reescalado para estar en la misma altura que $ C_e^{(2)}(v) ^2$, esta gráfica fue generada con los valores de $\Omega = 2\pi \times 10^3 Hz$, $\tau_1 = \tau_2 = 2.5 \times 10^{-4} s$, $T_0 = 2.5 \times 10^{-3} s$, $T = 10^{-9} K$, $m = 1.44316 \times 10^{-25} kg$	21
11.	Franjas de interferencia como función de la pendiente de la rampa Δ . Los valores para generar estas gráficas fueron $\Omega = 2\pi \times 10^3 Hz$, $\tau_1 = \tau_2 = 2.5 \times 10^{-4} s$, $T_0 = 20 \times 10^{-3} s$, $m = 1.44316 \times 10^{-25} kg$, (a) $T = 10^{-15} K$, (b) $T = 2 \times 10^{-13} K$	23
12.	Contraste como función de la temperatura, el eje horizontal esta en escala logarítmica, esta gráfica fue generada con los valores de $\Omega = 2\pi \times 10^3 Hz$, $\tau_{1,2} = 2.5 \times 10^{-4} s$, $T_0 = 20 \times 10^{-3} s$, $m = 1.44316 \times 10^{-25} kg$, $\lambda = 780.241 \times 10^{-9} m$	25
13.	Ilustración del Eco de Spin. A) spin alineado con el campo magnético. B) un pulso con cierta duración y en una dirección ortogonal hace que el spin rote 90° . C) dispersión de los varios spines de la muestra. D) otro pulso con diferente duración y en la otra dirección ortogonal invierte a los spines. E) la dispersión continua y ahora los spines se comienzan a agrupar en la misma dirección. F) Cuando todos los spines se vuelven a agrupar en una sola dirección se vuelve a medir una magnetización. Imagen tomada de Gavin W. Morley.	26

14.	Eco de Spin en átomos, al final justo cuando el eco se presenta se hace un ultimo pulso $\frac{\pi}{2}$	27
15.	Interferencia de Mach-Zehnder, $ g(v) ^2$ fue reescalado para estar en la misma altura que $ C_e^{(2)}(v) ^2$, esta gráfica fue generada con los valores de $\Omega = 2\pi \times 10^3 \text{Hz}$, $\tau_1 = \tau_3 = 2.5 \times 10^{-4} \text{s}$, $\tau_2 = 5 \times 10^{-4} \text{s}$, $T_1 = 2.5 \times 10^{-3} \text{s}$, $T = 10^{-9} \text{K}$, $m = 1.44316 \times 10^{-25} \text{kg}$, $\lambda = 780.241 \times 10^{-9} \text{m}$. Este programa se llama «Mach-zehnder maxwell-boltzmann detuning distribution.nb».	28
16.	Transferencia de fase a los coeficientes del estado del átomo.	30
17.	Franjas de interferencia para el interferómetro Mach-Zehnder como función de la pendiente de la rampa Δ . Los valores para generar estas gráficas fueron $\Omega = 2\pi \times 10^3 \text{Hz}$, $\tau_1 = \tau_3 = 2.5 \times 10^{-4} \text{s}$, $\tau_2 = 5 \times 10^{-4} \text{s}$, $T_1 = 20 \times 10^{-3} \text{s}$, $T_2 = 40 \times 10^{-3} \text{s}$, $m = 1.44316 \times 10^{-25} \text{kg}$, (a) $T = 10^{-12} \text{K}$, (b) $T = 10^{-9} \text{K}$. Este programa se llama «franjas mach-zehnder temperatura.nb».	31
18.	Contraste como función de la temperatura para ambos interferómetros, esta figura fue generada con los valores de $\Omega = 2\pi \times 10^3 \text{Hz}$. Para el interferómetro de Ramsey $\tau_1 = \tau_2 = 2.5 \times 10^{-4} \text{s}$, $T_0 = 20 \times 10^{-3} \text{s}$. Para el interferómetro de Mach-Zehnder $\tau_1 = \tau_3 = 2.5 \times 10^{-4} \text{s}$, $\tau_2 = 2\tau_1$, $T_1 = 20 \times 10^{-3} \text{s}$. Las temperaturas limite para ambos interferómetros fueron calculadas con las ecuaciones (81) y (99). Este programa se llama «contraste mach-zehnder temperatura.nb».	32
19.	Acción del pulso selector.	33
20.	Franjas con distinta frecuencia de Rabi del pulso selector. (a) $\Omega_{SP} = 2\pi \times 10^2 \text{Hz}$ con un contraste de .887, (b) $\Omega_{SP} = 2\pi \times 10^3 \text{Hz}$ con un contraste de .4435. La temperatura inicial de la nube es de $1\mu\text{K}$ y la frecuencia de Rabi de la secuencia interferometrica es $\Omega = 2\pi \times 10^3 \text{Hz}$. Este programa se llama «franjas mach-zehnder pulso selector.nb».	36
21.	Contraste como función de la frecuencia de Rabi del pulso selector. La temperatura original de la nube es de $1\mu\text{K}$. La frecuencia de Rabi de la secuencia interferometrica es de $2\pi \times 10^3 \text{Hz}$. Este programa se llama «contraste mach-zehnder pulso selector.nb».	37
22.	(a) Distribución unidimensional de átomos con $\sigma_x = .14 \times 10^{-2} \text{m}$. (b) Distribución bidimensional de átomos con $\sigma_r = .14 \times 10^{-2} \text{m}$. El eje vertical muestra cuantos átomos hay dentro de una casilla de dimensiones $\sigma_x/5$, para el caso bidimensional el eje vertical muestra cuantos átomos hay en una casilla de dimensiones $\sigma_x/5$ y $\sigma_y/5$ con $\sigma_y = \sigma_x$. Este programa se llama «monte-carlo posiciones.nb».	38

23.	Perfil de intensidades sobre una distribución bidimensional de átomos. El eje vertical indica cuantos átomos se encuentran en la casilla de dimensiones $\frac{\sigma_r}{5}$ (histograma) y también indica la intensidad de la radiación (reescalada). Para este caso tanto el perfil de la intensidad de luz como la distribución espacial de átomos poseen el mismo ancho. Este programa se llama «oscilaciones rabi distribucion espacial.nb».	40
24.	Oscilaciones de Rabi de un ensamble de átomos. Cuando todos los átomos son irradiados con un ancho mas grande del perfil de intensidad ($\frac{\sigma_R}{\sigma_r} = 10$) estos realizan todos colectivamente las mismas oscilaciones, a diferencia de cuando el ancho es pequeño ($\frac{\sigma_R}{\sigma_r} = 1$) la coherencia entre las oscilaciones se pierde rápidamente. Este programa se llama «oscilaciones rabi distribucion espacial.nb».	41
25.	Fracción total de átomos y contraste de las franjas como función del ancho del perfil de intensidad. σ_R fue variado desde $1 \times \sigma_r$ hasta $10 \times \sigma_r$. La potencia del láser para este calculo fue de $60mW$. Este programa se llama «ancho ideal del raman.nb».	44
26.	Curvas de la población fraccional de la colección de átomos después del pulso selector en función del ancho del perfil de intensidad.	45
27.	Curvas del contraste de las franjas al final de la secuencia interferometrica de la colección de átomos en función del ancho del perfil de intensidad.	46
28.	Precisión a varias potencias como función del ancho del perfil de intensidad. Los puntos negros son los máximos de cada una de las curvas. Este programa se llama «análisis datos ancho ideal raman.nb».	47
29.	Ancho ideal del perfil de intensidad de los láseres que realizan las transiciones Raman en función de la potencia. Este programa se llama «análisis datos ancho ideal raman.nb».	48

1. Resumen

En esta tesis se desarrollaron varios programas computacionales que contribuirán a entender los resultados de futuras mediciones en el Laboratorio de Átomos Fríos en el Instituto de Física de la UASLP, explicando la teoría detrás de cada uno de los fenómenos y sus resultados tales como el contraste como función de la temperatura en un interferómetro Mach-Zehnder, el contraste como función de la frecuencia de Rabi del pulso selector y el ancho ideal del perfil de intensidad del láser que realiza las transiciones Raman como función de su potencia. En nuestros programas encontramos una muy alta dependencia del contraste como función de la temperatura y establecimos una temperatura límite, la cual nos dice que por debajo de este valor el contraste aumenta significativamente. Proponemos como solución de esta dependencia del contraste como función de la temperatura la implementación de un pulso selector el cual nos ayuda a aumentar el contraste de las franjas de interferencia aun teniendo temperaturas no tan bajas (del orden de microkelvins). Por ultimo, mostramos los efectos que tiene un gradiente de intensidad sobre una distribución espacial de átomos y logramos obtener el ancho ideal del perfil de intensidad como función de la potencia del láser. Estos programas se encuentran listos para su uso por alumnos que se unan al Laboratorios de Átomos Fríos en un futuro.

2. Agradecimientos

Quiero agradecer a CONACyT por el apoyo económico brindado a lo largo de este proyecto. Le agradezco por todo su tiempo y paciencia a mis asesores Dr. Eduardo Gómez y Dr. John Alexander Franco y también por todo el conocimiento que me han impartido, los considero modelos a seguir en la vida, sin ellos no podría haber realizado este trabajo y haber concluido esta etapa de mi vida. A mi madre por todo el apoyo moral incondicional. A mi compañera sentimental Sandra que siempre me ha dado apoyo en todo y me acompañó durante momentos difíciles. A todos mis profesores durante mi estancia en la maestría en especial al Dr. Antonio Morelos Pineda por su apoyo académico y al Dr. Faustino Aguilera por siempre brindarme una charla agradable y su apoyo académico y moral. Quiero agradecer también a todos mis compañeros de Maestría, a Johann y a Guillermo que somos de la misma generación de licenciatura y siempre hemos sido buenos amigos y compañeros académicos, a Aaron por acompañarme en todo estilo de actividades y por su constante apoyo académico y moral, a mis otros compañeros de generación Oliver, Nazareth, Cecilia, Rodrigo y Edgar por todos los momentos divertidos que tuvimos, a mis compañeros intergeneracionales Omar, Jesús, Diego y Alberto por toda su amabilidad y buenas memorias.

3. Introducción

3.1. Visión General

Los interferómetros son herramientas de investigación utilizadas en muchos campos de la ciencia y la ingeniería. Desde su primera aplicación en 1887 [16] los interferómetros han estado en constante evolución y se han vuelto herramientas indispensables. No fue hasta 1924 que en la tesis de PhD De Broglie, postulo que los electrones tienen un comportamiento ondulatorio, posteriormente estas ideas se extendieron a todas las partículas que forman la materia y debido a esto la interferencia con ondas de materia es una herramienta que puede ser utilizada. La separación completa de paquetes de ondas de materia fue observada por primera vez por Esterman y Stern en 1930, cuando un haz de Na fue difractado de una superficie de NaCl [17] y el primer interferómetro atómico reportado era un experimento similar a la doble rendija de Young con átomos de helio meta-estables realizado por Carnal y Mlynek en 1991 [18].

Debido a las múltiples propiedades de los átomos, esto hace que la interferometría atómica sea una técnica con muchas aplicaciones. Actualmente la emplean para medir la constante de gravitación universal G [19], para determinar la constante de estructura de Na [20], medir rotaciones [21], corroborar la universalidad de la cada libre [22], etc. En el Laboratorio de Átomos Fríos del Instituto de Física estamos interesados en realizar mediciones de la aceleración de la gravedad g con un alto grado de precisión. En un interferómetro atómico existen varios factores externos tales como la expansión de la nube atómica, la temperatura de la nube, etc., estos factores afectan a la señal medida y sus efectos han sido estudiados [12, 14, 15] pero estos estudios no se han realizado sobre toda una secuencia de un interferómetro atómico. En esta tesis nos enfocaremos en el desarrollo de programas que modelen el efecto que tiene la temperatura de la nube atómica, la frecuencia de Rabi de un pulso selector de velocidades y el ancho del perfil de intensidad del haz Raman sobre la nube atómica, en el contraste de las franjas de interferencia usando una secuencia de interferometría atómica tipo Mach-Zehnder con pulsos $\frac{\pi}{2} - \pi - \frac{\pi}{2}$.

3.2. Oscilaciones de Rabi

En este capítulo se introducirán los conceptos básicos de los fenómenos que se presentan en los siguientes capítulos. En el ámbito de manipulación atómica uno de los importantes fenómenos es conocido como oscilaciones de Rabi, esto es, un potencial dependiente del tiempo estará interactuando con la estructura interna del átomo, generando transiciones entre sus estados propios, podemos escribir al hamiltoniano como:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t) \tag{1}$$

dónde H_0 es el hamiltoniano del átomo en el espacio libre y $V(t)$ es un potencial que depende del tiempo. Si usamos como base los estados-propios del átomo, sin la presencia de la radiación, podemos escribir al estado total del átomo como

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) e^{-i\omega_n t} |\psi_n\rangle \quad (2)$$

donde la función de onda total cumple con la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle \quad (3)$$

y los estados $|\psi_n\rangle$ cumplen con la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$\hat{H}_0 |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle \quad (4)$$

por el momento los coeficientes $c_n(t)$'s son desconocidos y el trabajo es encontrarlos, si combinamos las ecuaciones (2) y (3) lo que obtenemos son ecuaciones diferenciales acopladas para los coeficientes de la superposición. Específicamente para el caso de dos niveles estas ecuaciones son:

$$i\hbar \dot{c}_1(t) = V_{11}(t)c_1(t) + V_{12}(t)e^{-i\omega_a t}c_2(t) \quad (5)$$

$$i\hbar \dot{c}_2(t) = V_{22}(t)c_2(t) + V_{21}(t)e^{i\omega_a t}c_1(t) \quad (6)$$

donde

$$V_{nm}(t) = \langle \psi_n | \hat{V}(t) | \psi_m \rangle \quad (7)$$

$$\omega_a = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}; \quad E_2 > E_1 \quad (8)$$

En muchos casos para un cierto potencial $\hat{V}(t)$ cuando $n=m$ el elemento de matriz $V_{nm}(t)$ es cero, esto nos da como resultado un sistema de ecuaciones diferenciales fácil de desacoplar, supongamos que el potencial temporal de interacción es de la siguiente forma

$$\hat{V}(t) = \frac{\hbar\Omega}{2} e^{i\omega_1 t} |\psi_1\rangle \langle \psi_2| + \frac{\hbar\Omega^*}{2} e^{-i\omega_1 t} |\psi_2\rangle \langle \psi_1| \quad (9)$$

donde a Ω se le conoce como la frecuencia de Rabi, los elementos de matriz son

$$V_{11}(t) = 0, \quad V_{12}(t) = \frac{\hbar\Omega}{2} e^{i\omega_1 t}, \quad V_{21}(t) = \frac{\hbar\Omega^*}{2} e^{-i\omega_1 t}, \quad V_{22}(t) = 0 \quad (10)$$

y ahora las ecuaciones diferenciales acopladas para los coeficientes son

$$i\hbar \dot{c}_1(t) = \frac{\hbar\Omega}{2} e^{i\delta t} c_2(t) \quad (11)$$

$$i\hbar \dot{c}_2(t) = \frac{\hbar\Omega^*}{2} e^{-i\delta t} c_1(t) \quad (12)$$

donde definimos a la desintonía δ como:

$$\delta = \omega_l - \omega_a$$

Hasta aquí la mecánica cuántica nos ayudo, lo que sigue es resolver un sistema de ecuaciones diferenciales. Si derivamos a la ecuación (11) una vez con respecto al tiempo obtenemos

$$i\hbar\ddot{c}_1(t) = \frac{\hbar\Omega}{2}e^{i\delta t}\dot{c}_2(t) + i\frac{\hbar\Omega}{2}\delta e^{i\delta t}c_2(t) \quad (13)$$

si sustituimos ahora a las ecuaciones (11) y (12) en la ecuación (13) obtenemos la ecuación (14)

$$\ddot{c}_1(t) - i\delta\dot{c}_1(t) + \frac{|\Omega|^2}{4}c_1(t) = 0 \quad (14)$$

haciendo el mismo procedimiento pero derivando ahora a la ecuación (12) obtenemos la siguiente ecuación

$$\ddot{c}_2(t) + i\delta\dot{c}_2(t) + \frac{|\Omega|^2}{4}c_2(t) = 0 \quad (15)$$

no importa cual de estas dos ecuaciones decidamos resolver primero, cualquiera de estas dos opciones nos lleva al mismo resultado, ademas existe una tercera ecuación que c_1 y c_2 deben cumplir

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1 \quad (16)$$

esto es, la probabilidad de encontrar al átomo en cualquiera de estos dos estados siempre es igual a 1. Si para la ecuación (15) proponemos una solución de la forma $c_2 = Ae^{\lambda t}$ obtenemos la siguiente ecuación algebraica para los posibles valores de λ

$$\lambda^2 + i\delta\lambda + \frac{|\Omega|^2}{4} = 0 \quad (17)$$

los valores de λ son

$$\lambda_{1,2} = -\frac{i\delta}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{\delta^2 + |\Omega|^2} \quad (18)$$

o si hacemos la siguiente sustitución

$$\tilde{\Omega} = \sqrt{\delta^2 + |\Omega|^2} \quad (19)$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{i\delta}{2} \pm \frac{i}{2}\tilde{\Omega} \quad (20)$$

esto nos dice que hay dos soluciones de la forma $Ae^{\lambda t}$, si tomamos una superposición de estas dos obtenemos

$$c_2(t) = e^{-i\frac{\delta}{2}t} \left(A e^{i\frac{\tilde{\Omega}}{2}t} + B e^{-i\frac{\tilde{\Omega}}{2}t} \right) \quad (21)$$

con las condiciones iniciales $c_1(0) = 1, c_2(0) = 0$, las soluciones son las ecuaciones (22) y (23)

$$c_2(t) = -i\frac{\Omega}{\tilde{\Omega}} e^{-i\frac{\delta}{2}t} \sin\left(\frac{\tilde{\Omega}}{2}t\right) \quad (22)$$

$$c_1(t) = e^{i\frac{\delta}{2}t} \left(\cos\left(\frac{\tilde{\Omega}}{2}t\right) + i\frac{\delta}{\tilde{\Omega}} \sin\left(\frac{\tilde{\Omega}}{2}t\right) \right) \quad (23)$$

Si graficamos el modulo cuadrado de estos coeficientes como función del tiempo, observamos como el átomo pasa de encontrarse con un 100 % de probabilidad en el estado propio $|\psi_1\rangle$, después a una superposición entre ambos estados, y después a estar con un 100 % de probabilidad en el estado propio $|\psi_2\rangle$, a esto se le conoce como oscilaciones de Rabi y estas están graficadas en la Figura 1.

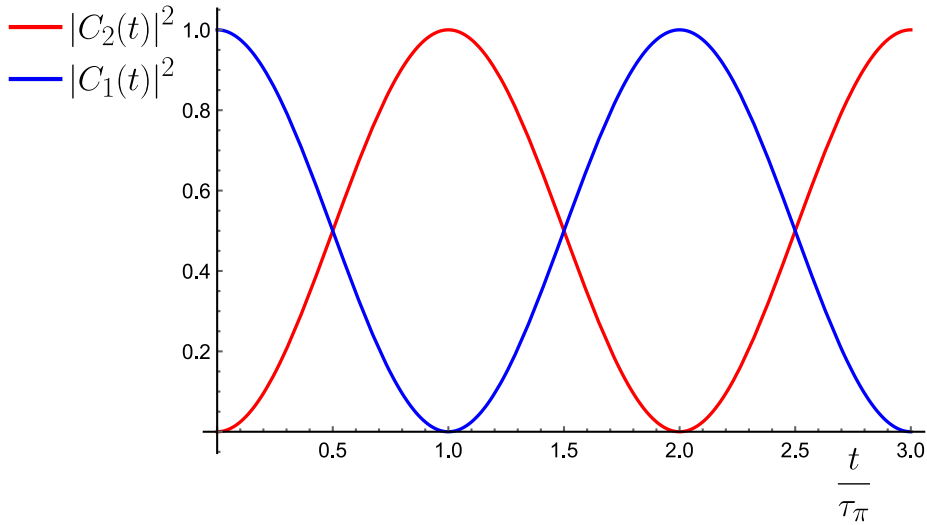


Figura 1: Oscilaciones de Rabi entre dos niveles, el eje de tiempo esta en unidades de $\tau_\pi = \frac{\pi}{\Omega}$, esto es el tiempo en que le toma de pasar de $|\psi_1\rangle$ a $|\psi_2\rangle$, para esta gráfica $\Omega = 2\pi \times 10^3 Hz$ y $\delta = 0$.

Lo que vemos en la Figura 1 es una transición de un estado cuántico a otro, vemos entonces que las transiciones estimuladas entre estados atómicos no son instantáneas (a excepción de decaimientos espontáneos). Es ahora importante ver el efecto que tiene δ sobre estas transiciones. Intuitivamente uno esperaría que exponer al átomo a una radiación Electromagnética con una frecuencia distinta a la de su transición no generaría una transferencia de población muy efectiva entre sus niveles; de la misma manera en como las ondas sonoras pueden excitar los modos de vibración de un sistema mecánico (ej: cuerda fija en dos

puntos), si la frecuencia es ligeramente distinta de la frecuencia fundamental, aun existe algo de excitación del sistema, es decir la cuerda comenzaría a oscilar pero no con tanta amplitud.

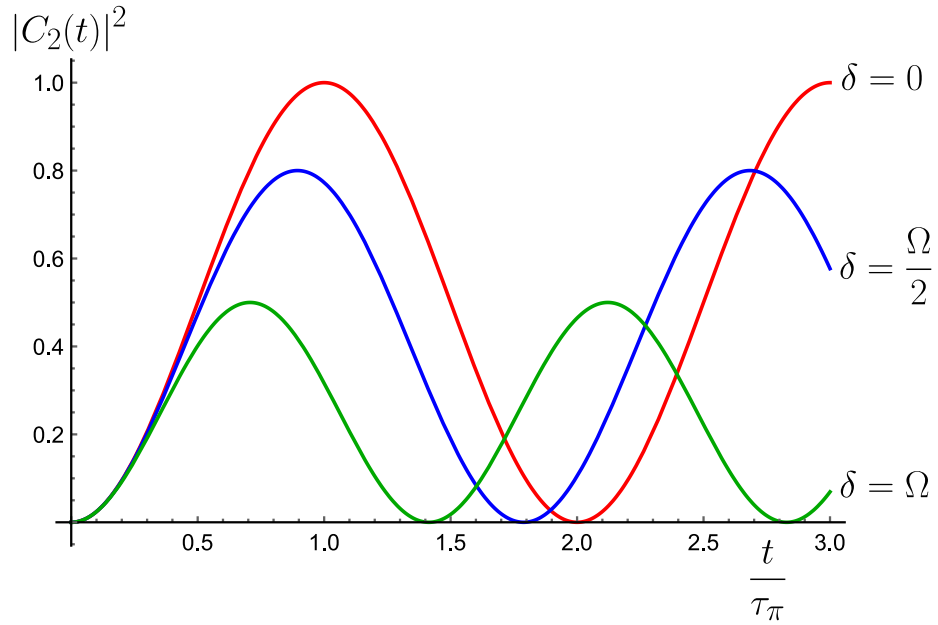


Figura 2: Oscilaciones de Rabi con múltiples desintonías, $\Omega = 2\pi \times 10^3 Hz$.

Podemos observar en la Figura 2 que conforme aumentamos la desintonía la amplitud de las oscilaciones disminuye pero a la vez la frecuencia de estas aumenta debido a que la frecuencia real de oscilación de los átomos esta dada por la ecuación (19). Otro comportamiento interesante de mostrar es si graficamos a $|c_2(t, \delta)|^2$ como función de la desintonía δ , dejando el tiempo constante.

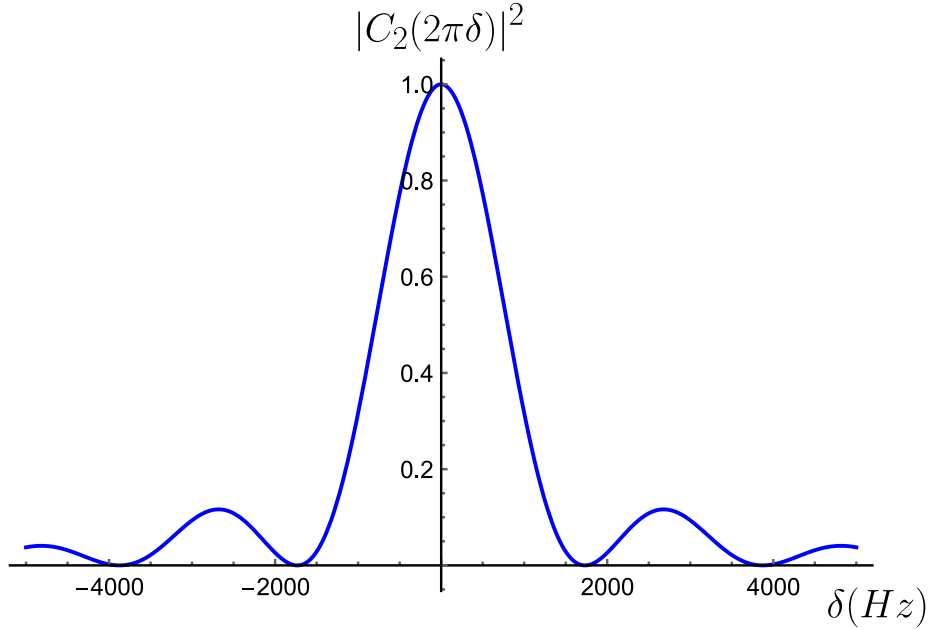


Figura 3: Pico de resonancia en $\delta = 0$, para este caso $t = \tau_\pi$ y $\Omega = 2\pi \times 10^3 \text{ Hz}$.

Como podemos apreciar en la Figura 3 lo que obtenemos es un pico de resonancia, donde $\delta = 0$ indica el máximo de la transición y a cualquier otro valor la transición disminuye en amplitud. La desintonía juega un papel crucial, frecuentemente los átomos no se encuentran fijos entonces tenemos que considerar el corrimiento Doppler para poder ajustar la frecuencia del láser, el cambio en frecuencia debido al efecto Doppler es

$$\Delta\omega = \vec{k} \cdot \vec{v} \quad (24)$$

3.3. Esfera de Bloch

Una manera geométrica de ver oscilaciones de Rabi es mediante el uso de la esfera de Bloch [5], si tenemos dos niveles y queremos describir un estado arbitrario necesitamos determinar a C_1 y C_2 , estas dos cantidades son números complejos, en una publicación clásica [13] Feynman, Vernon y Hellwarth consideraron una transformación a un marco rotacional donde combinaron las partes reales e imaginarias de los $C_k(t)$'s para formar tres parámetros reales

$$r_1 \equiv c_1 c_2^* + c_1^* c_2 \quad (25)$$

$$r_2 \equiv i(c_1 c_2^* - c_1^* c_2) \quad (26)$$

$$r_3 \equiv |c_2|^2 - |c_1|^2 \quad (27)$$

Las ecuaciones de la dinámica del sistema (11) , (12) pueden ser usadas para mostrar que, en el marco rotante, el vector \vec{R} cuyas componentes son los tres r_i 's previos

$$\vec{R} = (r_1, r_2, r_3)$$

obedece

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = -\vec{\Omega} \times \vec{R} \quad (28)$$

donde el vector $\vec{\Omega}$ tiene tres componentes

$$\vec{\Omega} = (Re(V_{1,2}(t)), Im(V_{1,2}(t)), \hbar\delta)$$

usualmente $V_{1,2}(t)$ es considerado real así que $Im(V_{1,2}(t))$ es cero y las componente de $\vec{\Omega}$ son

$$\vec{\Omega} = (Re(V_{1,2}(t)), 0, \hbar\delta)$$

La ecuación (28) muestra que el vector de Bloch \vec{R} precesa en el tiempo sin cambiar su longitud, y su movimiento esta confinado a la superficie de una esfera. Los polos sur y norte de la esfera corresponden a los estados $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ respectivamente, y los puntos en el ecuador representan a la superposición 50-50 con una fase distinta, en la Figura 4 se muestra como se vería una oscilación de Rabi en la esfera de Bloch, el vector \vec{R} precesa alrededor de $\vec{\Omega}$ confinado a la superficie de una esfera de radio 1.

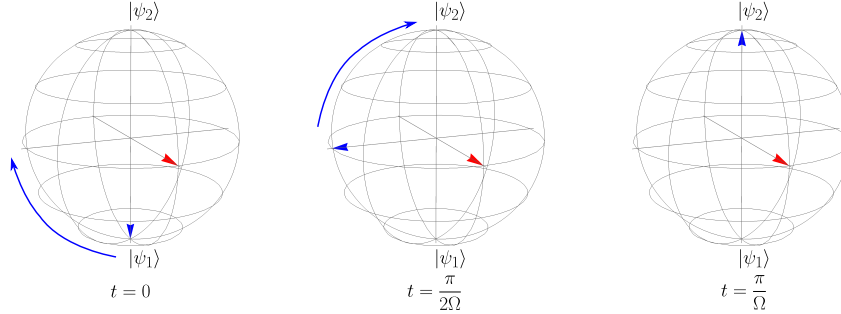


Figura 4: Oscilaciones de Rabi en la esfera de Bloch, la flecha azul representa al vector \vec{R} y la roja a $\vec{\Omega}$

4. Campos separados, transiciones de momento y caída libre

4.1. Interferómetros de Ramsey y Mach-Zehnder

Unas preguntas interesantes que uno puede hacerse es ¿Qué ocurre si hago oscilaciones de Rabi sobre un átomo durante cierto tiempo τ , después apago la radiación un cierto tiempo T_0 y vuelvo a encender la radiación después de este tiempo? ¿Cómo sería la evolución del estado después del tiempo a oscuras? A este proceso se le conoce como los campos separados de Ramsey y es la base de los interferómetros atómicos. A continuación analizaremos el problema de campos separados de Ramsey [1] el cual consiste de dos pulsos de luz con una cierta duración τ y con un tiempo a oscuras entre ellos de duración T_0 , para este caso podemos hacerlo de dos maneras, la primera es cambiar a la frecuencia de Rabi estática por una dependiente del tiempo, donde su dependencia temporal es simplemente la de dos escalones de duración τ separados por un tiempo T_0 , como se puede apreciar en la Figura 5. Haciéndolo de esta manera los resultados son los correctos pero no hay mucha información de lo que ocurre mientras la radiación está apagada.

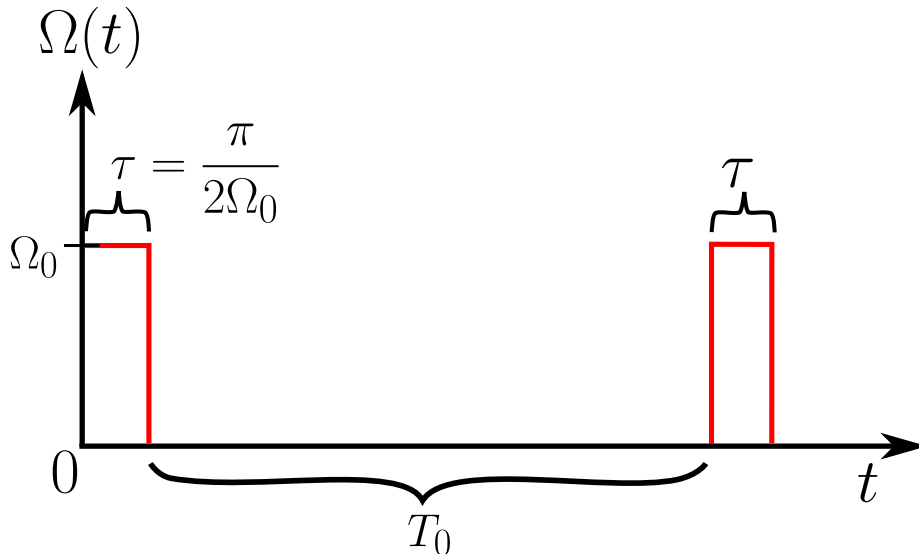


Figura 5: Esquema de interferometría de los campos separados de Ramsey.

De la segunda manera tomamos el hecho de que durante el tiempo a oscuras T_0 , la frecuencia de Rabi es cero $\Omega = 0$, en este caso los coeficientes son constantes $\dot{C}_a = \dot{C}_b = 0$. Pero cuando la radiación vuelve a ser encendida el tiempo cambia a ser $t + T_0$, y es donde se aprecia que en el tiempo a oscuras se acumula

una fase, pero esta fase solo sera impresa en los átomos después del segundo pulso. Las ecuaciones diferenciales para el primer pulso están dadas por

$$\dot{C}_g = -i\frac{\Omega^*}{2}e^{-i\delta t}C_e(t); \dot{C}_e = -i\frac{\Omega}{2}e^{i\delta t}C_g(t), \quad (29)$$

y las ecuaciones diferenciales para el segundo pulso están dadas por

$$\dot{C}_g = -i\frac{\Omega^*}{2}e^{-i\delta t}e^{-i\delta T_0}C_e(t); \dot{C}_e = -i\frac{\Omega}{2}e^{i\delta t}e^{i\delta T_0}C_g(t). \quad (30)$$

Las soluciones a las ecuaciones (29) o (30) para Ω y δ independientes del tiempo y con condiciones iniciales arbitrarias son

$$C_g(t) = e^{-i\frac{\delta}{2}t} \left\{ \left(\text{Cos} \left[\frac{\tilde{\Omega}}{2}t \right] + i\frac{\delta}{\tilde{\Omega}}\text{Sin} \left[\frac{\tilde{\Omega}}{2}t \right] \right) C_g(0) - i\frac{\Omega^*}{\tilde{\Omega}}\text{Sin} \left[\frac{\tilde{\Omega}}{2}t \right] C_e(0) \right\} \quad (31)$$

$$C_e(t) = e^{i\frac{\delta}{2}t} \left\{ \left(\text{Cos} \left[\frac{\tilde{\Omega}}{2}t \right] - i\frac{\delta}{\tilde{\Omega}}\text{Sin} \left[\frac{\tilde{\Omega}}{2}t \right] \right) C_e(0) - i\frac{\Omega}{\tilde{\Omega}}\text{Sin} \left[\frac{\tilde{\Omega}}{2}t \right] C_g(0) \right\}, \quad (32)$$

donde

$$\tilde{\Omega}(\delta) = \sqrt{\delta^2 + |\Omega|^2}.$$

La única diferencia entre las soluciones para (25) y (26) es que la frecuencia de Rabi cambia por un factor extra que contiene la fase acumulada $\Omega \Rightarrow \Omega e^{i\delta T_0}$. En la Figura 6 se grafica el modulo cuadrado del coeficiente del estado excitado al finalizar el segundo pulso como función de la desintonía, el patrón que observamos está compuesto de dos estructuras, una envolvente lenta relacionada con la forma de los pulsos y con un ancho proporcional a la frecuencia de Rabi Ω , y oscilaciones rápidas relacionadas con el tiempo a oscuras y con una separación entre franjas de $\frac{2\pi}{T_0}$. Lo que se observa es efectivamente un patrón de interferencia, en este patrón de interferencia la fase acumulada en el tiempo a oscuras juega un papel crucial ya que de ella depende la evolución temporal del estado cuando la radiación vuelve a estar presente.

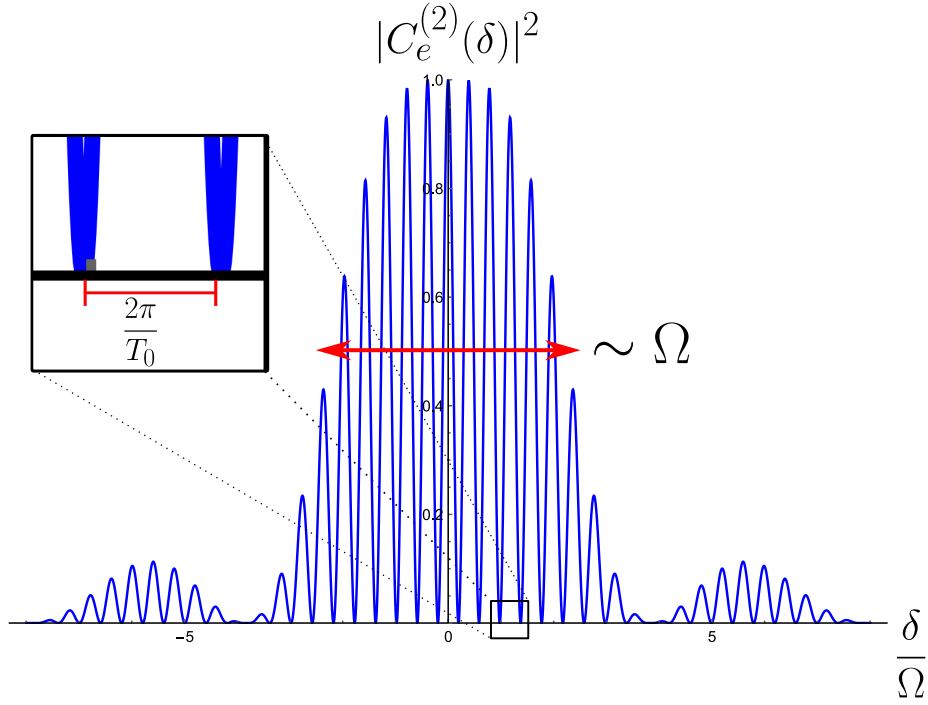


Figura 6: Patrón de interferencia de Ramsey. Para generar esta gráfica se tomaron los siguientes valores: $\Omega = 2\pi \times 10^3 \text{ Hz}$, $\tau_1 = 2.5 \times 10^{-4} \text{ s}$, $T_0 = 2.5 \times 10^{-3} \text{ s}$.

Las franjas de la Figura 6 están dadas por la siguiente ecuación

$$P_e(\delta) = \left| 2ie^{i\frac{\pi\delta}{4\Omega}} e^{i\frac{T_0\delta}{2}} \left[\frac{\Omega\delta}{\tilde{\Omega}^2} \text{Sin}^2 \left(\frac{\pi\tilde{\Omega}}{4\Omega} \right) \text{Sin} \left(\frac{T_0\delta}{2} - \frac{\pi\delta}{4\Omega} \right) - \frac{\Omega}{\tilde{\Omega}} \text{Cos} \left(\frac{\pi\tilde{\Omega}}{4\Omega} \right) \text{Sin} \left(\frac{\pi\tilde{\Omega}}{4\Omega} \right) \text{Cos} \left(\frac{T_0\delta}{2} - \frac{\pi\delta}{4\Omega} \right) \right] \right|^2. \quad (33)$$

Podemos considerar ahora el caso de un interferómetro de Mach-Zehnder, para este interferómetro es necesario 3 pulsos, en analogía con luz, primero separaremos al átomo en dos partes las cuales recorrerán caminos diferentes y después lo recombinamos. Lo que tenemos es entonces 3 pulsos de luz, dos de ellos con la misma duración $\tau_1 = \tau_3$ y uno de ellos con el doble de duración $\tau_2 = 2\tau_1$, y con dos tiempos a oscuras T_1 y T_2 entre los pulsos (Figura 7). De la misma manera como en el caso anterior podemos introducir esta dependencia temporal en las soluciones de manera explícita en la frecuencia de Rabi o simplemente podemos introducirla después como una fase añadida a las condiciones iniciales para los dos pulsos subsiguientes al primero.

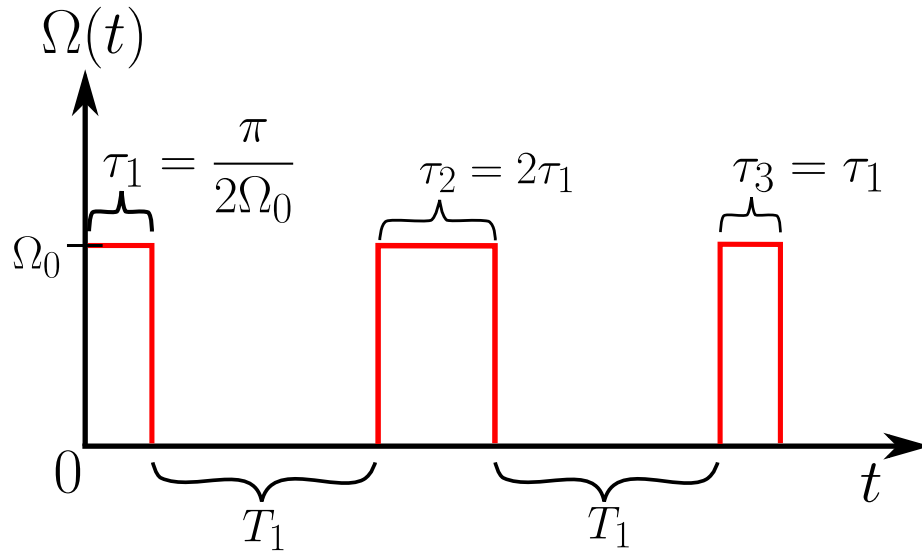


Figura 7: Secuencia de pulsos para un interferómetro atómico Mach-Zehnder.

En la Figura 8 estamos graficando el modulo cuadrado del coeficiente del estado excitado al finalizar el tercer pulso como función de la desintonía, las oscilaciones que se obtienen para esta secuencia de pulsos posee mas partes en su estructura, al igual que el caso anterior se puede observar una envolvente general la cual esta relacionada con la forma de los pulsos, y se pueden ver oscilaciones rápidas debido a los tiempos a oscuras. El cambio de tiempo para resolver la dinámica del ultimo pulso es $t' = t + 2T_1$, siendo $2\delta T_1$ la fase total acumulada hasta ese punto.

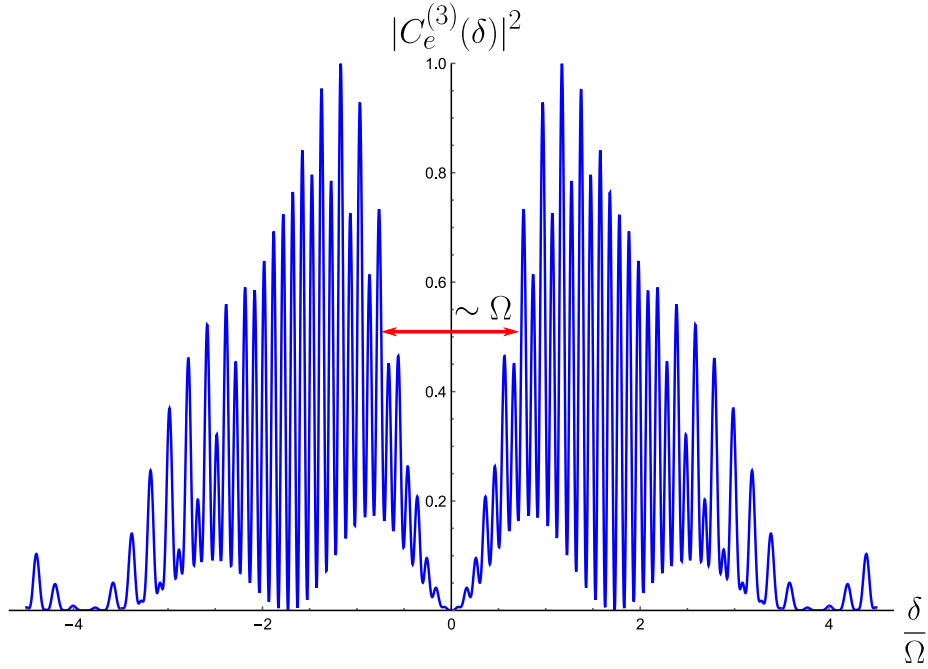


Figura 8: Franjas de interferencia del interferómetro Mach-Zehnder. Para generar esta gráfica se tomaron los valores de $\Omega = 2\pi \times 10^3 \text{ Hz}$, $\tau_1 = 2.5 \times 10^{-4} \text{ s}$, $T_1 = 5 \times 10^{-3} \text{ s}$, $\tau_2 = 5 \times 10^{-4} \text{ s}$, $T_2 = 10^{-2} \text{ s}$, $\tau_3 = 2.5 \times 10^{-4} \text{ s}$.

La ecuación que describe a las oscilaciones de la Figura 8 esta dada por

$$\begin{aligned}
P_e(\delta) = & \left| -i \frac{\Omega}{\tilde{\Omega}} \text{Cos} \left[\frac{\pi \tilde{\Omega}}{4\Omega} \right] \text{Cos} \left[\frac{\pi \tilde{\Omega}}{2\Omega} \right] \text{Sin} \left[\frac{\pi \tilde{\Omega}}{4\Omega} \right] \left(e^{iT_2 \delta} e^{-i \frac{\pi \delta}{2\tilde{\Omega}}} + e^{i \frac{\pi \delta}{\tilde{\Omega}}} \right) \right. & (34) \\
& + \frac{\delta \Omega}{\tilde{\Omega}^2} \text{Cos} \left[\frac{\pi \tilde{\Omega}}{2\Omega} \right] \text{Sin}^2 \left[\frac{\pi \tilde{\Omega}}{4\Omega} \right] \left(e^{iT_2 \delta} e^{-i \frac{\pi \delta}{\tilde{\Omega}}} - e^{i \frac{\pi \delta}{\tilde{\Omega}}} \right) \\
& - i \frac{\Omega}{\tilde{\Omega}} e^{iT_1 \delta} e^{i \frac{\pi \delta}{2\tilde{\Omega}}} \text{Cos}^2 \left[\frac{\pi \tilde{\Omega}}{4\Omega} \right] \text{Sin} \left[\frac{\pi \tilde{\Omega}}{2\Omega} \right] \\
& + \frac{\delta \Omega}{\tilde{\Omega}^2} \text{Cos} \left[\frac{\pi \tilde{\Omega}}{4\Omega} \right] \text{Sin} \left[\frac{\pi \tilde{\Omega}}{4\Omega} \right] \text{Sin} \left[\frac{\pi \tilde{\Omega}}{2\Omega} \right] \left(e^{iT_2 \delta} e^{-i \frac{\pi \delta}{2\tilde{\Omega}}} - e^{i \frac{\pi \delta}{\tilde{\Omega}}} \right) \\
& + i \frac{\delta^2 \Omega}{\tilde{\Omega}^3} \text{Sin}^2 \left[\frac{\pi \tilde{\Omega}}{4\Omega} \right] \text{Sin} \left[\frac{\pi \tilde{\Omega}}{2\Omega} \right] \left(e^{iT_2 \delta} e^{-i \frac{\pi \delta}{2\tilde{\Omega}}} - e^{iT_1 \delta} e^{i \frac{\pi \delta}{2\tilde{\Omega}}} + e^{i \frac{\pi \delta}{\tilde{\Omega}}} \right) \\
& \left. + i \frac{\Omega^3}{\tilde{\Omega}^3} e^{-iT_1 \delta} e^{iT_2 \delta} \text{Sin}^2 \left[\frac{\pi \tilde{\Omega}}{4\Omega} \right] \text{Sin} \left[\frac{\pi \tilde{\Omega}}{2\Omega} \right] \right|^2.
\end{aligned}$$

Se observa que la inclusión de un tercer pulso y un segundo tiempo a oscuras cambia drásticamente la forma de las franjas de interferencia. Mientras que para los campos separados de Ramsey, si la fase acumulada es 0, el estado pasa de estar en $|g\rangle$, a una superposición 50-50 $\frac{|g\rangle - i|e\rangle}{\sqrt{2}}$ y después termina en $|e\rangle$, es decir los dos pulsos $\frac{\pi}{2}$ actuaron efectivamente como un solo pulso π . Mientras que para la secuencia Mach-Zehnder los pulsos son $\frac{\pi}{2} - \pi - \frac{\pi}{2}$ y efectivamente actúan como un único pulso 2π el cual hace que nuestro estado si inicia en $|g\rangle$ termine en $|g\rangle$, es decir nuestro vector en la esfera de Bloch para el estado $|g\rangle$ da una vuelta completa a la esfera. Si la fase acumulada en los tiempos a oscuras fuese distinta de 0 obtendríamos resultados distintos.

4.2. Transiciones de momento

Muy importante para los siguientes cálculos, es ver que efectivamente cuando los átomos absorben la energía de la radiación del campo estos también adquieren una cantidad de momento. Un tratamiento mas complementario puede encontrarse en [2]. Aquí se presentara una versión mas simplificada pero que contiene la misma conclusión esencial. Lo importante es notar que nuestro Hamiltoniano de interacción es

$$\hat{H}_I(t) = -e\vec{r} \cdot \vec{E}(t); \quad \vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \quad (35)$$

para transiciones di-polares eléctricas dominantes. Por el momento este campo de radiación clásica esta acoplado dos estados internos de un átomo, es por esto que podemos usar perturbaciones a primer orden para obtener una expresión del Hamiltoniano de interacción de la siguiente forma

$$\hat{H}_I(t) = \hbar\Omega^* e^{-i(kz - \omega t)} |g\rangle \langle e| + \hbar\Omega e^{i(kz - \omega t)} |e\rangle \langle g|; \quad \Omega = \frac{-eE_0}{\hbar} \langle e| r |g\rangle. \quad (36)$$

podemos escribir el operador de traslación en espacio como [4]

$$\hat{T}(x_0) = e^{-i\frac{\hat{p}x_0}{\hbar}} \quad (37)$$

el cual actúa sobre los vectores de posición de la siguiente manera:

$$\hat{T}(x_0) |x\rangle = |x + x_0\rangle, \quad (38)$$

podemos representar este operador de traslación como una superposición de los estados de posición

$$\hat{T}(x_0) = e^{\pm i\frac{\hat{p}x_0}{\hbar}} = \int dx' |x'\rangle \langle x' \mp x_0|. \quad (39)$$

De manera análoga podemos escribir al termino $e^{\pm ik\hat{z}}$, el operador de traslación de momento, como [2]

$$e^{\pm ik\hat{z}} = \int dp' |p'\rangle \langle p' \mp \hbar k|, \quad (40)$$

este termino entonces acopla a los estados internos del átomo con los estados externos (momento y posición), y es el responsable de la transferencia de momento al átomo. Podemos ahora escribir al hamiltoniano de interacción como

$$\hat{H}_I(t) = \hbar\Omega \left\{ \int dp' |p'\rangle \langle p' + \hbar k| \right\} e^{-i\omega_I t} |e\rangle \langle g| + \hbar\Omega^* \left\{ \int dp' |p'\rangle \langle p' - \hbar k| \right\} e^{i\omega_I t} |g\rangle \langle e|, \quad (41)$$

con el Hamiltoniano de los grados externos e internos siendo

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hbar\omega_g |g\rangle \langle g| + \hbar\omega_e |e\rangle \langle e|. \quad (42)$$

Para comprobar que efectivamente el átomo está ganando momento conforme absorbe la radiación vamos a tomar los productos de los estados del átomo $|n, p\rangle$ donde n representa el estado interno de energía y p representa el momento del centro de masa. Si consideramos los siguientes productos internos

$$\langle g, p | \hat{H}_I(t) | g, p \rangle = 0, \quad (43)$$

$$\langle g, p | \hat{H}_I(t) | e, p \rangle = 0, \quad (44)$$

$$\langle g, p | \hat{H}_I(t) | e, p + \hbar k \rangle = \hbar\Omega^* e^{i\omega_I t}, \quad (45)$$

vemos entonces que los estados $|g, p\rangle$ y $|e, p\rangle$ no están acoplados, pero los estados $|g, p\rangle$ y $|e, p + \hbar k\rangle$ si lo están, esto nos dice que $\hat{H}_I(t)$ realiza transiciones entre $|g\rangle$ y $|e\rangle$ con un cambio de momento de p a $p + \hbar k$. Para átomos alcalinos estos dos estados son estados hiperfinos, y las transiciones entre ellos se realizan mediante un tercer estado desintonizado realizando una transición de dos fotones llamada transición Raman con láseres contrapropagantes [2], como la separación de energía entre los estados hiperfinos es muy pequeña, la transferencia neta de momento es $k_e = 2k$, siendo k el vector de onda de la transición óptica con el tercer estado, una sencilla explicación para que la transferencia neta de momento sea la de dos veces un fotón, es que el átomo absorbe un fotón en una dirección y después es inducido a emitirlo en la dirección opuesta.

4.3. Átomos en caída libre

Ahora podemos considerar el caso de átomos cayendo debido a la acción de la gravedad interactuando con un campo de radiación clásica. Podemos escribir el hamiltoniano total del sistema como

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + mg\hat{z}; \quad \frac{\hat{H}_I(t)}{\hbar} = \Omega e^{ik_e \hat{z}} e^{i\alpha(t)} |g\rangle \langle e| + c.c. \quad (46)$$

dónde $\alpha(t)$ es la frecuencia del campo Electromagnético aplicado la cual ahora tiene una dependencia temporal, por eso se le llama la rampa de frecuencia, el

termino \hat{H}_0 modela el movimiento cuantizado del centro de masa del átomo a lo largo del eje z bajo la acción de un campo gravitacional constante, siendo m la masa del átomo y g la aceleración gravitacional. Aquí \hat{p} y \hat{z} son los operadores de posición y momento canónicos. No se consideran las componentes x y y debido a que solo contribuyen con una expansión libre de la función de onda. La interacción átomo-radiación es modelada por $\hat{H}_I(t)$ bajo la aproximación de onda rotante, donde $\hat{\sigma}_\pm$ son los operadores de escalera que nos llevan del estado $|g\rangle$ a $|e\rangle$.

Es mas conveniente continuar el análisis actual si nos movemos al marco de referencia del centro de masa del átomo, el cual está en caída libre, para esto usamos una transformación Galileana [3]

$$\hat{G} \equiv \exp\left(\int \frac{L_c}{\hbar} dt\right) \exp\left(-i\frac{\hat{p}z_c}{\hbar}\right) \exp\left(i\frac{p_c\hat{z}}{\hbar}\right), \quad (47)$$

donde L_c, p_c, z_c son las coordenadas clásicas del centro de masa, las cuales pueden ser escritas como

$$z_c = z_0 + v_0t + \frac{1}{2}gt^2, \quad (48)$$

$$p_c = m(v_0 + gt), \quad (49)$$

$$L_c = \frac{p_c^2}{2m} - mgz_c. \quad (50)$$

Bajo la transformación Galileana nuestro hamiltoniano se ve de la siguiente manera

$$\hat{G}^\dagger \hat{H}_0 \hat{G} = \frac{(\hat{p} + p_c)^2}{2m} + mg(\hat{z} - z_c), \quad (51)$$

$$\frac{\hat{G}^\dagger \hat{H}_I \hat{G}}{\hbar} = \Omega e^{ik_e(\hat{z} + z_c)} e^{i\alpha(t)} + c.c. \quad (52)$$

La ecuación de Schrödinger para el estado ahora situado en el centro de masa $|\psi\rangle = \hat{G}|\phi_{cm}\rangle$ es

$$i\hbar\partial_t |\phi_{cm}\rangle = (\hat{G}^\dagger \hat{H}_0 \hat{G} - i\hbar\hat{G}^\dagger \partial_t \hat{G}) |\phi_{cm}\rangle \quad (53)$$

con

$$\hat{G}^\dagger \partial_t \hat{G} = \frac{-iL_c - i\dot{z}_c(\hat{p} + p_c) + i\dot{p}_c\hat{z}}{\hbar}. \quad (54)$$

Aquí $\dot{z}_c = \partial_t z_c$ y $\dot{p}_c = \partial_t p_c$, si juntamos (51), (52) y (54) la ecuación de Schrödinger en el marco de referencia del centro de masa es

$$i\hbar\partial_t |\phi_{cm}\rangle = (\hat{H}'_0 + \hat{H}'_I) |\phi_{cm}\rangle, \quad (55)$$

donde

$$\hat{H}'_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m}, \quad (56)$$

$$\frac{\hat{H}'_I}{\hbar} = e^{ik_e \hat{z}} (\Omega^* e^{-i(\alpha(t) + k_e z_c(t))} \hat{\sigma}_- + c.c.). \quad (57)$$

Consideremos ahora un estado arbitrario del sistema de la siguiente manera

$$|\phi_{cm}\rangle = \int dp e^{-i\frac{p^2 t}{2m\hbar}} (C_p^g(t) |a\rangle + C_p^e |b\rangle) |p\rangle, \quad (58)$$

insertando (58) en la ecuación (55) y tomando en cuenta (39) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas

$$i\dot{C}_{p+\hbar k}^e = \Omega \exp \left[i \left(\frac{k_e p}{m} t + \frac{\hbar k_e^2}{2m} t + \alpha(t) + k_e z_c(t) \right) \right] C_p^g \quad (59)$$

$$i\dot{C}_p^g = \Omega^* \exp \left[-i \left(\frac{k_e p}{m} t + \frac{\hbar k_e^2}{2m} t + \alpha(t) + k_e z_c(t) \right) \right] C_{p+\hbar k}^e. \quad (60)$$

Debido a que los átomos se encuentran en caída libre, experimentan un corrimiento Doppler dependiente del tiempo, es decir, si un láser está en sintonía con los átomos al inicio de su caída en $t = 0$, conforme estos comienzan a acelerar la frecuencia del láser que ven los átomos cambia con el tiempo debido a que su velocidad esta cambiando, es por esta razón que se usa una rampa de frecuencia del láser para asegurar que los átomos y el láser estén en sintonía y en fase. Para el caso cuando la rampa es compensada, es decir cuando $\alpha(t) = -\left(\frac{\hbar k_e^2}{2m} t + k_e z_c(t)\right)$, las ecuaciones diferenciales son

$$i\dot{C}_{p+\hbar k_e}^e = \Omega e^{i\delta t} C_p^g \quad (61)$$

$$i\dot{C}_p^g = \Omega^* e^{-i\delta t} C_{p+\hbar k_e}^e, \quad (62)$$

donde hemos introducido a $\delta \equiv \frac{k_e p}{m}$, la cual es una desintonía debido al efecto Doppler. Podemos apreciar entonces que las ecuaciones a resolver para la dinámica del sistema son las mismas que (29), la única diferencia es que mientras que en (29) la desintonía es debido a la frecuencia de la radiación, en (61), (62) la desintonía proviene de alguna componente de momento que no sea la de diseño ($p_{diseño} = 0$) debido a que nuestro marco de referencia esta centrado en el átomo y se mueve con él.

5. Campos separados con un ancho de momentos

5.1. Transiciones de momento en una distribución de velocidades

En este capítulo analizaremos el efecto que tiene una distribución de velocidades sobre un interferómetro. La existencia de una distribución de velocidades

esta relacionada con el principio de incertidumbre de Heisenberg. Primero veamos lo que ocurre cuando tenemos una distribución de velocidades como nuestra función de población inicial y sobre esta aplicamos un solo pulso. Supongamos que inicialmente tenemos un ensamble de átomos donde todos se encuentren en el estado $|g\rangle$ (esto se puede lograr a través de bombeo óptico), y con una función de distribución de momentos $g(p)$, nuestra función de onda es entonces

$$|\Psi\rangle = \int g(p) |g, p\rangle dp,$$

donde nuestro estado está normalizado de la siguiente manera

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \int |g(p)|^2 dp = 1.$$

Vamos a tomar a $|g(p)|^2$ como una distribución Gaussiana de momento

$$g(p) = \frac{1}{(\pi\sigma_p^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{p^2}{2\sigma_p^2}},$$

donde σ_p es el ancho de la distribución. Después aplicamos la radiación durante cierto tiempo t , y nuestro estado $|g, p\rangle$ evoluciona temporalmente dictado por las ecuaciones (61) y (62) de las cuales ya tenemos una solución general (31) y (32), tomando a la desintonía como $\delta = \frac{\hbar k_e p}{m}$, nuestro nuevo estado al tiempo t es entonces

$$|\Psi(t)\rangle = \int (g(p)C_g(p, t) |g, p\rangle + g(p)C_e(p, t) |e, p + \hbar k_e\rangle) dp \quad (63)$$

donde

$$|\psi_p(t)\rangle = C_g(p, t) |g, p\rangle + C_e(p, t) |e, p + \hbar k_e\rangle, \quad (64)$$

con la condición inicial

$$C_g(p, 0) = 1; C_e(p + \hbar k_e, 0) = 0.$$

Las probabilidades, dependientes del momento $P_g(p)$ y $P_e(p)$, de ocupar los estados internos $|g\rangle$ y $|e\rangle$ respectivamente son

$$P_g(p) = |g(p)C_g(p, t)|^2 \quad (65)$$

$$= \frac{1}{(\pi\sigma_p^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{p^2}{\sigma_p^2}} \times \left(\cos^2 \left[\frac{\tilde{\Omega}}{2} t \right] + \frac{\delta^2}{\tilde{\Omega}^2} \sin^2 \left[\frac{\tilde{\Omega}}{2} t \right] \right),$$

$$P_e(p) = |g(p - \hbar k_e)C_e(p - \hbar k_e, t)|^2 \quad (66)$$

$$= \frac{1}{(\pi\sigma_p^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(p - \hbar k_e)^2}{\sigma_p^2}} \times \frac{\Omega^2}{\tilde{\Omega}^2} \sin^2 \left[\frac{\tilde{\Omega}}{2} t \right].$$

Las ecuaciones (65) y (66) son graficadas en la Figura 9 para $t = \frac{\pi}{\Omega}$ (un pulso π). Podemos ver que el fotón imparte momento $p_R = mv_R = \hbar k_e$ al estado excitado $|e\rangle$ en completar la transición.

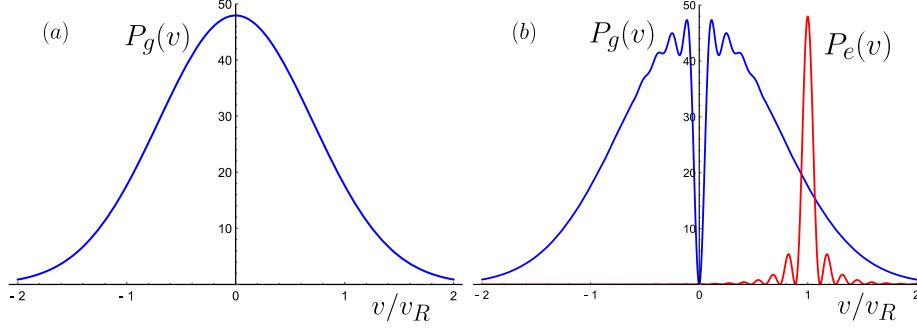


Figura 9: Pulso π , con $\sigma_p = mv_R, \Omega = 2\pi \times 2 \times 10^3 Hz, \tau = 2.5 \times 10^{-4} s, \lambda = 780.241 nm$. (a) distribución inicial de velocidades en el estado $|g\rangle$. (b) distribución final de velocidades, la curva azul representa el estado $|g\rangle$ y la curva roja representa el estado $|e\rangle$.

Podemos asociar el ancho de distribución de velocidades a una temperatura, $\sigma_v = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$ tomando la aproximación de que nuestro conjunto de átomos se comporta como un gas ideal, el cual para la temperatura que manejamos es una aproximación adecuada debido a que no es lo suficientemente frío para ser un condensado de Bose-Einstein, la temperatura en la cual se han observado condensados de Bose-Einstein en gases de Rubidio es $\sim 170 nK$ [7] y con una densidad de numero de 2.5×10^{12} por centímetro cúbico.

Ahora veremos como esta distribución de velocidades afecta a la interferometría atómica, primero veremos el caso de un interferómetro de Ramsey, aquí estamos considerando un interferómetro que en realidad no existe debido a que al impartir momento las funciones de onda ya no se traslaparan pero es útil imaginar que si lo hacen para calcular su interferencia para propósitos de comparación. Para esto solo nos enfocaremos en la probabilidad dependiente de la velocidad del estado excitado $P_e(v)$ la cual es

$$\begin{aligned}
 P_e(v) &= \left| g(v) C_e^{(2)}(mv, \tau_2) \right|^2 \tag{67} \\
 &= \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \left| 2i e^{i\frac{\pi\delta}{4\Omega}} e^{i\frac{T_0\delta}{2}} \left[\frac{\Omega\delta}{\tilde{\Omega}^2} \text{Sin}^2\left(\frac{\pi\tilde{\Omega}}{4\Omega}\right) \text{Sin}\left(\frac{T_0\delta}{2} - \frac{\pi\delta}{4\Omega}\right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\Omega}{\tilde{\Omega}} \text{Cos}\left(\frac{\pi\tilde{\Omega}}{4\Omega}\right) \text{Sin}\left(\frac{\pi\tilde{\Omega}}{4\Omega}\right) \text{Cos}\left(\frac{T_0\delta}{2} - \frac{\pi\delta}{4\Omega}\right) \right] \right|^2,
 \end{aligned}$$

donde

$$\delta = k_e v, \quad (68)$$

y por lo tanto

$$\tilde{\Omega} = \sqrt{|\Omega|^2 + (k_e v)^2}.$$

la ecuación (67) es graficada en la Figura 10.

Aquí el súper indice 2 en $C_e^{(2)}$ es solo para indicar que se trata del coeficiente excitado del segundo pulso, y el sub indice 2 en τ_2 es para indicar que se trata de la duración del segundo pulso. Para el caso del interferómetro de Ramsey la duración del primer pulso y la duración del segundo pulso es la misma $\tau_1 = \tau_2$. Al momento de cerrar el interferómetro y medir la población del estado excitado colapsamos la función de onda sobre el estado $|e\rangle$, esto significa que estamos sumando sobre todos los posibles estados de velocidad, en otras palabras estamos realizando la integral de $P_e(v)$ con la velocidad.

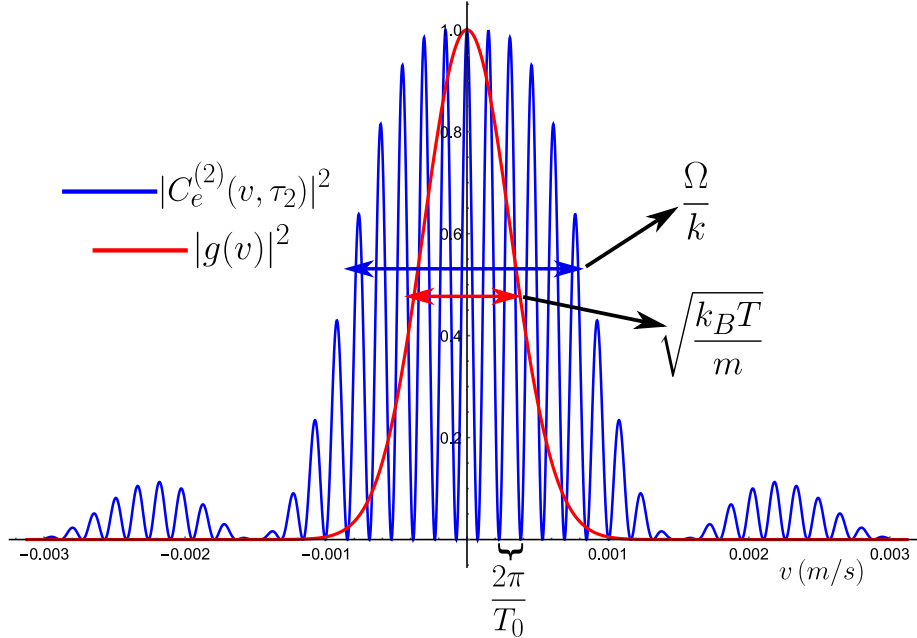


Figura 10: Interferencia de Ramsey, aquí se muestran por separado las dos partes que contribuyen a $P_e(v)$, en este caso $|g(v)|^2$ fue reescalado para estar en la misma altura que $|C_e^{(2)}(v)|^2$, esta gráfica fue generada con los valores de $\Omega = 2\pi \times 10^3 \text{Hz}$, $\tau_1 = \tau_2 = 2.5 \times 10^{-4} \text{s}$, $T_0 = 2.5 \times 10^{-3} \text{s}$, $T = 10^{-9} \text{K}$, $m = 1.44316 \times 10^{-25} \text{kg}$.

5.2. Contraste como función de la temperatura en Ramsey

En el laboratorio hacemos uso de la interferometría atómica para realizar mediciones de la constante de aceleración gravitacional g , esta medición se logra cambiando los parámetros de nuestra rampa de frecuencia $\alpha(t)$, al final de la sección 4.3 vimos que si nuestra rampa de frecuencia es compensada, a excepción de alguna componente de momento diferente a la de diseño, tendremos oscilaciones en perfecta sintonía. Pero podemos hacer que la rampa de frecuencia no cancele precisamente todos los términos y al ir variando sus parámetros buscando en donde si los cancela es cuando efectivamente medimos g , para ver esto mas claramente vamos a definir a $\alpha(t)$ como una función cuadrática del tiempo en analogía a la caída libre

$$\alpha(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2, \quad (69)$$

donde a_0, a_1, a_2 son parámetros que podemos cambiar en el laboratorio, siendo a_0 un offset en fase, a_1 la frecuencia inicial del láser, a_2 la pendiente a la cual la frecuencia del láser cambia. Tenemos entonces que

$$\alpha(t) = - \left(\frac{\hbar k^2}{2m} t + k_e z_c(t) \right), \quad (70)$$

y si escribimos explícitamente quien es $z_c(t)$,

$$\alpha(t) = - \left(\frac{\hbar k^2}{2m} t + k_e z_0 + k_e v_0 t + k_e \frac{g}{2} t^2 \right). \quad (71)$$

Podemos hacer que la rampa de frecuencia cancele el término constante y lineal dejando variable el termino cuadrático

$$\Delta t^2 = (a_2 + k_e \frac{g}{2}) t^2, \quad (72)$$

las ecuaciones (59) y (60) son ahora

$$i\dot{C}_{p+\hbar k_e}^e = \Omega \exp [i (k_e v t + \Delta t^2)] C_p^g \quad (73)$$

$$i\dot{C}_p^g = \Omega^* \exp [-i (k_e v t + \Delta t^2)] C_{p+\hbar k_e}^e. \quad (74)$$

El termino Δt^2 suele ser muy pequeño comparado con $k v t$ por lo que tiene un efecto despreciable durante la aplicación de los pulsos, y con esta consideración las ecuaciones (73) y (74) se reducen a las conocidas (61) y (62). Pero para el segundo pulso, debido a que tiene un tiempo a oscuras $T_0 \gg \tau_1$, este termino contribuye con una acumulación de la fase y las ecuaciones para el segundo pulso son

$$i\dot{C}_{p+\hbar k_e}^e = \Omega \exp [i k_e v t] \exp [i k_e v T_0] \exp [i \Delta T_0^2] C_p^g \quad (75)$$

$$i\dot{C}_p^g = \Omega^* \exp [-i k_e v t] \exp [-i k_e v T_0] \exp [-i \Delta T_0^2] C_{p+\hbar k_e}^e. \quad (76)$$

Ahora procederemos a realizar el interferómetro, escojemos un cierto valor de a_2 el cual nos da un valor de Δ y procedemos a realizar la secuencia de interferometría. El primer pulso es dictado por las ecuaciones (61) y (62), con una duración de $\tau_1 = \frac{\pi}{2|\Omega|}$, después sigue un tiempo a oscuras con duración $T_0 > \tau_1$, y finalmente el segundo pulso con duración $\tau_2 = \tau_1$ es determinado por las ecuaciones (75) y (76). Después de finalizar el ultimo pulso, nos preguntamos por la población del estado excitado. Si hacemos esto para varios valores de Δ obtenemos la población del estado excitado como función de delta, $P_e(\Delta)$.

$$P_e(\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} |g(v)C_e^{(2)}(\tau_2, \Delta, v)|^2 dv \quad (77)$$

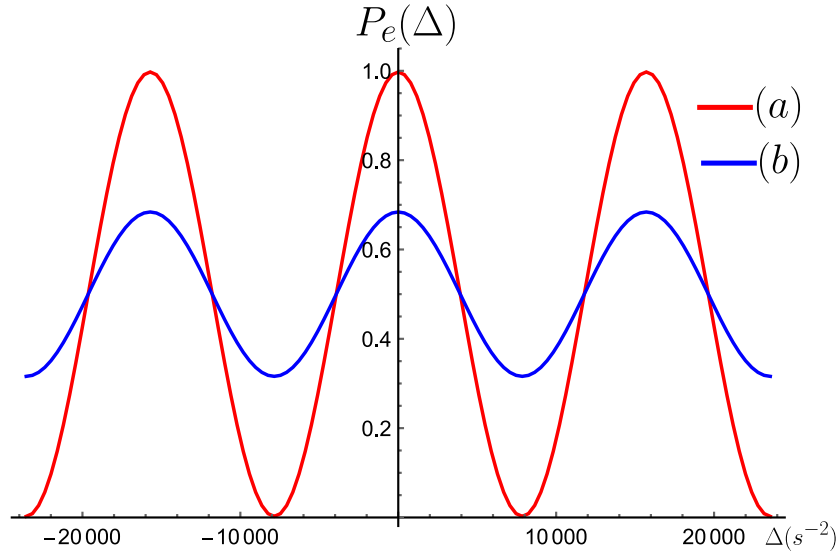


Figura 11: Franjas de interferencia como función de la pendiente de la rampa Δ . Los valores para generar estas gráficas fueron $\Omega = 2\pi \times 10^3 Hz$, $\tau_1 = \tau_2 = 2.5 \times 10^{-4} s$, $T_0 = 20 \times 10^{-3} s$, $m = 1.44316 \times 10^{-25} kg$, (a) $T = 10^{-15} K$, (b) $T = 2 \times 10^{-13} K$.

En la Figura 11 hemos graficado la ecuación (77) para dos valores de la temperatura, estas franjas de interferencia son de la forma

$$P_e(\Delta, T) = B(T)(1 + C(T)\text{Cos}[\Delta T_0^2]). \quad (78)$$

Donde $C(T)$ es el contraste de las franjas el cual ahora depende de la temperatura. Notemos que la diferencia entre los mínimos y los máximos de las oscilaciones aumenta conforme la temperatura disminuye esto es debido a que conforme la temperatura disminuye el ancho de $g(v)$ disminuye y promedia sobre menos oscilaciones de $C_e^{(2)}$ como se puede observar en la Figura 10. Podemos

calcular el contraste de las franjas de interferencia a través de la expresión

$$C = \text{Max}[P_e] - \text{Min}[P_e] \quad (79)$$

Si consideramos el caso de la Figura 11 (a) tenemos un contraste de aproximadamente .995, para el caso de la Figura 11 (b) el contraste es aproximadamente .368. Vemos que el contraste decae rápidamente conforme la temperatura aumenta. El origen de este problema es la fase acumulada en el tiempo a oscuras asociada a la desintonía $k_e vt$, estas oscilaciones rápidas son promediadas por $g(v)$, y mientras el ancho de la distribución de velocidades aumente, se promedia sobre más de estas oscilaciones, efectivamente reduciendo cada vez más la visibilidad. Una manera inocente de resolver este problema de baja visibilidad es hacer que el ancho de la distribución de velocidades sea menor que el periodo de las oscilaciones rápidas, esto es

$$k_e \sigma_v < \frac{2\pi}{T_0}, \quad (80)$$

esto nos da un límite superior para el valor de la temperatura

$$T < \frac{4\pi^2 m}{k_e^2 T_0^2 k_B}. \quad (81)$$

Si tomamos los valores de k_e, m, T_0 de la Figura 11 obtenemos que $T < 10^{-12} K$, la cual es una temperatura muy baja, más baja que la temperatura del B.E.C. más frío conocido $T \sim 450 \text{ pK}$ [6]. Si ahora para múltiples valores de la temperatura calculamos el contraste de las franjas podemos obtener el contraste como función de la temperatura (Figura 12). Vemos entonces que para el interferómetro de Ramsey el contraste de las franjas decae rápidamente conforme T comienza a ser comparable con $\frac{4\pi^2 m}{k_e^2 T_0^2 k_B}$ o mayor (para los cálculos de la Figura 12 $\frac{4\pi^2 m}{k_e^2 T_0^2 k_B} = 9.94 \times 10^{-13} K$), conforme lleguemos a la temperatura de una M.O.T. $\sim 10^{-6} K$ [10], el contraste es prácticamente cero, esto nos dice que este interferómetro no sería muy útil para estas mediciones en caso de que fuera posible de implementarlo.

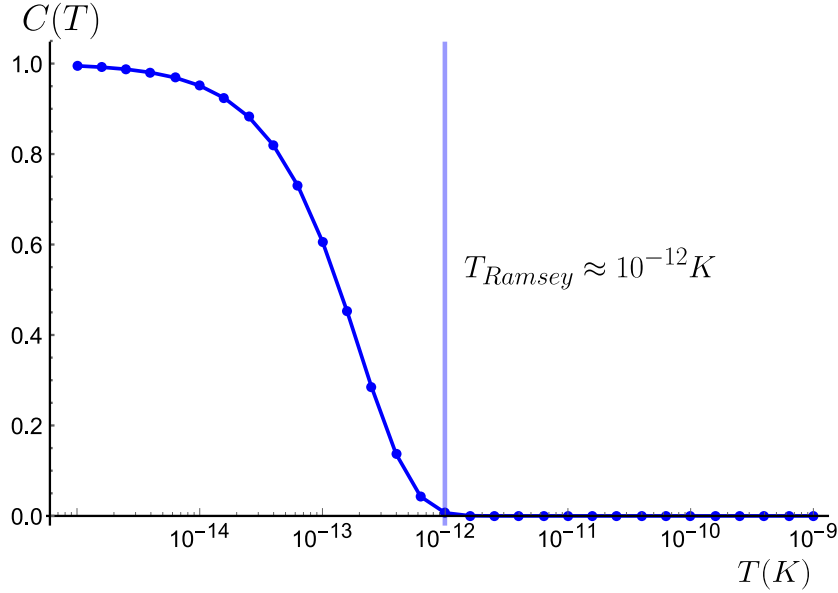


Figura 12: Contraste como función de la temperatura, el eje horizontal esta en escala logarítmica, esta gráfica fue generada con los valores de $\Omega = 2\pi \times 10^3 Hz$, $\tau_{1,2} = 2.5 \times 10^{-4} s$, $T_0 = 20 \times 10^{-3} s$, $m = 1.44316 \times 10^{-25} kg$, $\lambda = 780.241 \times 10^{-9} m$.

6. Mach-Zehnder con ancho de momentos

6.1. Spin-Echo en Átomos

En este capítulo veremos un fenómeno el cual nos ayudara con el problema de bajo contraste a temperaturas mas altas ($\sim 10^{-6} K$), el fenómeno es el Eco de Spin . El Eco de Spin se presenta en la mecánica cuántica donde la magnetización de una muestra o el valor esperado del momento magnético de un sistema cuántico se recupera parcialmente después de haberse perdido. Brevemente explicado el eco de spin, también llamado eco de Hahn debido a Erwin Hahn quien fue el descubridor [11], se presenta cuando uno tiene un spin alineado con un campo magnético (sobre el eje z por ejemplo), después por la aplicación de un pulso de campo en el eje x , de una duración determinada, la orientación del momento magnético precesa alrededor del eje x hasta alinearse con el eje y , diversos fenómenos físicos que se conocen colectivamente como relajación espín-espín hacen que los diferentes momentos magnéticos de la muestra se vayan dispersando progresivamente (ensanchamiento inhomogeneo). Tras un cierto tiempo de espera τ_e , si se aplica un pulso de 180 grados que da la vuelta a los espines sobre el eje x , y se repite el mismo tiempo de espera τ_e , los spines vuelven a agruparse recuperándose la magnetización, en la Figura 13 viene ilustrado lo anterior.

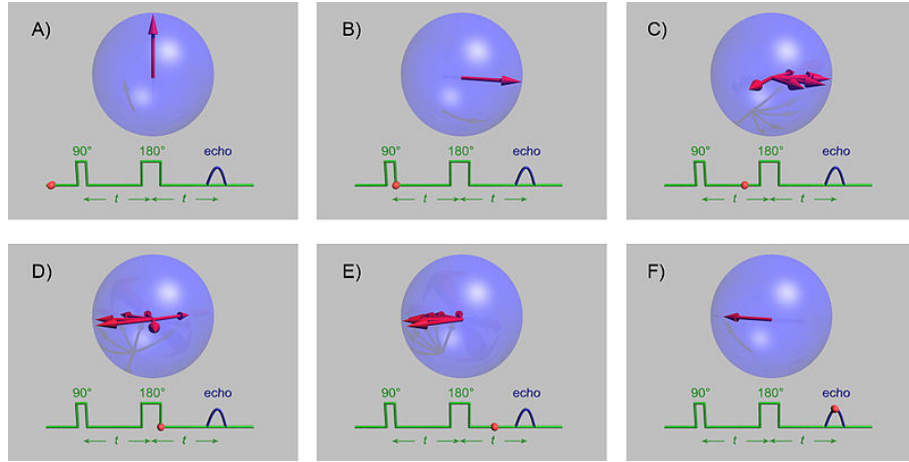


Figura 13: Ilustración del Eco de Spin. A) spin alineado con el campo magnético. B) un pulso con cierta duración y en una dirección ortogonal hace que el spin rote 90° . C) dispersión de los varios spines de la muestra. D) otro pulso con diferente duración y en la otra dirección ortogonal invierte a los spines. E) la dispersión continua y ahora los spines se comienzan a agrupar en la misma dirección. F) Cuando todos los spines se vuelven a agrupar en una sola dirección se vuelve a medir una magnetización. Imagen tomada de Gavin W. Morley.

En nuestro caso no tenemos un spin magnético pero la misma idea se puede aplicar, si consideramos la esfera de Bloch, los estados $|g\rangle$ y $|e\rangle$ se ven exactamente como la orientación de un spin (Figura 14). El ecuador en la esfera de Bloch representa múltiples superposiciones de la forma $\frac{|g\rangle - ie^{i\phi}|e\rangle}{\sqrt{2}}$. Para el caso de un ensamble de átomos el hecho de que poseen una distribución de velocidades y esta distribución esté asociada a una desintonía (ecuación (68)) hace que cada uno acumule una fase diferente, efectivamente dispersándose sobre el ecuador. Como ultimo paso se realiza un pulso $\frac{\pi}{2}$ justo cuando el estado de los átomos vuelven a alinearse en la esfera de Bloch, así transfiriendo a todos los átomos al estado donde iniciaron.

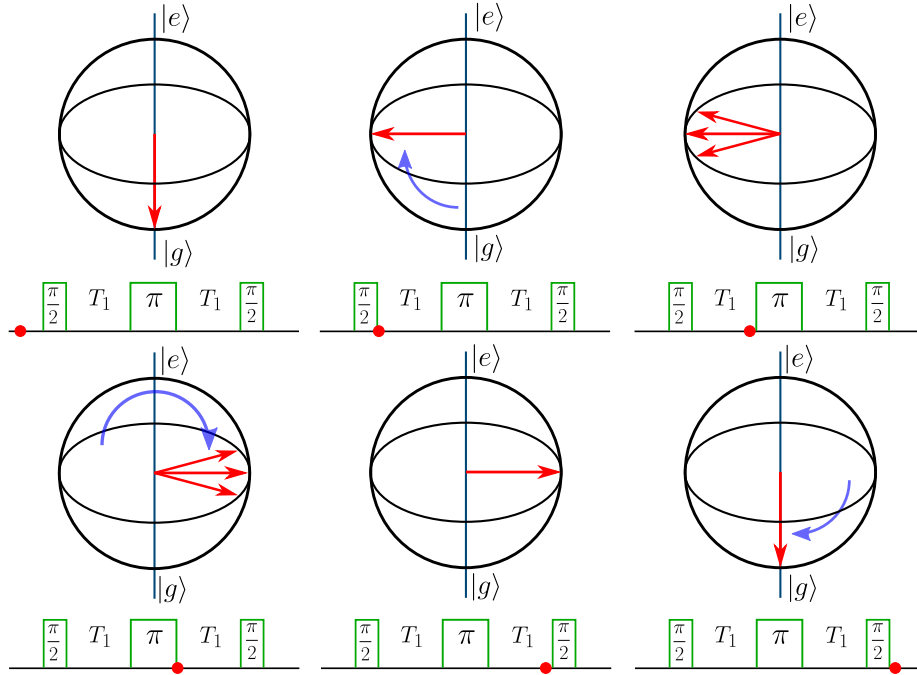


Figura 14: Eco de Spin en átomos, al final justo cuando el eco se presenta se hace un ultimo pulso $\frac{\pi}{2}$.

6.2. Cancelación de fase acumulada

Si observamos a la población del estado excitado como función de la velocidad

$$P_e(v) = \left| g(v, T) C_e^{(3)}(p + \hbar k_e, \tau_3) \right|^2$$

obtenemos lo que se observa en la Figura 15, en ella se puede apreciar que para cuando la desintonía es pequeña comparada con la frecuencia de Rabi, $k_e v < \Omega$, las oscilaciones rápidas anteriormente observadas en el caso de Ramsey no están presentes, y conforme la desintonía crece estas oscilaciones rápidas aparecen. Esto a primera instancia resuelve el problema debido a que ya no tenemos que cuidar que el ancho de la función de distribución de velocidades de los átomos (su temperatura) sea menor que el periodo de una de las oscilaciones rápidas causadas por el tiempo a oscuras, ahora solo tenemos que cuidar que no sea mas ancho que la envolvente general de $C_e^{(3)}(p + \hbar k_e, \tau_3)$, la cual varía en el orden de Ω como se ve en la Figura 8.

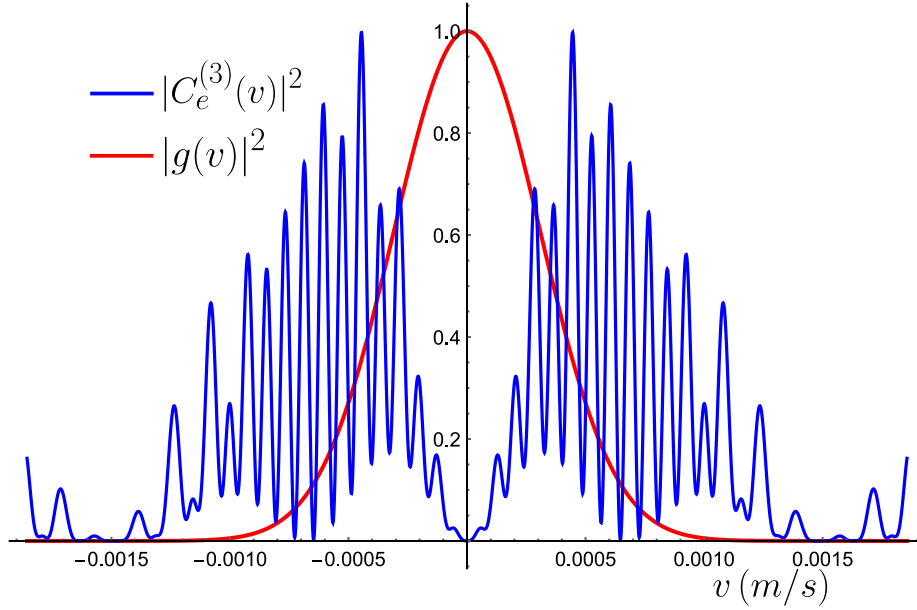


Figura 15: Interferencia de Mach-Zehnder, $|g(v)|^2$ fue reescalado para estar en la misma altura que $|C_e^{(2)}(v)|^2$, esta gráfica fue generada con los valores de $\Omega = 2\pi \times 10^3 \text{Hz}$, $\tau_1 = \tau_3 = 2.5 \times 10^{-4} \text{s}$, $\tau_2 = 5 \times 10^{-4} \text{s}$, $T_1 = 2.5 \times 10^{-3} \text{s}$, $T = 10^{-9} \text{K}$, $m = 1.44316 \times 10^{-25} \text{kg}$, $\lambda = 780.241 \times 10^{-9} \text{m}$. Este programa se llama «Mach-zehnder maxwell-boltzmann detuning distribution.nb».

Podemos comprobar que efectivamente las oscilaciones rápidas desaparecen, debido a que la fase acumulada se cancela, para eso resolveremos las ecuaciones diferenciales para las poblaciones de los estados $|g\rangle$ y $|e\rangle$ considerando que nos encontramos muy cerca de resonancia, es decir $k_e v \ll \Omega$. Las ecuaciones para el primer pulso son

$$i\dot{C}_e^{(1)} = \frac{\Omega}{2} \exp[i\delta t] C_g^{(1)} \quad (82)$$

$$i\dot{C}_g^{(1)} = \frac{\Omega^*}{2} \exp[-i\delta t] C_e^{(1)}. \quad (83)$$

con $\delta = k_e v$, son básicamente las ecuaciones (61) y (62), las soluciones son

$$C_e^{(1)}(t) = -i \frac{\Omega}{\tilde{\Omega}} \exp\left[i \frac{\delta}{2} t\right] \text{Sin} \left[\frac{\tilde{\Omega}}{2} t \right] \quad (84)$$

$$C_g^{(1)}(t) = \exp\left[-i \frac{\delta}{2} t\right] \left(\text{Cos} \left[\frac{\tilde{\Omega}}{2} t \right] + i \frac{\delta}{\tilde{\Omega}} \text{Sin} \left[\frac{\tilde{\Omega}}{2} t \right] \right) \quad (85)$$

donde $\tilde{\Omega} = \sqrt{\delta^2 + |\Omega|^2}$, para $t = \tau_1 = \frac{\pi}{2|\Omega|}$, considerando que $\delta \ll \Omega$, los coeficientes son

$$C_e^{(1)}(\tau_1) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \quad (86)$$

$$C_g^{(1)}(\tau_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (87)$$

donde se hizo la aproximación $\tilde{\Omega} \approx |\Omega|$ y $\frac{\delta}{\tilde{\Omega}} \approx 0$. Las ecuaciones para el segundo pulso son

$$i\dot{C}_e^{(2)} = \Omega \exp[i\delta t] \exp[i\delta T_1] C_g^{(2)} \quad (88)$$

$$i\dot{C}_g^{(2)} = \Omega^* \exp[-i\delta t] \exp[-i\delta T_1] \exp C_e^{(2)} \quad (89)$$

las soluciones a estas ecuaciones son (31) y (32) con $\Omega \rightarrow \Omega \exp[i\delta T_1]$, y con las condiciones iniciales (86) y (87). Para $t = \tau_2 = \frac{\pi}{|\Omega|}$, y tomando las mismas aproximaciones los coeficientes son

$$C_e^{(2)}(\tau_2) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \exp[i\delta T_1] \quad (90)$$

$$C_g^{(2)}(\tau_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \exp[-i\delta T_1] \quad (91)$$

ahora las ecuaciones para el tercer pulso son

$$i\dot{C}_e^{(3)} = \Omega \exp[i\delta t] \exp[i\delta T_2] C_g^{(3)} \quad (92)$$

$$i\dot{C}_g^{(3)} = \Omega^* \exp[-i\delta t] \exp[-i\delta T_2] \exp C_e^{(3)} \quad (93)$$

igual que en el pulso anterior las soluciones son (31) y (32) ahora con $\Omega \rightarrow \Omega \exp[i\delta T_2]$. Para $t = \tau_3 = \frac{\pi}{2\Omega}$ el coeficiente del estado excitado es

$$C_e^{(3)}(\tau_3) = \frac{i}{2} \exp[i\delta T_1] (\exp[i\delta (T_2 - 2T_1)] - 1) \quad (94)$$

si ahora nos preguntamos por la población del estado excitado al final del tercer pulso

$$P_e = \left| C_e^{(3)}(\tau_3) \right|^2 = \frac{1}{4} \left| \exp[i\delta (T_2 - 2T_1)] - 1 \right|^2 \quad (95)$$

vemos que para el caso cuando $T_2 = 2T_1$, las franjas desaparecen. T_2 no es el tiempo a oscuras seguido después del segundo pulso, es el tiempo total a oscuras, de tal manera que δT_2 es la fase total acumulada en el tiempo oscuras, es claro que si los tiempos a oscuras entre pulsos tienen la misma duración T_1 , el tiempo total a oscuras es $2T_1$. Podemos explicar la cancelación de esta fase con el uso de la Figura 16 y las ecuaciones (88) y (89).

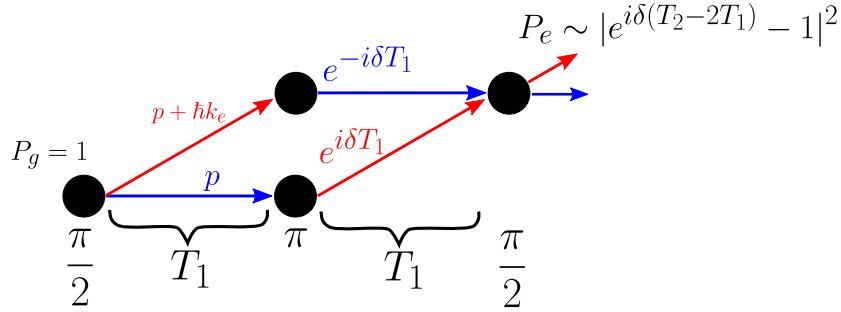


Figura 16: Transferencia de fase a los coeficientes del estado del átomo.

Notemos que en las soluciones a las ecuaciones (88) y (89) con condiciones iniciales arbitrarias, (31) y (32) en ambos coeficientes aparece la frecuencia de Rabi Ω , la cual cambia después de los tiempos a oscuras a $\Omega' = \Omega e^{i\delta T_1}$, pero es importante notar que si inicialmente la población se encontraba toda en $|g\rangle$, las condiciones iniciales son $C_g = 1, C_e = 0$ y ahora solo en uno de los coeficientes aparece la frecuencia de Rabi modificada, para ser explícito aparece en C_e . Si invertimos la condición inicial $C_g = 0, C_e = 1$ ahora la frecuencia de Rabi modificada aparece en C_g , en otras palabras, la fase se escribe en el coeficiente que representa un cambio de momento ya sea de p a $p + \hbar k_e$ o viceversa (Figura 16), la fase no se escribe en el átomo hasta después del pulso que sigue después del tiempo a oscuras.

Ilustrativamente en la Figura 16 mostramos como el átomo se divide en dos para después ser recombinado. El átomo inicialmente se divide en dos partes una con momento p y la otra con momento $p + \hbar k_e$, después a cada una de estas partes se les aplica un segundo pulso (π), se invierten y como ambas sufren un cambio de momento en ambas se escribe la fase del tiempo a oscuras, solo que a cada parte se le escribe una fase que difiere en el signo, después en el tercer pulso ($\frac{\pi}{2}$) se vuelve a escribir la fase del tiempo a oscuras pero ahora es la fase asociada al tiempo a oscuras total. Debido a que nos estamos preguntando por el estado excitado la parte del átomo que venía con momento p y después cambia a $p + \hbar k_e$, no se le escribe una nueva fase en el tercer pulso (porque esa parte no cambió su momento), mientras que la parte que inicia con $p + \hbar k_e$, después cambia a p y finalmente vuelve a cambiar a $p + \hbar k_e$, si se le escribe la fase del tiempo a oscuras total. Aquí uno podría preguntarse si se tiene una superposición de las partes del átomo en todo momento, en el Apéndice damos una respuesta a esta pregunta.

6.3. Contraste como función de la temperatura en Mach-Zehnder

Si ahora consideramos la acción de un campo gravitacional sobre nuestros átomos e incluimos la rampa de frecuencia dejando variable el termino cuadrá-

tico con el tiempo (ecuación (72)), nuestras ecuaciones que dictan la dinámica del sistema vuelven a ser (73) y (74), solo que ahora tendremos la secuencia de pulsos $\frac{\pi}{2} - \pi - \frac{\pi}{2}$. Después de esta secuencia de pulsos nos preguntamos por la población del estado excitado como función del parámetro $\Delta = (a_2 + k_e \frac{g}{2})$

$$P_e(\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} |g(v)C_e^{(3)}(\tau_2, \Delta, v)|^2 dv \quad (96)$$

la cual es graficada en la Figura (17) para dos valores distintos de la temperatura. Estos valores de temperatura son mayores que los de la Figura 11, podemos notar a simple vista que el contraste ha aumentado.

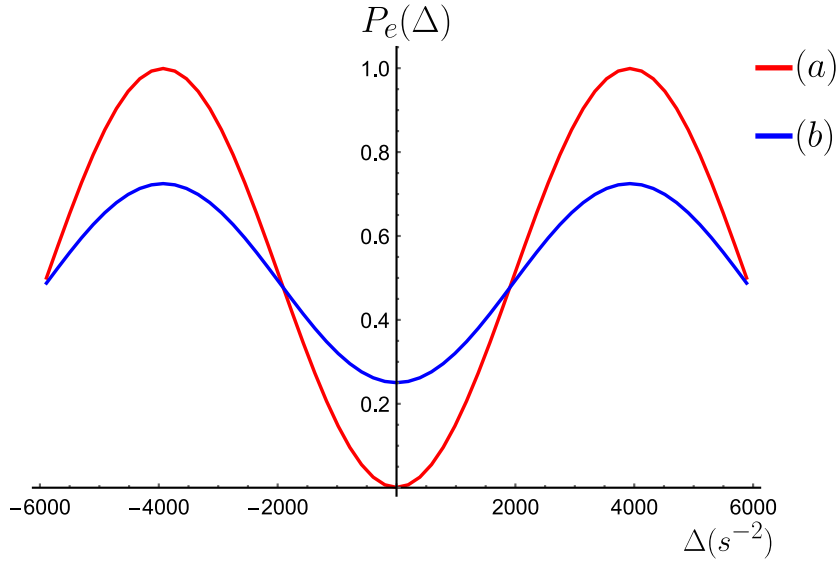


Figura 17: Franjas de interferencia para el interferómetro Mach-Zehnder como función de la pendiente de la rampa Δ . Los valores para generar estas gráficas fueron $\Omega = 2\pi \times 10^3 Hz$, $\tau_1 = \tau_3 = 2.5 \times 10^{-4} s$, $\tau_2 = 5 \times 10^{-4} s$, $T_1 = 20 \times 10^{-3} s$, $T_2 = 40 \times 10^{-3} s$, $m = 1.44316 \times 10^{-25} kg$, (a) $T = 10^{-12} K$, (b) $T = 10^{-9} K$. Este programa se llama «franjas mach-zehnder temperatura.nb».

La forma de estas oscilaciones es de la siguiente manera

$$P_e(\Delta, T) = B(T) (1 - C(T) \text{Cos} [\Delta T_1^2]) . \quad (97)$$

Si ahora calculamos el contraste de estas oscilaciones para diferentes temperaturas obtenemos la Figura (18)

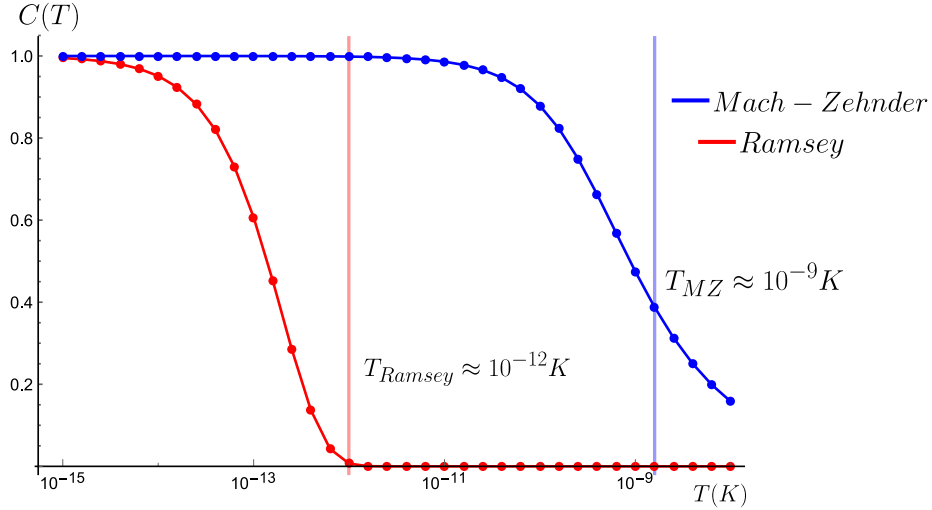


Figura 18: Contraste como función de la temperatura para ambos interferómetros, esta figura fue generada con los valores de $\Omega = 2\pi \times 10^3 \text{Hz}$. Para el interferómetro de Ramsey $\tau_1 = \tau_2 = 2.5 \times 10^{-4} \text{s}$, $T_0 = 20 \times 10^{-3} \text{s}$. Para el interferómetro de Mach-Zehnder $\tau_1 = \tau_3 = 2.5 \times 10^{-4} \text{s}$, $\tau_2 = 2\tau_1$, $T_1 = 20 \times 10^{-3} \text{s}$. Las temperaturas límite para ambos interferómetros fueron calculadas con las ecuaciones (81) y (99). Este programa se llama «contraste mach-zehnder temperatura.nb».

Podemos apreciar que efectivamente el rango de alta visibilidad se ha extendido por varios órdenes de magnitud, esto es debido a la cancelación de la fase que ocurre a consecuencia del fenómeno conocido como eco de espín. Ahora la mayor contribución a la cancelación de la fase es la envolvente general de las oscilaciones de Rabi de la Figura 15. El ancho de la función de distribución de velocidades σ_v tiene que ser menor que el ancho de esta envolvente general $\frac{\Omega}{k_e}$ para obtener una visibilidad alta, podemos establecer la siguiente desigualdad

$$k_e \sigma_v < \Omega \quad (98)$$

$$k_e \sqrt{\frac{k_B T}{m}} < \Omega$$

$$T < \frac{m \Omega^2}{k_B k_e^2} \quad (99)$$

si tomamos los valores de m , Ω , y k_e de la Figura 18 obtenemos que la Temperatura tiene que ser menor que $\sim 10^{-9} \text{K}$, pero podemos observar que la dependencia de esta temperatura mínima es proporcional al cuadrado de Ω , esto nos permite aumentar el límite de esta temperatura mínima con un pequeño incremento de

la intensidad de los láseres debido a que Ω^2 depende de la intensidad del campo eléctrico.

En [13] logran obtener un contraste cerca de 100 % usando un condensado de Bose-Einstein y una secuencia de interferometría Mach-Zehnder. Previamente habíamos observado que en el caso hipotético de un interferómetro de Ramsey ni un B.E.C. nos podría ayudar para obtener tan siquiera una visibilidad pequeña, mientras que para el caso de un interferómetro Mach-Zehnder con una secuencia de pulsos $\frac{\pi}{2} - \pi - \frac{\pi}{2}$, con B.E.C. y una frecuencia de Rabi $\Omega \approx 2\pi \times 6.3\text{kHz}$ se puede llegar muy cerca del 100 % de contraste experimentalmente, cabe notar que en este artículo de investigación no se considera la distribución de momentos, ellos solo se aseguran que $mv_{rms} < \hbar k_e$ para que las funciones de onda de ambas partes del átomo no se superpongan durante la división.

7. Pulso selector de velocidades

7.1. Efecto de un pulso selector

En este capítulo veremos que podemos realizar un paso anterior a la secuencia de interferometría para poder garantizar que el ancho de la distribución de velocidades de los átomos, en la dirección de transferencia del momento debido a los fotones, sea del orden de $\frac{\Omega}{k_e}$. Este proceso lo denominamos un pulso selector y consiste en preparar a los átomos en el estado $|e\rangle$ y después aplicar un solo pulso que transfiera parte de la población al estado $|g\rangle$ de una manera similar a la Figura 9. Después del pulso selector la parte de la población que no fue transferida al estado $|g\rangle$ es eliminada de la interacción del interferómetro a través de un pulso láser de empuje o push beam. La parte de la población que ahora está en el estado $|g\rangle$ ahora entrará a la secuencia interferométrica (Figura 19).

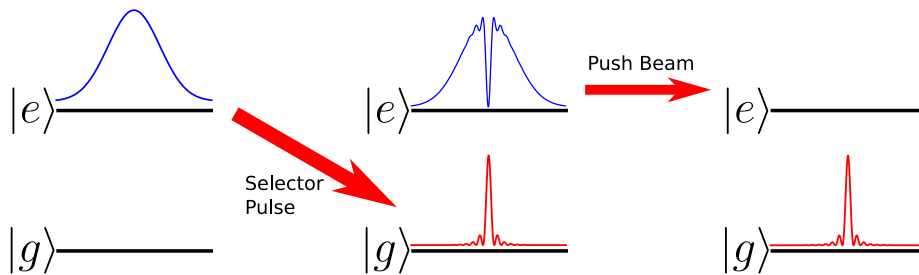


Figura 19: Acción del pulso selector.

Es de interés poder saber cual es la fracción de átomos que fueron transferidos al estado $|g\rangle$. El pulso selector es esencialmente un pulso π , el cual a baja desintonía transfiere toda la población al otro estado. La fracción de la población que se encuentra en el estado $|g\rangle$ es dada por la siguiente expresión

$$P_g = \int |g(v, T) C_g(\tau, k_e v)|^2 dv \quad (100)$$

donde $C_g(\tau, k_e v)$ es la solución a las ecuaciones

$$i\dot{C}_e = \frac{\Omega}{2} \exp[ik_e v t] C_g \quad (101)$$

$$i\dot{C}_g = \frac{\Omega^*}{2} \exp[-ik_e v t] C_e \quad (102)$$

con las siguientes condiciones iniciales $C_e = 1, C_g = 0$. $C_g(\tau, k_e v)$ es entonces

$$C_g(\tau, k_e v) = -i \frac{\Omega}{\tilde{\Omega}} \exp\left[\frac{-i\pi\delta}{2|\Omega|}\right] \text{Sin}\left[\frac{\pi\tilde{\Omega}}{2|\Omega|}\right] \quad (103)$$

con $\tau = \frac{\pi}{|\tilde{\Omega}|}$ y $\tilde{\Omega} = \sqrt{|\Omega|^2 + (k_e v)^2}$. Si escribimos a P_g explícitamente tenemos

$$P_g = \int \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left[\frac{mv^2}{2k_B T}\right] \frac{|\Omega|^2}{|\Omega|^2 + (k_e v)^2} \text{Sin}^2\left[\frac{\pi\sqrt{|\Omega|^2 + (k_e v)^2}}{2|\Omega|}\right] dv. \quad (104)$$

Generalmente el ancho de $|g(v)|^2$, el cual es del orden de $\sqrt{\frac{k_B T}{m}}$, es varios ordenes de magnitud mayor que el ancho de $|C_g(\tau, k_e v)|^2$ lo cual nos permite aproximar a la distribución Gaussiana de velocidades a 1, $\text{Exp}\left[\frac{mv^2}{2k_B T}\right] \approx 1$, pero antes de hacer esto proponemos un cambio de variables $\frac{k_e v}{|\Omega|} = x$, de esta manera la ecuación (104) es ahora

$$P_g = \int \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left[\frac{m|\Omega|^2}{2k_B k_e^2 T} x^2\right] \frac{1}{1+x^2} \text{Sin}^2\left[\frac{\pi\sqrt{1+x^2}}{2}\right] \frac{|\Omega|}{k_e} dx \quad (105)$$

notemos que x es adimensional, esto quiere decir que el factor

$$\frac{m|\Omega|^2}{2k_B k_e^2} \quad (106)$$

en la exponencial tiene dimensiones de temperatura, le llamaremos a este factor la temperatura de Rabi debido a su dependencia con la frecuencia de Rabi

$$T_R = \frac{m|\Omega|^2}{2k_B k_e^2} \quad (107)$$

Si volvemos a rescribir la ecuación (105) obtenemos

$$P_g = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \frac{|\Omega|}{k_e} \int \exp\left[\frac{T_R}{T} x^2\right] \frac{1}{1+x^2} \text{Sin}^2\left[\frac{\pi\sqrt{1+x^2}}{2}\right] dx \quad (108)$$

ahora podemos ver que si $\frac{T_R}{T} \ll 1$ entonces la aproximación $Exp\left[\frac{T_R}{T}x^2\right] \approx 1$ es valida. La fracción de átomos en el estado $|g\rangle$ es en este límite

$$P_g \approx \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \frac{|\Omega|}{k_e} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \text{Sin}^2 \left[\frac{\pi\sqrt{1+x^2}}{2} \right] dx \quad (109)$$

esta integral es solo un número, ya no hay mas física dentro de ella y la fracción de átomos en el estado $|g\rangle$ es aproximadamente

$$P_g \approx \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \frac{|\Omega|}{k_e} (2.11669) \quad (110)$$

Lo cual nos dice que la fracción de átomos en $|g\rangle$ decae como $\frac{1}{\sqrt{T}}$. Si comparamos la integral original contra nuestra aproximación usando los siguientes datos $\Omega = 2\pi \times 10^3 \text{Hz}$, $T = 10^{-6} \text{K}$, la integral sin aproximación da un resultado de $P_g = 0.032906$, mientras que con nuestra aproximación da $P_g = 0.0336807$, lo cual es una diferencia del 2%. Para estos valores de temperatura y de frecuencia de Rabi nos quedamos con aproximadamente $\frac{1}{30}$ de la muestra original de átomos. Debido a que nuestra muestra ahora posee una función de distribución de velocidades distinta de $|g(v)|^2$ con un ancho en velocidades reducido, del orden de $\frac{\Omega}{k_e}$, la muestra asemeja tener ahora una temperatura reducida (en la dirección de la transferencia de momento) de aproximadamente $T_R \approx 8 \times 10^{-10} \text{K}$. Nuestra aproximación se vuelve mejor conforme el ancho de $|g(v)|^2$ sea mayor, y el ancho de $|C_g(\tau, k_e v)|^2$ sea menor. Como comparación, en [7] consiguen enfriar una muestra de 4×10^6 átomos de Rubidio a una temperatura de $90 \mu\text{K}$, después, debido a los procesos que se usaron para disminuir la temperatura del gas, terminan con aproximadamente 2×10^3 átomos a una temperatura de 170nK . En nuestro caso con la asistencia de este pulso selector nosotros podríamos pasar de tener del orden de 10^6 átomos a una temperatura de $30 \mu\text{K}$, a tener $\approx 10^5$ átomos con una temperatura de $\approx 1 \text{nK}$, es decir, más átomos a menor temperatura, y debido a la naturaleza de este proceso, esto puede ser realizado con mayor frecuencia para múltiples mediciones subsecuentes.

7.2. Contraste como función de la frecuencia de Rabi del pulso selector

Podemos ahora ver como variando la frecuencia de Rabi del pulso selector afecta a las franjas y la visibilidad de estas. Si variamos la frecuencia de Rabi del pulso selector esto es esencialmente variar la temperatura de la nube atómica y obtenemos la Figura 20, donde podemos ver que con una frecuencia de Rabi del pulso selector mas pequeña obtenemos un mejor contraste de las franjas.

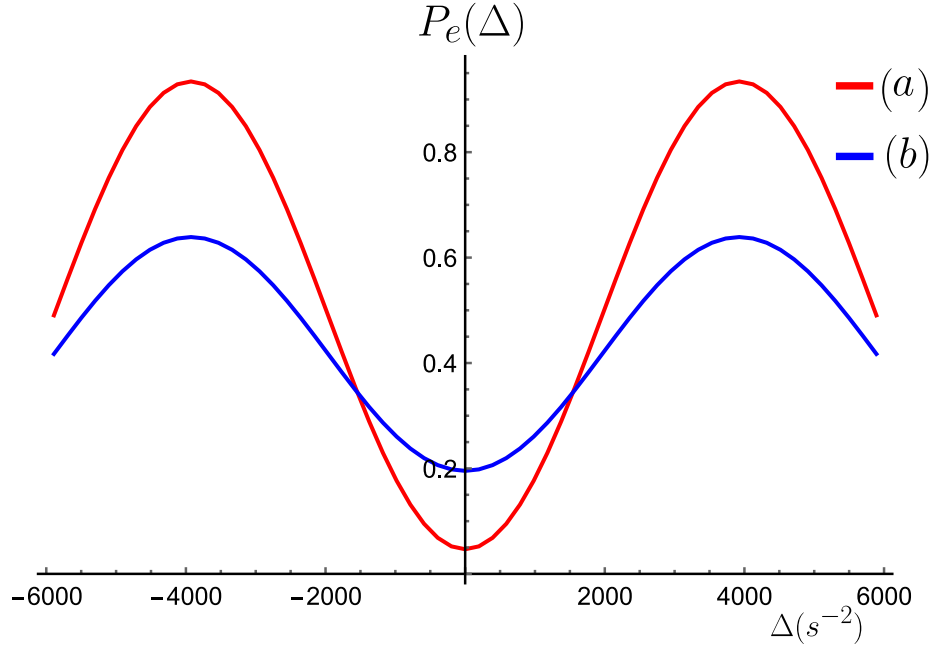


Figura 20: Franjas con distinta frecuencia de Rabi del pulso selector. (a) $\Omega_{SP} = 2\pi \times 10^2 Hz$ con un contraste de .887, (b) $\Omega_{SP} = 2\pi \times 10^3 Hz$ con un contraste de .4435. La temperatura inicial de la nube es de $1\mu K$ y la frecuencia de Rabi de la secuencia interferometrica es $\Omega = 2\pi \times 10^3 Hz$. Este programa se llama «franjas mach-zehnder pulso selector.nb».

Se observa que las franjas poseen la misma forma que en las de la Figura 17 y por lo tanto la ecuación que las describe es la ecuación (93). Si ahora graficamos el contraste como función de la frecuencia de Rabi del pulso selector obtenemos la Figura 21, la cual muestra que nuestro contraste mejora conforme Ω_{SP} disminuye, esto es debido a que Ω_{SP} esta seleccionando un espectro reducido de la distribución original de velocidades y conforme Ω_{SP} disminuye, seleccionamos cada vez menos componentes de velocidad, pero recordemos que esto también nos hace perder átomos con una dependencia de Ω_{SP} dada por la ecuación (110).

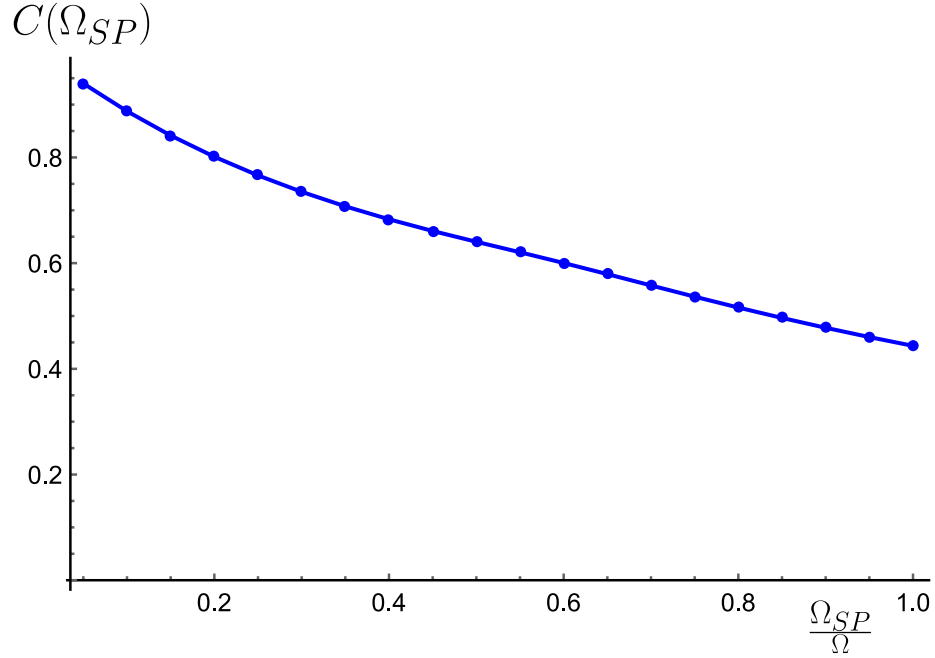


Figura 21: Contraste como función de la frecuencia de Rabi del pulso selector. La temperatura original de la nube es de $1\mu K$. La frecuencia de Rabi de la secuencia interferométrica es de $2\pi \times 10^3 Hz$. Este programa se llama «contraste mach-zehnder pulso selector.nb».

8. Ancho ideal del Raman

8.1. Simulación de Monte-Carlo

Las condiciones discutidas en los capítulos 3 y 4 no consideran el hecho que los átomos poseen una distribución espacial en la trampa y tampoco consideran que el haz del láser posee un perfil transversal de intensidad, es decir, no todos los átomos son irradiados con la misma intensidad de luz y por ende no muchos realizan las mismas oscilaciones de Rabi. Este capítulo tratará de un programa que modela estos efectos para observar a que ancho de perfil transversal y potencia uno esperaría la mejor señal. Primero se considera que dentro de la trampa los átomos inicialmente poseen una distribución Gaussiana de Posiciones mediante una simulación de Monte-Carlo. Para generar una distribución discreta de posiciones con una cierta preferencia Gaussiana primero hacemos notar el hecho que esta distribución esta normalizada, es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)dx = 1 \quad (111)$$

pero nosotros queremos solo una lista de N posiciones tal que cuando $N \rightarrow \infty$ el histograma de esta nos devuelva a $P(x)$, lo que ahora se hace es generar una lista de N números aleatorios r entre 0 y 1 tales que estos sean el resultado de la integración de $P(x)$ hasta un cierto valor x_0

$$\int_{-\infty}^{x_0} P(x)dx = r \quad (112)$$

el valor x_0 es lo que estamos buscando, si nuestra distribución de posiciones tiene la siguiente forma

$$P(x) = \frac{\exp\left[-\frac{(x-x_c)^2}{\sigma_x^2}\right]}{\sigma_x \sqrt{\pi}} \quad (113)$$

entonces nuestro valor de x_0 es

$$x_0 = \sigma_x * \text{erf}^{-1}(2r - 1) + x_c \quad (114)$$

análogamente podemos hacer el mismo procedimiento para otra coordenada y_0 , con ancho σ_y . Ahora si a ambas coordenadas les damos el mismo ancho $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_r$, entonces la lista de el par de números x_0, y_0 es una distribución discreta de posiciones $2D$ con una preferencia Gaussiana.

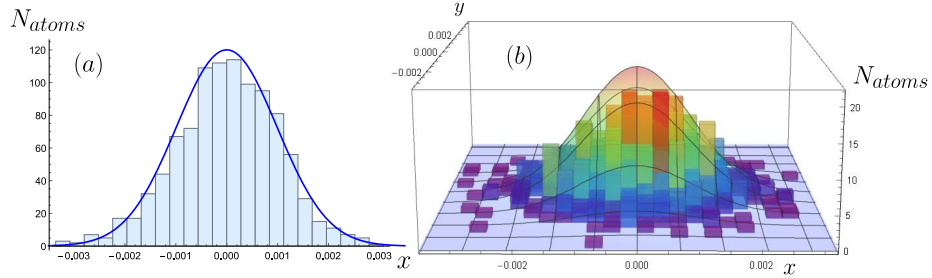


Figura 22: (a) Distribución unidimensional de átomos con $\sigma_x = .14 \times 10^{-2}m$. (b) Distribución bidimensional de átomos con $\sigma_r = .14 \times 10^{-2}m$. El eje vertical muestra cuantos átomos hay dentro de una casilla de dimensiones $\sigma_x/5$, para el caso bidimensional el eje vertical muestra cuantos átomos hay en una casilla de dimensiones $\sigma_x/5$ y $\sigma_y/5$ con $\sigma_y = \sigma_x$. Este programa se llama «monte-carlo posiciones.nb».

Después a esta distribución de átomos le aplicamos un perfil de intensidades de luz. La intensidad de un campo electromagnético es

$$I = S_{prom} = \frac{E_{max}^2}{2\mu_0 c} \quad (115)$$

la potencia de la radiación se mantiene constante aún variando el ancho del perfil de intensidad

$$\mathcal{P} = \int I(A) dA \quad (116)$$

$$\mathcal{P} = \int \frac{E_{max}^2}{2\mu_0 c} \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{\sigma_R}\right] dx dy \quad (117)$$

$$\mathcal{P} = \frac{\pi E_{max}^2 \sigma_R^2}{\mu_0 c} \quad (118)$$

esto nos da una expresión para E_{max} en función del ancho del perfil de intensidad σ_R y la potencia del láser \mathcal{P}

$$E_{max} = \sqrt{\frac{\mu_0 c \mathcal{P}}{\pi \sigma_R^2}} \quad (119)$$

la intensidad ahora es

$$I = \frac{\mu_0 c \mathcal{P}}{2\mu_0 c} \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{\sigma_R}\right] \quad (120)$$

ó también podemos escribirlo en términos de un campo eléctrico el cual tiene una dependencia espacial

$$I = \frac{E(x, y)^2}{2\mu_0 c} \quad (121)$$

dónde

$$E(x, y) = \sqrt{\frac{\mu_0 c \mathcal{P}}{\pi \sigma_R^2}} \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{2\sigma_R}\right] \quad (122)$$

si recordamos la expresión para la frecuencia de Rabi, la frecuencia a la cual los átomos oscilan

$$\Omega = \frac{-e}{\hbar} \langle e | \vec{E} \cdot \vec{r} | g \rangle \quad (123)$$

E_0 es la amplitud máxima de las oscilaciones del campo eléctrico en el tiempo, pero ahora tiene una dependencia espacial debido al perfil de intensidades. la frecuencia de Rabi es ahora

$$\Omega = \frac{-e}{\hbar} \sqrt{\frac{\mu_0 c \mathcal{P}}{\pi \sigma_R^2}} \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{2\sigma_R}\right] \langle e | \vec{e} \cdot \vec{r} | g \rangle \quad (124)$$

aquí ães la polarización del campo Electromagnético

$$\Omega(x, y) = \Omega_0 \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{2\sigma_R}\right] \quad (125)$$

dónde

$$\Omega_0 = \frac{-e}{\hbar} \sqrt{\frac{\mu_0 c \mathcal{P}}{\pi \sigma_R^2}} \langle e | \vec{\epsilon} \cdot \vec{r} | g \rangle. \quad (126)$$

Esta nueva expresión para la frecuencia de Rabi nos dice la frecuencia a la cual oscila un átomo dada su posición. El tiempo de la aplicación de la radiación no cambia para cada átomo, es el mismo para todos. Supongamos que a un ensamble de átomos, como el de la Figura 22 (b), todos empiezan en el estado base $|g\rangle$ y después les aplicamos radiación durante un tiempo $\tau = \frac{\pi}{\Omega_0}$, es decir que para un átomo justo en el máximo del perfil de intensidad esto sería un pulso π y sería excitado al estado $|e\rangle$, pero para cualquier otro átomo esto no sería exactamente un pulso π y no sería llevado al estado $|e\rangle$ debido a que este átomo tiene una frecuencia de oscilación distinta, lo anterior está visualizado en la Figura 23.

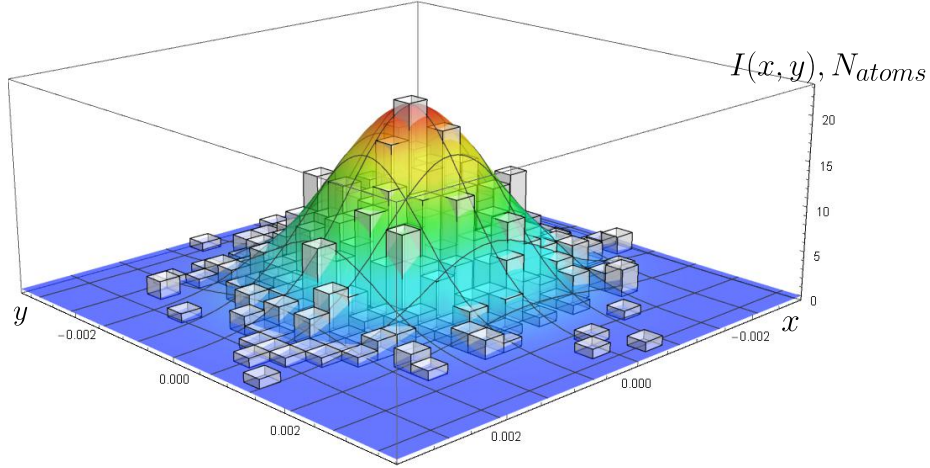


Figura 23: Perfil de intensidades sobre una distribución bidimensional de átomos. El eje vertical indica cuantos átomos se encuentran en la casilla de dimensiones $\frac{\sigma_x}{5}$ (histograma) y también indica la intensidad de la radiación (reescalada). Para este caso tanto el perfil de la intensidad de luz como la distribución espacial de átomos poseen el mismo ancho. Este programa se llama «oscilaciones rabi distribución espacial.nb».

8.2. Efecto de un gradiente de intensidad sobre una distribución espacial de átomos

La señal de todos los átomos como uno solo pueden ser expresada como

$$P_e(t) = \frac{\sum_{n=1}^N |C_{e,n}(\Omega_n, t)|^2}{N} \quad (127)$$

estas oscilaciones están graficadas en la Figura 24, para dos valores de el ancho del perfil de intensidad.

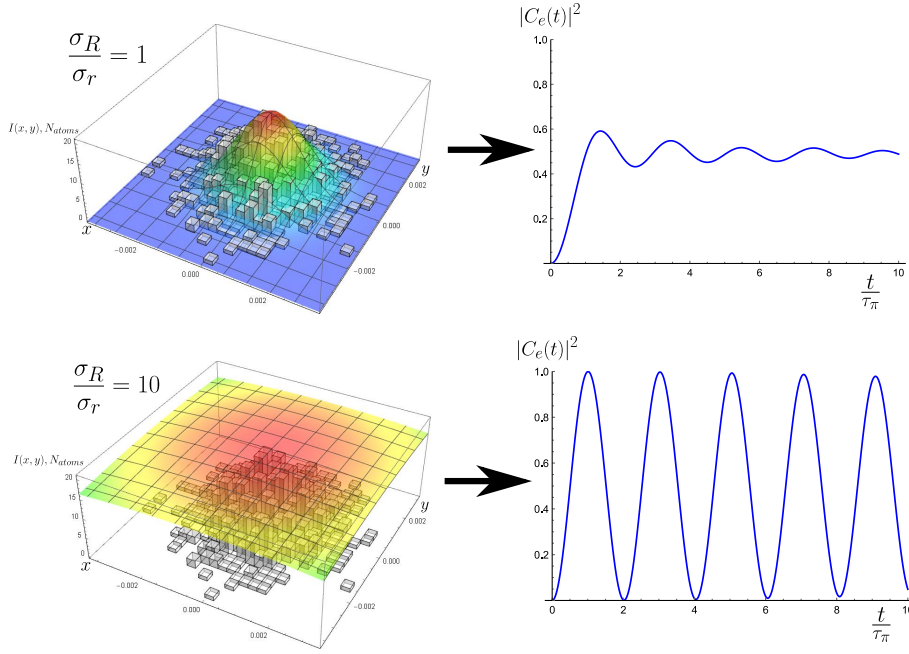


Figura 24: Oscilaciones de Rabi de un ensemble de átomos. Cuando todos los átomos son irradiados con un ancho mas grande del perfil de intensidad ($\frac{\sigma_R}{\sigma_r} = 10$) estos realizan todos colectivamente las mismas oscilaciones, a diferencia de cuando el ancho es pequeño ($\frac{\sigma_R}{\sigma_r} = 1$) la coherencia entre las oscilaciones se pierde rápidamente. Este programa se llama «oscilaciones rabi distribucion espacial.nb».

Se observa que el efecto que tiene un perfil de intensidad sobre una distribución espacial de átomos es aquel de la pérdida de coherencia sobre las oscilaciones de Rabi que realiza el átomo en presencia de la radiación. En este punto uno puede llegar a la conclusión que entonces un perfil de intensidad con un ancho muy grande sería lo mejor para mantener la coherencia de las oscilaciones ya que de esta manera todos los átomos son llevados al mismo estado si seguimos una secuencia de pulsos Mach-Zehnder, pero al escoger un ancho grande también disminuimos la frecuencia de Rabi y eso nos afecta en la cantidad de átomos con la cual estaríamos trabajando.

En [15] observan un efecto similar pero ellos lo simulan considerando que este fenómeno de pérdida de coherencia proviene de la expansión de la nube atómica en la dirección horizontal, pero si mencionan que un efecto similar debería de ser observado si se considera la distribución de velocidades vertical.

8.3. Curvas de Población y Contraste como función del ancho del Raman

Una diferencia notable de destacar en este punto es que en el laboratorio hacemos uso de una transición Raman, que para cuestiones de oscilaciones de Rabi entre dos estados no afecta a las ecuaciones de la dinámica de la población entre ellos pero si nos cambia nuestra expresión para la frecuencia de Rabi de

$$\Omega = \frac{-e}{\hbar} \langle e | \vec{E} \cdot \vec{r} | g \rangle \quad (128)$$

a

$$\Omega = \frac{e^2}{\hbar^2} \sum_n \frac{\langle j | \vec{E}_1 \cdot \vec{r} | n \rangle \langle k | \vec{E}_2 \cdot \vec{r} | n \rangle^*}{2\delta_n} \quad (129)$$

dónde E_1 y E_2 son los campos eléctricos de los haces de luz, lo importante de destacar aquí es que ahora la frecuencia de Rabi depende del cuadrado del campo eléctrico, lo cual la hace directamente proporcional a la intensidad del campo, la frecuencia de Rabi en el pico de intensidad es aproximadamente

$$\Omega_0 \approx \frac{e^2 a_0^2 \mu_0 c \mathcal{P}}{\delta \hbar^2 \pi \sigma_R^2} \quad (130)$$

y nuestra frecuencia de Rabi dependiente de la posición es

$$\Omega(x, y) = \Omega_0 \text{Exp}\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{\sigma_R}\right] \quad (131)$$

ahora el ancho de $\Omega(x, y)$ es el mismo ancho que el del perfil transversal de intensidad. Una vez aclarado esto, procedemos a realizar la secuencia de Pulso selector-Mach Zehnder sobre la colección de átomos considerando no solo su distribución espacial pero también su distribución de momentos, la población de un átomo después del pulso selector es

$$P_{PS}^{(n)} = \int P(v) \left| C_{g,0} \left(\Omega_n, t = \frac{\pi}{\Omega_0}, \delta = k_e v \right) \right|^2 dv \quad (132)$$

donde $P(v)$ es la distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann

$$P(v) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_\beta T}} \text{Exp} \left[-\frac{mv^2}{2k_\beta T} \right]$$

y $C_{g,0}(\Omega, t, \delta)$ esta dado por la ecuación 103, el subíndice n en Ω_n significa que es la frecuencia de Rabi del n -ésimo átomo el cual tiene una posición (x_n, y_n) , es decir $\Omega_n = \Omega(x_n, y_n)$. Si incluimos el efecto de la distribución espacial de átomos la fracción total de la población de átomos con los que se trabaja es

$$P_{SP} = \frac{\sum_{n=1}^N P_{PS}^{(n)}}{N} \quad (133)$$

después esta población entra al interferómetro y es donde le aplicamos la secuencia de pulsos $\frac{\pi}{2} - \pi - \frac{\pi}{2}$, y ahora nos preguntamos por la población del estado excitado

$$p_e^{(n)}(\Delta) = \frac{\int P(v) \left| C_{g,0} \left(\Omega_n, t = \frac{\pi}{\Omega_0}, k_{eff}v \right) \right|^2 \left| C_{e,3} \left(\Omega_n, t = \frac{\pi}{2\Omega_0}, k_{eff}v, \Delta \right) \right|^2 dv}{p_{PS}^{(n)}} \quad (134)$$

donde $C_{e,3}$ es el coeficiente del estado excitado después del tercer pulso, aquí hemos renormalizado la población que entra al interferómetro para que el contraste de las franjas no dependa de la población con la que se trabaja, si ahora incluimos la distribución espacial de los átomos nuestra expresión para la población en el estado excitado es

$$P_e(\Delta) = \frac{\sum_{n=1}^N p_e^{(n)}(\Delta)}{N} \quad (135)$$

después procedemos a calcular el contraste de las franjas totales promediadas

$$C = Max[P_e(\Delta)] - Min[P_e(\Delta)] \quad (136)$$

y el cociente de señal a ruido el cual es

$$SNR = \frac{P_{SP}}{\sqrt{P_{SP}}} = \sqrt{P_{SP}} \quad (137)$$

el cual termina siendo la raíz cuadrada de la fracción total de átomos con los que estamos trabajando. Estas dos cantidades las calculamos para diferentes valores de el ancho de intensidad σ_R y obtenemos la Figura 25

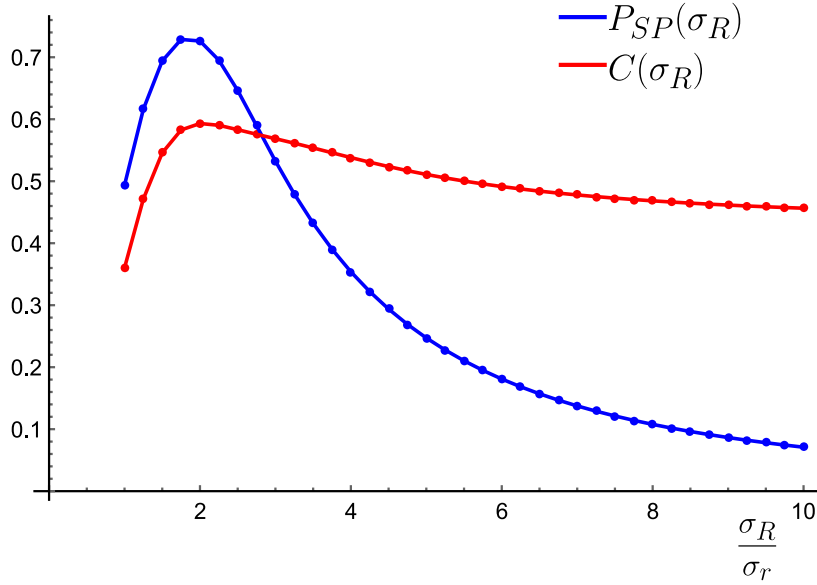


Figura 25: Fracción total de átomos y contraste de las franjas como función del ancho del perfil de intensidad. σ_R fue variado desde $1 \times \sigma_r$ hasta $10 \times \sigma_r$. La potencia del láser para este cálculo fue de $60mW$. Este programa se llama «ancho ideal del raman.nb».

Podemos ver que tanto la población con la que estamos trabajando como el contraste de las franjas presentan ambos un máximo a un cierto valor de σ_R , el comportamiento de $P_{SP}(\sigma_R)$ es fácil de explicar, conforme el ancho del perfil de intensidad aumenta la frecuencia de Rabi disminuye y sabemos que la población seleccionada por el pulso selector depende de la frecuencia de Rabi (110), pero al mismo tiempo tenemos el fenómeno de la pérdida de coherencia, entonces el máximo que observamos es cuando se tiene la suficiente coherencia para que el pulso selector agarre más átomos con los cuales trabajar, mientras que para valores muy grandes del ancho del perfil de intensidad la coherencia es muy buena pero la frecuencia de Rabi es muy pequeña y se selecciona una población de momentos muy pequeña de la distribución de átomos.

En cuanto al comportamiento de $C(\sigma_R)$ no tenemos explicación para el máximo que se observa, pero su comportamiento general si es fácil de explicar; conforme el ancho del perfil de intensidad aumenta, aumentamos la coherencia entre los átomos y al final de la secuencia de interferometría la mayoría de los átomos realizaron propiamente la interferencia y las franjas de cada uno de estos son muy similares, entonces se espera que el contraste sea bajo a un ancho de perfil de intensidad pequeño y conforme este ancho aumente el contraste aumenta también, tendiendo a el valor de cuando la frecuencia de Rabi del pulso selector es la misma frecuencia que se usa en la secuencia interferométrica ($C \approx .44$, ver figuras 20 y 21) .

Si ahora graficamos a $P_{SP}(\sigma_R)$ y a $C(\sigma_R)$ para diferentes potencias obtenemos las curvas de las Figuras 26 y 27. Para la Figura 26 la fracción de la población, después del pulso selector, para un solo ancho del perfil de intensidades aumenta conforme aumentamos la potencia, esto es debido a que la población que selecciona el pulso selector es proporcional a $\Omega^2(110)$ y a la vez Ω es proporcional a la potencia del láser (130).

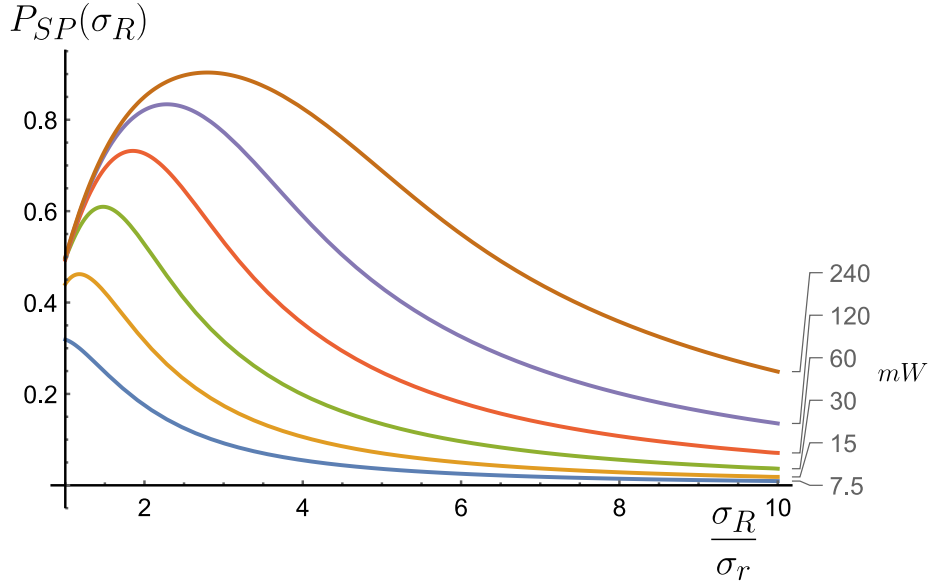


Figura 26: Curvas de la población fraccional de la colección de átomos después del pulso selector en función del ancho del perfil de intensidad.

Para la Figura 27 el contraste de las franjas de interferencia también tiende a aumentar conforme aumentamos la potencia, el hombro del máximo también se vuelve mas pronunciado conforme la potencia incrementa, pero para valores grandes de $\frac{\sigma_R}{\sigma_r}$ todas las curvas poseen la tendencia de acercarse al valor de $C \approx .4435$

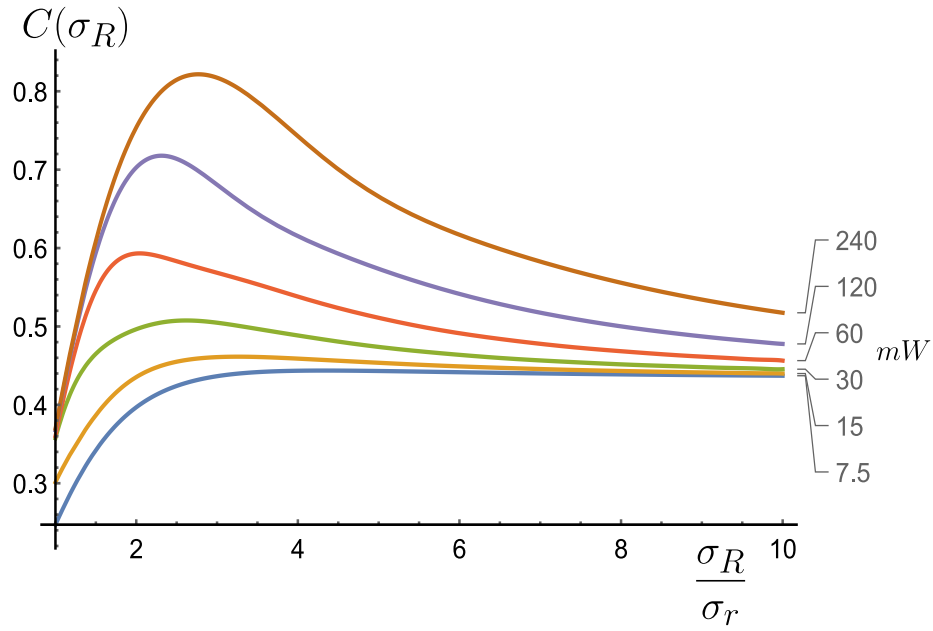


Figura 27: Curvas del contraste de las franjas al final de la secuencia interferométrica de la colección de átomos en función del ancho del perfil de intensidad.

La figura de merito en la que estamos interesados es el producto $SNR \times C$, esto es el cociente señal a ruido por el contraste de las franjas, este producto determina la precisión de la medición y está graficada en la Figura 28. Es de nuestro interés encontrar el máximo de cada una de estas curvas para obtener una curva de σ_R como función de la potencia, donde la precisión sea la máxima.

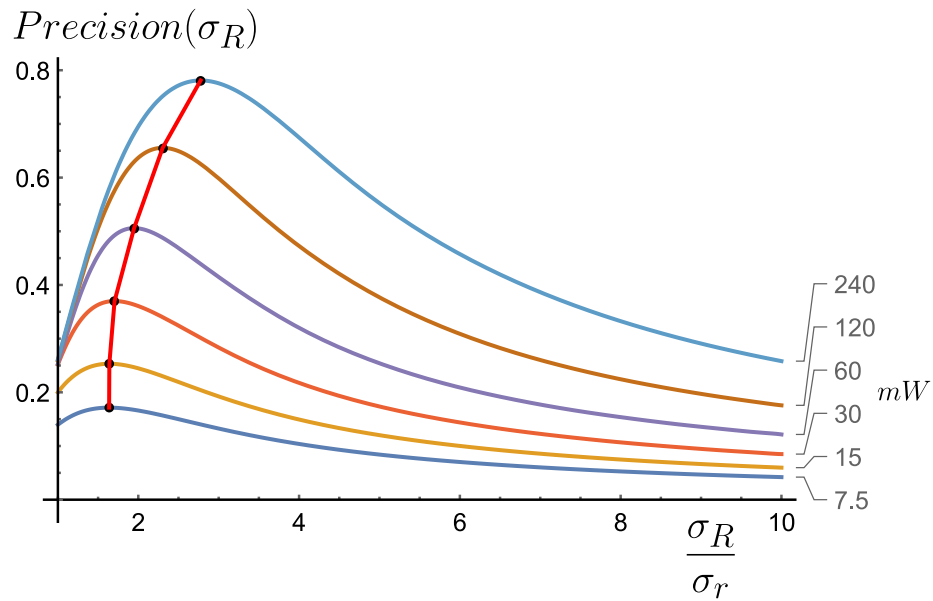


Figura 28: Precisión a varias potencias como función del ancho del perfil de intensidad. Los puntos negros son los máximos de cada una de las curvas. Este programa se llama «análisis datos ancho ideal raman.nb».

Si ahora juntamos los máximos de la Precisión en una sola gráfica obtenemos lo que denominamos el ancho ideal como función de la potencia del láser (Figura 29), observamos un comportamiento creciente del ancho conforme la potencia aumenta.

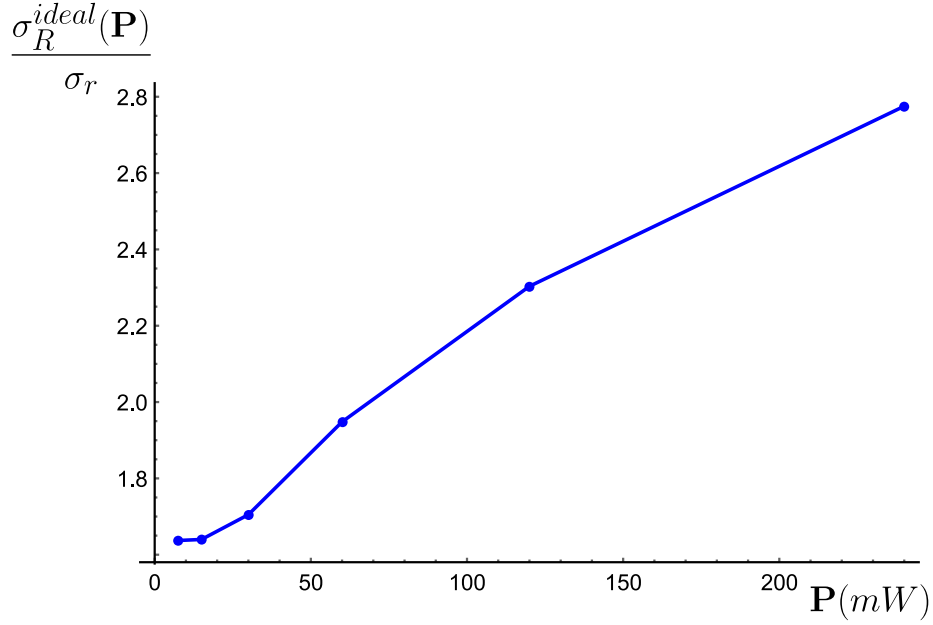


Figura 29: Ancho ideal del perfil de intensidad de los láseres que realizan las transiciones Raman en función de la potencia. Este programa se llama «análisis datos ancho ideal raman.nb».

En conclusión en este capítulo mostramos que con un perfil Gaussiano de intensidad y una distribución espacial de átomos existen efectos de decoherencia los cuales afectan a la fracción de la población en momento que se selecciona y afectan el contraste de las franjas de interferencia, también hemos mostrado que existe un ancho de perfil de intensidad preferencial a cada potencia el cual maximiza la precisión de las mediciones que se lleven a cabo.

9. Conclusión

El contraste de las franjas de interferencia en un interferómetro atómico tipo Mach-Zehnder para mediciones de gravimetría presenta una alta dependencia de la temperatura, por arriba de la temperatura crítica $T_{MZ} \equiv \frac{m\Omega^2}{k_B k_e^2}$ observamos un contraste muy bajo, y conforme uno reduce la temperatura por debajo de la temperatura crítica el contraste aumenta significativamente. Para mitigar este efecto hicimos uso de un pulso selector de velocidades el cual selecciona una rebanada menor de velocidad con un ancho en velocidad proporcional a $\frac{\Omega}{k_e}$ pero al mismo tiempo reduce la fracción de átomos disponibles para la secuencia de interferometría, esta fracción tiene una dependencia proporcional a $\frac{\Omega}{k_e v_{rms}}$. Si se usa la misma frecuencia de Rabi para el pulso selector y para la secuencia de interferometría uno obtiene un contraste de las franjas máximo de $\approx .44$ y

conforme se reduce la frecuencia de Rabi este valor aumenta. Por ultimo se logró obtener el diámetro ideal del haz Raman de excitación en función de su potencia el cual maximiza la precisión de las mediciones, este diámetro ideal aumenta conforme aumenta la potencia del láser. Este trabajo puede extenderse a futuro si uno considera mas efectos dentro de la dinámica de la secuencia interferométrica tales como, corrimientos de luz, resolver las ecuaciones de la dinámica de los coeficientes con una dependencia cuadrática en el tiempo, ensanchamiento espacial de la nube atómica, etc.

10. Apéndice

Las ecuaciones (25) y (26) con soluciones generales (27) generalmente se aplican cuando uno tiene una superposición en todo tiempo, pero como la Figura 16 ilustrativamente muestra, en un punto uno puede dudar de si se tiene una superposición, para ver esto primero consideremos que empezamos en $t < 0$ con un paquete de momentos centrado en $p_0 = 0$ y en el estado $|g\rangle$

$$|\Phi\rangle = \int |g, p'\rangle \langle p'|\phi\rangle dp' \quad (138)$$

$$\langle p|\Phi\rangle = \Phi(p) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\sigma_p^2}} \exp\left[-\frac{p^2}{2\sigma_p^2}\right] |g\rangle \quad (139)$$

después a este paquete inicial de momentos le aplicamos un Pulso Raman muy rápido y obtenemos

$$|\Phi(\tau)\rangle = \int dp' \Phi(p') (C_{g,p'}(\tau) |g, p'\rangle + C_{e,p'}(\tau) |e, p' + \hbar k_e\rangle) \quad (140)$$

como los pulsos Raman solo acoplan a los estados $|g, p\rangle$ y $|e, p + \hbar k_e\rangle$ podemos hacer un cambio de variable para el termino que acompaña al estado $|e\rangle$ y obtenemos

$$|\Phi(\tau)\rangle = \int dp' \{ \Phi(p') C_g(p', \tau) |g, p'\rangle + \Phi(p' - \hbar k_e) C_e(p' - \hbar k_e, \tau) |e, p'\rangle \} \quad (141)$$

después sigue un tiempo de evolución a oscuras, es decir, nuestro estado evolucionara sin la acción de la radiación, para esto nuestro Hamiltoniano es

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + mg\hat{z} \quad (142)$$

usando el método de operadores separados o también conocido como la Formula del producto de Trotter [23] podemos encontrar la evolución de nuestro paquete durante un tiempo a oscuras T

$$|\Phi(\tau + T)\rangle = \int dp' \{ \Phi(p') C_g(p', \tau) \exp(i\phi_1) |g, p' + mgT\rangle \quad (143)$$

$$+ \Phi(p') C_e(p', \tau) \exp(i\phi_2) |e, p' + \hbar k_e + mgT\rangle \}$$

$$\phi_1 = \frac{-1}{2m\hbar} \int_0^T (p + mgt')^2 dt' \quad (144)$$

$$\phi_2 = \frac{-1}{2m\hbar} \int_0^T (p + \hbar k_e + mgt')^2 dt' \quad (145)$$

nuestra función de onda es

$$|\Phi(p, \tau + T)\rangle = \Phi(p - mgT) C_g(p - mgT, \tau) \exp(i\phi_1) |g\rangle \quad (146)$$

$$+ \Phi(p - mgT - \hbar k_e) C_e(p - mgT - \hbar k_e, \tau) \exp(i\phi_2) |e\rangle$$

podemos observar que nuestro estado es siempre una superposición de dos distribuciones con una diferencia de fase entre ellas, el porque de que nuestro estado siempre sea una superposición es debido a que siempre fue algo deslocalizado.

Ahora mostraremos tres diferentes maneras de calcular la diferencia de fase acumulada al final de la secuencia interferométrica, el primero de ellos es considerando una trayectoria clásica

$$z_g = z_o + v_o t + \frac{gt^2}{2} \quad (147)$$

$$z_e = z_o + (v_o + \frac{\hbar k_e}{m})t + \frac{gt^2}{2} \quad (148)$$

donde z_g y z_e son las trayectorias clásicas de los estados $|g\rangle$ y $|e\rangle$, la diferencia de fase es

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{1}{\hbar} \int \Delta U dt = 2 \int_0^T \frac{mg(z_e - z_g) dt}{\hbar} = \frac{2mg}{\hbar} \frac{\hbar k_e}{m} \int_0^T t dt = k_e g T^2 \quad (149)$$

La segunda manera es si ahora nosotros consideramos un paquete de momentos como en la ecuación (139) y le aplicamos la secuencia interferométrica $\frac{\pi}{2} - \pi - \frac{\pi}{2}$, donde las evoluciones en los tiempos a oscuras las calculamos con el método de operadores separados, las fases son

$$\phi_g = -\frac{1}{2m\hbar} \left[\int_0^T (p + mgt')^2 dt' + \int_T^{2T} (p + \hbar k_e + mgt')^2 dt' \right] \quad (150)$$

$$\phi_e = -\frac{1}{2m\hbar} \left[\int_0^T (p + \hbar k_e + mgt')^2 dt' + \int_T^{2T} (p + mgt')^2 dt' \right] \quad (151)$$

la diferencia de fases es

$$\phi_e - \phi_g = -\frac{1}{2m\hbar} \left[\int_T^{2T} [(\hbar k_e)^2 + 4\hbar k_e(p + mgt')] dt' - \int_0^T [(\hbar k_e)^2 + 4\hbar k_e(p + mgt')] dt' \right] \quad (152)$$

$$\phi_e - \phi_g = -\frac{1}{2m\hbar} [-2\hbar k_e mgT^2] = k_e g T^2 \quad (153)$$

La tercera manera es considerando que en los pulsos subsecuentes a los tiempos a oscuras es cuando la fase acumulada en el tiempo a oscuras es escrita en el átomo (como en la subsección 6.2), los coeficientes después del primer pulso son

$$C_e^{(1)}(\tau_1) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \quad (154)$$

$$C_g^{(1)}(\tau_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (155)$$

donde tomamos que $\delta \ll \Omega$, las ecuaciones para el segundo pulso son

$$i\dot{C}_e^{(2)} = \Omega \exp[i\delta t] \exp[i\delta T_1] \exp[i\Delta T_1^2] C_g^{(2)} \quad (156)$$

$$i\dot{C}_g^{(2)} = \Omega^* \exp[-i\delta t] \exp[-i\delta T_1] \exp[-i\Delta T_1^2] C_e^{(2)} \quad (157)$$

los coeficientes después del segundo pulso son

$$C_e^{(2)}(\tau_2) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \exp[i\delta T_1] \exp[i\Delta T_1^2] \quad (158)$$

$$C_g^{(2)}(\tau_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \exp[-i\delta T_1] \exp[-i\Delta T_1^2] \quad (159)$$

ahora las ecuaciones para el tercer pulso son

$$i\dot{C}_e^{(3)} = \Omega \exp[i\delta t] \exp[i\delta T_2] \exp[i\Delta T_2^2] C_g^{(3)} \quad (160)$$

$$i\dot{C}_g^{(3)} = \Omega^* \exp[-i\delta t] \exp[-i\delta T_2] \exp[-i\Delta T_2^2] C_e^{(3)} \quad (161)$$

el coeficiente del estado excitado es

$$C_e^{(3)}(\tau_3) = \frac{i}{2} \exp[i\delta T_1] \exp[i\Delta T_1^2] (\exp[i\delta(T_2 - 2T_1)] \exp[i\Delta(T_2^2 - 2T_1^2)] - 1) \quad (162)$$

si nos fijamos en el cambio de fase que va con T_1^2

$$\phi_1 - \phi_2 = \Delta(T_2^2 - 2T_1^2) \quad (163)$$

donde $\Delta = (a_2 + k_e \frac{g}{2})$ y a_2 es el parámetro cuadrático de la rampa de frecuencia el cual por el momento lo haremos cero, y $T_2 = 2T_1$, entonces

$$\phi_1 - \phi_2 = k_e \frac{g}{2} (4T_1^2 - 2T_1^2) \quad (164)$$

$$\phi_1 - \phi_2 = k_e g T_1^2 \quad (165)$$

Vemos que en los tres casos obtenemos el mismo resultado.

11. Listado de programas para el laboratorio y su función

Aquí se enlistan los programas que se guardaran en el laboratorio de átomos fríos al igual que una descripción de que hace cada uno.

1. Mach-zehnder maxwell-boltzmann detuning distribution: este programa grafica el modulo cuadrado del coeficiente del estado excitado al final de la secuencia interferometrica como función de la velocidad (sin considerar una distribución de velocidades inicial y cuando la gravedad es compensada) y la distribución de velocidades de la nube atómica para compararlas y darnos una idea de si el contraste de las franjas de interferencia va a ser bajo o alto, es decir si la distribución de velocidades promedia sobre muchas oscilaciones del modulo cuadrado del coeficiente del estado excitado uno esperaría un contraste bajo.
2. franjas mach-zehnder temperatura: este programa calcula y grafica las franjas de interferencia como función del coeficiente cuadrático de la rampa de frecuencia.
3. contraste mach-zehnder temperatura: este programa calcula y grafica el contraste de las franjas de interferencia como función de la temperatura inicial de la nube atómica.
4. franjas mach zehnder pulso selector: este programa calcula y grafica las franjas de interferencia como función del coeficiente cuadrático de la rampa de frecuencia cuando uno realiza primero un pulso selector sobre la nube atómica.
5. contraste mach-zehnder pulso selector: este programa calcula y grafica el contraste de las franjas de interferencia como función de la frecuencia de Rabi del pulso selector.
6. monte-carlo posiciones: este programa genera una lista de posiciones unidimensionales o bidimensionales discretas con una preferencia Gaussiana.

7. oscilaciones rabi distribucion espacial: este programa considera la distribución espacial de los átomos y la forma del perfil del láser de excitación para después realizar oscilaciones de Rabi sobre los átomos y calcula como se ve la probabilidad de transición colectiva de la nube como función del tiempo.
8. ancho ideal del Raman: este programa considera la distribución espacial de los átomos, la forma del perfil del láser de excitación, la potencia del láser y el pulso selector para después realizar la secuencia interferometrica sobre los átomos y calcula el contraste y la población que sobrevive al pulso selector como función del radio del láser de excitación, al final estos datos pueden ser exportados y analizados en el programa «Análisis datos ancho ideal Raman».
9. Análisis datos ancho ideal Raman: este programa toma los datos exportados del programa «ancho ideal del Raman» para después hacer un ajuste mas suave y calcular la figura de mérito que es la precisión como función del radio del láser. Si se obtienen varios datos del programa «ancho ideal del Raman» para distintas potencias, este programa puede calcular el máximo de las precisiones para las distintas potencias y al final obtener el radio ideal del láser como función de la potencia del láser, este radio maximizará la precisión.

Referencias

- [1] Norman F. Ramsey (1950). A Molecular Beam Resonance Method with Separated Oscillating Fields. *Phys. Rev.* 78, 695.
- [2] Kathryn Moler, David S. Weiss, Mark Kasevich and Steven Chu (1992); Physics Department, Stanford University, Stanford, California 94305. Theoretical Analysis of velocity-selective Raman transitions. *Physical Review A*. Volume 45 Number 1.
- [3] Hogan, Jason & Johnson, David & Kasevich, Mark. (2008). Light-pulse atom interferometry. *Proc. Int. School Phys. Enrico Fermi*. 168. 10.3254/978-1-58603-990-5-411.
- [4] Sakurai J.J. (1994). *Modern Quantum Mechanics*. California: Addison-Wesley Publishing.
- [5] Metcalf H. J. y van der Straten P. *Laser Cooling and Trapping* (Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1999).
- [6] Leanhardt, A. E.; Pasquini, TA; Saba, A; Schirotzek, A; Shin, Y; Kielpinski, D; Pritchard, DE; Ketterle, W (2003). "Cooling Bose–Einstein Condensates Below 500 Picokelvin". *Science*. 301 (5639): 1513–1515.

- [7] A. H. Anderson, J. R. Ensher, A. R. Matthews, C. E. Wieman and E. A. Cornell (1995). Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor. *Science New Series*, Vol. 269, No. 5221, pp. 198-201.
- [8] S. Dürr, T. Nonn, and G. Rempe (1998). Fringe Visibility and Which-Way Information in an Atom Interferometer. *Phys. Rev. Lett.* 81, 5705.
- [9] Vincent Ménoret, Pierre Vermeulen, Nicolas Le Moigne, Sylvain Bonvalot, Philippe Bouyer, Arnaud Landragin & Bruno Desruelle (2018). Gravity measurements below 10^{-9} g with a transportable absolute quantum gravimeter. *Scientific Reports* volume 8, Article number: 12300.
- [10] C. J. Cooper, G. Hillenbrand, J. Rink, C. G. Townsend, K. Zetie and C. J. Foot (1998). The Temperature of Atoms in a Magneto-optical Trap. *EPL* 28 397.
- [11] E. L. Hahn (1950). Spin Echoes. *Phys. Rev.* 80, 580.
- [12] Yoshio Torii, Yoichi Suzuki, Mikio Kozuma, Toshiaki Sugiura, Takahiro Kuga, Lu Deng, and E. W. Hagley (2000). Mach-Zehnder Bragg interferometer for a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A* 61, 041602(R).
- [13] R. Feynman, F. Vernon and R. Hellwarth. Geometrical representation of the Schrödinger Equation for Solving Maser Problems. *J. App. Phys.* 28, 49 (1957).
- [14] Qing-Qing Hua, Yu-Kun Luo, Ai-Ai Jia, Chun-Hua Weia, Shu-Hua Yana, Jun Yanga (2017). Scheme for suppressing atom expansion induced contrast loss in atom interferometers. *Optics Communications* 390, 111-116.
- [15] S. S. Szigeti, J E Debs, J J Hope, N P Robins y J D Close (2012). Why momentum width matters for atom interferometry with Bragg pulses. *New J. Phys.* 14 023009.
- [16] Michelson, Albert A.; Morley, Edward W. (1887). On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether. *American Journal of Science.* 34 (203): 333–345.
- [17] Estermann, I.; Stern, Otto (1930). "Beugung von Molekularstrahlen". *Z. Phys.* 61 (1–2): 95.
- [18] Carnal, O.; Mlynek, J. (1991). "Young's double-slit experiment with atoms: A simple atom interferometer". *Phys. Rev. Lett.* 66 (21): 2689.
- [19] G. Lamporesi, A. Bertoldi, L. Cacciapuoti, M. Prevedelli, and G. M. Tino, Determination of the Newtonian Gravitational Constant Using Atom Interferometry ", *Phys. Rev. Lett.* 100, 050801 (2008).
- [20] R. Bouchendira, P. Clade, S. Guellati-Khelifa, F. Nez, and F. Biraben, New Determination of the Fine Structure Constant and Test of the Quantum Electrodynamics", *Phys. Rev. Lett.* 106, 080801 (2011).

- [21] T. Gustavson, A. Landragin and M. Kasevich, "Rotation sensing with a dual atominterferometer Sagnac gyroscope", *Class. Quantum Grav.* 17(2000).
- [22] D. Schlippert, J. Hartwig, H. Albers, L. L. Richardson, C. Schubert, A. Roura, W. P. Schleich, W. Ertmer, and E. M. Rasel, "Quantum Test of the Universality of Free Fall ", *Phys. Rev. Lett.* 112, 203002 (2014).
- [23] Joel E. Cohen; Shmuel Friedland; Tosio Kato; F. P. Kelly (1982). "Eigenvalue inequalities for products of matrix exponentials". *Linear Algebra and Its Applications.* 45: 55–95.