



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ



INSTITUTO DE FÍSICA
"DR. MANUEL SANDOVAL VALLARTA"

ANÁLISIS DE LOS MOMENTOS CUADRUPOLARES DE LOS
BARIONES EN LA EXPANSIÓN $1/N_c$ DE LA QCD

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

presenta

M. en C. FELIPE DE JESÚS ROSALES ALDAPE

Asesor: DR. RUBÉN FLORES MENDIETA.

SAN LUIS POTOSÍ, S. L. P., 2022.

¿Tiene una página web?



Análisis de los momentos cuadrupolares de los bariones en la expansión $1/N_c$ de la QCD por Felipe de Jesús Rosales Aldape se distribuye bajo una [Licencia Creative Commons Atribución 4.0 Internacional](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

¡Copie este código para que sus visitantes lo sepan!

```
<a rel="license" href="http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/"></a><br /><span xmlns:dct="http://purl.org/dc/terms/" property="dct:title">Análisis de los momentos cuadrupolares de los bariones en la expansión  $1/N_c$  de la QCD</span> por <span xmlns:cc="http://creativecommons.org/ns#" property="cc:attributionName">Felipe de Jesús Rosales Aldape</span> se distribuye bajo una <a rel="license" href="http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/">Licencia Creative Commons Atribución 4.0 Internacional</a>.
```

Resumen

Los momentos cuadrupolares de los bariones del estado base son discutidos en la presente tesis con auxilio del formalismo de la expansión $1/N_c$ de la QCD, donde N_c es el número de carga de color. Primeramente, se obtuvieron expresiones teóricas asumiendo una simetría exacta de sabor $SU(3)$, y entonces los efectos de la ruptura de la simetría son tomados en cuenta a primer orden. La muy poca disponibilidad de información experimental no permite una comparación entre teoría y experimento, donde los parámetros libres de la expansión están indeterminados. No obstante, se dan nuevas relaciones muy útiles para los momentos cuadrupolares, válidas incluso en la presencia de la ruptura de la simetría a primer orden. Las predicciones generales de la expansión $1/N_c$ son bastante esclarecedoras.

Índice general

I	Disertación Doctoral	VII
1	Introducción General	1
1.1	Preámbulo	1
1.2	Contenido	3
2	Sobre la estructura atómica, las partículas subatómicas y el concepto de simetría	5
2.1	Introducción	5
2.2	La estructura atómica y las partículas	6
2.2.1	Los primeros modelos atómicos	6
2.2.2	Los detalles de la estructura atómica	7
2.2.3	Sobre las ecuaciones relativistas y las antipartículas	8
2.2.4	Sobre el mesón de Yukawa y los mesones	11
2.3	Simetrías	13
3	Fundamentos del estudio de los momentos cuadrupolares en Partículas Elementales	15
3.1	Introducción	15
3.2	Los antecedentes del Modelo Estándar	16
3.2.1	El modelo de quarks y los mesones	16
3.2.2	Los multipletes de bariones	18
3.2.3	Las interacciones fundamentales y teorías de unificación	21
3.3	Introducción al Modelo Estándar	24
3.4	Acerca de la simetría quiral	26
3.4.1	Introducción	26

3.4.2	Deducción del Teorema de Goldstone	30
3.4.3	El modelo lineal σ y la simetría quiral	33
3.5	Una introducción concisa a la QCD y sus métodos perturbativos	38
3.5.1	Una breve introducción a la QCD	38
3.5.2	Introducción a la expansión $1/N_c$	40
3.5.3	La teoría de perturbaciones quirales	47
3.5.4	Teoría de perturbaciones quirales para $1/N_c$ grande	47
4	Los momentos cuadrupolares en la expansión $1/N_c$	50
4.1	Introducción	50
4.2	El operador de momento cuadrupolar en el límite de simetría exacta de sabor $SU(3)$	51
4.3	El operador de momento cuadrupolar $Q^{(ij)a}$ con ruptura de la simetría $SU(3)$ a primer orden	64
4.3.1	Sobre la representación $(2, \mathbf{1})$	64
4.3.2	Sobre la representación $(2, \mathbf{8})$	65
4.3.3	Sobre la representación $(2, \mathbf{27})$	66
4.3.4	Sobre la representación $(2, \mathbf{10} + \bar{\mathbf{10}})$	71
4.4	Una expresión completa para el momento cuadrupolar	72
5	Conclusiones y perspectivas	83
A	Reducción de operadores de bariones	86
B	Identidades del álgebra de Lie de $SU(N)$	90
II	Artículos publicados	105

Índice de figuras

3.1	Figura tomada del libro Física Nuclear y de Partículas [99]. El nonete de mesones pseudoescalares.	17
3.2	Figuras tomadas del libro Física Nuclear y de Partículas [99]. Los multipletes de bariones	19
3.3	Figura tomada del sitio web del CERN en inglés [105] : Modelo Estándar de la Física de Partículas Elementales.	24
4.1	Momentos multipolares de carga clásicos y la forma espacial de las partículas.	53

Índice de cuadros

4.1	Elementos de matriz de los operadores bariónicos correspondientes a los momentos cuadrupolares del octete de bariones para $N_c = 3$: Caso de simetría $SU(3)$ exacta.	58
4.2	Elementos de matriz de los operadores bariónicos correspondientes a los momentos cuadrupolares del decuplete de bariones para $N_c = 3$: Caso de simetría $SU(3)$ exacta.	59
4.3	Elementos de matriz de los operadores bariónicos correspondientes a los momentos cuadrupolares de las transiciones para $N_c = 3$: Caso de simetría $SU(3)$ exacta.	59
4.4	Elementos de matriz de los operadores bariónicos correspondientes a los momentos cuadrupolares del octete de bariones para $N_c = 3$: Caso con ruptura de la simetría $SU(3)$	75
4.5	Elementos de matriz de los operadores bariónicos correspondientes a los momentos cuadrupolares del decuplete de bariones para $N_c = 3$: Caso con ruptura de la simetría $SU(3)$	76
4.6	Elementos de matriz de los operadores bariónicos correspondientes a los momentos cuadrupolares de las transiciones para $N_c = 3$: Caso con ruptura de la simetría $SU(3)$	77

Parte I
Disertación Doctoral

Capítulo 1

Introducción General

1.1 Preámbulo

Desde la antigüedad, la curiosidad ha llevado al hombre a indagar sobre qué constituye la materia y cuáles son sus constituyentes fundamentales según [1–4]. Para investigar las propiedades de los constituyentes se estudian los fenómenos y/o propiedades físicas asociadas a dichos constituyentes, a través de la experimentación o la formulación de modelos matemáticos adecuados que representen de la mejor manera posible los resultados de los experimentos ya realizados.

A partir de aquí, es imprescindible el conocer cómo se clasifican las partículas lo que conduce a revisar y reformular los modelos sobre la composición de las partículas, denominando a los constituyentes fundamentales de la materia como *Partículas Elementales*.

En la búsqueda de los constituyentes fundamentales, se tiene que investigar y determinar el valor de sus propiedades físicas inherentes como masa, carga eléctrica, momento magnético entre otras.

Como consecuencia inmediata del estudio de las propiedades físicas inherentes de los constituyentes de la materia o incluso de las partículas compuestas a escala atómica o

nuclear, se pueden observar y estudiar simetrías que están íntimamente asociadas con leyes de conservación, las cuales están dadas por el *Teorema de Noether* [5–17], que a su vez son vehículos que permiten entender mejor dichas propiedades o realizarles correcciones a los valores teóricos para que se ajusten mejor a la información experimental.

Esto permite estudiar profundamente las propiedades de las partículas compuestas tales como los momentos cuadrupolares de los núcleos de los átomos que adquieren un interés especial en la física, ya que, a partir de sus magnitudes y signos, podemos describir eficazmente la naturaleza de la interacción eléctrica entre los componentes de los núcleos de los átomos como se ve en [18–27].

En cuanto al estudio de los momentos cuadrupolares de los bariones, primero, debemos observar que éstos son de naturaleza eléctrica, por lo cual hay que realizar dicho estudio en marcos de ambiente teóricos que permitan un ajuste adecuado de las estimaciones que provienen de diferentes análisis teóricos a los experimentos. El objetivo de esta tesis es abordar el problema de los momentos cuadrupolares de los bariones en el contexto de la expansión $1/N_c$ de la QCD.

Una buena prueba sobre la precisión de la Cromodinámica Cuántica (QCD) es el análisis de los momentos magnéticos, el cual se ha realizado en diversos trabajos y con diferentes métodos de estudio, como el modelo de quarks (con sus variantes) [28–34], las reglas de suma de la QCD [35–38], la expansión $1/N_c$, donde N_c es el número de cargas de color [39–43], la teoría de perturbaciones quirales [44–54], así como resultados previos del formalismo combinado de la teoría de perturbaciones quirales y la expansión $1/N_c$ [55,56], y la teoría ‘lattice’ QCD [57]. Esta variedad de trabajos permite realizar comparaciones con la información experimental disponible [58].

En contraposición a los momentos magnéticos, la determinación explícita de las expresiones de los momentos electromagnéticos (cuadrupolares y octupolares) a segundo orden o superiores en presencia de la ruptura de la simetría $SU(3)$ es escasa. Análisis acerca de los momentos cuadrupolares ha sido también desarrollados con el modelo de quarks (con sus variantes) [59–61], las reglas de suma de la QCD en el cono de luz [62,63], el modelo Skyrme [64], un método de parametrización de la QCD [65,66], la expansión

$1/N_c$ [41, 67, 68], la teoría de perturbaciones quirales [54, 69] y la teoría ‘lattice’ QCD [70, 71], además, los valores experimentales de los momentos cuadrupolares disponibles son los reportados de las amplitudes de helicidad para el proceso $\Delta^+ \rightarrow p\gamma$ [58]. Entonces, el presente trabajo está enfocado en el estudio y determinación explícitas de las expresiones para los momentos cuadrupolares de los bariones del estado base a orden $\mathcal{O}(m_s^{1/2})$ empleando la expansión $1/N_c$ de la QCD y comparando los resultados con los de los trabajos citados anteriormente para los momentos cuadrupolares.

1.2 Contenido

La presente tesis está estructurada de la siguiente manera:

En el Capítulo 2 se darán los antecedentes históricos de la investigación sobre las partículas elementales, a partir de los primeros modelos atómicos existentes que aparecen en [1–4, 27], con el objeto de entender cómo se formularon los diferentes modelos e indicar los aspectos de utilidad de dichos modelos para entender la fenomenología, así como presentar y discutir los resultados del análisis de los momentos cuadrupolares de los bariones en el formalismo de la expansión $1/N_c$ de la QCD.

En el Capítulo 3 se dará una breve y sucinta revisión de los fundamentos de la expansión $1/N_c$, partiendo del modelo de quarks y cómo evolucionó la forma de deducir las simetrías de cada uno de estos modelos hasta llegar al Modelo Estándar de la física de partículas [1, 4–14]; se dará una descripción breve del mismo y las características de las interacciones fundamentales. Además, se dará un repaso breve y conciso sobre la simetría quiral que es clave para nuestro formalismo, la cual no se entiende sin el teorema de Noether y la ecuación de Dirac [15–17, 72–81], cuyo estudio permite describir lo que sucede con las partículas ante una transformación de paridad, así como un ejemplo para entender dicha simetría. Se describirán los fundamentos básicos de la QCD [5–13, 81], que es una teoría de campo no abeliana, así como el hecho de que es una teoría fuertemente acoplada, además de exponer una breve introducción a la teoría de perturbaciones quirales y la

expansión $1/N_c$, lo cual nos permitirá trabajar con naturalidad en el cálculo explícito de los momentos cuadrupolares de los bariones y hacer la comparación entre los resultados obtenidos en los diferentes formalismos empleados en los trabajos anteriores y el presente trabajo.

En el Capítulo 4 se estudiará de forma específica el problema de los momentos cuadrupolares de los bariones y se presentarán los resultados de la investigación de la presente tesis, haciendo notar que en [82] por el empleo de la técnica de proyectores se reproducen resultados de [83]. Además, se discutirán los resultados obtenidos en [83] los cuales se compararán con los trabajos teóricos anteriores y con los resultados experimentales disponibles, teniendo en cuenta las limitaciones de la información experimental disponible. Por último, se darán algunas relaciones útiles para diferentes momentos cuadrupolares.

En el Capítulo 5, se expondrán las conclusiones del trabajo así como las perspectivas con la aplicación de la técnica de proyectores para aplicar nuestro formalismo $1/N_c$ al cálculo de los momentos cuadrupolares para los modelos tipo Elliott, donde aparece la ruptura espontánea de la simetría la cual es asociada a la deformación nuclear [84].

El trabajo cuenta con dos apéndices, el primero dedicado a los operadores de reducción de bariones, el segundo lista identidades que involucran las constantes del álgebra de Lie de $SU(N)$.

El trabajo se complementa con la inclusión de los 2 artículos de investigación derivados del tema publicados en *Physical Review D*. Mi participación fue en la discusión sobre la construcción de los operadores de dos y tres cuerpos tanto para el límite de simetría exacta como para el caso con ruptura de la simetría que incluye las representaciones $(2, \mathbf{1})$, $(2, \mathbf{8})$, $(2, \mathbf{27})$ y $(2, \mathbf{10} + \bar{\mathbf{10}})$, el cálculo y comprobación de los elementos de matriz de las transiciones octete-decuplete y en la comprobación de la reducción de los operadores bariónicos en el primer artículo y en la discusión sobre la construcción de los proyectores, así como los operadores de Casimir, los operadores G involucrados en los Casimires y en la comprobación de los operadores de proyección, Casimires, Operadores G y las identidades que involucran las constantes de estructura del álgebra de Lie de $SU(N)$ en el proceso del segundo artículo.

Capítulo 2

Sobre la estructura atómica, las partículas subatómicas y el concepto de simetría

2.1 Introducción

En este capítulo se dará un resumen sobre los fundamentos de los diferentes modelos atómicos, así como de las investigaciones teóricas y experimentales que buscaron explicar las propiedades e interacciones en los átomos, las cuales condujeron al descubrimiento de diferentes partículas subatómicas, sus interacciones y la observación explícita de algunas simetrías, que indican la existencia de *leyes de conservación*; entonces, se dará un concepto general sobre simetría.

El manejo del concepto de simetría y la existencia de diferentes partículas subatómicas, posibilitan el estudio del Modelo Estándar de la Física de Partículas Elementales, tanto en su evolución como en la descripción de las diferentes interacciones, así como del concepto de la *Simetría Quiral*, la Electrodinámica Cuántica, la Teoría de Unificación Electrodébil y la Cromodinámica Cuántica, que serán de utilidad en el desarrollo del presente trabajo.

2.2 La estructura atómica y las partículas

2.2.1 Los primeros modelos atómicos

Desde la antigüedad, el hombre se ha preguntado sobre cuáles son los constituyentes fundamentales de la materia según [1–3]

El primero en postular la existencia del átomo no como partícula compuesta sino como constituyente fundamental de la materia de manera especulativa, fue el filósofo de la Grecia clásica, Demócrito, como una serie de ideas que no podían comprobarse experimentalmente en su época.

Transcurrió el tiempo sin que se formularan hipótesis serias sobre la constitución de la materia, hasta que en el siglo XIX John Dalton formuló que las sustancias químicas están compuestas de átomos indivisibles, los cuales forman los compuestos químicos. Es evidente que esta teoría la formación de los compuestos químicos entraba en conflicto con la indivisibilidad del átomo. Este conflicto se resolvió hasta que Avogadro propuso que, para formar una molécula de agua, se requieren de 2 átomos de hidrógeno por 1 de oxígeno, lo cual resolvió este dilema. Este modelo evolucionó con la divisibilidad de los átomos.

Dimitri Mendeléiev en 1866 descubrió que los elementos químicos, con propiedades químicas similares, forman familias. Esto se caracterizó al definir la propiedad denominada número atómico, dado por Z , asignando los números atómicos $Z = 1, 2$ al hidrógeno y al helio, respectivamente.

Luego, Mendeléiev predijo la existencia de varios elementos químicos, entre ellos el argón, el cual fue descubierto por Ramsay y Rayleigh en 1894, lo que permitió añadir nuevas columnas para predecir y descubrir más elementos químicos.

2.2.2 Los detalles de la estructura atómica

Esta búsqueda de definir la estructura interna de los átomos se remonta al siglo XIX, cuando mediante el conocimiento de la interacción electromagnética se describieron los rayos catódicos, que se originan al aplicársele una diferencia de potencial a una placa metálica y posteriormente la placa emite luz; luego se realizaron experimentos con este tipo de radiación en presencia de un campo magnético ante el cual se desviaban de su trayectoria; lo que confirmó la unificación entre electricidad y magnetismo formulada por Maxwell, que se llama teoría electromagnética y se basa en el hecho de que los fenómenos eléctricos y magnéticos están íntimamente ligados, es decir, la teoría electromagnética es la primera teoría de unificación que se formuló.

Luego, Thomson hizo un experimento con rayos catódicos, donde describió dicha forma de radiación como corrientes de electrones, permitiendo describir al átomo como una nube de carga positiva sobre la cual está un mar de electrones, que tienen carga negativa. Dicho modelo es conocido coloquialmente como *modelo de budín de pasas*. Actualmente, sabemos que las cargas del protón y el electrón son iguales, pero de signo opuesto, sin embargo, el protón es dos mil veces más masivo que el electrón.

Posteriormente, Rutherford efectuó un experimento donde bombardeó una placa de oro con partículas alfa provenientes de una fuente, las cuales desvían la radiación emitida. La sección eficaz de la dispersión está dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ZZ'e^2}{E_0} \right)^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\Theta}{2}\right)}, \quad (2.1)$$

donde E_0 es la energía inicial de la partícula dispersada. A dicha relación se le conoce como *sección eficaz de dispersión de Rutherford*.

Esta relación se puede deducir mediante el formalismo de la Mecánica Clásica según [16, 17, 72] y con el formalismo de la Mecánica Cuántica según [4, 85–91].

CAPÍTULO 2. SOBRE LA ESTRUCTURA ATÓMICA, LAS PARTÍCULAS SUBATÓMICAS Y EL CONCEPTO DE SIMETRÍA

Después Niels Bohr formuló un modelo donde el electrón orbita circularmente alrededor del protón, con transiciones entre diferentes niveles discretos de energía, tal que a cada nivel corresponda una órbita circular, de tal manera que el electrón no radiaba porque giraba y tenía un valor de momento angular con unidades de \hbar^2 , lo que impide que el electrón llegase hasta el centro con el protón por el predominio de la interacción electromagnética y colapsara. Este esquema reproduce muy bien las *líneas espectrales del átomo de hidrógeno*, pero no reproduce los espectros de otros elementos químicos y además no considera el espín de cada partícula al interior del átomo.

En 1932, Chadwick descubrió que el átomo no solo tiene carga positiva y negativa, sino que existe el neutrón que como su nombre lo indica es de carga neutra, encontrándose en el núcleo del átomo, siendo su existencia predicha por Rutherford debido a que el átomo no se desintegraba, pero no fue suficiente para saber el por qué de la estabilidad del átomo.

2.2.3 Sobre las ecuaciones relativistas y las antipartículas

Con la finalidad de describir las interacciones entre las partículas se parte del formalismo de la Mecánica Cuántica, el cual se completó entre 1923 y 1926. En ese momento Erwin Schrödinger formuló su ecuación en forma relativista con el objetivo de reproducir los niveles de energía del átomo de hidrógeno, pero a no conseguirlo abandonó la idea, lo que le condujo a formular la ecuación de onda no relativista, la cual se puede obtener a partir del Hamiltoniano dado por [4, 85–91]

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\vec{x}) = \hat{E}, \quad (2.2)$$

donde hacemos

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.3)$$

CAPÍTULO 2. SOBRE LA ESTRUCTURA ATÓMICA, LAS PARTÍCULAS SUBATÓMICAS Y EL CONCEPTO DE SIMETRÍA

y

$$\hat{P} = i\hbar\vec{\nabla}. \quad (2.4)$$

Efectuando la sustitución de las ecuaciones (2.3) y (2.4) en (2.2), obtenemos la *ecuación de Schrödinger* dada por

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m_0}\vec{\nabla}^2 + V(\vec{x}) \right)\Psi(\vec{x}, t). \quad (2.5)$$

Si se sustituye el *potencial de Coulomb* en (2.5) se reproducen los niveles de energía del átomo de hidrógeno, tal que la energía del estado base es -13.6 eV , confirmando el gran acierto de Bohr, que afirma que la energía de un átomo hidrogenoide está discretizada como

$$E_n = -\frac{1}{2}\mu c^2 \frac{(Z\alpha)^2}{n^2}. \quad (2.6)$$

Posteriormente Klein y Gordon intentaron describir las partículas con *momento angular intrínseco o espín* 0, y lo consiguieron a través del empleo de la ecuación de onda con la que había intentado Schrödinger reproducir los niveles de energía del átomo de hidrógeno la cual considera efectos relativistas. Por ello a dicha ecuación se le denomina *ecuación de Klein-Gordon*, la cual se puede deducir a partir del cuádrimomento relativista dado por

$$P^\mu P_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{P}^2 = m_0^2 c^2, \quad (2.7)$$

y sustituyendo las ecuaciones (2.3) y (2.4) en (2.7), tenemos la forma explícita de la ecuación de Klein-Gordon dada por

$$\left(\square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right)\Psi = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right)\Psi = 0. \quad (2.8)$$

CAPÍTULO 2. SOBRE LA ESTRUCTURA ATÓMICA, LAS PARTÍCULAS SUBATÓMICAS Y EL CONCEPTO DE SIMETRÍA

Las soluciones de (2.7) de la forma $\Psi^{(+)}$ son funciones de onda que representan las partículas y las soluciones de la forma $\Psi^{(-)}$ son funciones de onda que representan las antipartículas. Por otro lado, las partículas para las cuales sus funciones de onda satisfacen $\Psi = \Psi^*$ son partículas neutras de espín 0.

Cuando Dirac describió las interacciones de las partículas de espín $\frac{1}{2}$, partió de la ecuación de Schrödinger (2.2) y procedió de manera análoga a la deducción de la ecuación de Klein-Gordon con la salvedad de que la densidad de probabilidad es definida positiva, lo que no ocurre con la ecuación de Klein-Gordon y para ello introdujo el conjunto de matrices dadas por $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$.

Por consiguiente, la ecuación de Dirac está dada por [74, 76–80]

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[\frac{\hbar c}{i} \left(\hat{\alpha}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \hat{\alpha}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \hat{\alpha}_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) + \hat{\beta} mc^2 \right] \psi \equiv \hat{H}\psi. \quad (2.9)$$

Las soluciones ψ^1 y ψ^2 están asociadas a la energía positiva [74, 76], en cambio las soluciones ψ^3 y ψ^4 están asociadas a la energía negativa, de manera análoga a como se identifican las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon. Inicialmente, este detalle fue un contratiempo para Dirac, por lo que para resolverlo propuso la existencia de un conjunto de partículas que se forman en el vacío, al cual se llamó *mar de Dirac*. Se comprobó más tarde que dicha posibilidad satisface la *conservación de energía-momento* de la Relatividad Especial, dando paso a la propuesta de las antipartículas, que se confirmó en 1932 con el descubrimiento del positrón.

Una propiedad interesante de la ecuación (2.9) es que en el límite no relativista se reduce a la *ecuación de Schrödinger-Pauli* que aparece en [85–91].

Debemos recordar que los covariantes bilineales definidos en términos de las *matrices de Dirac* γ^μ , por lo cual enunciamos la definición de dicho conjunto de matrices la cual está dada por

Definición 2.2.1 (Matrices de Dirac) Sean las matrices $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ provenientes de la ecuación de Dirac, tenemos que los elementos de la base propia de las matrices de Dirac denotados por γ^μ están definidos como productos de matrices $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ por

$$\gamma^0 \equiv \hat{\beta}, \quad \gamma^i \equiv \hat{\beta}\hat{\alpha}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.10)$$

las cuales conforman una base linealmente independiente de matrices 4×4 .

Definición 2.2.2 (Covariantes bilineales de las matrices de Dirac) Sean las matrices γ^0 y γ^i con $i = 1, 2, 3$, que representan a las partes temporal y espacial dadas por (2.10), definimos las formas bilineales de las matrices de Dirac como

$$\begin{aligned} \Gamma^S &= 1, & \Gamma_\mu^V &= \gamma_\mu, & \Gamma_{\mu\nu}^T &= \sigma_{\mu\nu}, \\ \Gamma^P &= i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_5 \equiv \gamma^5, & \Gamma_\mu^A &= \gamma_5\gamma_\mu, \end{aligned} \quad (2.11)$$

las cuales conforman un conjunto de 16 matrices linealmente independientes de 4×4 .

Estas relaciones serán fundamentales para la comprensión de la simetría quiral, tanto la ecuación de Dirac y la matriz γ_5 , y de paso este tipo de simetría será muy útil para el objetivo de cálculo de este trabajo de tesis que trata sobre los momentos cuadrupolares de los bariones.

2.2.4 Sobre el mesón de Yukawa y los mesones

Con el conocimiento que se tenía en 1930 de la estructura interna de los átomos se formularon diversas teorías que intentaron explicar el origen y la naturaleza de la interacción responsable de la cohesión de los neutrones y los protones en el núcleo atómico, lo que

CAPÍTULO 2. SOBRE LA ESTRUCTURA ATÓMICA, LAS PARTÍCULAS SUBATÓMICAS Y EL CONCEPTO DE SIMETRÍA

permitió deducir que la fuerza entre un par protón-neutrón es mayor que la fuerza de repulsión eléctrica. Esto permitió formular la existencia de la interacción fuerte, la cual como se verá en el próximo capítulo es responsable de la cohesión de los nucleones al interior de los átomos.

En 1935, Hideki Yukawa propuso la primera teoría que explica exitosamente la naturaleza de las interacciones nucleares, afirmando que la naturaleza de la interacción nuclear se debe a la existencia de una partícula cuya masa debe tener un valor de masa entre la masa del electrón y la del protón, la cual es intercambiada entre distintos nucleones en el átomo, llamada *mesón de Yukawa* [4].

Anderson junto a sus colaboradores descubren el *muón* en 1935, siendo considerada en principio dicha partícula con propiedades muy similares al mesón de Yukawa. Posteriormente se demostró que dicha partícula interviene en las interacciones electromagnética y débil, en consecuencia, el muón no es portador de la interacción fuerte. El muón tiene carga eléctrica negativa, es una partícula inestable y tiene una vida media de $2.2 \times 10^{-8} s$.

Se descubrió el *pión* en 1947 el cual según la teoría de Yukawa era un portador de la interacción fuerte (nuclear en ese entonces), la cual es responsable de la cohesión al interior de los núcleos atómicos [73, 81].

Se encontraron posteriormente una familia de piones formada por las partículas π^+ , π^0 y π^- , con cargas positiva, neutra y negativa. Las partículas π^\pm tienen una masa de $139.6 MeV/c^2$ y la masa del π^0 vale $135.0 MeV/c^2$, que coincide con la afirmación de Yukawa de que la masa del mesón debe tener un valor entre la masa del electrón y la masa del protón. El tiempo de vida media para los π^\pm es de $2.6 \times 10^{-8} s$, decayendo principalmente en un muón (antimuón) y un neutrino mediante la interacción débil. En cambio, el π^0 tiene un tiempo de vida media de $8.4 \times 10^{-17} s$ y decae en dos fotones en virtud de la interacción electromagnética [58].

Esto último nos dice que los piones son partículas inestables cuyos decaimientos ocurren por interacción electromagnética o débil únicamente, por lo tanto, al no ser los piones

portadores de la interacción fuerte no son responsables de la cohesión interna de los núcleos atómicos.

Pese a que la teoría de Yukawa aporta mucha información y procesos correctamente descritos, se tomaron en cuenta sus limitaciones para décadas después formular la QCD [5–13], que es la teoría que describe la interacción fuerte cuyos portadores de la interacción son los gluones, en lugar de los piones como postuló inicialmente Yukawa.

2.3 Simetrías

Las simetrías se representan matemáticamente por el lenguaje y el formalismo de la *Teoría de Grupos* como se aprecia en [92–98].

Usualmente se asocia la simetría con la invariancia de un objeto matemático, como funciones, puntos o ecuaciones bajo transformaciones de un grupo en particular, como se ve en el siguiente ejemplo [92–98].

Ejemplo 2.3.1 (Rotación de una esfera) *Sea una esfera que sufre una rotación sobre cualquiera de sus ejes, en este caso elegimos uno en particular sobre el que se hace la rotación, y al terminar la rotación la esfera preserva su forma, por lo cual es simétrica ante una rotación.*

De ahora en adelante, diremos en física que la simetría es el criterio de invariancia de un sistema físico ante ciertas transformaciones de alguna de sus propiedades en particular [13, 97].

Para los sistemas físicos puntuales, sus transformaciones conservan la geometría del sistema, entonces, dichas transformaciones están descritas por grupos discretos y en conse-

CAPÍTULO 2. SOBRE LA ESTRUCTURA ATÓMICA, LAS PARTÍCULAS SUBATÓMICAS Y EL CONCEPTO DE SIMETRÍA

cuencia decimos que dichos sistemas poseen simetría discreta [92–98].

También hay sistemas físicos que son invariantes ante transformaciones de las expresiones matemáticas que los describen, como es el caso de las rotaciones que se pueden describir en términos de operadores unitarios de grupos continuos o de Lie, los cuales tiene un parámetro libre; en consecuencia, dichos sistemas poseen simetría continua [97, 98].

En adelante, será de interés en la física de partículas elementales, la invariancia de las funciones de onda de las partículas compuestas ante el intercambio de sus constituyentes [14].

En el resto del trabajo se empleará el concepto de simetría en particular las simetrías asociadas al Modelo de Quarks, el Modelo Estándar, la Cromodinámica Cuántica, la Teoría de Perturbaciones Quirales y la Expansión $1/N_c$, así como las simetrías del formalismo que combina la Teoría de Perturbaciones Quirales y la Expansión Perturbativa sobre el parámetro $1/N_c$ las cuales serán de gran utilidad en el análisis de los momentos cuadrupolares de los bariones en el contexto de la expansión $1/N_c$.

Capítulo 3

Fundamentos del estudio de los momentos cuadrupolares en Partículas Elementales

3.1 Introducción

En este capítulo se estudiará el Modelo Estándar de la Física de Partículas, a partir de sus antecedentes, para entender las simetrías que lo fundamentan y su evolución, de tal manera que se pueda hablar posteriormente sobre lo que son los quarks, los avances en la descripción de las interacciones fundamentales y las teorías de unificación que han surgido, según [1, 2, 4–14, 73].

Además, se profundizará en detalles más avanzados de dichas interacciones y de los campos que intervienen, donde es importante la ecuación de Dirac, junto con sus soluciones, interacciones y covariantes bilineales, especialmente la matriz γ_5 que es clave en el desarrollo que se hará en este capítulo de la simetría quiral, así como se enunciarán algunos aspectos de la Cromodinámica Cuántica y sus técnicas de trabajo a bajas energías a través de expansiones como la $1/N_c$ y la Teoría de Perturbaciones Quirales.

3.2 Los antecedentes del Modelo Estándar

Posteriormente al desarrollo de la teoría de interacción nuclear de Yukawa, los descubrimientos posteriores, condujeron a la formulación del modelo de quarks [14, 81].

3.2.1 El modelo de quarks y los mesones

En 1964 se propuso el modelo de quarks con la finalidad de explicar la estructura interna de los hadrones, donde un hadrón se define de la siguiente manera:

Definición 3.2.1 (Hadrón) *Es una partícula compuesta de quarks los cuales están unidos debido a la interacción fuerte, sin estar aislados, sino rodeados por un mar de quarks.*

El tamaño de un quark es del orden 10^{-15} m (1 fm) [4, 13].

Los mesones entonces conocidos fueron agrupados por Gell-Mann según las propiedades predichas por Yukawa, destacando que el nonete de mesones son partículas de espín $S = 0$ como aparece en la figura (3.1)

Se observa en dicha figura claramente como Gell-Mann agrupó los mesones de espín $S = 0$ en un multiplete, observando que en los multipletes se pueden hacer líneas en tres direcciones diferentes. Dichas direcciones son la horizontal a la derecha que representa el isoespín, la diagonal a la derecha que representa el v-espín y la diagonal a la izquierda u-espín, que también es aplicable al octete de mesones de espín 1, el octete de bariones de espín $\frac{1}{2}$ y el decuplete de bariones de $\frac{3}{2}$.

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO DE LOS MOMENTOS
CUADRUPOLARES EN PARTÍCULAS ELEMENTALES

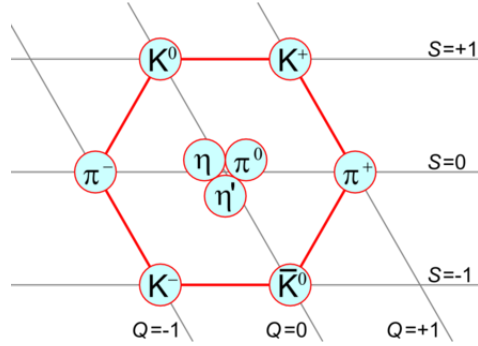


Figura 3.1: Figura tomada del libro Física Nuclear y de Partículas [99]. El nonete de mesones pseudoescalares.

Cuando se realizó la agrupación de estos multipletes se tenía en consideración la teoría de Gell-Mann. En la década de los 60's se descubrieron los primeros 3 quarks, a los cuales se les denominan “up”, “down” y “strange”.

Se aprecia que las partículas que forman los multipletes de bariones y nonete de mesones $S = 0$, se colocan en diagramas esquemáticos los cuales tienen dos ejes. En el eje vertical aparece la *hipercarga* denotada por Y y en el eje horizontal el valor del *tercer generador de isospín*, relacionados a través de la fórmula de Gell-Mann y Nishijima como [13, 14]

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}, \quad (3.1)$$

con

$$Y = B + S \quad (3.2)$$

donde el isospín posee una simetría $SU(2)$ con un álgebra $su(2)$ muy semejante a la del momento angular, la cual se expresa como

$$[T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk}T_k \quad \text{donde } i, j, k = 1, 2, 3. \quad (3.3)$$

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO DE LOS MOMENTOS CUADRUPOLARES EN PARTÍCULAS ELEMENTALES

Se concluyó que esta simetría es aproximada, porque (3.39) no satisface el hecho de que el Hamiltoniano total conmute con T_i [13, 85–91].

Es menester, señalar que los mesones son partículas que satisfacen la *estadística de Bose-Einstein*, con valor de espín 0, por consiguiente, un mesón está formado por un quark y un antiquark, tal que no se encuentran solos sino rodeados de un mar de quarks comúnmente denominados *quarks de valencia*. Entonces, dicho nonete se descompone de la siguiente manera [14, 73].

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \quad (3.4)$$

donde aparecen las representaciones $\mathbf{1}$ y $\mathbf{8}$ de $SU(3)$.

3.2.2 Los multipletes de bariones

Nuestro objeto de estudio son el octete de bariones con espín $S = \frac{1}{2}$ y el decuplete con espín $S = \frac{3}{2}$.

Los bariones al contrario de los mesones son fermiones y satisface la *estadística de Fermi-Dirac* [100–104].

Es importante entender cómo se comportan los fermiones y bosones, así que enunciamos el siguiente postulado que describe los sistemas de muchas partículas con simetría discreta respecto a la operación de intercambio de partículas y que establece que [85–91].

Postulado 3.2.1 1.- *En sistemas de N partículas idénticas con valor de momento angular intrínseco (espín) semi entero ($\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$), dichas partículas son descritas por funciones de onda antisimétricas ante la operación de intercambio de partículas.*

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO DE LOS MOMENTOS
CUADRUPOLES EN PARTÍCULAS ELEMENTALES

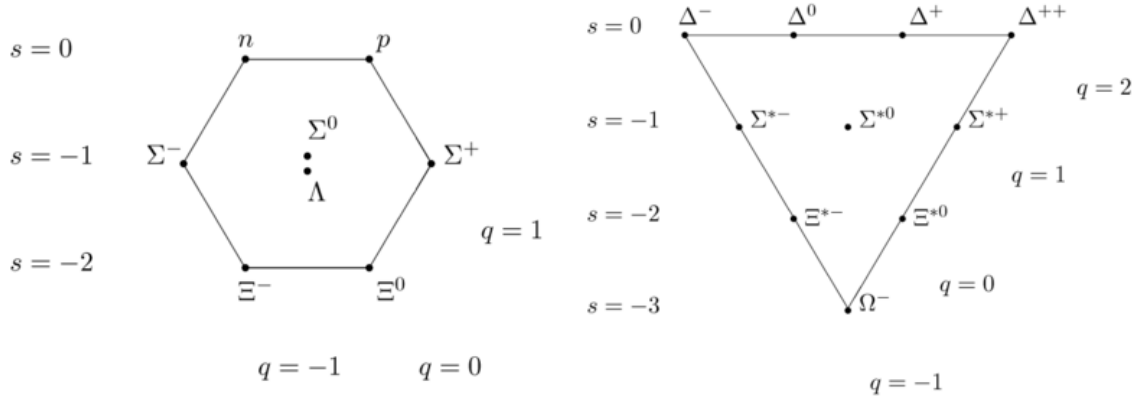


Figura 3.2: Figuras tomadas del libro Física Nuclear y de Partículas [99]. Los multipletes de bariones

2.- En sistemas de N partículas idénticas con valor de momento angular intrínseco (espín) entero $(0, 1, 2, \dots)$, dichas partículas son descritas por funciones de onda simétricas ante la operación de intercambio de partículas.

Como consecuencia del primer punto del postulado anterior, se infiere un criterio sobre la imposibilidad de que dos fermiones estén simultáneamente en el mismo estado. A este principio se le denomina *Principio de Exclusión de Pauli*, el cual está formulado de la siguiente manera [85–91].

Postulado 3.2.2 (Principio de Exclusión de Pauli) *Dos fermiones idénticos no pueden ocupar el mismo estado.*

De tal manera que dicho principio se puede extender sin dificultad a sistemas de N partículas.

Como consecuencia de ambos postulados, los bariones al satisfacer simultáneamente la *estadística de Fermi-Dirac* y el *Principio de Exclusión de Pauli* podemos tener los multipletes de bariones.

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO DE LOS MOMENTOS CUADRUPOLARES EN PARTÍCULAS ELEMENTALES

Los bariones ordinarios están compuestos de los quarks u , d y s , donde los tres sabores implican una simetría aproximada $SU(3)$, la cual requiere que los bariones hechos de esos tres quarks pertenezcan a los multipletes del lado derecho de

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10}_S \oplus \mathbf{8}_M \oplus \mathbf{8}_M \oplus \mathbf{1}_A \quad (3.5)$$

donde aparecen las representaciones $\mathbf{1}$, $\mathbf{8}$ y $\mathbf{10}$ de $SU(3)$.

En la figura (3.2) observamos tanto el octete como el decuplete de bariones, los cuales están formados únicamente por partículas de espín $S = \frac{1}{2}$ y $S = \frac{3}{2}$ respectivamente.

Como vimos anteriormente, Gell-Mann explicó la estructura interna de los hadrones y formuló el modelo de quarks a partir de organizar los bariones y mesones de acuerdo con su carga y extrañeza. Esto se confirmó con el descubrimiento de la partícula Ω^- que aparece en el decuplete de bariones referido en la figura 3.2. Para explicar dicho descubrimiento Gell-Mann propuso que los hadrones están compuestos de quarks, donde los quarks de la primera generación, u y d , tienen extrañeza $S = 0$ y el quark s tiene extrañeza $S = -1$; en contraste, la carga eléctrica del quark u es igual a $2/3$ y de los quarks d y s es de $-1/3$ [14,99].

El modelo de quarks fue aceptado con entusiasmo inicialmente, pero la no observación experimental hasta el día de hoy un quark libre y el hecho de que aparentemente violaba el *Principio de Exclusión de Pauli*, hizo que pese a existir evidencia experimental proveniente de SLAC y CERN respecto a la estructura interna de que el protón posee estructura interna, se propusiera que los constituyentes de la estructura interna de los protones en ese entonces eran los *partones*. El modelo de quarks fue retomado a partir de 1974, cuando se descubrió el mesón pesado eléctricamente neutro, J/Ψ , cuyo tiempo de vida puede explicarse con el modelo de quarks mediante la introducción de un nuevo quark, el “charm”, después se encontraron otras partículas con dicho quark [99].

Espín y sabor pueden ser englobados en una simetría aproximada espín-sabor $SU(2N_f)$ donde N_f es el número de sabores de quarks ligeros. Para $N_f = 3$,

$$SU(2) \otimes SU(3) \subset SU(6). \quad (3.6)$$

Es decir, que, para los bariones ordinarios, se pueden combinar espín y sabor en la simetría aproximada espín-sabor $SU(6)$. Los bariones pertenecen a las representaciones

$$\mathbf{6} \otimes \mathbf{6} \otimes \mathbf{6} = \mathbf{54}_S \oplus \mathbf{70}_M \oplus \mathbf{70}_M \oplus \mathbf{20}_A. \quad (3.7)$$

Al trabajar las funciones de onda de los bariones bajo la simetría $SU(6)$, se viola el *Principio de Exclusión de Pauli*, lo que se resolvió con la introducción del número cuántico de color. Este número cuántico se asocia a la parte antisimétrica de las funciones de onda de los bariones, lo que incentiva las investigaciones en física con el objetivo de comprender las interacciones fundamentales de la naturaleza, de la cuales se hablará a continuación prestando especial atención a la interacción fuerte descrita por la QCD.

3.2.3 Las interacciones fundamentales y teorías de unificación

Revisemos brevemente las interacciones fundamentales de la naturaleza: la gravitacional, la electromagnética, fuerte y débil.

La interacción gravitacional

De las cuatro interacciones fundamentales mencionadas anteriormente la más débil es la gravitacional. Esta interacción es descrita de manera completamente satisfactoria por la Teoría de la Relatividad General de Einstein. Es muy importante para investigaciones en Cosmología y Astronomía [26].

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO DE LOS MOMENTOS CUADRUPOLES EN PARTÍCULAS ELEMENTALES

Del éxito de la Teoría Cuántica de Campos, se han explorado formas de cuantizar la gravedad, aunque dichos intentos teóricos de realizar dicha cuantización son infructuosos debido a que dichas formulaciones teóricas para tratar la cuantización de la gravedad no tienen predicciones que puedan comprobarse a través de observaciones y/o experimentos [26].

La interacción electromagnética

La interacción electromagnética es de largo alcance la cual escala como $1/r$ y en consecuencia al aumentar la distancia los efectos del potencial disminuyen y viceversa [15, 18–26].

Es la interacción responsable de la cohesión entre los electrones, neutrones y protones, para formar átomos, que a su vez forman moléculas y en el caso del estado sólido, las moléculas forman cristales. El portador de la interacción es el fotón [11, 12, 18–26, 102].

La teoría de campo que corresponde a esta interacción es la Electrodinámica Cuántica (QED), formulada por Feynman, siendo una teoría de norma abeliana [11–13].

Además, señalamos que la interacción electromagnética es de nuestro interés porque estudiamos fenómenos donde los bariones poseen una estructura la cual asociamos al predominio de dicha interacción. El estudio de dichos fenómenos en el marco de la Electrodinámica Cuántica se realizó por medio de una serie perturbativa en potencias de α , que es la constante de estructura fina [11–13].

La interacción débil

Esta interacción es efectiva a muy corto alcance y es la responsable de los procesos de desintegración de los núcleos atómicos, debido a que genera inestabilidad en los mismos [4, 73].

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO DE LOS MOMENTOS CUADRUPOLARES EN PARTÍCULAS ELEMENTALES

En consecuencia, la interacción débil gobierna la física de los procesos de desintegración radiactiva, los neutrinos y las supernovas. Los portadores de la interacción son los bosones de norma W^+ , W^- y Z^0 [4, 13].

Por consiguiente, la interacción débil sólo es más fuerte que la interacción gravitacional, porque sus portadores son muy masivos [4, 73].

La interacción fuerte

La interacción fuerte se siente a una distancia de 1 fm, en consecuencia, en la vida cotidiana es despreciable [4–13].

Los portadores de la interacción fuerte son los gluones que no tienen carga eléctrica ni masa, sin embargo, poseen carga de color, siendo 8 tipos diferentes, los cuales tienen combinaciones de color-anticolor [4, 13].

La Cromodinámica Cuántica es la teoría de campo que describe la interacción fuerte, que es invariante bajo transformaciones del álgebra de $SU(3)_c$, la cual es no abeliana y renormalizable, lo que le da un poder predictivo muy importante [5–13].

Teorías de unificación

Maxwell unificó las teorías sobre electricidad y magnetismo en el siglo XIX al mostrar que los fenómenos eléctricos y magnéticos están relacionados, lo cual dio paso al electromagnetismo [15, 18–26].

Weinberg, Glashow y Salam recibieron el Premio Nobel de Física en 1974 por la formu-

lación de la Teoría de Unificación Electrodébil que consiste que a energías muy altas se manifiestan de manera simultánea en las partículas las interacciones débil y electromagnética, lo que nos dice que ambas son manifestaciones de una interacción débil unificada. Esta teoría de unificación predice que las masas de los bosones W y Z^0 son $82 \text{ GeV}/c^2$ y $93 \text{ GeV}/c^2$ respectivamente [4, 14].

3.3 Introducción al Modelo Estándar

El modelo estándar de la física de partículas elementales se representa en la figura (3.3)

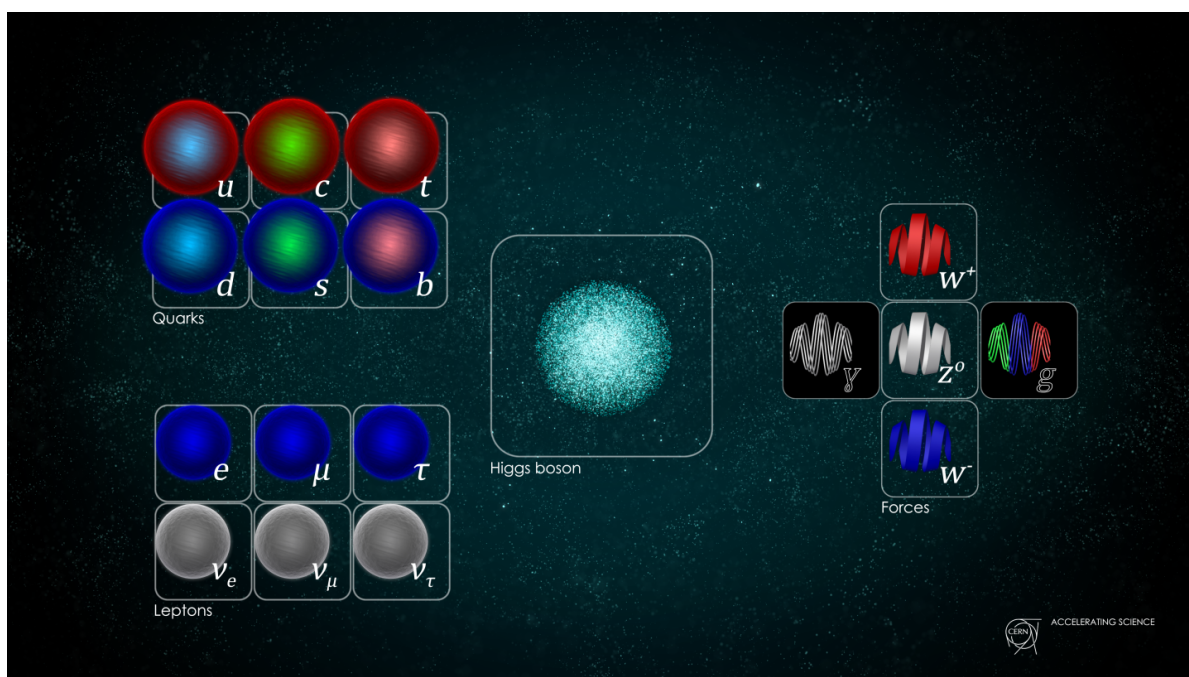


Figura 3.3: Figura tomada del sitio web del CERN en inglés [105] : Modelo Estándar de la Física de Partículas Elementales.

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO DE LOS MOMENTOS CUADRUPOLES EN PARTÍCULAS ELEMENTALES

Observamos inmediatamente que dicho modelo tiene 6 quarks agrupados en tres generaciones, donde la primera está formada por los quarks “up” (u) y “down” (d), mientras la segunda generación está formada por los quarks “charm” (c) y “strange” (s) y la tercera generación está formada por los quarks “top” (t) y “bottom” (b), es decir, tenemos los pares (u, d) , (c, s) y (t, b) [4, 73].

Cada generación de quarks tiene un leptón, donde el leptón de la primera generación es el electrón e , mientras el leptón de la segunda generación es el muón μ y el leptón de la tercera generación es el τ . Por otro lado, cada leptón tiene su correspondiente neutrino, en consecuencia, al electrón le corresponde el ν_e , al muón le corresponde el μ_μ y al τ le corresponde el ν_τ [4–13, 81].

Los portadores las interacciones fuertes, débil y electromagnética aparecen en el modelo estándar, los cuales son los gluones g , los bosones W^\pm y Z^0 y el fotón γ respectivamente [4, 73].

En la figura (3.3) aparece el bosón de Higgs, que es un bosón de norma y no de materia a diferencia de los bosones de Nambu-Goldstone que son partículas sin masa, así este concepto es clave para el estudio de la simetría quiral. Además del bosón de Higgs, aparece una constante de acoplamiento cuántica [12, 73].

En el modelo estándar, también aparecen tres constantes de acoplamientos, 3 ángulos de mezcla, una fase compleja y el ángulo de vacío de la Cromodinámica Cuántica [4–13].

3.4 Acerca de la simetría quiral

3.4.1 Introducción

Una partícula que puede tener un comportamiento simétrico en un sistema de referencia de mano derecha o de mano izquierda, de tal manera que dicho comportamiento es invariante ante una transformación de paridad de un campo fermiónico de Dirac, esto es lo que conocemos como *Simetría Quiral*. Se puede ver dicha simetría a partir del teorema de Noether, dado por [13].

Teorema 3.4.1 (Teorema de Noether) *Si un lagrangiano tiene una simetría continua, entonces, existe una corriente asociada con dicha simetría continua que es conservada cuando las ecuaciones de movimiento son satisfechas. [12, 15, 26]*

El estudio de la simetría quiral lo realizamos a partir del álgebra de las corrientes [13], para lo cual proponemos que el Hamiltoniano del sistema se exprese como [74]

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \lambda \mathcal{H}', \quad (3.8)$$

donde \mathcal{H}_0 es el Hamiltoniano de la parte invariante ante una transformación de paridad de un campo fermiónico de Dirac, λ es el parámetro perturbativo, donde \mathcal{H}' es la perturbación que no es invariante ante una transformación de paridad de un campo fermiónico de Dirac.

Asociamos la conservación del hamiltoniano \mathcal{H}_0 con la existencia de la corriente conservada $J_a^\mu(x)$, en virtud del teorema de Noether,

$$Q_a(x_0) = \int J_a^0(x) d^3x. \quad (3.9)$$

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO DE LOS MOMENTOS CUADRUPOLES EN PARTÍCULAS ELEMENTALES

Observando la ecuación (3.9) aparecen dos casos, donde el primero es cuando $\lambda = 0$, donde inmediatamente se tiene que las cargas $Q_a(x_0)$ en independientes del tiempo y por consiguiente se conservan [10, 13, 75] y cuando $\lambda \neq 0$ no hay conservación de la carga.

Gell-Mann formuló la más importante de las teorías sobre las simetrías aproximadas. Los operadores, en dicha teoría, forman una representación del grupo de simetría considerando dos corrientes de la forma (3.9) [75]

$$[Q_a(x_0), Q_b(x_0)] = if_{abc}Q_c(x_0). \quad (3.10)$$

Existen dos realizaciones de la simetría del Hamiltoniano \mathcal{H}_0 , las cuales son [13, 75]

- La realización de Wigner-Weyl,

$$Q_a(x_0)|0\rangle = 0 \quad (3.11)$$

- La realización de Nambu-Goldstone,

$$Q_a(x_0)|0\rangle \neq 0. \quad (3.12)$$

La simetría aparece en el espectro de \mathcal{H}_0 como una degeneración de los multipletes en la realización de Wigner-Weyl dada por (3.11) si $\lambda = 0$ [75].

La existencia de bosones sin masa si $\lambda = 0$ es consecuencia de la realización de Nambu-Goldstone dada por (3.12) tal que la estructura de multipletes no está degenerada. Este tipo de realización se denomina *ruptura espontánea de la simetría*, por lo tanto, los operadores de carga $Q_a(x_\mu)$ no son renormalizables [11, 12].

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO DE LOS MOMENTOS
CUADRUPOLES EN PARTÍCULAS ELEMENTALES

También Gell-Mann postuló que los generadores de simetrías hadrónicas $Q_a(x_0)$ coinciden con las cargas, las cuales están relacionadas tanto con las corrientes electromagnéticas como las débiles. Además, las corrientes débiles cumplen las relaciones de conmutación dadas por [75]

$$\delta(x_0 - y_0) [J_a^0(x), J_b^0(y)] = i\delta^4(x - y) f_{abc} J_c^0(x), \quad (3.13)$$

donde $J_a^0(x)$ son las corrientes débiles. Para obtener información sobre las simetrías y las rupturas de las simetrías de las interacciones fuertes serán de mucha utilidad las corrientes débiles, lo que dio origen al *álgebra de corrientes* en la física de partículas elementales.

Se postuló la existencia de las corrientes vectoriales y axial vectoriales a partir del decaimiento β , debida a Feynmann, Gell-Mann, Marshak y Sudarshan [14, 73, 75].

Además, las corrientes vectoriales y axial vectoriales, satisfacen relaciones similares a (3.11) que conforman el álgebra dada por [5–12, 75]

$$\begin{aligned} \delta(x_0 - y_0) [V_a^0(x), V_b^0(y)] &= i\delta^4(x - y) f_{abc} V_c^0(x), \\ \delta(x_0 - y_0) [V_a^0(x), A_b^0(y)] &= i\delta^4(x - y) f_{abc} A_c^0(x), \\ \delta(x_0 - y_0) [A_a^0(x), A_b^0(y)] &= i\delta^4(x - y) f_{abc} A_c^0(x). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Podemos definir los nuevos operadores de carga, a partir de las corrientes vectoriales y axial vectoriales que aparecen en (3.14), los cuales están dados por [13]

$$\begin{aligned} F_a(x) &= \int d^3x V_a(x), \\ F_a^5(x) &= \int d^3x A_a^0(x). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Los operadores que aparecen en (3.15) generan el álgebra de Lie de la simetría $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ dada por

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO DE LOS MOMENTOS
CUADRUPOLES EN PARTÍCULAS ELEMENTALES

$$\begin{aligned}
 [F_a(x_0), F_b(x_0)] &= if_{abc}F_c(x_0), \\
 [F_a(x_0), F_b^5(x_0)] &= if_{abc}F_c^5(x_0), \\
 [F_a^5(x_0), F_b^5(x_0)] &= if_{abc}F_c(x_0).
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Con la finalidad de comprender mejor el álgebra de $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ dada por (3.16) definimos los operadores $F_a^\pm(x_0)$ como

$$F_a^\pm(x_0) = \frac{1}{2} [F_a(x_0 \pm F_a^5(x_0))], \tag{3.17}$$

mediante sustitución de (3.17) en las relaciones de conmutación (3.16) obtenemos las relaciones

$$\begin{aligned}
 [F_a^\pm(x_0), F_b^\pm(x_0)] &= if_{abc}F_c^\pm(x_0), \\
 [F_a^+(x_0), F_b^-(x_0)] &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

lo que implica que los generadores $F_a(x_0)$ y $F_a^5(x_0)$ generan el producto directo $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$, por lo tanto, podemos hablar de *simetrías quirales*.

Además, la simetría $SU(3)$ exige que todas las partículas de un mismo multiplete sean de igual masa, sin embargo, en la simetría $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ no es necesaria la existencia de multipletes de partículas, pero por el teorema de Goldstone posee ocho mesones pseudo-escalares, que son tres piones (π^- , π^0 y π^+), cuatro kaones (K^- , K^0 , \bar{K}^0 y K^+) y η , los cuales conforman el octete de mesones pseudoescalares.

Ahora, suponemos que \mathcal{H} es quiralmente invariante, lo que implica que $F_a^\pm(x_0)$ que aparece en (3.18) satisface la relación

$$[F_a^\pm(x_0), \mathcal{H}] = 0. \quad (3.19)$$

También, suponemos que el operador de carga $F_a(x_0)$ deja invariante el vacío, esto es

$$F_a(x)|0\rangle = 0. \quad (3.20)$$

Es importante recordar que no podemos hacer la misma suposición para las cargas axiales, ya que en el espectro de los hadrones no se encuentran en el mismo multiplete con partículas con diferente paridad. Ahora, suponemos que el vacío no es quiralmente invariante, esto es [13, 75]

$$F_a^0(x)|0\rangle \neq 0. \quad (3.21)$$

Lo que implica que los mesones pseudoescalares tienen masa igual a cero en la simetría quiral. Este es el conocido *teorema de Goldstone*, por consiguiente, la simetría quiral no es exacta, la cual es indicada por el producto directo dado por [13, 15]

$$SU(3)_L \otimes SU(3)_R \otimes U(1)_V. \quad (3.22)$$

3.4.2 Deducción del Teorema de Goldstone

En esta subsección se desarrolla la deducción del teorema de Goldstone, el cual se enunciará claramente y se obtendrán algunas relaciones asociadas a dicho teorema de acuerdo con [12].

Para deducir el teorema de Goldstone, partimos de que cualquier simetría continua del Lagrangiano, en virtud del teorema de Noether implica la existencia de una corriente conservada, dada por

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO DE LOS MOMENTOS
CUADRUPOLES EN PARTÍCULAS ELEMENTALES

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0 \quad (3.23)$$

Esto es cierto tanto en la teoría clásica como cuántica. Del teorema de Noether, tenemos inmediatamente el hecho de que la carga es una constante de movimiento de dicho lagrangiano, lo cual se expresa de acuerdo con la teoría cuántica como [11–13]

$$\frac{dQ(t)}{dt} = 0 \quad \text{donde} \quad Q = \int d^3x J_0(x) = \int d^3x \sum_m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_m} \frac{\delta \phi_m}{\delta \alpha}. \quad (3.24)$$

que es un operador, donde los campos $\phi_m = \phi_m(\vec{x})$ son operadores también.

Renombrando los campos canónicamente conjugados como

$$\pi_m(\vec{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_m} \quad (3.25)$$

y con ayuda de las relaciones de conmutación canónicas dadas por

$$[\phi_n(\vec{x}), \pi_m(\vec{y})] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\delta_{nm} \quad (3.26)$$

calculamos $[Q, \phi_n(\vec{y})]$ como

$$[Q, \phi_n(\vec{y})] = \sum_m \int d^3x [\pi_m(\vec{x}), \phi_n(\vec{y})] \frac{\delta \phi_m(\vec{x})}{\delta \alpha} = -i \frac{\delta \phi_n(\vec{y})}{\delta \alpha}, \quad (3.27)$$

para que Q genere la transformación de simetría. También, si la carga es conservada, debe conmutar con el Hamiltoniano, lo que se expresa como

$$[H, Q] = i\partial_t Q = 0. \quad (3.28)$$

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO DE LOS MOMENTOS
CUADRUPOLES EN PARTÍCULAS ELEMENTALES

El operador Q corresponde a la carga conservada sin importar si expandimos el vacío. La ruptura espontánea de la simetría, ocurre, por definición, si el vacío simétrico con $Q|\Omega_{sym}\rangle = 0$ y el vacío real (estable) está cargado $Q|\Omega_{sym}\rangle \neq 0$. Si el vacío tiene energía E_0 que es

$$H|\omega\rangle = E_0|\Omega\rangle, \quad (3.29)$$

entonces con ayuda de (3.28) y (3.29), tenemos

$$HQ|\Omega\rangle = [H, Q]|\Omega\rangle + QH|\Omega\rangle = E_0Q|\Omega\rangle \quad (3.30)$$

y por lo tanto el estado $Q|\Omega\rangle$ está degenerado con el estado base.

Ahora, podemos siempre construir de estados de momento \vec{p} del vacío como

$$|\pi(\vec{x})\rangle = \frac{-2i}{F} \int d^3x e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} J_0(x)|\Omega\rangle \quad (3.31)$$

el cual tiene energía $E(\vec{p}) + E_0$. Aquí, F es una constante con dimensión de masa y el factor $-2i$ ha sido añadido por conveniencia. Ahora, si hacemos $\vec{p} = \vec{0}$ en la ecuación (3.31), tenemos

$$|\pi(\vec{p})\rangle = \frac{-2i}{F} Q|\Omega\rangle \quad (3.32)$$

que tiene energía E_0 , entonces, concluimos que

$$E(\vec{p}) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \vec{p} \rightarrow 0 \quad (3.33)$$

para dichos estados. Entonces, los estados $|\pi\rangle$ debe satisfacer una relación de dispersión para partículas sin masa. Este es el *Teorema de Goldstone*.

Teorema 3.4.2 (Teorema de Goldstone) *La ruptura espontanea de simetrías continuas globales implica la existencia de partículas sin masa.*

Los estados $|\pi(\vec{p})\rangle$ son conocidos como *Bosones de Goldstone*. El teorema de Goldstone es muy general. Algunas veces es muy útil para construir los bosones de Goldstone del vacío utilizando corrientes de Noether. A veces es más fácil encontrar los bosones de Goldstone en la fase de ruptura de la teoría a través de otras técnicas.

Multiplicando por $\langle\pi|$ la ecuación (3.31) e integrando sobre $\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{y}}$ tenemos que

$$\langle\pi(\vec{q})|J_0(y)|\Omega\rangle = i\omega_p F e^{i\vec{q}\cdot\vec{y}} \quad (3.34)$$

donde la normalización de estados de una sola partícula

$$\langle\pi(\vec{q})|\pi(\vec{p})\rangle = 2\omega_p (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) \quad (3.35)$$

ha sido utilizada. La versión con invariancia de Lorentz de la ecuación (3.34) dada por,

$$\langle\pi(\vec{q})|J_\mu(y)|\Omega\rangle = iq_\mu F e^{i\vec{q}\cdot\vec{y}}, \quad (3.36)$$

es una vía muy útil para identificar una partícula en el espectro de los bosones de Goldstone.

3.4.3 El modelo lineal σ y la simetría quiral

En esta subsección veremos un ejemplo típico de la simetría quiral el cual es el modelo sigma el cual posee una simetría quiral aproximada $SU(2) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ a diferencia

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO DE LOS MOMENTOS
CUADRUPOLARES EN PARTÍCULAS ELEMENTALES

de la simetría discutida en la sección 3.4.1, el cual es un ejemplo de la aparición de los bosones de Goldstone.

Para el desarrollo del modelo lineal σ , trabajamos a partir del lagrangiano dado por [11, 13]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} [(\partial_\mu \pi)^2 + (\partial_\mu \sigma)^2] + \bar{N} i \gamma^\mu \partial_\mu N + g \bar{N} (\sigma + i \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \gamma_5) N + \frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + \pi^2) \\ & - \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \pi^2)^2, \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde el potencial tiene la forma

$$V(\sigma^2 + \pi^2) \equiv -\frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + \pi^2) + \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \pi^2)^2 \quad (3.38)$$

así como el isodoublet del nucleón

$$N = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

el cuál es el vector columna para un campo de isoespín 1/2 del nucleón, así como los vectores $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ y $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ representan los campos de isoespín de un pión y el escalar de isoespín 0.

La simetría $SU(2)$ del lagrangiano (3.37) es invariante bajo las transformaciones

$$\begin{aligned} \sigma \rightarrow \sigma' &= \sigma, \\ \vec{\pi} \rightarrow \vec{\pi}' &= \vec{\pi} + \vec{\alpha} \times \vec{\pi}, \\ N \rightarrow N' &= N - i \vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} N, \end{aligned} \quad (3.40)$$

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO DE LOS MOMENTOS
CUADRUPOLES EN PARTÍCULAS ELEMENTALES

para $\alpha_i \ll 1$ con la corriente conservada dada por [13]

$$J_\mu^a = \bar{N} \gamma_\mu \frac{\tau^a}{2} N + \varepsilon^{abc} \pi^b \partial_\mu \pi^c, \quad \text{para } a = 1, 2, 3. \quad (3.41)$$

Los generadores de la simetría $SU(2)$ son

$$Q^a = \int d^3x J_0^a(x). \quad (3.42)$$

Este lagrangiano también es invariante bajo transformaciones axiales $SU(2)$

$$\begin{aligned} \sigma &\rightarrow \sigma' = +\vec{\beta} \cdot \vec{\pi} \sigma, \\ \vec{\pi} &\rightarrow \vec{\pi}' = \vec{\pi} - \vec{\beta} \sigma, \\ N &\rightarrow N' = N + i\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} \gamma_5 N, \end{aligned} \quad (3.43)$$

con las corrientes conservadas dadas por

$$A_\mu^a = \bar{N} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} N + (\partial_\mu \sigma) \pi^a - (\partial_\mu \pi^a) \sigma \quad (3.44)$$

y

$$Q^{5a} = \int d^3x A_0^a(x). \quad (3.45)$$

Dichas cargas generan el álgebra $su(2)_L \otimes su(2)_R$

$$\begin{aligned} [Q^a, Q^b] &= i\varepsilon^{abc} Q^c, \\ [Q^a, Q^{5b}] &= i\varepsilon^{abc} Q^{5c}, \\ [Q^{5a}, Q^{5b}] &= \varepsilon^{abc} Q^c. \end{aligned} \quad (3.46)$$

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO DE LOS MOMENTOS
CUADRUPOLES EN PARTÍCULAS ELEMENTALES

La ruptura espontánea de la simetría ocurrirá para el caso $\mu^2 > 0$ donde el mínimo de potencial está en

$$\sigma^2 + \pi^2 = \nu^2, \quad \text{con } \nu = (\mu^2/\lambda)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.47)$$

Podemos elegir $\langle 0|\pi| \rangle = 0$ y

$$\langle 0|\sigma|0 \rangle = \nu. \quad (3.48)$$

Con el campo desplazado definido como

$$\sigma' = \sigma - \nu \quad (3.49)$$

tenemos de $V(\sigma^2 + \pi^2)$ que los π s son los bosones de Goldstones sin masa. Siguiendo un proceso similar para el caso de los bosones de Goldstone para un grupo abeliano descrito en [13], trabajamos conmutadores como el que sigue

$$[Q^{5a}, \pi^b] = -i\sigma\delta^{ab}. \quad (3.50)$$

Y la elección de la forma de (3.48) implica que la carga axial Q^{5a} no se aniquila en el vacío; en efecto

$$\langle 0|A_\mu^a(0)|0 \rangle \neq 0. \quad (3.51)$$

Entonces, la simetría $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ está rota espontáneamente en la simetría $SU(2)$ generada por las cargas Q^a de (3.42) porque

$$Q^a|0 \rangle = 0 \quad \text{para } a = 1, 2, 3. \quad (3.52)$$

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO DE LOS MOMENTOS
CUADRUPOLARES EN PARTÍCULAS ELEMENTALES

Observamos en el lagrangiano original (3.37) el término de masa del nucleón no existe debido a que el término $m_N \bar{N}N$ no es invariante bajo la transformación axial dada por (3.43). Sin embargo, el acoplamiento quiralmente simétrico de Yukawa de $g\bar{N}(\sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}\gamma_5)N$ genera un término de masa del nucleón después de la ruptura espontánea de la simetría

$$g\bar{N}(\sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}\gamma_5)N \rightarrow g\nu\bar{N}N + g\bar{N}(\sigma' + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}\gamma_5)N \quad (3.53)$$

y la masa de los nucleones del isodoublet es

$$m_N = g\nu \quad (3.54)$$

Las masas de los mesones son (isoescalar) $m_\sigma = \sqrt{2\mu}$ y (isotriplete) $m_\pi = 0$. Entonces la simetría del lagrangiano $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ en el espectro de partículas el cual muestra únicamente la simetría $SU(2)$ de isospín. Si tenemos $\mu^2 < 0$, entonces la simetría es explícita, por lo cual los mesones σ y $\vec{\pi}$ tendrán la misma masa, es decir, son degenerados y forma la representación irreducible $(2, 2)$ del grupo $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$.

Finamente, la simetría global del modelo lineal sigma es quiral y de manera análoga a (3.22) se expresa como

$$SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1). \quad (3.55)$$

3.5 Una introducción concisa a la QCD y sus métodos perturbativos

3.5.1 Una breve introducción a la QCD

La QCD es una teoría de norma no abeliana, la cual es la parte del modelo estándar y estudia la interacción entre quarks y gluones bajo una simetría $SU(3)_c$.

Además, las combinaciones de 3 quarks se llaman hadrones, las cuales tienen a su vez 3 colores diferentes, es decir, $N_c = 3$ tal que q^α donde $\alpha = 1, 2, 3$ (rojo, verde, azul).

Se desprende inmediatamente del párrafo anterior que los bariones y los mesones son singletes de color.

En cambio, los bariones están compuestos de 3 quarks, mientras que los mesones de un quark y un antiquark

$$B = \frac{1}{\sqrt{6}}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}|q_\alpha\rangle|q_\beta\rangle|q_\gamma\rangle \quad y \quad M = \frac{1}{\sqrt{3}}\delta^{\alpha\beta}|q_\alpha\rangle|\bar{q}_\beta\rangle. \quad (3.56)$$

El lagrangiano de la QCD está dado por [13, 75]

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - \hat{m})\psi(x), \quad (3.57)$$

donde el espinor $\bar{\psi}(x)$ es el conjugado del espinor $\psi(x)$ que aparece en (3.57) dado por [56, 106]

$$\psi(x) = \left(u(x), \quad d(x), \quad s(x), \quad c(x), \quad t(x), \quad b(x) \right) \quad (3.58)$$

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO DE LOS MOMENTOS CUADRUPOLES EN PARTÍCULAS ELEMENTALES

que es el campo de quarks con 6 sabores y 3 colores [56].

Además, expresamos la derivada covariante D_μ y el *tensor de campo gluónico* $G_{\mu\nu}^\alpha$ que aparece en (3.57) en términos de los campos gluónicos de Yang-Mills A_μ^α como

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^\alpha &= \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha + g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \\ D_\mu &= \partial_\mu - ig_s T^a A_\mu^a, \end{aligned} \tag{3.59}$$

donde g_s es la *constante de acoplamiento de la interacción fuerte* y f^{abc} es una constante de estructura del álgebra $su(3)_c$ cualquiera y el término \hat{m} que aparecen en (3.57) está dado por

$$\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d, m_c, m_s, m_t, m_b) \tag{3.60}$$

contiene en sus componentes diagonales las masas de los quarks.

Entre las teorías de norma abelianas y las no abelianas existen diferencias. Las partículas portadoras de la interacción sólo propagan la interacción en las teorías abelianas, en cambio, las partículas portadoras de las teorías no abelianas no sólo propagan la interacción, sino que participan simultáneamente de la interacción, situación que no sucede con las partículas portadoras de las teorías de norma abelianas.

Al ser la QCD una teoría de norma no abeliana implica que los gluones son portadores de la interacción fuerte con carga de color y participan de la misma, tal que pueden acoplarse entre ellos [56].

Además, notamos que la QCD es una teoría de norma no abeliana cuyo lagrangiano está escrito en términos de los campos gluónicos de Yang-Mills de acuerdo con (3.57) y (3.59), por consiguiente, es una teoría de Yang-Mills, lo que implica que es renormalizable, así que podemos trabajar la QCD con tratamientos perturbativos, tal que se pueden absorber los infinitos, para lograr resultados finitos, lo que explica su poder predictivo [107].

La constante de acoplamiento g_s que aparece (3.59) tiene un comportamiento particular, ya que es pequeña a altas energías de tal manera que la QCD admite directamente un tratamiento perturbativo ya que a energías grandes los quarks están muy próximos entre sí, por lo que se comportan como partículas libres; a dicho fenómeno se le conoce como *libertad asintótica*. En otro lado, en el régimen de bajas energías dicha constante es muy grande, por lo cual dicho método no es aplicable, lo que implica que se deben formular otros formalismos que contienen fundamentos de la QCD, los cuales son descritos en términos de otros campos, como la teoría de perturbaciones quirales y la expansión $1/N_c$, entre otros.

3.5.2 Introducción a la expansión $1/N_c$

La QCD no admite directamente un tratamiento perturbativo en el límite de bajas energías. Para calcular las propiedades estáticas de los bariones como las masas, las constantes de acoplamiento vectoriales y axial vectoriales, momentos magnéticos. t' Hooft propuso en 1974 un método de tratamiento perturbativo semejante a la expansión perturbativa de la Electrodinámica Cuántica cuyo parámetro es la *constante de estructura fina*. Para la expansión $1/N_c$ de la QCD, el parámetro es $1/N_c$.

Si hacemos $N_c \rightarrow \infty$ en dicha expansión, podemos entender aspectos de la QCD al estudiar una teoría de norma basada en el grupo $SU(N_c)$. El sector bariónico en el límite N_c grande posee la simetría contraída espín-sabor $SU(2N_f)$, donde N_f es el número de quarks ligeros [108, 109].

Escribimos los generadores de $SU(6)_{SF}$ en términos de los J^i , T^a y G^{ia} como

$$\begin{aligned}
 J^i &= q^\dagger \left(\frac{\sigma^i}{2} \otimes \mathbb{1} \right) q, \\
 T^a &= q^\dagger \left(\mathbb{1} \otimes \frac{\lambda^a}{2} \right) q, \\
 G^{ia} &= q^\dagger \left(\frac{\sigma^i}{2} \otimes \frac{\lambda^a}{2} \right) q,
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

los cuales satisfacen el álgebra

$$\begin{aligned}
 [J^i, J^j] &= i\epsilon^{ijk} J^k, \\
 [T^a, T^b] &= i\epsilon^{abc} T^c, \\
 [J^i, T^a] &= 0, \\
 [J^i, G^{ja}] &= i\epsilon^{ijk} G^{ka}, \\
 [T^a, G^{ib}] &= i\epsilon^{abc} G^{ic}, \\
 [G^{ia}, G^{jb}] &= \frac{i}{4} \delta^{ij} f^{abc} T^c + \frac{i}{2N_f} \delta^{ab} \epsilon^{ijk} J^k + \frac{i}{2} \epsilon^{ijk} d^{abc} G^{kc},
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

donde δ^{ij} y δ^{ab} son las funciones delta de Kronecker para $SU(2)$ y $SU(3)$, respectivamente, ϵ^{ijk} es el símbolo de Leví-Civita con $i, j, k = 1, 2, 3$, f^{abc} es la constante de estructura completamente antisimétrica y d^{abc} es la constante de estructura completamente simétrica.

Las correcciones al límite N_c grande están dadas en términos de operadores suprimidos por $1/N_c$ con propiedades bien definidas bajo espín-sabor [109]. Cuando $N_f = 3$, los bariones caen en representaciones del grupo $SU(6)$. Para $N_c = 3$, esto corresponde a la representación **56** de $SU(6)$.

Además, es importante señalar que cualquier operador de la QCD que se transforme de acuerdo con $SU(2) \otimes SU(3)$, se puede expresar en términos de una serie de potencias de $1/N_c$ como [108]

$$\mathcal{O}_{QCD} = \sum_{n=1}^{N_c} c_{(n)} \frac{1}{N_c^{n-1}} \mathcal{O}^{(n)} \quad (3.63)$$

de la cual podemos obtener resultados físicamente admisibles al truncar en $N_c = 3$, así como hacer predicciones que son muy precisas al aproximar los valores experimentales. Los coeficientes $c_{(n)}$ de dicha expansión son desconocidos y los operadores $\mathcal{O}^{(n)}$ se pueden expresar en términos de J^i , T^a y G^{ia} dados por (3.61) y sus relaciones entre ellos dadas por (3.62).

Propiedades estáticas de los bariones

En este apartado, describiremos de manera breve y concisa como se definen los operadores que permiten estimar las propiedades estáticas de los bariones a través del formalismo de la expansión $1/N_c$ las cuales son:

1. Masa de los bariones.

Los bariones de $J = 1/2, 3/2, 5/2 \dots$ tienen una función de onda total antisimétrica la cual es el producto de una función de onda simétrica que corresponde a los números cuánticos de espín, sabor, entre otros y una función antisimétrica que corresponde al número cuántico de color, con índices i_{N_c} [106, 108].

Dicha función se expresa

$$\frac{1}{\sqrt{N!}} \epsilon_{i_1 i_2 i_3 \dots i_{N_c}} (q_1)^{i_1} (q_2)^{i_2} (q_3)^{i_3} \dots (q_{N_c})^{i_{N_c}}. \quad (3.64)$$

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO DE LOS MOMENTOS CUADRUPOLES EN PARTÍCULAS ELEMENTALES

Consideramos que tanto el número quarks como la masa se incrementan conforme crece N_c ya que

$$\mathcal{M}_{\text{barión}} \sim O(N_c), \quad (3.65)$$

lo que nos dice que si $N_c \rightarrow \infty$ la masa del barión dada por (3.65) será infinita, sin embargo, el tamaño del barión es fijo, porque está regido por Λ_{QCD} ,

$$\mathcal{M}_{\text{barión}} \sim N_c \Lambda_{QCD}. \quad (3.66)$$

Es pertinente señalar que Λ_{QCD} es el único parámetro dimensional de la QCD para N_c grande y establece el límite inferior absoluto de validez de la teoría de perturbaciones, que es aproximadamente el de una escala hadrónica típica [110].

El operador de masa está definido como un objeto de espín $J = 0$, lo que nos permite expresar dicha expansión en la forma $N_c \mathcal{P}(J^2/N_c^2)$, lo cual se expresa de manera explícita como

$$\mathcal{M} = m_0 N_c \mathbb{1} + \sum_{n=2,3}^{N_c-1} m_n \frac{1}{N_c^{n-1}} J^n, \quad (3.67)$$

donde los coeficientes m_n son los parámetros adimensionales de $\mathcal{O}(1)$. El primer término es el que da la misma masa a $\mathcal{O}(N_c)$ a todos los bariones en la representación de espín-sabor.

Esta ecuación nos dice que las masas de los bariones de mismo multiplete son degeneradas [106]. Para ello veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.5.1 *Considere las partículas N , Λ , Σ y Ξ del octete de bariones y las partículas Δ , Σ^* , Ξ^* y Ω del decuplete de bariones.*

Para las partículas N , Λ , Σ y Ξ del octete de bariones, tenemos de (3.67)

$$\begin{aligned} \langle N|M_B|N\rangle &= \langle \Lambda|M_B|\Lambda\rangle = \langle \Sigma|M_B|\Sigma\rangle = \langle \Xi|M_B|\Xi\rangle \\ &= N_c \left[m_0 + \frac{3}{4} \frac{1}{N_c^2} m_1 + \frac{9}{16} \frac{1}{N_c^4} m_2 + \dots \right], \end{aligned} \quad (3.68)$$

mientras que para las partículas Δ , Σ^ , Ξ^* y Ω del decuplete de bariones, tenemos de (3.67)*

$$\begin{aligned} \langle \Delta|M_B|\Delta\rangle &= \langle \Sigma^*|M_B|\Sigma^*\rangle = \langle \Xi^*|M_B|\Xi^*\rangle = \langle \Omega|M_B|\Omega\rangle \\ &= N_c \left[m_0 + \frac{15}{4} \frac{1}{N_c^2} m_1 + \frac{225}{16} \frac{1}{N_c^4} m_2 + \dots \right], \end{aligned} \quad (3.69)$$

donde los coeficientes m_i se determinan con la información experimental disponible.

Cuando se considera la ruptura de la simetría de sabor asociada al grupo $SU(3)_f$ debida a m_s , tenemos que el operador de masa de la expansión $1/N_c$ dado por (3.67), tiene la forma

$$\frac{\mathcal{M}}{N_c} = \mathcal{P} \left(\frac{G^{ia}}{N_c}, \frac{J^i}{N_c}, \frac{T^a}{N_c} \right). \quad (3.70)$$

El operador de masa con ruptura de $SU(3)_f$ (3.70) se expresa en términos de las representaciones de sabor $SU(3)_f$ como

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO DE LOS MOMENTOS
CUADRUPOLES EN PARTÍCULAS ELEMENTALES

$$M_B = M^{\mathbf{1}} + M^{\mathbf{8}} + M^{\mathbf{27}} + M^{\mathbf{64}}, \quad (3.71)$$

donde el singulete, el octete, el **27** y el **64** corresponden a orden cero, uno, dos y tres respectivamente de la ruptura de la simetría de sabor. Se puede expresar cada multiplete que aparece en (3.71) en términos de una expansión de operadores suprimidos por N_c como [106, 110]

$$\begin{aligned} M^{\mathbf{1}} &= N_c \mathbb{1} + \frac{1}{N_c} J^2, \\ M^{\mathbf{8}} &= T^8 + \frac{1}{N_c} \{J^i, G^{i8}\} + \frac{1}{N_c^2} \{J^2, T^8\}, \\ M^{\mathbf{27}} &= \frac{1}{N_c} \{T^i, T^8\} + \frac{1}{N_c^2} \{T^8, \{J^2, G^{i8}\}\}, \\ M^{\mathbf{64}} &= \frac{1}{N_c^2} \{T^8, \{J^2, G^{i8}\}\}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

donde cada operador es multiplicado por un coeficiente desconocido.

2. Acoplamiento axial.

El operador de *acoplamiento axial de bariones* A^{ia} se define como un objeto de espín $J = 1$ que se transforma como un octete bajo el álgebra de $SU(3)_f$. Cuando $N_c = 3$ dicho operador se expresa como

$$A^{ia} = a_1 G^{ia} + b_2 \frac{1}{N_c} \mathcal{D}_2^{ia} + b_3 \frac{1}{N_c^2} \mathcal{D}_3^{ia} + c_3 \frac{1}{N_c^2} \mathcal{O}_3^{ia}, \quad (3.73)$$

donde los operadores \mathcal{D}_2^{ia} , \mathcal{D}_3^{ia} y \mathcal{O}_3^{ia} que aparecen (3.73) están definidos por [110]

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO DE LOS MOMENTOS
CUADRUPOLES EN PARTÍCULAS ELEMENTALES

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_2^{ia} &= J^i T^a, \\
 \mathcal{D}_3^{ia} &= \{J^i, \{J^r, G^{ra}\}\}, \\
 \mathcal{O}_3^{ia} &= \{J^2, G^{ia}\} - \frac{1}{2}\{J^i, \{J^r, G^{ra}\}\}.
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

3. Momento magnético.

En el límite N_c grande, la descripción de los momentos magnéticos nos permite identificar que dichos momentos poseen las mismas propiedades cinemáticas de los acoplamientos axial vectoriales, de tal manera que podemos expresar los momentos magnéticos en términos de los operadores que permiten describir los citados acoplamientos. Entonces, definimos que el operador de momento magnético M^{kc} como un objeto de espín $J = 1$ que se transforma como un octete bajo el álgebra de $SU(3)_f$. De manera análoga a como se expresa A^{ia} dado por (3.73), expresamos M^{kc} cuando $N_c = 3$ en términos de (3.74) como

$$M^{kc} = m_1 G^{kc} + m_2 \frac{1}{N_c} \mathcal{D}_2^{kc} + m_3 \frac{1}{N_c^2} \mathcal{D}_3^{kc} + m_4 \frac{1}{N_c^2} \mathcal{O}_3^{kc}. \tag{3.75}$$

Podemos descomponer en las componentes isoescalares e isovectoriales M^{k3} y M^{k8} el operador M^{kc} (3.75), en consecuencia, se tiene

$$M^k = M^{kQ} \equiv M^{k3} + \frac{1}{\sqrt{3}} M^{k8}. \tag{3.76}$$

De aquí en adelante, el índice de sabor Q representará $Q = 3 + (1/\sqrt{3})8$, así que cualquier operador de la forma X^Q se debe entender como $X^3 + (1/\sqrt{3})X^8$. Análogamente, \hat{Q} representará $\hat{Q} = 3 - (1/\sqrt{3})8$, así cualquier operador de la forma $X^{\hat{Q}}$ se debe entender como $X^3 - (1/\sqrt{3})X^8$ [106, 110].

Calculando los elementos de matriz correspondientes al operador M^k dado por (3.76) de los estados de $SU(6)$ se obtienen los momentos magnéticos para los bariones tanto del octete como del decuplete y las transiciones octete-decuplete.

3.5.3 La teoría de perturbaciones quirales

La teoría de perturbaciones quirales nos auxilia en la comprensión de aspectos no perturbativos de la QCD, para lo cual empleamos la simetría quiral $SU(3)_L \otimes SU(3)_R \otimes U(1)_v$ dada por (3.22) del lagrangiano (3.57) en la aproximación cuando las masas de los quarks u , d y s tienden a 0, lo que significa que las respectivas componentes de (3.60) son nulas. Aparece el octete de bosones de Goldstone pseudoescalares cuando hay ruptura de la simetría quiral bajo las transformaciones paridad. El estudio de las propiedades de los hadrones se hace en términos de una expansión perturbativa en $\frac{m_q}{\Lambda_\chi}$ donde Λ_χ es el parámetro de escala de la ruptura de la simetría quiral [106, 107].

3.5.4 Teoría de perturbaciones quirales para $1/N_c$ grande

La *Teoría de Perturbaciones Quirales para N_c grande* es un formalismo que junta la expansión $\frac{1}{N_c}$ con la Teoría de Perturbaciones Quirales, de tal manera que el empleo del formalismo combinado en m_s y $1/N_c$ es más efectivo que el empleo de cualquiera de las dos expansiones por separado [106].

En consecuencia, se genera una expansión simultáneamente en términos de $\frac{1}{N_c}$ y $\frac{m_q}{\Lambda_\chi}$ y considera el doble límite cuando $m_q \rightarrow 0$ y $N_c \rightarrow \infty$. El lagrangiano de la teoría es [106]

$$\mathcal{L}_{\text{barión}} = i\mathcal{D}^0 - \mathcal{M}_{\text{hiperfina}} + Tr(\mathcal{A}^k \lambda^c) A^{kc} + \frac{1}{N_c} Tr\left(\mathcal{A}^k \frac{2I}{\sqrt{\sqrt{6}}}\right) A^k, \quad (3.77)$$

con

$$\mathcal{D}^0 = \partial^0 \mathbb{1} + Tr(\nu^0 \lambda^c) T^c, \quad (3.78)$$

donde $c = 1, \dots, 9$.

Partiendo de la ecuación (3.63), podemos comprender que es un operador de n -cuerpos, lo cual es necesario para nuestro trabajo. De (3.63) tenemos inmediatamente

- El operador $\mathbb{1}$ es el único operador de cero cuerpos porque [107]

$$N_c^0 = 1 \quad (3.79)$$

- Los operadores de un cuerpo son un conjunto de n operadores q y n operadores q^\dagger que se pueden escribir como polinomios de J^i , T^a y G^{ia} de orden n .
- Los operadores de dos cuerpos pueden expresarse con el producto de los operadores de un cuerpo, una anticonmutación de operadores de un cuerpo o una doble conmutación de operadores de un cuerpo.

Generalizando para los operadores de n cuerpos dados por (3.63), a partir de conmutaciones y anticonmutaciones con la siguiente definición.

Definición 3.5.1 (Operador de n cuerpos.) Sean \mathcal{O}^n y \mathcal{O}^m operadores de n y m cuerpos respectivamente, satisfacen las relaciones

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO DE LOS MOMENTOS CUADRUPOLARES EN PARTÍCULAS ELEMENTALES

$$\begin{aligned} [\mathcal{O}^n, \mathcal{O}^m] &\sim \mathcal{O}^{n+m-1}, \\ \{\mathcal{O}^n, \mathcal{O}^m\} &\sim \mathcal{O}^{n+m}. \end{aligned} \tag{3.80}$$

Podemos prever el orden de los operadores que aparecen en las relaciones de conmutación y anticonmutación de J^i , T^a y G^{ia} , así como los operadores derivados de estos a partir de estas relaciones.

Capítulo 4

Los momentos cuadrupolares en la expansión $1/N_c$

4.1 Introducción

Como vimos en el capítulo 3 la comprensión de las propiedades estáticas de los bariones como las masas, los momentos magnéticos, los radios de carga entre otras, es una tarea ardua de realizar en la QCD, pero, en el régimen no perturbativo de la QCD los cálculos analíticos de dichas propiedades no son posibles porque la teoría está fuertemente acoplada a bajas energías, sin un parámetro pequeño de expansión.

Un área de investigación muy activa tanto desde la perspectiva teórica como la experimental en la física de partículas elementales es el estudio de las propiedades electromagnéticas de los bariones. El análisis de los momentos magnéticos de los bariones presenta una oportunidad de hacer un examen que arroje luz sobre la precisión de la QCD, y existe un importante número de trabajos al respecto que han sido desarrollados mediante; el modelo de quarks (con sus variantes) [28–34], el empleo de las reglas de suma de la QCD [35–38], la expansión $1/N_c$, donde N_c es el número de carga de color [39–43], la teoría de perturbaciones quirales [44–54], el formalismo combinado de la expansión $1/N_c$ y la teoría de perturbaciones quirales [55,56], y la teoría ‘lattice’ QCD [57], para nombrar solo algunos. La información experimental disponible es robusta [58], lo que permite realizar

comparaciones detalladas entre la teoría y el experimento.

Por otro lado, la información acerca de los momentos electromagnéticos de orden superior (momentos cuadrupolares eléctrico y octupolar magnético) es muy escasa. Análisis acerca de los momentos cuadrupolares de los bariones han sido también desarrollados mediante el modelo de quarks (y sus variantes) [59–61], las reglas de suma de la QCD en el cono de luz [62, 63], el modelo Skyrme [64], un método de parametrización de la QCD [65, 66], la expansión $1/N_c$ [41, 67, 68], la teoría de perturbaciones quirales [54, 69], y la teoría ‘lattice’ QCD [70, 71]. Los cálculos efectuados por medio de la teoría ‘lattice’ QCD corresponden únicamente a la evaluación de los factores de forma de la transición electromagnética del nucleón a Δ . En contraste, la información experimental acerca de los momentos cuadrupolares de orden superior es muy escasa. Los únicos valores experimentales reportados son las amplitudes de helicidad para el proceso $\Delta^+ \rightarrow p\gamma$ [58], los cuales pueden ser empleados para extraer los valores de la razón entre el momento cuadrupolar eléctrico ($E2$) y el momento magnético ($M1$), $E2/M1$.

El presente capítulo está enfocado en el cálculo de los momentos cuadrupolares de los bariones del estado base con el formalismo de la expansión $1/N_c$, el cual ha demostrado ser bastante efectiva en el cálculo de las propiedades estáticas de los bariones. Como ejemplos concretos encontramos las predicciones de las masas de los bariones [111, 112], los acoplamientos axial vectoriales [41, 111, 113] y los acoplamientos vectoriales [113, 114]. En todos estos casos, la aproximación da una buena descripción de la estructura espín-sabor de los bariones en la QCD con $N_c = 3$.

4.2 El operador de momento cuadrupolar en el límite de simetría exacta de sabor $SU(3)$

De acuerdo con [41] el operador de la corriente electromagnética puede ser expandido en una serie de potencias del momento del fotón k_γ (la expansión multipolar), la cual tiene la forma

$$(J_{em})^{ia} \propto \mu^{ia} + \mathcal{Q}^{(ij)a} k_\gamma^j + \dots, \quad (4.1)$$

donde μ^{ia} es el operador de momento magnético [39] y $\mathcal{Q}^{(ij)a}$ es el operador de momento cuadrupolar. $\mathcal{Q}^{(ij)a}$ un objeto de espín 2 y octete de sabor, que se transforma como $(2, \mathbf{8})$ bajo $SU(2) \otimes SU(3)$, siendo además un tensor simétrico bajo el intercambio de los índices de espín y de traza nula. Del hecho que la corriente electromagnética es impar bajo inversión temporal, por consiguiente, $\mathcal{Q}^{(ij)a}$ es par bajo inversión temporal.

La interpretación física de los operadores en la expansión multipolar (4.1) se puede ver fácilmente mediante los elementos de matriz de dichos operadores entre estados bariónicos simétricos en $SU(6)$. Por ejemplo, el momento magnético para un barión de espín 1/2, B_p , para un barión de espín 3/2, B'_q , o para las transiciones $B_p \rightarrow B_q$ y $B'_p \rightarrow B_q$, pueden ser denotadas genéricamente por

$$\mu_B = \langle B | \mu^{3Q} | B \rangle, \quad (4.2)$$

donde los índices de espín y sabor, i y a , han sido fijados a 3 y $Q \equiv 3 + (1/\sqrt{3})8$, respectivamente. En lo sucesivo, cualquier operador de la forma X^Q puede ser entendido como $X^3 + (1/\sqrt{3})X^8$, donde X^3 y X^8 denotan las componentes isovectorial e isoescalar del operador X^a , respectivamente.

Similarmente, el componente cero del tensor de rango 2 (en el espacio de espín) $\mathcal{Q}^{(ij)a}$, o equivalentemente, la componente $\ell = 2$, $m_\ell = 0$ para $i = j = 3$ y $a = Q$, es usualmente referido como el momento cuadrupolar *espectroscópico* para el barión B'_q , el cual se lee [65]

$$Q_{B'_q} = \langle B'_q | \mathcal{Q}^{(33)Q} | B'_q \rangle. \quad (4.3)$$

Las reglas de selección del momento angular prohíben que un barión de espín 1/2 tenga momento cuadrupolar espectroscópico. Definiciones similares pueden ser dadas para las

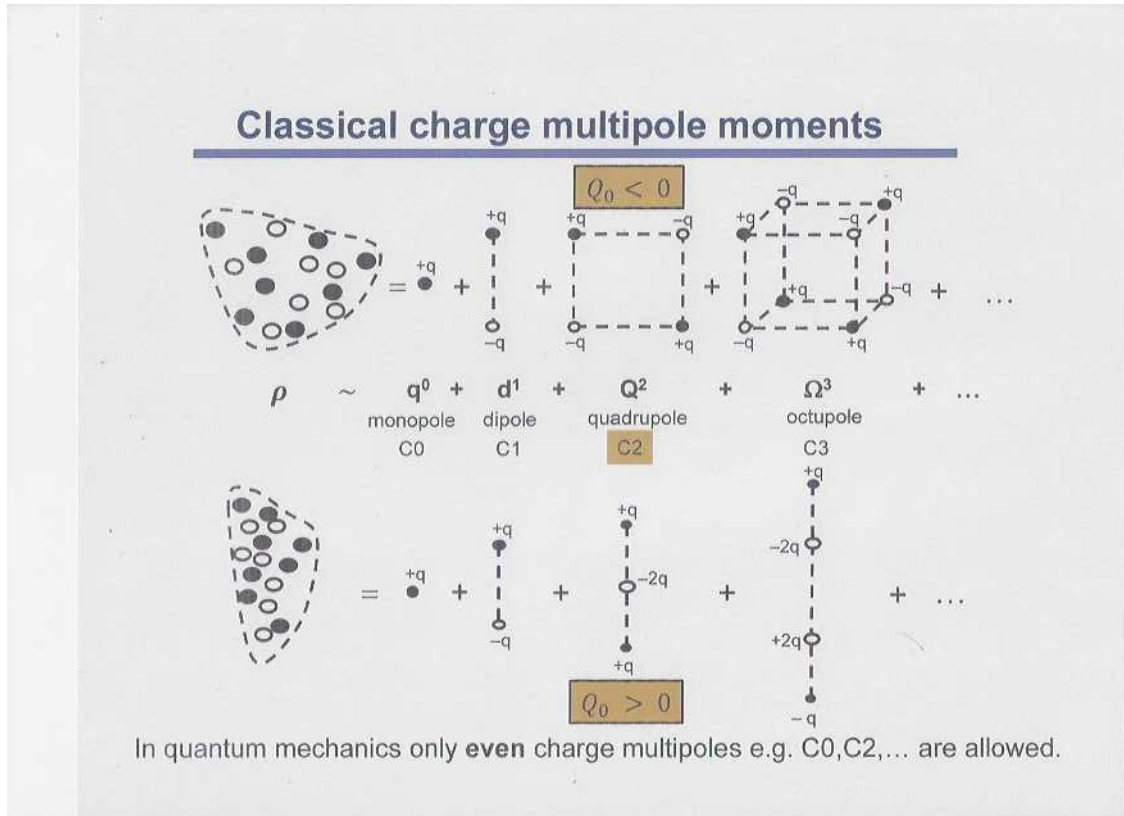


Figura 4.1: Momentos multipolares de carga clásicos y la forma espacial de las partículas.

transiciones $B'_p \rightarrow B_q$. Por ejemplo, para el decaimiento radiactivo $\Delta^+ \rightarrow p\gamma$, los únicos momentos que contribuyen son el momento magnético ($M1$) y el momento cuadrupolar eléctrico ($E2$), los cuales están definidos como [41]

$$M1 = ek_\gamma^{1/2} \langle p | \mu^{3Q} | \Delta^+ \rangle, \quad (4.4)$$

y

$$E2 = \frac{1}{12} ek_\gamma^{3/2} \langle p | \mu^{(33)Q} | \Delta^+ \rangle. \quad (4.5)$$

Por otro lado, podemos extraer información acerca de la forma espacial de la partícula a través del momento cuadrupolar intrínseco \mathcal{Q}_0 , dado por

$$\mathcal{Q}_0 = \int d^3r \rho(\vec{r})(3z^2 - r^2). \quad (4.6)$$

\mathcal{Q}_0 está definido con respecto a un marco de referencia fijo. Para una densidad de carga concentrada a lo largo de la dirección z (eje de simetría de la partícula), domina el término proporcional a $3z^2$ lo que implica que \mathcal{Q}_0 es positivo y la partícula es prolata (con forma de cigarrillo). Para una densidad de carga concentrada en el plano $x - y$ al eje z , domina el término proporcional a r^2 lo que implica que \mathcal{Q}_0 es negativo y la partícula es oblata (con forma de panqueca) [65] como se observa en la figura 4.1.

El momento cuadrupolar intrínseco \mathcal{Q}_0 debe ser distinguido del *momento cuadrupolar espectroscópico* Q medido en el marco de referencia de laboratorio. Por las reglas de selección del momento angular, los bariones de espín $1/2$ no tienen momento cuadrupolar espectroscópico, pero pueden tener momento cuadrupolar intrínseco como se observó hace más de 71 años atrás [115, 116]. Según [65] información sobre la forma de los nucleones de algunos otros bariones de espín $J = 1/2$ pueden ser obtenidos por la excitación electromagnética a estados de espín $J = 3/2$ o espines más altos. Además, con varios modelos, se encuentra que el protón y Δ^+ poseen una deformación oblata y prolata, respectivamente.

El análisis realizado en este capítulo se concentra el cálculo de los momentos cuadrupolares espectroscópicos de los bariones, que serán referidos de aquí en adelante como momentos cuadrupolares. Para lograr nuestro cometido, el operador de momento cuadrupolar $\mathcal{Q}^{(ij)a}$ es construido con el formalismo de la expansión $1/N_c$, lo cual requiere ver todas las estructuras de operadores que se transforman como $(2, \mathbf{8})$ bajo $SU(2) \otimes SU(3)$, escritas como polinomios en términos de los generadores de espín-sabor J^i , T^a y G^{ia} [111]. Las condiciones de simetría son empleadas para eliminar aquellas estructuras que no garantizan que el operador de momento cuadrupolar sea par bajo inversión temporal o simétrico o de traza nula bajo el intercambio de índices de espín. En este contexto, las estructuras de operadores deben contener un número par de J , G o una combinación de ellos, o un número impar de J , G o una combinación de ellas con el factor if^{abc} o $i\epsilon^{ijk}$ para dar operadores Hermitianos. Los índices de espín y sabor pueden ser propiamente

CAPÍTULO 4. LOS MOMENTOS CUADRUPOLES EN LA EXPANSIÓN $1/N_c$

acomodados para tener operadores resultantes de la representación $(2, \mathbf{8})$. El operador de un cuerpo $i\epsilon^{ijk}G^{ka}$ es par bajo inversión temporal y de traza nula, pero antisimétrico bajo el intercambio de los índices de espín i y j , por lo cual lo descartamos.

En el límite de simetría exacta de sabor $SU(3)$, la expansión $1/N_c$ de $\mathcal{Q}^{(ij)a}$ inicia con el operador de dos cuerpos

$$O_2^{(ij)a} = \{J^i, G^{ja}\} + \{J^j, G^{ia}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^k, G^{ka}\}. \quad (4.7)$$

A nivel de operador de tres cuerpos, aparecen diversas posibilidades, por ejemplo

$$\begin{aligned} & \{T^a, \{J^i, J^j\}\}, \quad \{T^a, \{G^{ie}, G^{je}\}\}, \quad \{G^{ia}, \{T^e, G^{je}\}\}, \\ & \{G^{ie}, \{T^a, G^{je}\}\}, \quad d^{abc}\{J^i, \{T^b, G^{je}\}\}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

El uso de las identidades de operadores que aparecen en [111] reduce el número de operadores linealmente independientes. Se enumeran algunas reducciones de operadores útiles, en el Apéndice A. En consecuencia, incluimos de manera conveniente el operador de tres cuerpos

$$O_3^{(ij)a} = \{T^a, \{J^i, J^j\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^2, T^a\} \quad (4.9)$$

en la serie de $\mathcal{Q}^{(ij)a}$ y el resto de los operadores de tres cuerpos son redundantes y pueden ser ignorados.

Por otro lado, los operadores de cuatro cuerpos pueden ser construidos como productos de cuatro G 's, dos J 's y dos T 's, dos J 's y dos G 's, tres G 's y una J , y tres J 's y una G , con los índices de espín y sabor empleados apropiadamente. Entre estas estructuras, un operador conveniente de cuatro cuerpos es

$$O_4^{(ij)a} = \{\{J^i, J^j\}, \{J^k, G^{ka}\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^2, \{J^k, G^{ka}\}\}, \quad (4.10)$$

donde los otros operadores, de acuerdo con las relaciones de reducción enlistadas en el Apéndice A, pueden ser expresadas en términos de (4.10) y los operadores de orden inferior (4.7) y (4.9), o en términos de (4.7) consigo mismo o de su anticonmutador con J^2 . Por lo tanto, se puede obtener un segundo operador de cuatro cuerpos de la forma

$$\tilde{O}_4^{(ij)a} = \{J^2, O_2^{(ij)a}\}. \quad (4.11)$$

Ahora, los operadores de cinco cuerpos pueden ser construidos a partir de los productos de los operadores de cuatro cuerpos enlistados anteriormente con T^a , con las contracciones apropiadas de los índices de espín y sabor. A partir de las reducciones de operadores del apéndice A concluimos que el único operador de cinco cuerpos está dado por

$$O_5^{(ij)a} = \{J^2, O_3^{(ij)a}\}. \quad (4.12)$$

Entonces, sin pérdida de generalidad, partiendo de $O_m^{(ij)a}$ donde ($m = 2, 3, 4$), tenemos que los operadores de orden superior pueden ser obtenidos como anticonmutadores de dichos operadores con J^2 , i.e., $O_{m+2}^{(ij)a} = \{J^2, O_m^{(ij)a}\}$, para $m \geq 3$. Además, los operadores adicionales de orden superior, pueden calcularse como $\tilde{O}_n^{(ij)a} = \{J^2, \tilde{O}_n^{(ij)a}\}$, para n par, donde $n \geq 4$.

Entonces, en el límite de simetría exacta de sabor $SU(3)$ la expansión de $\mathcal{Q}^{(ij)a}$ se escribe con ayuda de (4.7) y (4.9) como

$$\mathcal{Q}^{(ij)a} = \sum_{m=2,3}^{N_c} \frac{1}{N_c^{m-1}} k_m O_m^{(ij)a} + \sum_{n=4,6}^{N_c-1} \frac{1}{N_c^{n-1}} \tilde{k}_n \tilde{O}_n^{(ij)a}, \quad (4.13)$$

donde k_m, \tilde{k}_m son parámetros desconocidos los cuales también tiene el término a orden cero de la expansión $1/N_c$; dichos parámetros están multiplicados por un cuadrupolo característico de tamaño hadrónico (en fm^2). La condición de traza nula puede ser fácilmente comprobada como

$$\delta^{ij} \mathcal{Q}^{(ij)a} = \mathcal{Q}^{(ii)a} = 0. \quad (4.14)$$

La expansión (4.13) puede ser truncada para un sabor arbitrario a después de los primeros tres operadores $O_2^{(ij)a}$, $O_3^{(ij)a}$ y $O_4^{(ij)a}$ a orden $1/N_c^2$. Para $N_c = 3$, se conservan únicamente los operadores $O_2^{(ij)a}$ y $O_3^{(ij)a}$. El truncamiento más allá de $O_3^{(ij)a}$ está justificado para N_c a un orden de corrección relativa $1/N_c^2$ únicamente cuando los bariones físicos están bajo consideración. Entonces, para $N_c = 3$, la serie toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{(ij)a} = & \frac{k_2}{N_c} \left[\{J^i, G^{ja}\} + \{J^j, G^{ia}\} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{J^k, G^{ka}\} \right] \\ & + \frac{k_3}{N_c^2} \left[\{T^a, \{J^i, J^j\}\} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{J^2, T^a\} \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Los momentos cuadrupolares de los bariones en el límite de simetría exacta $SU(3)$, $\mathcal{Q}_B^{SU(3)}$, pueden ser obtenidos de los elementos de matriz de los operadores bariónicos que conforman $\mathcal{Q}^{(ij)a}$ dados por (4.15). Dichos elementos de matriz para $N_c = 3$ están enlistados en las Tablas 4.1, 4.2, 4.3, para el octete de bariones, el decuplete de bariones y las transiciones bariónicas decuplete-octete. A pesar de que, dichos elementos de matriz están provistos para el caso especial $N_c = 3$, podemos ver mejor la dependencia en N_c de los elementos de matriz de los operadores de un cuerpo T^a y G^{ia} con $a = 3$ y $a = 8$, lo cual ocurre con bastante frecuencia en el análisis. Dichos operadores se pueden escribir en términos del número de quarks y los operadores de espín [111],

$$T^8 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(N_c - 3N_s), \quad (4.16a)$$

$$G^{i8} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(J^i - 3J_s^i), \quad (4.16b)$$

CAPÍTULO 4. LOS MOMENTOS CUADRUPOLES EN LA EXPANSIÓN $1/N_C$

$$T^3 = \frac{1}{2}(N_u - N_d), \quad (4.16c)$$

$$G^{i3} = \frac{1}{2}(J_u^i - J_d^i), \quad (4.16d)$$

donde $N_c = N_u + N_d + N_s$ y $J^i = J_u^i + J_d^i + J_s^i$.

	n	p	Σ^-	Σ^0	Σ^+	Ξ^-	Ξ^0	Λ
$\langle\{J^3, G^{33}\}\rangle$	$-\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	0
$\langle\{\delta^{33} J^k, G^{k3}\}\rangle$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	-1	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0
$\langle\{T^3, \{J^3, J^3\}\}\rangle$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\langle\delta^{33}\{J^2, T^3\}\rangle$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0
$\langle\{J^3, G^{38}\}\rangle$	$\frac{1}{4\sqrt{3}}$	$\frac{1}{4\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
$\langle\delta^{33}\{J^k, G^{k8}\}\rangle$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\langle\{T^8, \{J^3, J^3\}\}\rangle$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\langle\delta^{33}\{J^2, T^8\}\rangle$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0	0	0	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0

Cuadro 4.1: Elementos de matriz de los operadores bariónicos correspondientes a los momentos cuadrupolares del octete de bariones para $N_c = 3$: Caso de simetría $SU(3)$ exacta.

	Δ^{++}	Δ^+	Δ^0	Δ^-	Σ^{*+}	Σ^{*0}	Σ^{*-}	Ξ^{*-}	Ξ^{*0}	Ω^-
$\langle\{J^3, G^{33}\}\rangle$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0
$\langle\{\delta^{33} J^k, G^{k3}\}\rangle$	$\frac{15}{4}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{15}{4}$	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	0
$\langle\{T^3, \{J^3, J^3\}\}\rangle$	$\frac{27}{2}$	$\frac{9}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{27}{2}$	9	0	-9	$-\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	0

CAPÍTULO 4. LOS MOMENTOS CUADRUPOLES EN LA EXPANSIÓN $1/N_c$

	Δ^{++}	Δ^+	Δ^0	Δ^-	Σ^{*+}	Σ^{*0}	Σ^{*-}	Ξ^{*-}	Ξ^{*0}	Ω^-
$\langle \delta^{33} \{J^2, T^3\} \rangle$	$\frac{45}{4}$	$\frac{15}{4}$	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{45}{4}$	$\frac{15}{2}$	0	$-\frac{15}{2}$	$-\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	0
$\langle \{J^3, G^{38}\} \rangle$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0	0	0	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$
$\langle \delta^{33} \{J^k, G^{k8}\} \rangle$	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	0	0	0	$-\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{5\sqrt{3}}{2}$
$\langle \{T^8, \{J^3, J^3\}\} \rangle$	$\frac{9\sqrt{3}}{2}$	$\frac{9\sqrt{3}}{2}$	$\frac{9\sqrt{3}}{2}$	$\frac{9\sqrt{3}}{2}$	0	0	0	$-\frac{9\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{9\sqrt{3}}{2}$	$-9\sqrt{3}$
$\langle \delta^{33} \{J^2, T^8\} \rangle$	$\frac{15\sqrt{3}}{4}$	$\frac{15\sqrt{3}}{4}$	$\frac{15\sqrt{3}}{4}$	$\frac{15\sqrt{3}}{4}$	0	0	0	$-\frac{15\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{15\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{15\sqrt{3}}{2}$

Cuadro 4.2: Elementos de matriz de los operadores bariónicos correspondientes a los momentos cuadrupolares del decuplete de bariones para $N_c = 3$: Caso de simetría $SU(3)$ exacta.

	$\Delta^+ p$	$\Delta^0 n$	$\Sigma^{*0} \Lambda$	$\Sigma^{*0} \Sigma^0$	$\Sigma^{*+} \Sigma^+$	$\Sigma^{*-} \Sigma^-$	$\Xi^{*0} \Xi^0$	$\Xi^{*-} \Xi^-$
$\langle \{J^3, G^{33}\} \rangle$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{2}}$
$\langle \{\delta^{33} J^k, G^{k3}\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \{T^3, \{J^3, J^3\}\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} \{J^2, T^3\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \{J^3, G^{38}\} \rangle$	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
$\langle \delta^{33} \{J^k, G^{k8}\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \{T^8, \{J^3, J^3\}\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} \{J^2, T^8\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0

Cuadro 4.3: Elementos de matriz de los operadores bariónicos correspondientes a los momentos cuadrupolares de las transiciones para $N_c = 3$: Caso de simetría $SU(3)$ exacta.

El conteo de potencias de N_c de los elementos de matriz de los operadores (4.16) es

CAPÍTULO 4. LOS MOMENTOS CUADRUPOLES EN LA EXPANSIÓN $1/N_C$

deducido como sigue; T^8 , G^{33} y $\{J^i, G^{i3}\}$ son de orden $\mathcal{O}(N_c)$; J^3 , T^3 , G^{38} y $\{J^i, G^{i8}\}$ son de orden $\mathcal{O}(N_c^0)$. Por el uso de las reglas de conteo de potencias y renombrando los coeficientes de los operadores k_i son de orden uno, el término líder isovectorial en la serie (4.15) es de orden $\mathcal{O}(N_c^0)$ y el término sublíder es de orden $\mathcal{O}(N_c^{-2})$. Los términos líder y sublíder isoescalares, por el contrario, son ambos de orden $\mathcal{O}(N_c^{-1})$. Los operadores de orden superior están suprimidos por un factor relativo de $1/N_c^2$ con respecto de $O_{n-2}^{(ij)a}$.

Con todos los resultados parciales propiamente organizados, el cálculo explícito de los momentos cuadrupolares puede ser realizado. Un resultado inmediato, es que para cualquier barión del octete B_p ,

$$\mathcal{Q}_{B_p}^{SU(3)} = 0 \tag{4.17}$$

el cuál es la suma de dos cantidades nulas (momentos cuadrupolares isovectoriales e isoescalares) y no la cancelación de dos cantidades de igual magnitud y signos opuestos. Este es un resultado completamente esperado (y consistente).

Para el decuplete de bariones, los momentos cuadrupolares se leen

$$\mathcal{Q}_{B'_q}^{SU(3)} = \frac{4}{9} q_{B'_q} (k_2 + k_3), \tag{4.18}$$

lo cual es válido para una corrección de orden $1/N_c^3$. Aquí, q'_B es la carga eléctrica del barión del decuplete B'_q , dada por

$$q'_{B_q} \equiv \langle B'_q | T^Q | B'_q \rangle. \tag{4.19}$$

Hacemos unos breves comentarios. La ecuación (4.18) ha sido escrita de manera tal que se exhiban que los efectos de los operadores de orden superior pueden ser tomados en cuenta sin alterar la estructura básica de la misma ecuación. Esto permite reescribir la ecuación (4.18) en términos de un solo parámetro k , como

$$\mathcal{Q}_{B'_q}^{SU(3)} = \frac{4}{9} q_{B'_q} k. \tag{4.20}$$

CAPÍTULO 4. LOS MOMENTOS CUADRUPOLES EN LA EXPANSIÓN $1/N_c$

lo cual puede ser válido *para todos los órdenes* en la expansión $1/N_c$.

Esta aproximación dada por (4.20), sin embargo, no es del todo correcta. Las razones se pueden ver mejor cuando calculamos los momentos cuadrupolares de las transiciones $Q_{B'_q B_p}$. En este caso,

$$Q_{\Delta^+ p}^{SU(3)} = \frac{2\sqrt{2}}{9} k_2, \quad (4.21a)$$

$$Q_{\Delta^0 n}^{SU(3)} = \frac{2\sqrt{2}}{9} k_2, \quad (4.21b)$$

$$Q_{\Sigma^* 0 \Lambda}^{SU(3)} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} k_2, \quad (4.21c)$$

$$Q_{\Sigma^* 0 \Sigma^0}^{SU(3)} = \frac{\sqrt{2}}{9} k_2, \quad (4.21d)$$

$$Q_{\Sigma^* + \Sigma^+}^{SU(3)} = \frac{2\sqrt{2}}{9} k_2, \quad (4.21e)$$

$$Q_{\Sigma^* - \Sigma^-}^{SU(3)} = 0, \quad (4.21f)$$

$$Q_{\Xi^* 0 \Xi^0}^{SU(3)} = \frac{2\sqrt{2}}{9} k_2, \quad (4.21g)$$

y

$$Q_{\Xi^* - \Xi^-}^{SU(3)} = 0, \quad (4.21h)$$

que son válidas hasta una corrección de orden $1/N_c^2$. Debido al hecho de que los coeficientes de los operadores k_i participan de diferentes maneras en $Q_{B'_q}^{SU(3)}$ y $Q_{B'_q B_p}^{SU(3)}$, lo que implica que no existe una sola manera de recombinar los coeficientes de los operadores para reducir el número de parámetros. En adelante, conservar los operadores de tres cuerpos implica la existencia de dos parámetros libres independientes, k_2 y k_3 .

En el límite $SU(3)$, tenemos dos relaciones evidentes a saber

$$\frac{1}{2}Q_{\Delta^{++}}^{SU(3)} = Q_{\Delta^+}^{SU(3)} = -Q_{\Delta^-}^{SU(3)} = Q_{\Sigma^{*+}}^{SU(3)} = -Q_{\Sigma^{*-}}^{SU(3)} = -Q_{\Xi^{*-}}^{SU(3)}, \quad (4.22)$$

y

$$Q_{\Delta^+p}^{SU(3)} = Q_{\Delta^0n}^{SU(3)} = Q_{\Sigma^{*+}\Sigma^+}^{SU(3)} = Q_{\Xi^{*0}\Xi^0} = 2Q_{\Sigma^{*0}\Sigma^0}^{SU(3)} = \frac{2}{\sqrt{3}}Q_{\Sigma^{*0}\Lambda}^{SU(3)}. \quad (4.23)$$

Las últimas relaciones han sido también encontradas en el análisis del modelo quiral de quarks constituyentes de la referencia [61]. Como un comentario adicional, notemos que $Q_{\Sigma^{*-}\Sigma^-}^{SU(3)} = Q_{\Xi^{*-}\Xi^-}^{SU(3)} = 0$, el cual es un resultado bien conocido derivado en el modelo de quarks [61]. Dichas transiciones son prohibidas por la conservación de U -espín si la simetría es exacta.

Ahora, es sencillo probar las combinaciones susceptibles a los operadores para $I = 3$ y $I = 2$ [68]. Para el primer caso

$$Q_{\Delta^{++}}^{SU(3)} - 3Q_{\Delta^+}^{SU(3)} + 3Q_{\Delta^0}^{SU(3)} - Q_{\Delta^-}^{SU(3)} = 0, \quad (4.24a)$$

y para el segundo caso,

$$Q_{\Delta^{++}}^{SU(3)} - Q_{\Delta^+}^{SU(3)} - Q_{\Delta^0}^{SU(3)} + Q_{\Delta^-}^{SU(3)} = 0, \quad (4.24b)$$

$$Q_{\Sigma^{*+}}^{SU(3)} - 2Q_{\Sigma^{*0}}^{SU(3)} + Q_{\Sigma^{*-}}^{SU(3)} = 0, \quad (4.24c)$$

$$Q_{\Delta^+p}^{SU(3)} - Q_{\Delta^0n}^{SU(3)} = 0, \quad (4.24d)$$

$$Q_{\Sigma^{*+}\Sigma^+}^{SU(3)} - 2Q_{\Sigma^{*0}\Sigma^0}^{SU(3)} + Q_{\Sigma^{*-}\Sigma^-}^{SU(3)} = 0. \quad (4.24e)$$

CAPÍTULO 4. LOS MOMENTOS CUADRUPOLES EN LA EXPANSIÓN $1/N_C$

Expresiones adicionales válidas en el límite de simetría exacta $SU(3)$ pueden ser extraídas de la referencia [65]. Además, de las relaciones de isoespín (4.24c), (4.24d), y (4.24e), y $\mathcal{Q}_{\Delta^0}^{SU(3)}$ que es nula, las expresiones están dadas por

$$\mathcal{Q}_{\Delta^-}^{SU(3)} + \mathcal{Q}_{\Delta^+}^{SU(3)} = 0, \quad (4.25a)$$

$$2\mathcal{Q}_{\Delta^-}^{SU(3)} + \mathcal{Q}_{\Delta^{++}}^{SU(3)} = 0, \quad (4.25b)$$

$$3(\mathcal{Q}_{\Xi^{*-}}^{SU(3)} - \mathcal{Q}_{\Sigma^{*-}}^{SU(3)}) - (\mathcal{Q}_{\Omega^-}^{SU(3)} - \mathcal{Q}_{\Delta^-}^{SU(3)}) = 0, \quad (4.25c)$$

$$\mathcal{Q}_{\Delta^-}^{SU(3)} - \mathcal{Q}_{\Sigma^{*-}}^{SU(3)} - \sqrt{2}\mathcal{Q}_{\Sigma^*-\Sigma^-}^{SU(3)} = 0, \quad (4.25d)$$

$$\mathcal{Q}_{\Delta^+}^{SU(3)} - \mathcal{Q}_{\Sigma^{*+}}^{SU(3)} + \sqrt{2}\mathcal{Q}_{\Delta^+p}^{SU(3)} - \sqrt{2}\mathcal{Q}_{\Sigma^{*+}\Sigma^+}^{SU(3)} = 0, \quad (4.25e)$$

$$\mathcal{Q}_{\Sigma^{*0}}^{SU(3)} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{Q}_{\Sigma^{*0}\Sigma^0}^{SU(3)} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathcal{Q}_{\Sigma^{*0}\Lambda}^{SU(3)} = 0 \quad (4.25f)$$

$$\mathcal{Q}_{\Sigma^{*-}}^{SU(3)} - \mathcal{Q}_{\Xi^{*-}}^{SU(3)} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{Q}_{\Xi^{*-}\Xi^-}^{SU(3)} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{Q}_{\Sigma^{*-}\Sigma^-}^{SU(3)} = 0 \quad (4.25g)$$

$$\mathcal{Q}_{\Xi^{*0}}^{SU(3)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{Q}_{\Xi^{*0}\Xi^0}^{SU(3)} - \sqrt{\frac{2}{3}}\mathcal{Q}_{\Sigma^{*0}\Lambda}^{SU(3)} = 0 \quad (4.25h)$$

las cuales se corroboran con las expresiones obtenidas con el formalismo presentado aquí. Las relaciones (4.25a) y (4.25b) son fácilmente explicadas como una de las consecuencias de que $\mathcal{Q}_{B'_q}$ es proporcional a la carga eléctrica del barión B'_q .

4.3 El operador de momento cuadrupolar $\mathcal{Q}^{(ij)a}$ con ruptura de la simetría $SU(3)$ a primer orden

Como vimos en el capítulo anterior, la ruptura de la simetría $SU(3)$ en el modelo estándar, está dada por el término de las masas de los quarks en el Lagrangiano QCD con $m_u, m_d \ll m_s$ y se transforma como un octete de sabor.

La corrección a $\mathcal{Q}^{(ij)a}$ es obtenida a primer orden en ruptura de simetría del producto tensorial del operador de momento cuadrupolar y la perturbación, el cual se transforma bajo $SU(2) \otimes SU(3)$ como $(2, \mathbf{8})$ y $(0, \mathbf{8})$, respectivamente. Dicho producto tensorial contiene las representaciones $(2, \mathbf{1})$, $(2, \mathbf{8})$, $(2, \mathbf{10} + \bar{\mathbf{10}})$ y $(2, \mathbf{27})$. En las siguientes subsecciones, veremos cómo se encuentran los operadores de la expansión $1/N_c$ para las representaciones ya citadas.

4.3.1 Sobre la representación $(2, \mathbf{1})$

El único operador de cero cuerpos que se transforma como $(2, \mathbf{1})$ bajo $SU(2) \otimes SU(3)$ es

$$O_0^{ij} = \delta^{ij} \mathbb{1} \quad (4.26)$$

y un solo operador de un cuerpo, dado por

$$O_1^{ij} = i\varepsilon^{ijk} J^k \quad (4.27)$$

que no contribuyen a $\mathcal{Q}_{(ij)a}$ en virtud de las condiciones de simetría o traza discutidas atrás. Entonces, el único operador no trivial encontrado que contribuye a $\mathcal{Q}_{(ij)a}$ a primer orden en ruptura de simetría, es el operador de dos cuerpos

$$O_{2,1}^{(ij)a} = \{J^i, J^j\} - \frac{2}{3}\delta^{ij} J^2 \quad (4.28)$$

porque el operador de tres cuerpos

$$\{J^i, \{T^e, G^{je}\}\} \quad (4.29)$$

también es redundante de acuerdo con la ecuación (A.3) del Apéndice A.

Por lo tanto, la contribución a $\mathcal{Q}^{(ij)a}$ a primer orden en ruptura de simetría de la representación $(2, \mathbf{1})$ es ¹

$$O_{2,1}^{(ij)a} = \delta^{a8} \{J^i, J^j\} - \frac{2}{3}\delta^{ij} \delta^{a8} J^2 \quad (4.30)$$

donde los operadores de orden superior para la representación $(2, \mathbf{1})$ se pueden obtener como $O_{2m+2,1}^{(ij)a} = \{J^2, O_{2m,1}^{(ij)a}\}$ para $m \geq 1$.

4.3.2 Sobre la representación $(2, \mathbf{8})$

Los operadores de la representación $(2, \mathbf{8})$ que contribuyen al operador $\mathcal{Q}^{(ij)a}$ a primer orden en ruptura de simetría pueden ser obtenidos de manera análoga a los operadores de dos y tres cuerpos (4.7) y (4.9), respectivamente, que aparecen entre los corchetes de (4.15), teniendo los operadores de dos y tres cuerpos,

¹De aquí en adelante, para facilitar la notación, expresamos los operadores de n cuerpos para cualquier representación de sabor **rep**, como $O_{n,\mathbf{rep}}^{(ij)a}$.

$$O_{2,\mathbf{8}}^{(ij)a} = d^{ae8}(\{J^i, G^{je}\} + \{J^j, G^{ie}\}) - \frac{2}{3}\delta^{ij}d^{ae8}\{J^k, G^{ke}\} \quad (4.31)$$

y

$$O_{3,\mathbf{8}}^{(ij)a} = d^{ae8}\{T^e, \{J^i, J^j\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}d^{ae8}\{J^2, T^e\} \quad (4.32)$$

Los operadores de orden superior para la representación $(2, \mathbf{8})$ son obtenidos como $O_{n+2,\mathbf{8}}^{(ij)a} = \{J^2, O_{n,\mathbf{8}}^{(ij)a}\}$ para $n \geq 2$.

Los operadores adicionales de la representación $(2, \mathbf{8})$ son obtenidos por la introducción del símbolo d^{ae8} , ya que la introducción del símbolo if^{ae8} produce que los operadores sean impares bajo inversión temporal, lo cual está prohibido por la invariancia bajo inversión temporal.

4.3.3 Sobre la representación $(2, \mathbf{27})$

El análisis de los operadores de la representación $(2, \mathbf{27})$ es más complicado que las representaciones $(2, \mathbf{1})$ y $(2, \mathbf{8})$ discutidas previamente. En el presente caso, no solo la simetría de los operadores bajo el intercambio de índices de espín debe ser manifiesta, también debe manifestarse la simetría bajo el intercambio de los índices de sabor, lo cual es requerido para los operadores de la representación de sabor $\mathbf{27}$. Sea $S_+^{(ij)\{ab\}}$ uno de los operadores de la representación $(2, \mathbf{27})$. Las componentes singulete y octete son sustraídas de $S_+^{(ij)\{ab\}}$ para obtener un operador genuino de la representación de sabor $\mathbf{27}$ $S^{(ij)\{ab\}}$ de acuerdo con [111]

$$S^{(ij)\{ab\}} = S_+^{(ij)\{ab\}} - \frac{1}{N_f^2 - 1}\delta^{ab}S_+^{(ij)\{cc\}} - \frac{N_f}{N_f^2 - 4}d^{abc}d^{cde}S_+^{(ij)\{de\}} \quad (4.33)$$

CAPÍTULO 4. LOS MOMENTOS CUADRUPOLES EN LA EXPANSIÓN $1/N_C$

La contribución de $S^{(ij)\{ab\}}$ a $\mathcal{Q}^{(ij)a}$ es realmente obtenida cuando hacemos $b = 8$, así la contribución es efectivamente $S^{(ij)\{a8\}}$.

La expansión $1/N_c$ para un operador de la representación (2, **27**) que contribuye a $\mathcal{Q}^{(ij)a}$ empieza con un solo operador de dos cuerpos dado por,

$$\{G^{ia}, G^{jb}\} + \{G^{ja}, G^{ib}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{G^{ra}, G^{rb}\}. \quad (4.34)$$

el cual, después de sustraer a (4.34) las componentes singulete y octete de acuerdo con (4.33), toma la forma

$$\begin{aligned} & \{G^{ia}, G^{jb}\} + \{G^{ja}, G^{ib}\} - \frac{2}{N_f^2 - 1}\delta^{ab}\{G^{ic}, G^{jc}\} - \frac{2N_f}{N_f^2 - 4}d^{abc}d^{cde}\{G^{id}, G^{je}\} \\ & - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{G^{ka}, G^{kb}\} + \frac{2}{3}\frac{1}{N_f^2 - 1}\delta^{ij}\delta^{ab}\{G^{kc}, G^{kc}\} + \frac{2}{3}\frac{N_f}{N_f^2 - 4}\delta^{ij}d^{abc}d^{cde}\{G^{kd}, G^{ke}\}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Después de una sencilla manipulación algebraica, la corrección a primer orden en ruptura de simetría a $\mathcal{Q}^{(ij)a}$ de este operador de dos cuerpos es

$$\begin{aligned} O_{2,27}^{(ij)a} = & \{G^{ia}, G^{j8}\} + \{G^{i8}, G^{ja}\} + \frac{1}{6}\delta^{ij}\{T^a, T^8\} + \frac{1}{3}\delta^{ij}f^{acd}f^{8ce}\{T^d, T^e\} \\ & - \frac{1}{N_f + 2}d^{ac8}(\{J^i, G^{jc}\} + \{J^j, G^{ic}\}) - \frac{1}{3}\frac{N_f}{N_f + 2}\delta^{ij}d^{ac8}\{J^k, G^{kc}\} - \frac{1}{N_f(N_f + 1)}\delta^{a8}\{J^i, J^j\} \\ & - \frac{2}{3}\frac{1}{N_f + 1}\delta^{ij}\delta^{a8}J^2 - \frac{1}{6}(N_c + N_f)\delta^{ij}d^{ac8}T^c - \frac{N_c(N_c + 2N_f)}{6N_f}\delta^{ij}\delta^{a8} \end{aligned} \quad (4.36)$$

En cuanto a los operadores de tres cuerpos, tenemos uno solo dado por

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\{T^a, \{J^i, G^{jb}\} + \{J^j, G^{ib}\}\} + \frac{1}{2}\{T^b, \{J^i, G^{ja}\} + \{J^j, G^{ia}\}\} - \frac{1}{3}\delta^{ij}(\{T^a, \{J^k, G^{kb}\} \\ & + \{T^b, \{J^k, G^{ka}\}\}). \end{aligned} \quad (4.37)$$

que se convierte en

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \{T^a, \{J^i, G^{jb}\} + \{J^j, G^{ib}\}\} + \frac{1}{2} \{T^b, \{J^i, G^{ja}\} + \{J^j, G^{ia}\}\} - \frac{1}{N_f^2 - 1} \delta^{ab} \{T^c, \{J^i, G^{jc}\} + \{J^j, G^{ic}\}\} \\
 & - \frac{N_f}{N_f^2 - 4} d^{abc} d^{cde} \{T^d, \{J^i, G^{je}\} + \{J^j, G^{ie}\}\} - \frac{1}{3} \delta^{ij} (\{T^a, \{J^k, G^{kb}\} + \{T^b, \{J^k, G^{ka}\}\}) \\
 & + \frac{2}{3} \frac{1}{N_f^2 - 1} \delta^{ij} \delta^{ab} \{T^c, \{J^k, G^{kc}\}\} + \frac{2}{3} \frac{N_f}{N_f^2 - 4} \delta^{ij} d^{abc} d^{cde} \{T^d, \{J^k, G^{ke}\}\}. \tag{4.38}
 \end{aligned}$$

por la aplicación de la ecuación (4.33) a (4.37). Entonces, la corrección a primer orden en ruptura de simetría a $Q^{(ij)a}$ del operador de tres cuerpos (4.37) está dada por

$$\begin{aligned}
 O_{3,27}^{(ij)a} &= \frac{1}{2} \{T^a, \{J^i, G^{j8}\} + \{J^j, G^{i8}\}\} + \frac{1}{2} \{T^8, \{J^i, G^{ja}\} + \{J^j, G^{ia}\}\} - \frac{1}{3} \delta^{ij} \{T^a, \{J^k, G^{k8}\}\} \\
 & - \frac{1}{3} \delta^{ij} \{T^8, \{J^k, G^{ka}\}\} - \frac{1}{N_f + 2} d^{ac8} \{T^c, \{J^i, J^j\}\} + \frac{2}{3} \frac{1}{N_f + 2} \delta^{ij} d^{ac8} \{J^2, T^c\} \\
 & - \frac{N_c + N_f}{N_f + 2} d^{ac8} (\{J^i, G^{jc}\} + \{J^j, G^{ic}\}) + \frac{2}{3} \frac{N_c + N_f}{N_f + 2} \delta^{ij} d^{ac8} \{J^k, G^{kc}\} \\
 & - \frac{2(N_c + N_f)}{N_f(N_f + 1)} \delta^{a8} \{J^i, J^j\} + \frac{4}{3} \frac{N_c + N_f}{N_f(N_f + 1)} \delta^{ij} \delta^{a8} J^2 \tag{4.39}
 \end{aligned}$$

Se pueden trabajar los siguientes operadores de cuatro cuerpos. Dichos operadores pueden ser convenientemente construidos como productos tensoriales de operadores de espín-0 y espín-1, con operadores de dos cuerpos. Hay dos de estos operadores, a saber,

$$\{ \{J^i, J^j\}, \{G^{ka}, G^{kb}\} \} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{J^2, \{G^{ka}, G^{kb}\}\}, \tag{4.40}$$

y

$$\{ \{J^i, J^j\}, \{T^a, T^b\} \} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{J^2, \{T^a, T^b\}\}. \tag{4.41}$$

El proceso de sustraer las componentes singulete y octete da como resultado, para el primer operador

$$\begin{aligned}
 & \{\{J^i, J^j\}, \{G^{ka}, G^{kb}\}\} - \frac{1}{N_f^2 - 1} \delta^{ab} \{\{J^i, J^j\}, \{G^{kc}, G^{kc}\}\} - \frac{N_f}{N_f^2 - 4} d^{abc} d^{cde} \{\{J^i, J^j\}, \{G^{kd}, G^{ke}\}\} \\
 & - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{J^2, \{G^{ka}, G^{kb}\}\} + \frac{2}{3} \frac{N_f}{N_f^2 - 4} \delta^{ij} d^{abc} d^{cde} \{J^2, \{G^{kd}, G^{ke}\}\} + \frac{2}{3} \frac{1}{N_f^2 - 1} \delta^{ij} \delta^{ab} \{J^2, \{G^{kc}, G^{kc}\}\}
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

y para el segundo operador

$$\begin{aligned}
 & \{\{J^i, J^j\}, \{T^a, T^b\}\} - \frac{1}{N_f^2 - 4} \delta^{ab} \{\{J^i, J^j\}, \{T^c, T^c\}\} - \frac{N_f}{N_f^2 - 4} d^{abc} d^{cde} \{\{J^i, J^j\}, \{T^d, T^e\}\} \\
 & - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{J^2, \{T^a, T^b\}\} + \frac{2}{3} \frac{1}{N_f^2 - 1} \delta^{ij} \delta^{ab} \{J^2, \{T^c, T^c\}\} + \frac{2}{3} \frac{N_f}{N_f^2 - 4} \delta^{ij} d^{abc} d^{cde} \{J^2, \{T^d, T^e\}\}.
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

Finalmente, las contribuciones a primer orden en ruptura de los operadores de cuatro cuerpos a $\mathcal{Q}^{(ij)a}$ están dadas por

$$\begin{aligned}
 O_{4,27}^{(ij)a} = & \{\{J^i, J^j\}, \{G^{ka}, G^{k8}\}\} + \frac{1}{2} \frac{N_f + 2}{N_f(N_f^2 - 1)} \delta^{a8} \{J^2, \{J^i, J^j\}\} + \frac{1}{2} \frac{N_f + 4}{N_f^2 - 4} d^{ac8} \{\{J^i, J^j\}, \{J^k, G^{kc}\}\} \\
 & - \frac{3}{4} \frac{(N_c + N_f)N_f}{N_f^2 - 4} d^{ac8} \{T^c, \{J^i, J^j\}\} - \frac{3}{4} \frac{N_c(N_c + 2N_f)}{N_f^2 - 1} \delta^{a8} \{J^i, J^j\} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{J^2, \{G^{ka}, G^{k8}\}\} \\
 & - \frac{1}{3} \frac{N_f + 2}{N_f(N_f^2 - 1)} \delta^{ij} \delta^{a8} \{J^2, J^2\} - \frac{1}{3} \frac{N_f + 4}{N_f^2 - 4} \delta^{ij} d^{ac8} \{J^2, \{J^k, G^{kc}\}\} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{(N_c + N_f)N_f}{N_f^2 - 4} \delta^{ij} d^{ac8} \{J^2, T^c\} + \frac{1}{2} \frac{N_c(N_c + 2N_f)}{N_f^2 - 1} \delta^{ij} \delta^{a8} J^2
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

y

$$\begin{aligned}
 \tilde{O}_{4,27}^{(ij)a} = & \{\{J^i, J^j\}, \{T^a, T^8\}\} - \frac{2}{N_f^2 - 1} \delta^{a8} \{J^2, \{J^i, J^j\}\} - \frac{2N_f}{N_f^2 - 4} d^{ac8} \{\{J^i, J^j\}, \{J^k, G^{kc}\}\} \\
 & - \frac{(N_c + N_f)(N_f - 4)}{N_f^2 - 4} d^{ac8} \{T^c, \{J^i, J^j\}\} - \frac{N_c(N_c + 2N_f)(N_f - 2)}{N_f(N_f^2 - 1)} \delta^{a8} \{J^i, J^j\} \\
 & - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{J^2, \{T^a, T^8\}\} + \frac{4}{3} \frac{1}{N_f^2 - 1} \delta^{ij} \delta^{a8} \{J^2, J^2\} + \frac{4}{3} \frac{N_f}{N_f^2 - 4} \delta^{ij} d^{ac8} \{J^2, \{J^k, G^{kc}\}\} \\
 & + \frac{2(N_c + N_f)(N_f - 4)}{3(N_f^2 - 4)} \delta^{ij} d^{ac8} \{J^2, T^c\} + \frac{2N_c(N_c + 2N_f)(N_f - 2)}{3N_f(N_f^2 - 1)} \delta^{ij} \delta^{a8} J^2
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Hay un operador adicional de cuatro cuerpos construido como

$$\frac{1}{2} \{\{J^k, J^k\}, \{G^{ia}, G^{jb}\} + \{G^{ja}, G^{ib}\}\}, \tag{4.46}$$

pero que se puede reescribir en términos de $\{J^2, O_2^{(ij)a}\}$, por lo cual es redundante y se puede descartar.

Para terminar esta subsección, vemos que las componentes singlete y octete de sabor son sustraídas de los operadores originales de la representación **27**, ya que pueden ser contenidos respectivamente en los operadores $O_{n,1}^{(ij)a}$ y $O_{n,8}^{(ij)a}$. La razón para mantener dichas componentes en las expresiones originales es doble. Primero, la condición de traza nula es conservada en toda la expresión, y segundo, esto permite distinguir los efectos de las diferentes representaciones, entonces los correspondientes coeficientes de los operadores parametrizan los efectos de la representación **27**.

4.3.4 Sobre la representación $(2, \mathbf{10} + \bar{\mathbf{10}})$

La representación $(2, \mathbf{10} + \bar{\mathbf{10}})$ al contrario de las representaciones de sabor $(2, \mathbf{1})$, $(2, \mathbf{8})$ y $(2, \mathbf{27})$ debe ser antisimétrica bajo el intercambio de los índices de sabor, manteniendo la simetría bajo el intercambio de los índices de espín.

Sea $A_-^{(ij)[ab]}$ un operador antisimétrico bajo el intercambio de los índices de sabor y simétrico bajo el intercambio de los índices de espín. Entonces, en orden a encontrar un operador genuino de la representación de sabor $(2, \mathbf{10} + \bar{\mathbf{10}})$ dado por $A^{(ij)[ab]}$, la componente de sabor octete debe ser sustraída de $A_-^{(ij)[ab]}$ de acuerdo con [111]

$$A^{(ij)[ab]} = A_-^{(ij)[ab]} - \frac{1}{N_f} f^{abe} f^{ghe} A_-^{(ij)[gh]} \quad (4.47)$$

donde, por construcción

$$f^{abc} A^{(ij)[ab]} = 0. \quad (4.48)$$

Con las siguientes consideraciones, la serie de operadores a primer orden en ruptura de simetría para la representación de sabor $(2, \mathbf{10} + \bar{\mathbf{10}})$ en realidad comienza con un solo operador de tres cuerpos de la forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{T^a, \{J^i, G^{jb}\} + \{J^j, G^{ib}\}\} - \frac{1}{2} \{T^b, \{J^i, G^{ja}\} + \{J^j, G^{ia}\}\} \\ & - \frac{1}{3} \delta^{ij} (\{T^a, \{J^r, G^{rb}\}\} - \{T^b, \{J^r, G^{ra}\}\}) \end{aligned} \quad (4.49)$$

donde la componente octete puede ser sustraída de (4.49) como

$$\frac{1}{N_f} i f^{abc} [J^2, \{J^i, G^{jc}\} + \{J^j, G^{ic}\}]. \quad (4.50)$$

El término dado por (4.50) es particularmente interesante. Primero, observemos que es impar bajo inversión temporal, lo cual en principio está prohibido en la expansión $1/N_c$ de $\mathcal{Q}^{(ij)a}$. Y segundamente, se anula con la contracción de los índices de espín. Sin embargo, es necesario cumplir la condición (4.47).

Entonces, la contribución a primer orden en ruptura de simetría al momento cuadrupolar $\mathcal{Q}^{(ij)a}$ del operador de la representación $(2, \mathbf{10} + \bar{\mathbf{10}})$ es

$$\begin{aligned} O_{3, \mathbf{10} + \bar{\mathbf{10}}}^{(ij)a} = & \frac{1}{2} \{T^a, \{J^i, G^{j8}\} + \{J^j, G^{i8}\}\} - \frac{1}{2} \{T^8, \{J^i, G^{ja}\} + \{J^j, G^{ia}\}\} \\ & - \frac{1}{3} \delta^{ij} \{T^a, \{J^k, G^{k8}\}\} + \frac{1}{3} \delta^{ij} \{T^8, \{J^k, G^{ka}\}\} \end{aligned} \quad (4.51)$$

donde la componente octete ha sido seguramente ignorada.

Los operadores de orden superior son obtenidos como $O_{n+2, \mathbf{10} + \bar{\mathbf{10}}}^{(ij)a} = \{J^2, O_{n, \mathbf{10} + \bar{\mathbf{10}}}^{(ij)a}\}$ para $n \geq 3$.

4.4 Una expresión completa para el momento cuadrupolar

La expresión final para el operador de momento cuadrupolar a primer orden en ruptura de simetría es

$$\mathcal{Q}_{(ij)a} + \delta \mathcal{Q}^{(ij)a} \quad (4.52)$$

donde $\mathcal{Q}_{(ij)a}$ es el operador cuyos elementos de matriz que dan los valores para el caso de simetría exacta $SU(3)$ dado por (4.13). En cambio, $\delta \mathcal{Q}^{(ij)a}$ incluye todos los operadores

CAPÍTULO 4. LOS MOMENTOS CUADRUPOLES EN LA EXPANSIÓN $1/N_C$

debido a la ruptura de la simetría a primer orden y su expansión en el formalismo $1/N_C$ es

$$\begin{aligned} \delta Q^{(ij)a} = & \sum_{n=2,4}^{N_c-1} \frac{1}{N_c^{n-1}} c_{n,1} \mathcal{O}_{n,1}^{(ij)a} + \sum_{n=2}^{N_c} \frac{1}{N_c^{n-1}} c_{n,8} \mathcal{O}_{n,8}^{(ij)a} + \sum_{n=2}^{N_c} \frac{1}{N_c^{n-1}} c_{n,27} \mathcal{O}_{n,27}^{(ij)a} + \sum_{n=4,6}^{N_c-1} \frac{1}{N_c^n} \tilde{c}_{n,27} \tilde{\mathcal{O}}_{n,27}^{(ij)a} \\ & + \sum_{n=3,5}^{N_c} \frac{1}{N_c^{n-1}} c_{n,10+\bar{10}} \mathcal{O}_{n,10+\bar{10}}^{(ij)a} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Para el valor físico $N_c = 3$, la serie es truncada como

$$\begin{aligned} \delta Q^{(ij)a} = & \frac{1}{N_c} c_{2,1} \mathcal{O}_{2,1}^{(ij)a} + \frac{1}{N_c} c_{2,8} \mathcal{O}_{2,8}^{(ij)a} + \frac{1}{N_c^2} c_{3,8} \mathcal{O}_{3,8}^{(ij)a} + \frac{1}{N_c} c_{2,27} \mathcal{O}_{2,27}^{(ij)a} + \frac{1}{N_c^2} c_{3,27} \mathcal{O}_{3,27}^{(ij)a} \\ & + \frac{1}{N_c^2} c_{3,10+\bar{10}} \mathcal{O}_{3,10+\bar{10}}^{(ij)a} \end{aligned} \quad (4.54)$$

donde los operadores $\mathcal{O}_{2,1}^{(ij)a}$, $\mathcal{O}_{2,8}^{(ij)a}$, $\mathcal{O}_{3,8}^{(ij)a}$, $\mathcal{O}_{2,27}^{(ij)a}$, $\mathcal{O}_{3,27}^{(ij)a}$, $\mathcal{O}_{3,10+\bar{10}}^{(ij)a}$ están dados por las ecuaciones (4.30), (4.31), (4.32), (4.36), (4.39) y (4.51) respectivamente. Los coeficientes de los operadores $c_{n,\text{rep}}$ acompañan al frente a los operadores de n cuerpos de la representación de sabor **rep**. Los elementos de matriz de los operadores en la expansión (4.54) están enlistados en las tablas 4.4, 4.5 y 4.6 por completez.

	n	p	Σ^-	Σ^0	Σ^+	Ξ^-	Ξ^0	Λ
$\langle \delta^{38} \{J^3, J^3\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} \delta^{38} J^2 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle d^{3c8} \{J^3, G^{3c}\} \rangle$	$-\frac{5}{12\sqrt{3}}$	$\frac{5}{12\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{3\sqrt{3}}$	$\frac{1}{12\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{12\sqrt{3}}$	0
$\langle \delta^{33} d^{3c8} \{J^k, G^{kc}\} \rangle$	$-\frac{5}{4\sqrt{3}}$	$\frac{5}{4\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{4\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{4\sqrt{3}}$	0
$\langle d^{3c8} \{T^c, \{J^3, J^3\}\} \rangle$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0
$\langle \delta^{33} d^{3c8} \{J^2, T^c\} \rangle$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	0

CAPÍTULO 4. LOS MOMENTOS CUADRUPOLALES EN LA EXPANSIÓN $1/N_C$

	n	p	Σ^-	Σ^0	Σ^+	Ξ^-	Ξ^0	Λ
$\langle \{G^{33}, G^{38}\} \rangle$	$-\frac{5}{24\sqrt{3}}$	$\frac{5}{24\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	0	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$-\frac{11}{24\sqrt{3}}$	$\frac{11}{24\sqrt{3}}$	0
$\langle \delta^{33} \{T^3, T^8\} \rangle$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\langle \delta^{33} f^{3cd} f^{8ce} \{T^d, T^e\} \rangle$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	0
$\langle \delta^{33} d^{3c8} T^c \rangle$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0
$\langle \delta^{33} \delta^{38} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \{T^3, \{J^3, G^{38}\}\} \rangle$	$-\frac{1}{4\sqrt{3}}$	$\frac{1}{4\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	0
$\langle \{T^8, \{J^3, G^{33}\}\} \rangle$	$-\frac{5}{4\sqrt{3}}$	$\frac{5}{4\sqrt{3}}$	0	0	0	$-\frac{1}{4\sqrt{3}}$	$\frac{1}{4\sqrt{3}}$	0
$\langle \delta^{33} \{T^3, \{J^k, G^{k8}\}\} \rangle$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0
$\langle \delta^{33} \{T^8, \{J^k, G^{k3}\}\} \rangle$	$-\frac{5}{4\sqrt{3}}$	$\frac{5}{4\sqrt{3}}$	0	0	0	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	0
$\langle \delta^{88} \{J^3, J^3\} \rangle$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\langle \delta^{88} \delta^{88} J^2 \rangle$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\langle d^{8c8} \{J^3, G^{3c}\} \rangle$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$
$\langle \delta^{33} d^{8c8} \{J^k, G^{kc}\} \rangle$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\langle d^{8c8} \{T^c, \{J^3, J^3\}\} \rangle$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\langle \delta^{33} d^{8c8} \{J^3, T^c\} \rangle$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0
$\langle \{G^{38}, G^{38}\} \rangle$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{1}{6}$
$\langle \delta^{33} \{T^8, T^8\} \rangle$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0
$\langle \delta^{33} f^{8cd} f^{8ce} \{T^d, T^e\} \rangle$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{2}$
$\langle \delta^{33} d^{8c8} T^e \rangle$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\langle \delta^{33} \delta^{88} \rangle$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\langle \{T^8, \{J^3, G^{38}\}\} \rangle$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0
$\langle \delta^{33} \{T^8, \{J^k, G^{k8}\}\} \rangle$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0	0	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	0

CAPÍTULO 4. LOS MOMENTOS CUADRUPOLES EN LA EXPANSIÓN $1/N_C$

	n	p	Σ^-	Σ^0	Σ^+	Ξ^-	Ξ^0	Λ
--	-----	-----	------------	------------	------------	---------	---------	-----------

Cuadro 4.4: Elementos de matriz de los operadores bariónicos correspondientes a los momentos cuadrupolares del octete de bariones para $N_c = 3$: Caso con ruptura de la simetría $SU(3)$.

	Δ^{++}	Δ^+	Δ^0	Δ^-	Σ^{*+}	Σ^{*0}	Σ^{*-}	Ξ^{*-}	Ξ^{*0}	Ω^-
$\langle \delta^{38} \{J^3, J^3\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} \delta^{38} J^2 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle d^{3c8} \{J^3, G^{3c}\} \rangle$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	0
$\langle \delta^{33} d^{3c8} \{J^k, G^{kc}\} \rangle$	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5}{4\sqrt{3}}$	$-\frac{5}{4\sqrt{3}}$	$-\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5}{2\sqrt{3}}$	0	$-\frac{5}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{5}{4\sqrt{3}}$	$\frac{5}{4\sqrt{3}}$	0
$\langle d^{3c8} \{T^c, \{J^3, J^3\}\} \rangle$	$\frac{9\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{9\sqrt{3}}{2}$	$3\sqrt{3}$	0	$-3\sqrt{3}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0
$\langle \delta^{33} d^{3c8} \{J^2, T^c\} \rangle$	$\frac{15\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{15\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{5\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	0
$\langle \{G^{33}, G^{38}\} \rangle$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	$-\frac{\sqrt{3}}{8}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{8}$	0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	$-\frac{\sqrt{3}}{8}$	0
$\langle \delta^{33} \{T^3, T^8\} \rangle$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\langle \delta^{33} f^{3cd} f^{3ce} \{T^d, T^e\} \rangle$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	0
$\langle \delta^{33} d^{3c8} T^c \rangle$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0
$\langle \delta^{33} \delta^{38} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \{T^3, \{J^3, G^{38}\}\} \rangle$	$\frac{9\sqrt{3}}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{9\sqrt{3}}{4}$	0	0	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0
$\langle \{T^8, \{J^3, G^{33}\}\} \rangle$	$\frac{9\sqrt{3}}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{9\sqrt{3}}{4}$	0	0	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0
$\langle \delta^{33} \{T^3, \{J^k, G^{k8}\}\} \rangle$	$\frac{15\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{15\sqrt{3}}{4}$	0	0	0	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{5\sqrt{3}}{4}$	0
$\langle \delta^{33} \{T^8, \{J^k, G^{k3}\}\} \rangle$	$\frac{15\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{15\sqrt{3}}{4}$	0	0	0	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{5\sqrt{3}}{4}$	0
$\langle \delta^{88} \{J^3, J^3\} \rangle$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$
$\langle \delta^{33} \delta^{88} J^2 \rangle$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$

CAPÍTULO 4. LOS MOMENTOS CUADRUPOLARES EN LA EXPANSIÓN $1/N_C$

	Δ^{++}	Δ^+	Δ^0	Δ^-	Σ^{*+}	Σ^{*0}	Σ^{*-}	Ξ^{*-}	Ξ^{*0}	Ω^-
$\langle d^{8c8} \{J^3, G^{3c}\} \rangle$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$
$\langle \delta^{33} d^{8c8} \{J^k, G^{kc}\} \rangle$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$	0	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{2}$
$\langle d^{8c8} \{T^c, \{J^3, J^3\}\} \rangle$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{9}{2}$	0	0	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	9
$\langle \delta^{33} d^{8c8} \{J^2, T^c\} \rangle$	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{15}{4}$	0	0	0	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{2}$
$\langle \{G^{38}, G^{38}\} \rangle$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	0	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{2}$
$\langle \delta^{33} \{T^8, T^8\} \rangle$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	6
$\langle \delta^{33} f^{8cd} f^{8ce} \{T^d, T^e\} \rangle$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	6	6	6	$\frac{27}{4}$	$\frac{27}{4}$	$\frac{9}{2}$
$\langle \delta^{33} d^{8c8} T^c \rangle$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\langle \delta^{33} \delta^{88} \rangle$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\langle \{T^8, \{J^3, G^{38}\}\} \rangle$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	0	0	0	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	9
$\langle \delta^{33} \{T^8, \{J^k, G^{k8}\}\} \rangle$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	0	0	0	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	15

Cuadro 4.5: Elementos de matriz de los operadores bariónicos correspondientes a los momentos cuadrupolares del decuplete de bariones para $N_c = 3$: Caso con ruptura de la simetría $SU(3)$.

	$\Delta^+ p$	$\Delta^0 n$	$\Sigma^{*0} \Lambda$	$\Sigma^{*0} \Sigma^0$	$\Sigma^{*+} \Sigma^+$	$\Sigma^{*-} \Sigma^-$	$\Xi^{*0} \Xi^0$	$\Xi^{*-} \Xi^-$
$\langle \delta^{38} \{J^3, J^3\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} \delta^{38} J^2 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle d^{3c8} \{J^3, G^{3c}\} \rangle$	$\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{3\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{6}}$	$\frac{1}{3\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{6}}$
$\langle \delta^{33} d^{3c8} \{J^k, G^{kc}\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle d^{3c8} \{T^c, \{J^3, J^3\}\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} d^{3c8} \{J^2, T^e\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \{G^{33}, G^{38}\} \rangle$	$\frac{1}{3\sqrt{6}}$	$\frac{1}{3\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{6}}$	$\frac{1}{3\sqrt{6}}$

CAPÍTULO 4. LOS MOMENTOS CUADRUPOLARES EN LA EXPANSIÓN $1/N_C$

	$\Delta^+ p$	$\Delta^0 n$	$\Sigma^{*0} \Lambda$	$\Sigma^{*0} \Sigma^0$	$\Sigma^{*+} \Sigma^+$	$\Sigma^{*-} \Sigma^-$	$\Xi^{*0} \Xi^0$	$\Xi^{*-} \Xi^-$
$\langle \delta^{33} \{T^3, T^8\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} f^{3cd} f^{8ce} \{T^d, T^e\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} d^{3c8} T^c \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} \delta^{38} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \{T^3, \{J^3, G^{38}\}\} \rangle$	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
$\langle \{T^8, \{J^3, G^{33}\}\} \rangle$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
$\langle \delta^{33} \{T^3, \{J^k, G^{k8}\}\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} \{T^8, \{J^k, G^{k3}\}\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{88} \{J^3, J^3\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} \delta^{88} J^2 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle d^{8c8} \{J^3, G^{3c}\} \rangle$	0	0	0	$-\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{2}}$
$\langle \delta^{33} d^{8c8} \{J^k, G^{kc}\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle d^{8c8} \{T^c, \{J^3, J^3\}\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} d^{8c8} \{J^2, T^c\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \{G^{38}, G^{38}\} \rangle$	0	0	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$
$\langle \delta^{33} \{T^8, T^8\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} f^{8cd} f^{8ce} \{T^d, T^e\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} d^{8c8} T^c \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} \delta^{88} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \{T^8, \{J^3, G^{38}\}\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\langle \delta^{33} \{T^8, \{J^k, G^{k8}\}\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0

Cuadro 4.6: Elementos de matriz de los operadores bariónicos correspondientes a los momentos cuadrupolares de las transiciones para $N_c = 3$: Caso con ruptura de la simetría $SU(3)$.

CAPÍTULO 4. LOS MOMENTOS CUADRUPOLES EN LA EXPANSIÓN $1/N_C$

En consecuencia, los momentos cuadrupolares completos del decuplete de bariones (valor con simetría $SU(3)$ más los efectos a primer orden en ruptura de simetría) para $N_c = 3$ están dados por

$$\mathcal{Q}_{\Delta^{++}} = \frac{4}{9}q_{\Delta^{++}}(k_2 + k_3) + \frac{2}{3\sqrt{3}}c_{2,1} + \frac{4}{9\sqrt{3}}(c_{2,8} + c_{3,8}) + \frac{3}{10\sqrt{3}}\left[c_{2,27} + \frac{4}{3}c_{3,27}\right], \quad (4.55a)$$

$$\mathcal{Q}_{\Delta^+} = \frac{4}{9}q_{\Delta^+}(k_2 + k_3) + \frac{2}{3\sqrt{3}}c_{2,1} + \frac{1}{6\sqrt{3}}\left[c_{2,27} + \frac{4}{3}c_{3,27}\right], \quad (4.55b)$$

$$\mathcal{Q}_{\Delta^0} = \frac{2}{3\sqrt{3}}c_{2,1} - \frac{4}{9\sqrt{3}}(c_{2,8} + c_{3,8}) - \frac{1}{30\sqrt{3}}\left[c_{2,27} + \frac{4}{3}c_{3,27}\right], \quad (4.55c)$$

$$\mathcal{Q}_{\Delta^-} = \frac{4}{9}q_{\Delta^-}(k_2 + k_3) + \frac{2}{3\sqrt{3}}c_{2,1} - \frac{8}{9\sqrt{3}}(c_{2,8} + c_{3,8}) - \frac{1}{10\sqrt{3}}\left[c_{2,27} + \frac{4}{3}c_{3,27}\right], \quad (4.55d)$$

$$\mathcal{Q}_{\Sigma^{*+}} = \frac{4}{9}q_{\Sigma^{*+}}(k_2 + k_3) + \frac{2}{3\sqrt{3}}c_{2,1} + \frac{4}{9\sqrt{3}}(c_{2,8} + c_{3,8}) - \frac{11}{30\sqrt{3}}\left[c_{2,27} + \frac{4}{3}c_{3,27}\right], \quad (4.55e)$$

$$\mathcal{Q}_{\Sigma^{*0}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}c_{2,1} - \frac{5}{30\sqrt{3}}\left[c_{2,27} + \frac{4}{3}c_{3,27}\right], \quad (4.55f)$$

$$\mathcal{Q}_{\Sigma^{*-}} = \frac{4}{9}q_{\Sigma^{*-}}(k_2 + k_3) + \frac{2}{3\sqrt{3}}c_{2,1} - \frac{4}{9\sqrt{3}}(c_{2,8} + c_{3,8}) + \frac{1}{30\sqrt{3}}\left[c_{2,27} + \frac{4}{3}c_{3,27}\right], \quad (4.55g)$$

$$\mathcal{Q}_{\Xi^{*-}} = \frac{4}{9}q_{\Xi^{*-}}(k_2 + k_3) + \frac{2}{3\sqrt{3}}c_{2,1} - \frac{11}{30\sqrt{3}}\left[c_{2,27} - \frac{4}{3}c_{3,27}\right], \quad (4.55h)$$

$$\mathcal{Q}_{\Xi^{*0}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}c_{2,1} + \frac{4}{9\sqrt{3}}(c_{2,8} + c_{3,8}) - \frac{1}{10\sqrt{3}}\left[c_{2,27} + \frac{4}{3}c_{3,27}\right], \quad (4.55i)$$

y

$$\mathcal{Q}_{\Omega^-} = \frac{4}{9}q_{\Omega^-}(k_2 + k_3) + \frac{2}{3\sqrt{3}}c_{2,1} + \frac{4}{9\sqrt{3}}(c_{2,8} + c_{3,8}) + \frac{9}{30\sqrt{3}}\left[c_{2,27} + \frac{4}{3}c_{3,27}\right]. \quad (4.55j)$$

Observamos que los efectos de la ruptura de la simetría involucran la aparición de contribuciones no nulas a los momentos cuadrupolares del decuplete de bariones neutros. También vemos que no contribuye a los momentos cuadrupolares del decuplete de bariones neutros la representación de sabor $(2, \mathbf{10} + \bar{\mathbf{10}})$.

$$\mathcal{Q}_{\Delta+p} = \frac{2\sqrt{2}}{9}k_2 + \frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}c_{2,8} + \frac{1}{15}\sqrt{\frac{2}{3}}\left[c_{2,27} + \frac{1}{3}c_{3,27}\right] - \frac{1}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}c_{3,10+\bar{10}}, \quad (4.56a)$$

$$\mathcal{Q}_{\Delta^0n} = \frac{2\sqrt{2}}{9}k_2 + \frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}c_{2,8} + \frac{1}{15}\sqrt{\frac{2}{3}}\left[c_{2,27} + \frac{1}{3}c_{3,27}\right] - \frac{1}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}c_{3,10+\bar{10}}, \quad (4.56b)$$

$$\mathcal{Q}_{\Sigma^*0\Lambda} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}k_2 + \frac{\sqrt{2}}{9}c_{2,8} - \frac{2\sqrt{2}}{15}\left[c_{2,27} + \frac{1}{3}c_{3,27}\right], \quad (4.56c)$$

$$\mathcal{Q}_{\Sigma^*0\Sigma^0} = \frac{\sqrt{2}}{9}k_2 - \frac{1}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}c_{2,8} + \frac{2}{15}\sqrt{\frac{2}{3}}\left[c_{2,27} + \frac{1}{3}c_{3,27}\right], \quad (4.56d)$$

$$\mathcal{Q}_{\Sigma^*+\Sigma^+} = \frac{2\sqrt{2}}{9}k_2 + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\left[c_{2,27} + \frac{1}{3}c_{3,27}\right] + \frac{1}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}c_{3,10+\bar{10}}, \quad (4.56e)$$

$$\mathcal{Q}_{\Sigma^*-\Sigma^-} = -\frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}c_{2,8} - \frac{1}{15}\sqrt{\frac{2}{3}}\left[c_{2,27} + \frac{1}{3}c_{3,27}\right] - \frac{1}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}c_{3,10+\bar{10}}, \quad (4.56f)$$

$$\mathcal{Q}_{\Xi^*0\Xi^0} = \frac{2\sqrt{2}}{9}k_2 - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\left[c_{2,27} + \frac{1}{3}c_{3,27}\right] + \frac{1}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}c_{3,10+\bar{10}}, \quad (4.56g)$$

$$\mathcal{Q}_{\Xi^*-\Xi^-} = -\frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}c_{2,8} - \frac{1}{15}\sqrt{\frac{2}{3}}\left[c_{2,27} + \frac{1}{3}c_{3,27}\right] - \frac{1}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}c_{3,10+\bar{10}}, \quad (4.56h)$$

Observamos que la representación de singlete de sabor no contribuye en este caso, pero sí contribuye la representación de sabor $(2, \mathbf{10} + \bar{\mathbf{10}})$.

Las relaciones de isoespín enumerados en la sección 4.2, esta vez para las expresiones completas para los momentos cuadrupolares son, para los operadores con $I = 3$,

$$\mathcal{Q}_{\Delta^{++}} - 3\mathcal{Q}_{\Delta^+} + 3\mathcal{Q}_{\Delta^0} - \mathcal{Q}_{\Delta^-} = 0, \quad (4.57a)$$

y para los operadores con $I = 2$

$$\mathcal{Q}_{\Delta^{++}} - \mathcal{Q}_{\Delta^+} - \mathcal{Q}_{\Delta^0} - \mathcal{Q}_{\Delta^-} = 0, \quad (4.57b)$$

$$\mathcal{Q}_{\Sigma^{*+}} - 2\mathcal{Q}_{\Sigma^{*0}} + \mathcal{Q}_{\Sigma^{*-}} = 0, \quad (4.57c)$$

$$\mathcal{Q}_{\Delta^{+p}} - \mathcal{Q}_{\Delta^{0n}} = 0, \quad (4.57d)$$

$$\mathcal{Q}_{\Sigma^{*+\Sigma^+}} - 2\mathcal{Q}_{\Sigma^{*0\Sigma^0}} + \mathcal{Q}_{\Sigma^{*-\Sigma^-}} = 0 \quad (4.57e)$$

i.e., se cumplen en presencia de la ruptura de simetría a primer orden, lo cual es un resultado completamente esperado.

Expresiones adicionales se satisfacen en la presencia de la ruptura de simetría a primer orden son

$$(\mathcal{Q}_{\Sigma^{*-}} + \mathcal{Q}_{\Sigma^{*+}}) - (\mathcal{Q}_{\Delta^0} + \mathcal{Q}_{\Xi^{*0}}) = 0 \quad (4.58a)$$

$$\frac{2}{3}(\mathcal{Q}_{\Delta^{++}} - \mathcal{Q}_{\Omega^-}) - (\mathcal{Q}_{\Delta^+} - \mathcal{Q}_{\Xi^{*-}}) = 0 \quad (4.58b)$$

$$\mathcal{Q}_{\Delta^+} - 2\mathcal{Q}_{\Delta^0} + \mathcal{Q}_{\Delta^-} = 0 \quad (4.58c)$$

$$-2\mathcal{Q}_{\Sigma^{*0}} + \mathcal{Q}_{\Delta^0} + \mathcal{Q}_{\Xi^{*0}} = 0 \quad (4.58d)$$

$$\mathcal{Q}_{\Sigma^{*-}} + \mathcal{Q}_{\Delta^-} - 5\mathcal{Q}_{\Xi^{*-}} + \mathcal{Q}_{\Omega^-} = 0 \quad (4.58e)$$

$$\mathcal{Q}_{\Sigma^{*-\Sigma^-}} - \mathcal{Q}_{\Xi^{*-\Xi^-}} = 0 \quad (4.58f)$$

CAPÍTULO 4. LOS MOMENTOS CUADRUPOLES EN LA EXPANSIÓN $1/N_C$

La ecuación (4.58f) es notable porque en el límite de simetría exacta $SU(3)$, $Q_{\Sigma^*-\Sigma^-}^{SU(3)} = Q_{\Xi^*-\Xi^-}^{SU(3)}$, y todavía la degeneración entre esas dos cantidades no es removida por los efectos de la ruptura de la simetría a primer orden. En consecuencia, si $\epsilon \sim m_s$ es una (medida adimensional) de la ruptura de la simetría $SU(3)$, entonces, las correcciones a las ecuaciones (4.58) deben ser de orden ϵ^2 .

La ruptura de la simetría es evaluada en la referencia [66] por el reemplazamiento de los términos espín-espín en las expresiones para los momentos cuadrupolares con dependencia cuadrática de las masas de los quarks que es obtenida de la interacción de intercambio de un gluón entre quarks. La ruptura de la simetría es caracterizada por la razón $r = m_u/m_s$ de las masas de los quarks u y s . Las contrapartes de las relaciones (4.25) que incluyen los efectos de la ruptura de la simetría también se encuentran que son nulas en la referencia [66]. Sin embargo, en el formalismo presentado aquí, ahora son dadas por

$$Q_{\Delta^-} + Q_{\Delta^+} = \frac{4}{3\sqrt{3}}c_{2,1} - \frac{8}{9\sqrt{3}}c_{2,8} - \frac{8}{9\sqrt{3}}c_{3,8} + \frac{1}{15\sqrt{3}}c_{2,27} + \frac{4}{45\sqrt{3}}c_{3,27}, \quad (4.59a)$$

$$2Q_{\Delta^-} + Q_{\Delta^{++}} = \frac{2}{\sqrt{3}}c_{2,1} - \frac{4}{3\sqrt{3}}c_{2,8} - \frac{4}{3\sqrt{3}}c_{3,8} + \frac{1}{10\sqrt{3}}c_{2,27} + \frac{2}{15\sqrt{3}}c_{3,27}, \quad (4.59b)$$

$$3(Q_{\Xi^*-\Xi^-} - Q_{\Sigma^*-\Sigma^-}) - (Q_{\Sigma^-} - Q_{\Delta^-}) = 0, \quad (4.59c)$$

$$Q_{\Delta^-} - Q_{\Sigma^*-\Sigma^-} - \sqrt{2}Q_{\Sigma^*-\Sigma^-} = -\frac{4}{9\sqrt{3}}c_{3,8} - \frac{2}{15\sqrt{3}}c_{3,27} + \frac{2}{9\sqrt{3}}c_{3,10+i0}, \quad (4.59d)$$

$$Q_{\Delta^+} - Q_{\Sigma^{*+}} + \sqrt{2}Q_{\Delta^+p} - \sqrt{2}Q_{\Sigma^{*+}\Sigma^+} = -\frac{4}{9\sqrt{3}}c_{3,8} + \frac{8}{15\sqrt{3}}c_{3,27} - \frac{4}{9\sqrt{3}}c_{3,10+i0}, \quad (4.59e)$$

$$Q_{\Sigma^*0} - \frac{1}{\sqrt{2}}Q_{\Sigma^*0\Sigma^0} + \frac{1}{\sqrt{6}}Q_{\Sigma^*0\Lambda} = \frac{2}{3\sqrt{3}}c_{2,1} + \frac{2}{9\sqrt{3}}c_{2,8} - \frac{13}{30\sqrt{3}}c_{2,27} - \frac{14}{45\sqrt{3}}c_{3,27}, \quad (4.59f)$$

$$Q_{\Sigma^*-\Sigma^-} - Q_{\Xi^*-\Xi^-} - \frac{1}{\sqrt{2}}Q_{\Xi^*-\Xi^-} - \frac{1}{\sqrt{2}}Q_{\Sigma^*-\Sigma^-} = -\frac{4}{9\sqrt{3}}c_{3,8} - \frac{2}{15\sqrt{3}}c_{3,27} + \frac{2}{9\sqrt{3}}c_{3,10+i0}, \quad (4.59g)$$

$$\mathcal{Q}_{\Xi^*0} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{Q}_{\Xi^*0\Xi^0} - \sqrt{\frac{2}{3}} \mathcal{Q}_{\Sigma^*0\Lambda} = \frac{2}{3\sqrt{3}} c_{2,1} + \frac{2}{9\sqrt{3}} c_{2,8} + \frac{4}{9\sqrt{3}} c_{3,8} - \frac{13}{30\sqrt{3}} c_{2,27} - \frac{23}{45\sqrt{3}} c_{3,27} + \frac{1}{9\sqrt{3}} c_{3,10+i0}. \quad (4.59h)$$

La ecuación (4.59c) es la única que concuerda entre el análisis de la referencia [66] y el presente análisis, en cuanto a los efectos de la ruptura de la simetría en los momentos cuadrupolares nos ocupan. Una diferencia notable radica en que el valor de \mathcal{Q}_{Δ^0} se anula en la presencia de la ruptura de la simetría a orden $\mathcal{O}(r^3)$ encontrada en dicha referencia, que comparada con la ecuación (4.55c), que alcanza en principio un valor diferente de cero debido a la ruptura de la simetría a primer orden.

En el contexto del análisis de la expansión $1/N_c$ análisis de la referencia [68], una relación adicional es provista con los coeficientes independientes de N_c que es válida para todos los valores de N_c en todos los casos de ruptura de la simetría analizados aquí. La relación, correspondiente a la ecuación (4.23) de la referencia [68], es

$$\mathcal{Q}_{\Xi^*-} - \mathcal{Q}_{\Sigma^-} - \sqrt{2} \mathcal{Q}_{\Xi^*-\Xi^-} = 0 \quad (4.60)$$

Con los resultados presentados aquí, la relación anterior en realidad se expresa como

$$\mathcal{Q}_{\Xi^*-} - \mathcal{Q}_{\Sigma^-} - \sqrt{2} \mathcal{Q}_{\Xi^*-\Xi^-} = -\frac{4}{9\sqrt{3}} c_{3,8} - \frac{2}{15\sqrt{3}} c_{3,27} + \frac{2}{9\sqrt{3}} c_{3,10+i0}. \quad (4.61)$$

Por lo tanto, la ruptura de simetría afecta la relación (4.61) únicamente a nivel de operador de tres cuerpos y superior. Deben ser removidos dichos operadores de la serie (4.54), con lo cual se podría recuperar la predicción del ‘ansatz’ del intercambio de un solo fotón. Equivalentemente, la ecuación (4.61) se anula cuando los términos de orden cero y primer orden en $1/N_c$ son conservados en la serie (4.54). Más allá de ese punto, recibe modificaciones.

Capítulo 5

Conclusiones y perspectivas

El principal cometido de la presente tesis es la construcción de la expansión $1/N_c$ del operador bariónico cuyos elementos entre estados bariónicos de $SU(6)$ produce los valores actuales de los momentos cuadrupolares espectroscópicos. Este operador tiene propiedades bien definidas: es un objeto de espín 2 y un octete de sabor, lo que implica que se transforma como $(2, \mathbf{8})$ bajo $SU(2) \otimes SU(3)$. Además, es un tensor simétrico de traza cero, que es par bajo inversión temporal.

Dicho operador primero se construye bajo la hipótesis de simetría exacta $SU(3)$, el cual es denotado por $\mathcal{Q}^{(ij)a}$. Para el valor físico $N_c = 3$, $\mathcal{Q}^{(ij)a}$ está dado por (4.15). Además, los efectos de la ruptura de la simetría $SU(3)$ a primer se incluyen en el operador $\delta\mathcal{Q}^{(ij)a}$, dado por (4.54), que incluye todos los operadores de las representaciones de sabor permitidas del producto del tensor de momento cuadrupolar y la perturbación. Dichas representaciones son $(2, \mathbf{1})$, $(2, \mathbf{8})$, $(2, \mathbf{10} + \bar{\mathbf{10}})$ y $(2, \mathbf{27})$. La expansión $1/N_c$ de los operadores que satisfacen las propiedades antes mencionadas está dada detalladamente. Los elementos de matriz del operador $\mathcal{Q}^{(ij)a} + \delta\mathcal{Q}^{(ij)a}$ que arrojan los valores actuales de los momentos cuadrupolares. Dichos operadores están enlistados en las ecuaciones y para el decuplete de bariones y las transiciones bariónicas decuplete-octete. Para el octete de bariones se encontró que los valores son cero, lo cual es consistente con las reglas de selección del momento angular. Dichas expresiones están dadas en términos de parámetros libres de la teoría. Reteniendo los operadores de tres cuerpos, son dos parámetros (k_1 y k_2) para el caso de simetría exacta de sabor y seis más introducidos por la ruptura de la simetría ($c_{2,1}$, $c_{2,8}$, $c_{3,8}$, $c_{2,27}$, $c_{3,27}$ y $c_{3,10+\bar{10}}$), tal que son ocho parámetros indeterminados en

total. Desafortunadamente, la información experimental [58] es bastante escasa, por consiguiente, no es posible realizar un ajuste por mínimos cuadrados para comparar la teoría y el experimento, y extraer información de dichos parámetros. Otros intentos de reducir el número de parámetros son infructuosos. La única fuente de información experimental conocida es hasta ahora la correspondiente a la transición $\Delta^+ \rightarrow p$ [58]. Las dificultades de las mediciones de los momentos cuadrupolares dependen de varios factores. Por ejemplo, excepto para la partícula Ω^- , todos los bariones del decuplete decaen fuertemente, con acoplamientos de la forma decuplete-decuplete- γ son disponibles únicamente en procesos virtuales, los cuales son difíciles de medir [67].

Para cubrir la falta de información experimental sobre los momentos cuadrupolares, se proporcionan en su lugar algunas relaciones. Además de las relaciones de isospín (4.57) que deben ser satisfechas por los momentos cuadrupolares en el caso de la ruptura de la simetría, también se proporcionan las relaciones dadas por (4.59), las cuales puede ser muy útiles en el futuro, cuando experimentos adicionales sean previstos. Mientras tanto, las predicciones de la expansión $1/N_c$ están en concordancia con las expectativas.

Por otro lado, se redactó un artículo de investigación relativo a los operadores de proyección de espín y sabor en el grupo $SU(2N_f)$ de espín-sabor, a partir del empleo del operador cuadrático de Casimir del grupo especial unitario $SU(N)$ para su construcción, los cuales a su vez pueden descomponerse en cualquiera de sus espacios de representación dimensional finita reducibles contenidos en el producto tensorial de dos o tres espacios adjuntos en sus componentes irreducibles. Aunque el método es lo suficientemente general, está aplicado especialmente en el grupo de simetría $SU(2N_f) \rightarrow SU(2) \otimes SU(N_f)$, el cual aparece en el sector bariónico de la Cromodinámica Cuántica en límite N_c grande, donde N_f y N_c son los números de sabor de los quarks ligeros y de carga de color, respectivamente. La aproximación conduce a la construcción de los operadores de espín y sabor que pueden ser implementados en el análisis de la expansión $1/N_c$ de los operadores. El uso de los operadores de proyección permite una proyección exitosa de las componentes deseadas de un operador dada y sustrae aquellas componentes que no son deseadas.

Se desarrollan algunos ejemplos en $SU(2)$ y $SU(3)$ como la ecuación (77) de [82] que es un objeto de espín y se transforma puramente como una representación $(2, \mathbf{27})$, por

consiguiente las representaciones $(2, \mathbf{1})$ y $(2, \mathbf{8})$ han sido apropiadamente sustraídas por el uso de los proyectores adecuado de espín y sabor. Operadores de este tipo aparecen en el análisis de los momentos cuadrupolares [83].

La aplicación de la técnica de los proyectores desarrollada en [82] no está limitada únicamente a la expansión $1/N_c$ de la QCD. La aplicación presentada en [82] se puede extender a modelos de cascarón de la física atómica y nuclear para construir operadores tensoriales los cuales, con ayuda del *Teorema de Wigner-Eckart*, pueden ser usados para calcular las amplitudes de transición. Aplicaciones posteriores a las teorías de norma no Abelianas, deben ser también seriamente considerados. En particular, para modelos que requieren la construcción de un Hamiltoniano con una simetría $SU(N)$, el método puede dar un mecanismo para obtener las contribuciones de las diferentes representaciones irreducibles de los operadores que aparecen en dicho Hamiltoniano. En esta vía la importancia de cada diferente contribución al espectro puede ser estudiada. Un ejemplo claro puede ser encontrado en el modelo de bosón interactuante de la física nuclear [117].

Como posible trabajo a futuro queda aplicación de la técnica de proyectores para aplicar nuestro formalismo $1/N_c$ al cálculo de los modelos cuadrupolares de los núcleos para los modelos tipo Elliott, donde aparece la ruptura espontánea de la simetría la cual es asociada a la deformación nuclear [84].

Apéndice A

Reducción de operadores de bariones

En el capítulo tres de la tesis el cual aborda el problema central de la tesis, hemos visto como diferentes operadores de n cuerpos que satisfacen las propiedades de la expansión $1/N_c$ de $\mathcal{Q}^{(ij)a}$ pueden ser construidos.

Operadores de dos cuerpos

$$\{G^{ie}, G^{je}\} - \frac{1}{3}\delta^{ij}\{G^{re}, G^{re}\} = \frac{N_f - 1}{2N_f} \left[\{J^i, J^j\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}J^2 \right], \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} & d^{abc}(\{G^{ib}, G^{jc}\} + \{G^{jb}, G^{ic}\}) - \frac{2}{3}\delta^{ij}d^{abc}\{G^{rb}, G^{rc}\} \\ &= \frac{N_f - 2}{N_f} \left[\{J^i, G^{ja}\} + \{J^j, G^{ia}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^r, G^{ra}\} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Operadores de tres cuerpos

$$\begin{aligned} & \{J^i, \{T^e, G^{je}\}\} + \{J^j, \{T^e, G^{ie}\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^r, \{T^e, G^{re}\}\} \\ &= \frac{2(N_c + N_f)(N_f - 1)}{N_f} \left[\{J^i, J^j\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}J^2 \right], \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\{T^a, \{G^{ie}, G^{je}\}\} - \frac{1}{3}\delta^{ij}\{T^a, \{G^{re}, G^{re}\}\} = \frac{N_f - 1}{2N_f} \left[\{T^a, \{J^i, J^j\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^2, T^a\} \right], \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} & \{G^{ia}, \{T^e, G^{je}\}\} + \{G^{ja}, \{T^e, G^{ie}\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{G^{ra}, \{T^e, G^{re}\}\} \\ &= \frac{(N_c + N_f)(N_f - 1)}{N_f} \left[\{J^i, G^{ja}\} + \{J^j, G^{ia}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^r, G^{ra}\} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} & \{G^{ie}, \{T^a, G^{je}\}\} + \{G^{je}, \{T^a, G^{ie}\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{G^{re}, \{T^a, G^{re}\}\} \\ &= \frac{N_f - 1}{N_f} \left[\{T^a, \{J^i, J^j\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^2, T^a\} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} & d^{abc}(\{J^i, \{T^b, G^{je}\}\} + \{J^j, \{T^b, G^{ie}\}\}) - \frac{2}{3}\delta^{ij}d^{abc}\{J^r, \{T^b, G^{rc}\}\} \\ &= \frac{N_f - 2}{N_f} \left[\{T^a, \{J^i, J^j\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^2, T^a\} \right] \\ &+ \frac{(N_c + N_f)(N_f - 2)}{N_f} \left[\{J^i, G^{ja}\} + \{J^j, G^{ia}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^r, G^{ra}\} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} & d^{bcd}(\{G^{ia}, \{G^{jb}, \{G^{rc}, G^{rd}\}\}\} + \{G^{ja}, \{G^{ib}, \{G^{rc}, G^{rd}\}\}\}) - \frac{2}{3}\delta^{ij}d^{bcd}\{G^{ma}, \{G^{mb}, \{G^{rc}, G^{rd}\}\}\} \\ &= \frac{N_f - 2}{8N_f} \left[5N_c(N_c + 2N_f) + 6N_f^2 + 2N_f - 8 \right] \left[\{J^i, G^{ja}\} + \{J^j, G^{ia}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^r, G^{ra}\} \right] \\ &- \frac{(N_f + 4)(N_f - 2)}{4N_f^2} \left[\{J^2, \{J^i, G^{ja}\}\} + \{J^2, \{J^j, G^{ia}\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^2, \{J^r, G^{ra}\}\} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} & d^{abc}\{\{G^{ib}, G^{je}\}, \{G^{re}, G^{re}\}\} - \frac{1}{3}\delta^{ij}d^{abc}\{\{G^{mb}, G^{mc}\}, \{G^{re}, G^{re}\}\} \\ &= \frac{3N_c(N_c + 2N_f)(N_f - 2)}{8N_f} \left[\{J^i, G^{ja}\} + \{J^j, G^{ia}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^r, G^{ra}\} \right] \\ &- \frac{N_f^2 - 4}{4N_f^2} \left[\{J^2, \{J^i, G^{ja}\}\} + \{J^2, \{J^j, G^{ia}\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^2, \{J^r, G^{ra}\}\} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned}
& d^{abc} \{ \{ J^i, J^j \}, \{ T^b, T^c \} \} - \frac{1}{3} \delta^{ij} d^{abc} \{ \{ J^r, J^r \}, \{ T^b, T^c \} \} \\
& = 2 \left[\{ \{ J^i, J^j \}, \{ J^r, G^{ra} \} \} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{ J^2, \{ J^r, G^{ra} \} \} \right] \\
& + \frac{(N_c + N_f)(N_f - 4)}{N_f} \left[\{ T^a, \{ J^i, J^j \} \} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{ J^2, T^a \} \right], \tag{A.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& d^{abc} \{ \{ J^i, J^j \}, \{ G^{rb}, G^{rc} \} \} - \frac{2}{3} \delta^{ij} d^{abc} \{ J^2, \{ G^{rb}, G^{rc} \} \} \\
& = -\frac{N_f + 4}{2N_f} \left[\{ \{ J^i, J^j \}, \{ J^r, G^{ra} \} \} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{ J^2, \{ J^r, G^{ra} \} \} \right] \\
& + \frac{3}{4} (N_c + N_f) \left[\{ T^a, \{ J^i, J^j \} \} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{ J^2, T^a \} \right], \tag{A.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{ \{ J^i, G^{ja} \}, \{ G^{re}, G^{re} \} \} + \{ \{ J^j, G^{ia} \}, \{ G^{re}, G^{re} \} \} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{ \{ J^m, G^{ma} \}, \{ G^{re}, G^{re} \} \} \\
& = \frac{3}{4} N_c (N_c + 2N_f) \left[\{ J^i, G^{ja} \} + \{ J^j, G^{ia} \} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{ J^r, G^{ra} \} \right] \\
& - \frac{N_f + 2}{2N_f} \left[\{ J^2, \{ J^i, G^{ja} \} \} + \{ J^2, \{ J^j, G^{ia} \} \} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{ J^2, \{ J^r, G^{ra} \} \} \right], \tag{A.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{ \{ J^r, G^{ra} \}, \{ G^{ie}, G^{je} \} \} - \frac{1}{3} \delta^{ij} \{ \{ J^r, G^{ra} \}, \{ G^{me}, G^{me} \} \} \\
& = \frac{N_f - 1}{2N_f} \left[\{ \{ J^i, J^j \}, \{ J^r, G^{ra} \} \} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{ J^2, \{ J^r, G^{ra} \} \} \right], \tag{A.13}
\end{aligned}$$

Operadores de cinco cuerpos

$$\begin{aligned}
& d^{abc} \{ \{ J^i, J^j \}, \{ J^r, \{ T^b, G^{rc} \} \} \} - \frac{2}{3} \delta^{ij} d^{abc} \{ J^2, \{ J^r, \{ T^b, G^{rc} \} \} \} \\
&= \frac{N_f - 2}{N_f} \left[\{ J^2, \{ T^a, \{ J^i, J^j \} \} \} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{ J^2, \{ J^2, T^a \} \} \right] \\
&+ \frac{(N_c + N_f)(N_f - 2)}{N_f} \left[\{ \{ J^i, J^j \}, \{ J^r, G^{ra} \} \} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{ J^2, \{ J^r, G^{ra} \} \} \right], \tag{A.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{ T^a, \{ \{ G^{ic}, G^{jc} \}, \{ G^{re}, G^{re} \} \} \} - \frac{1}{3} \delta^{ij} \{ T^a, \{ \{ G^{mc}, G^{mc} \}, \{ G^{re}, G^{re} \} \} \} \\
&= -\frac{1}{4} \frac{(N_f + 2)(N_f - 1)}{N_f^2} \left[\{ J^2, \{ T^a, \{ J^i, J^j \} \} \} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{ J^2, \{ J^2, T^a \} \} \right] \\
&+ \frac{3}{8} \frac{N_c(N_c + 2N_f)(N_f - 1)}{N_f} \left[\{ T^a, \{ J^i, J^j \} \} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{ J^2, T^a \} \right]. \tag{A.15}
\end{aligned}$$

Apéndice B

Identidades del álgebra de Lie de $SU(N)$

En este apéndice, se enlistarán algunas relaciones entre constantes de estructura del álgebra de Lie de $SU(N)$ que se han utilizado frecuentemente en la realización de la tesis, lo cual no significa, que sea exhaustiva

$$F^{a_1 a_2 b_1 b_2} + F^{b_1 a_1 a_2 b_2} + F^{a_2 b_1 a_1 b_2} = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$F^{a_1 a_2 b_1 b_2} = \frac{2}{N}(\delta^{a_1 b_1} \delta^{a_2 b_2} - \delta^{a_1 b_2} \delta^{a_2 b_1}) + D^{a_1 b_1 a_2 b_2} - D^{a_1 b_2 a_2 b_1}, \quad (\text{B.2})$$

$$F^{a_1 e_1 a_2 e_1} = N \delta^{a_1 a_2}, \quad (\text{B.3})$$

$$F^{a_1 a_2 e_1 e_2} F^{b_1 e_1 b_2 e_2} = \frac{N}{2} F^{a_1 a_2 b_1 b_2}, \quad (\text{B.4})$$

$$D^{a_1 a_2 e_1 e_2} F^{b_1 e_1 b_2 e_2} = \frac{N}{2} D^{a_1 a_2 b_1 b_2}, \quad (\text{B.5})$$

APÉNDICE B. IDENTIDADES DEL ÁLGEBRA DE LIE DE $SU(N)$

$$\begin{aligned}
 D^{a_1 e_1 a_2 e_2} F^{b_1 e_1 b_2 e_2} &= \delta^{a_1 a_2} \delta^{b_1 b_2} - \frac{1}{2} \delta^{a_1 b_1} \delta^{a_2 b_2} - \frac{1}{2} \delta^{a_1 b_2} \delta^{a_2 b_1} + \frac{N}{4} D^{a_1 a_2 b_1 b_2} + \frac{N^2 - 8}{4N} F^{a_1 b_1 a_2 b_2} \\
 &\quad - \frac{N}{4} F^{a_1 b_2 a_2 b_1}, \tag{B.6}
 \end{aligned}$$

$$F^{a_1 e_1 a_2 e_2} F^{b_1 e_1 b_2 e_2} = \delta^{a_1 a_2} \delta^{b_1 b_2} + \frac{1}{2} \delta^{a_1 b_1} \delta^{a_2 b_2} + \frac{1}{2} \delta^{a_1 b_2} \delta^{a_2 b_1} + \frac{N}{4} (D^{a_1 a_2 b_1 b_2} + F^{a_1 a_2 b_1 b_2}), \tag{B.7}$$

$$F^{a_1 e_1 a_2 e_2} F^{e_1 e_3 e_2 e_4} F^{b_1 e_3 b_2 e_4} = N \delta^{a_1 a_2} \delta^{b_1 b_2} + \frac{N^2}{8} (D^{a_1 a_2 b_1 b_2} + F^{a_1 a_2 b_1 b_2}) + \frac{1}{2} (F^{a_1 b_1 a_2 b_2} + F^{a_1 b_2 a_2 b_1}), \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
 F^{a_1 e_1 b_1 e_2} F^{a_2 e_3 b_2 e_4} F^{e_3 e_5 e_4 e_6} F^{e_1 e_5 e_2 e_6} &= \frac{N^2 + 6}{8} \delta^{a_1 a_2} \delta^{b_1 b_2} + \frac{7N^2 + 4}{8} \delta^{a_1 b_1} \delta^{a_2 b_2} + \frac{3}{4} \delta^{a_1 b_2} \delta^{a_2 b_1} \\
 &\quad + \frac{N(N^2 + 2)}{16} (F^{a_1 a_2 b_1 b_2} + D^{a_1 a_2 b_1 b_2}) \\
 &\quad + \frac{N}{8} (D^{a_1 b_2 a_2 b_1} - F^{a_1 b_2 a_2 b_1}) \tag{B.9}
 \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] J. W. Rohlf, *Modern Physics from α to Z^0* , primera edición, Wiley, New York, 1994. 1, 3, 6, 15
- [2] R. M. Eisberg, *Fundamentos de Física Moderna*, primera edición, Limusa, México, 2000. 1, 3, 6, 15
- [3] J. I. Pfeffer, S. Nir, *Modern Physics: An introductory text*, primera edición, Imperial College Press, London 2000. 1, 3, 6
- [4] B. Povh, K. Rith, C. Scholz y F. Zetsche, *Particles and Nuclei. An introduction to the Physical Concepts*, tercera edición, Springer, Berlin 2002. 1, 3, 7, 8, 12, 15, 16, 22, 23, 24, 25
- [5] W. Greiner, S. Schramm y E. Stein, *Quantum Chromodynamics*, segunda edición, Springer, Berlin, 2002. 2, 3, 13, 15, 23, 25, 28
- [6] F. J. Ynduráin, *Quantum Chromodynamics: An Introduction to the Theory of Quarks and Gluons*, primera edición, Springer-Verlag, Heidelberg, 1983. 2, 3, 13, 15, 23, 25, 28
- [7] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*, primera edición, World Scientific, Singapore, 1998. 2, 3, 13, 15, 23, 25, 28

- [8] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics: An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theory*, tercera edición, World Scientific, Singapore, 2009. 2, 3, 13, 15, 23, 25, 28
- [9] Y. V. Kovchegov y E. Levin, *Quantum Chromodynamics at High Energy*, primera edición, Cambridge University Press, Cambridge, 2012. 2, 3, 13, 15, 23, 25, 28
- [10] B. L. Iofe, V. S. Fadin y L. N. Lipatov, *Quantum Chromodynamics: Perturbative and Nonperturbative Aspects*, primera edición, Cambridge University Press, New York, 2010. 2, 3, 13, 15, 23, 25, 27, 28
- [11] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, segunda edición, Cambridge University Press, Cambridge, 1996. 2, 3, 13, 15, 22, 23, 25, 27, 28, 31, 34
- [12] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*, primera edición, Cambridge University Press, London 2013. 2, 3, 13, 15, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 30, 31
- [13] Ta-Pei Cheng y Ling-Fong Li, *Gauge theory of elementary particles physics*, primera edición, Oxford, London, 2004. 2, 3, 13, 15, 16, 17, 18, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 34, 35, 36, 38
- [14] F. E. Close, *An introduction to quarks and partons*, primera edición, Academic Press, London, 1979. 2, 3, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 24, 28
- [15] Ulrich R. Schröder, *Special Relativity*, primera edición, World Scientific, New York, 1990. 2, 3, 22, 23, 26, 30
- [16] S. T. Thornton y J. B. Marion, *Classical dynamics of particles and systems*, quinta edición, Thomson Brooks-Cole, New York, 1994. 2, 3, 7

- [17] Herbert Goldstein, *Classical Mechanics*, segunda edición, Wiley, New York, 1994. 2, 3, 7
- [18] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, tercera edición, Wiley, New York, 1999. 2, 22, 23
- [19] R. K. Wangness, *Campos Electromagnéticos*, primera edición, Noriega Limusa Editores, México, 2001. 2, 22, 23
- [20] M. A. Heald y J. B. Marion, *Classical Electromagnetics Radiation*, tercera edición, Brooks Cole, New York, 1994. 2, 22, 23
- [21] P. Lorrain y D. R. Corson, *Electromagnetism: Principles and applications*, tercera edición, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1978. 2, 22, 23
- [22] J. R. Reif, F. J. Milford y R. W. Christy, *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*, tercera edición, Adisson-Wesley, México, 1979. 2, 22, 23
- [23] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, tercera edición, Prentice-Hall, London, 1996. 2, 22, 23
- [24] L. Eyges, *The Classical Electromagnetics Field*, primera edición, Dover Publications, New York, 1980. 2, 22, 23
- [25] W. H. K. Panofsky y M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, segunda edición, Dover Publications, New York, 1962. 2, 22, 23
- [26] F. Low, *Classical Field Theory; electromagnetism and gravitation*, primera edición, Wiley-VCH Verlag, Germany, 2004. 2, 21, 22, 23, 26

- [27] John M. Blatt y Victor F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, primera edición, Springer-Verlag, New York, 1979. 2, 3
- [28] P. Ha, *Decuplet baryon magnetic moments in a QCD-based quark model beyond quenched approximation*, Phys. Rev. D **58**, 113003 (1998). 2, 50
- [29] P. Ha y L. Durand, *Baryon magnetic moments in a QCD-based quark model with loop corrections*, Phys. Rev. D **58**, 093008 (1998). 2, 50
- [30] J. Franklin, *Phenomenological quark model for baryon magnetic moments and beta decay ratios (G_A/G_V)*, Phys. Rev. D **66**, 033010 (2002). 2, 50
- [31] H. Dahiya y M. Gupta, *Octet and decuplet baryons magnetic moments in the chiral quark model*, Phys. Rev. D **67**, 114015 (2003). 2, 50
- [32] B. Julia-Diaz y D. O. Riska, *Baryon magnetic moments in relativistic quark models*, Nuc. Phys. A **739**, 69 (2004). 2, 50
- [33] K. Berger, R. F. Wagenbrunn y W. Plessas, *Covariant baryon charge radii and magnetic moments a chiral constituent quark model*, Phys. Rev. D **70**, 094027 (2004). 2, 50
- [34] A. Faessler, T. Gutsche, B. R. Holstein, V. E. Lyubovitskij, D. Nicmorus y K. Pumasard, *Light baryon magnetic moments and $N \rightarrow \Delta\gamma$ transition in a Lorentz covariant chiral quark approach*, Phys. Rev. D **74**, 074010 (2006). 2, 50
- [35] J. Linde, T. Ohlsson y H. Snellman, *Decuplet baryon moments in the chiral quark model*, Phys. Rev. D **57**, 5916 (1998). 2, 50

-
- [36] T. M. Aliev, A. Ozpineci y M. Savci, *Octet baryon magnetic moments in light cone QCD sum rules*, Phys. Rev. D **66**, 016002 (2002); Erratum, Phys. Rev. D **67**, 039901 (2003). 2, 50
- [37] S. T. Hong, *Sum rules for baryon decuplet magnetic moments*, Phys. Rev. D **76**, 094029 (2007). 2, 50
- [38] L. Wang y F. X. Lee, *Octet baryon magnetic moments from QCD sum rules*, Phys. Rev. D **78**, 013003 (2008). 2, 50
- [39] E. Jenkins y A. V. Manohar, *Baryon magnetic moments in the $1/N$ expansion*, Phys. Lett. B **335**, 452 (1994). 2, 50, 52
- [40] J. Dai, R. F. Dashen, E. Jenkins y A. V. Manohar, *Flavor symmetry breaking in the $1/N_c$ expansion*, Phys. Rev. D **53**, 273 (1996). 2, 50
- [41] E. Jenkins, X. di Ji y A. V. Manohar, *$\Delta \rightarrow N\gamma$ in Large- N_c QCD*, Phys. Rev. Lett. **89**, 242001 (2002). 2, 3, 50, 51, 53
- [42] R. F. Lebed y D. R. Martin, *Complete analysis of baryon magnetic moments in $1/N_c$* , Phys. Rev. D **70**, 016008 (2004). 2, 50
- [43] E. E. Jenkins, *Baryon magnetic moments in the $1/N_c$ expansion with flavor symmetry breaking*, Phys. Rev. D **85**, 065007 (2012). 2, 50
- [44] D. G. Caldi y H. Pagels, *Chiral perturbation theory and the magnetic moments of the baryon octet*, Phys. Rev. D **10**, 3739 (1974). 2, 50
- [45] J. Gasser, M. E. Sainio y A. Svarc, *Nucleons with chiral loops*, Nucl. Phys. B **307**, 779 (1988). 2, 50
-

-
- [46] A. Krause, *Baryon matrix elements of the vector current in chiral perturbation theory*, *Helv. Phys. Acta* **63**, 3 (1990). 2, 50
- [47] E. Jenkins, M. E. Luke, A. V. Manohar y M. J. Savage, *Chiral perturbation theory analysis of the baryon magnetic moments*, *Phys. Lett. B* **302**, 482 (1993); Erratum, *Phys. Lett. B* **388**, 866 (1996). 2, 50
- [48] M. K. Banerjee y J. Milana, *Decuplet reexamined in chiral perturbation theory*, *Phys. Rev. D* **54**, 5804 (1996). 2, 50
- [49] U. G. Meissner y S. Steininger, *Baryon magnetic moments in chiral perturbation theory*, *Nucl. Phys. B* **499**, 349(1997). 2, 50
- [50] L. Durand y P. Ha, *Chiral perturbation theory analysis of the baryon magnetic moments revisited*, *Phys. Rev. D* **58**, 013010 (1998). 2, 50
- [51] S. J. Puglia y M. J. Ramsey-Musolf, *Baryon octet magnetic moments in ξ PT: More on the importance of the decuplet*, *Phys. Rev. D* **62**, 034010 (2000). 2, 50
- [52] D. Arndt y B. C. Tiburzi, *Baryon decuplet to octet electromagnetic transitions in quenched and partially quenched chiral perturbation theory*, *Phys. Rev. D* **69**, 014501 (2004). 2, 50
- [53] L. S. Geng, J. M. Camalich, L. Alvarez-Ruso y M. J. V. Vacas, *Leading $SU(3)$ -Breaking Corrections to the Baryon Magnetic Moments in Chiral Perturbation Theory*, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 222002 (2008). 2, 50
- [54] L. S. Geng, J. M. Camalich y M. J. V. Vacas, *Electromagnetic structure of the lowest-lying decuplet resonances in covariant chiral perturbation theory*, *Phys. Rev. D* **80**, 034027 (2009). 2, 3, 50, 51
-

-
- [55] R. Flores-Mendieta, *Baryon magnetic moments in large- N_c chiral perturbation theory*, Phys. Rev. D **80**, 094014 (1998). 2, 50
- [56] G. Ahuatzin, R. Flores-Mendieta, M. A. Hernandez-Ruiz y C. P. Hofmann, *Baryon magnetic moments in large- N_c chiral perturbation theory: Effect of the decuplet-octet mass difference and flavor symmetry breaking*, Phys. Rev. D **89**, 034012 (2014). 2, 38, 39, 50
- [57] I. C. Cloet, D. B. Leinweber y A. W. Thomas, *Delta baryon magnetic moments from lattice QCD*, Phys. Lett. B **563**, 157 (2003). 2, 50
- [58] M. Tanabashi et al. (Particle Data Group), *Review of particle physics*, Phys. Rev. D **98**, 030001 (2018). 2, 3, 12, 50, 51, 84
- [59] M. I. Krivoruchenko y M. M. Giannini, *Quadrupole moments of the decuplet baryons*, Phys. Rev. D **43**, 3763 (1991). 2, 51
- [60] N. Sharma y H. Dahiya, *Charge radii and quadrupole moments of the low-lying baryons in the chiral constituent quark model*, Adv. High Energy Phys. **2013**, 756847 (2013). 2, 51
- [61] N. Sharma y H. Dahiya, *Quadrupole moments of the low-lying baryons with spin $1/2^+$, spin $3/2^+$ and spin $3/2^+ \rightarrow 1/2^+$ transitions*, Pramana **80**, 237 (2013); Erratum, Pramana **80**, 1083 (2013). 2, 51, 62
- [62] T. M. Aliev, K. Azizi y M. Savci, *Electric quadrupole and magnetic octupole moments of the light cone QCD sum rules*, Phys. Lett. B **681**, 240 (2009). 2, 51
- [63] K. Azizi, *Magnetic dipole, electric quadrupole and magnetic octupole moments of the Delta baryons in light cone QCD sum rules*, Eur. Phys. J. C **61**, 311 (2009). 2, 51
-

- [64] Y. s. Oh, *Electric quadrupole moments of the decuplet baryons in the Skyrme model*, Mod. Phys. Lett. A **10**, 1027 (1995). 2, 51
- [65] A. J. Buchmann y E. M. Henley, *Intrinsic quadrupole moment of the nucleon*, Phys. Rev. C **63**, 015202 (2000). 2, 51, 52, 54, 63
- [66] A. J. Buchmann y E. M. Henley, *Quadrupole moments of barions*, Phys. Rev. D **65**, 073017 (2002). 2, 51, 81, 82
- [67] A. J. Buchmann, J. A. Hesteeer y R. F. Lebed, *Quadrupole moments of N and Δ in the $1/N_c$ expansion*, Phys. Rev. D **66**, 056002 (2002). 3, 51, 84
- [68] A. J. Buchmann y R. F. Lebed, *Baryon charge radii and quadrupole moments in the $1/N_c$ expansion: The three flavor case*, Phys. Rev. D **67**, 016002 (2003). 3, 51, 62, 82
- [69] M. N. Butler, M. J. Savage y R. P. Springer, *Electromagnetic moments of the baryon decuplet*, Phys. Rev. D **49**, 3459 (1994). 3, 51
- [70] C. Alexandrou, G. Koustou, H. Neff, J. W. Negele, W. Schroers y A. Tsapalis, *Nucleon to delta electromagnetic transition form factors in lattice QCD*, Phys. Rev. D **77**, 085012 (2008). 3, 51
- [71] C. Alexandrou, G. Koustou, J. W. Negele, Y. Prestos y A. Tsapalis, *Nucleon to Delta transition form factors with $N_F = 2 + 1$ domain wall fermions*, Phys. Rev. D **83**, 014501 (2011). 3, 51
- [72] L. D. Landau y E. Lifshitz, *Mecánica*, segunda edición, Reverté, México, 1970. 3, 7
- [73] Fayyazuddin y Riazuddin, *A modern introduction to particle physics*, segunda edición, World Scientific, New York, 2000. 3, 12, 15, 18, 22, 23, 25, 28

- [74] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics. Wave equation*, tercera edición, Springer-Verlag, Berlin, 1994. 3, 10, 26
- [75] María de los Ángeles Hernández-Ruíz, *Tesis de doctorado. Universidad Autónoma de San Luis Potosí*, 2012. 3, 27, 28, 30, 38
- [76] J. D. Bjorken y S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, primera edición, McGraw-Hill, New York, 1998. 3, 10
- [77] A. Wachter *Relativistic Quantum Mechanics*, primera edición, Springer-Verlag, Berlin, 2010. 3, 10
- [78] H. M. Pilkuhn, *Relativistic Quantum Mechanics*, primera edición, Springer-Verlag, Berlin, 2005. 3, 10
- [79] F. J. Ynduráin, *Mecánica Cuántica Relativista*, primera edición, Alianza Editorial, Madrid, 1990. 3, 10
- [80] J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Physics*, primera edición, Thomson Brooks-Cole, New York, 2002. 3, 10
- [81] S. Gasiorowicz, *Elementary particle physics*, primera edición, Wiley, London, 1979. 3, 12, 16, 25
- [82] V. M. Banda-Guzmán, R. Flores-Mendieta, Johann Hernández y Felipe de Jesús Rosales-Aldape, *Spin and flavor projection operators in the $SU(2N_f)$ spin-flavor group*, Phys. Rev. D. **102**, 036010 (2020). 4, 84, 85
- [83] V. M. Banda-Guzmán, R. Flores-Mendieta, Johann Hernández y Felipe de Jesús Rosales-Aldape, *Baryon quadrupole moment in the $1/N_c$ expansion of QCD*, Phys. Rev. D **101**, 074018 (2020). 4, 85

- [84] J. Cseh, *Spontaneous symmetry-breaking in Elliott-type models and the nuclear deformation*, Phys. Lett. B **793**, 59-64 (2019). 4, 85
- [85] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, primera edición, Thomson Brooks-Cole, New York, 1994. 7, 8, 10, 18, 19
- [86] S. Gasiorowicz, *Quantum Physics*, tercera edición, Wiley, New York, 2002. 7, 8, 10, 18, 19
- [87] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*, tercera edición, Butterworth-Heinemann, New York, 1981. 7, 8, 10, 18, 19
- [88] K. Gottfried y T. M. Yan, *Quantum Mechanics: Fundamentals*, segunda edición, Springer-Verlag, 2003. 7, 8, 10, 18, 19
- [89] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloe, *Quantum Mechanics*, primera edición, Wiley, New York, 1978. 7, 8, 10, 18, 19
- [90] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, segunda edición, Pearson Prentice-Hall, New York, 2004. 7, 8, 10, 18, 19
- [91] E. Merzbacher, *Quantum Physics*, primera edición, Wiley, New York, 1997. 7, 8, 10, 18, 19
- [92] A. W. Joshi, *Elements of Group Theory for Physicists*, primera edición, Wiley, New York, 1982. 13, 14
- [93] I. N. Herstein, *Álgebra Moderna*, primera edición, Editorial Trillas, México, 1970. 13, 14

- [94] N. Jeevanjee, *An Introduction to Tensors and Group Theory for Physicists*, primera edición, Birkhäuser, New York, 2010. 13, 14
- [95] S. Sternberg, *Group Theory and Physics*, primera edición, Cambridge University Press, New York, 1994. 13, 14
- [96] W. K. Tung, *Group theory in physics*, tercera edición, Wiley, New York, 2002. 13, 14
- [97] G. B. Arfken, H. J. Weber y F. E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists: A comprehensive guide*, séptima edición, Academic Press, New York, 2013. 13, 14
- [98] M. L. Boas, *Mathematical Methods in the physical sciences*, tercera edición, Wiley, New York, 2005. 13, 14
- [99] R. Sánchez-Ramírez, *Física Nuclear y de Partículas*, primera edición, Universidad de la Laguna, España, 2008. IV, 17, 19, 20
- [100] D. A. McQuarrie, *Statistical Mechanics*, primera edición, Harper & Row Publishers, New York, 1973. 18
- [101] C. Kittel, *Elementary Statistical Physics*, primera edición, Wiley, New York, 1958. 18
- [102] C. Kittel, *Solid State Physics*, tercera edición, Wiley, New York, 1996. 18, 22
- [103] F. Reif, *Física Estadística*, segunda edición, Editorial Reverté, México, 1999. 18
- [104] S. R. A. Salinas, *Introduction to Statistical Physics*, primera edición, Springer-Verlag, New York, 2001. 18

-
- [105] CERN communication team, *CERN*. The Standard Model. <https://home.cern/science/physics/standard-model> IV, 24
- [106] E. Jenkins, *Chiral Lagrangian for baryons in the $1/N_c$ expansion*, Phys. Rev. D **53**, 2325 (1996). 38, 42, 43, 45, 46, 47
- [107] Felipe de Jesús Rosales-Aldape, *Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de San Luis Potosí*, 2017. 39, 47, 48
- [108] R. F. Dashen y A. V. Manohar, *Baryon - pion couplings from large N_c QCD*, Phys. Lett. B **315**, 425 (1993). 40, 41, 42
- [109] J-L. Gervais y B. Sakita, *Large- N QCD Baryon Dynamics—Exact Results from Its Relation to the Static Strong-Coupling Theory*, Phys. Rev. Lett. *52*, 87 (1984); Phys. Rev. D **30**, 1795 (1984). 40, 41
- [110] Mayra Alejandra Rivera-Ruíz, *Tesis de Licenciatura. Universidad Autónoma de San Luis Potosí*, 2015. 43, 45, 46
- [111] R. F. Dashen, E. Jenkins, y A. V. Manohar, *Spin flavor structure of large N_c baryons*, Phys. Rev. D **51**, 3697 (1995). 51, 54, 55, 57, 66, 71
- [112] E. E. Jenkins y R. F. Lebed, *Baryon mass splittings in the $1/N_c$ expansion*, Phys. Rev. D **52**, 282 (1995). 51
- [113] R. Flores-Mendieta, E. E. Jenkins y A. V. Manohar, *$SU(3)$ symmetry breaking in hyperon semileptonic decays*, Phys. Rev. D. **58**, 094028 (1998). 51
- [114] R. Flores-Mendieta, *V_{us} from hyperon semileptonic decays*, Phys. Rev. D **70**, 114036 (2004). 51
-

- [115] A. Bohr y B. R. Mottelson, *Nuclear Structure II*, Benjamin Reading, MA, 1975. 54
- [116] J. M. Eisenberg y W. Greiner, *Nuclear Models*, North-Holland, Amsterdam, 1970.
54
- [117] F. Iachello y A. Arima, *The interacting Boson Model*, Cambridge University Press,
Cambridge, United Kingdom, 1987. 85

Parte II

Artículos publicados

Baryon quadrupole moment in the $1/N_c$ expansion of QCD

Víctor Miguel Banda Guzmán

*Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo,
Edificio C-3, Apdo. Postal 2-82, Morelia, Michoacán, 58040, México*

Rubén Flores-Mendieta[✉], Johann Hernández[✉], and Felipe de Jesús Rosales-Aldape

*Instituto de Física, Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Álvaro Obregón 64,
Zona Centro, San Luis Potosí, S.L.P. 78000, Mexico*



(Received 20 February 2020; accepted 27 March 2020; published 16 April 2020)

The quadrupole moments of ground state baryons are discussed in the framework of the $1/N_c$ expansion of QCD, where N_c is the number of color charges. Theoretical expressions are first provided assuming an exact $SU(3)$ flavor symmetry, and then the effects of symmetry breaking are accounted for to linear order. The rather scarce experimental information available does not allow a detailed comparison between theory and experiment, so the free parameters in the approach are not determined. Instead, some useful new relations among quadrupole moments, valid even in the presence of first-order symmetry breaking, are provided. The overall predictions of the $1/N_c$ expansion are quite enlightening.

DOI: [10.1103/PhysRevD.101.074018](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.074018)

I. INTRODUCTION

Understanding the structure of baryons is still a daunting task in quantum chromodynamics (QCD). The most interesting static properties of baryons, e.g., masses, magnetic moments, matter and charge radii, etc., fall in the nonperturbative regime of QCD so analytic calculations of these properties are not possible because the theory is strongly coupled at low energies, with no small expansion parameter.

The study of the electromagnetic properties of baryons is an active research area of both the theoretical and experimental bent. On the one hand, the analysis of the magnetic moments of baryons presents an opportunity to shed light on an accurate test of QCD, and there are an important number of works on the subject; the approaches include, among others, the quark model (and its variants) [1–7], QCD sum rules [8–11], the $1/N_c$ expansion, where N_c is the number of color charges [12–16], chiral perturbation theory [17–27], the combined expansion in $1/N_c$ and chiral corrections [28,29], and lattice QCD [30], to name but a few. The experimental information available is robust [31], which allows detailed comparisons between theory and experiment.

On the other hand, the information about the higher-order electromagnetic moments (electric quadrupole and magnetic octupole moments) is less profuse. Analyses about the quadrupole moments of baryons have also been performed within the quark model (and its variants) [32–34], light cone QCD sum rules [35,36], the Skyrme model [37], a QCD parametrization method [38,39], the $1/N_c$ expansion [14,40,41], chiral perturbation theory [27,42], and lattice QCD [43,44]. These lattice calculations are confined to the evaluation of the electromagnetic nucleon to Δ transition form factors. In contrast, the experimental data about quadrupole moments are rather scarce. The only experimental values reported are the helicity amplitudes for the process $\Delta^+ \rightarrow p\gamma$ [31], which can be used to extract the value of the ratio between the electric quadrupole ($E2$) and the magnetic moment ($M1$), $E2/M1$.

The present paper is focused on the computation of quadrupole moments of the ground state baryons in the context of the $1/N_c$ expansion, which has proven to be quite effective in the calculation of static properties of baryons. Concrete examples can be found in the predictions for baryon masses [45,46], axial-vector [13,45,47] and vector couplings [47,48]. In all these scenarios, the approach gives a good description of the spin-flavor structure of QCD baryons with $N_c = 3$. For the purpose of the present paper, in Sec. II a survey of the $1/N_c$ expansion is presented to set the notation and conventions. In Sec. III the analysis starts with the construction of the most general spin-2, flavor octet operator which describes the baryon quadrupole moment. Next, the effects of flavor $SU(3)$ symmetry breaking (SB) to linear order are

Published by the American Physical Society under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International license. Further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the published article's title, journal citation, and DOI. Funded by SCOAP³.

accounted for in Sec. IV; the detailed construction of baryon operators which make up the series is described for each flavor representation present in the tensor product of the quadrupole moment and the perturbation to identify redundant operators. Once this task is completed, the full series is provided in Sec. V. The lack of experimental information does not allow us to determine the free parameters of the theory so no attempt to predict any of the quadrupole moments numerically is made. Instead, various relations among them are provided. Some of them are valid in the limit of exact flavor symmetry, and others are valid even in the presence of SB. Some closing remarks are provided in Sec. VI. The paper is complemented by the Appendix, where some useful baryon operator reductions are listed in order to discard redundant operators.

There are two papers that also address the evaluation of quadrupole moments of baryons within the $1/N_c$ expansion [40,41]. In these papers, the minimal assumption of the single photon exchange ansatz is used, which implies that the photon probing these observables couples to only one quark line inside the baryon. This reduces the number of operators involved. This assumption is not used in the present analysis; instead the full operator basis is used here. Although this might be counterproductive due to the larger number of free parameters introduced, in fact, it leads to interesting relations among quadrupole moments which can not be determined otherwise. Another noticeable difference between the approach implemented in Ref. [41] and the one used here concerns the way SB enters into play. In this reference SB is accounted for by modifying the spin-spin terms with ratios between the constituent quark masses. In the present analysis, as it was pointed out above, SB enters perturbatively. More details on the subject are provided in the following sections.

II. A SURVEY OF THE $1/N_c$ EXPANSION OF QCD

The present analysis builds on the seminal work on large- N_c baryons presented in Ref. [45], so only a few prominent facts will be highlighted here.

In the large- N_c limit, the baryon sector exhibits a contracted $SU(2N_f)$ spin-flavor symmetry, where N_f is the number of light quark flavors [49,50]. This baryon representation decomposes under $SU(2) \times SU(N_f)$ into a tower of baryon states with spins $J = 1/2, 3/2, \dots, N_c/2$. The present analysis is done for the special case $N_f = 3$. Therefore, the ground state baryons transform as the completely symmetric product of three $\mathbf{6}$'s of $SU(6)$, which is the $\mathbf{56}$ dimensional representation. Three spin $1/2$'s added together can yield spin $1/2$ or spin $3/2$, so the $\mathbf{56}$ representation contains spin- $1/2$ and spin- $3/2$ baryons.

Corrections to the large- N_c limit are expressed in terms of $1/N_c$ -suppressed operators with well-defined spin-flavor transformation properties [50]; this approach leads to the $1/N_c$ expansion of QCD.

TABLE I. $SU(2N_f)$ commutation relations.

$$\begin{aligned} [J^i, T^a] &= 0, \\ [J^i, J^j] &= i\epsilon^{ijk} J^k, [T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \\ [J^i, G^{ja}] &= i\epsilon^{ijk} G^{ka}, [T^a, G^{ib}] = i f^{abc} G^{ic}, \\ [G^{ia}, G^{jb}] &= \frac{i}{4} \delta^{ij} f^{abc} T^c + \frac{i}{2N_f} \delta^{ab} \epsilon^{ijk} J^k + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} d^{abc} G^{kc}. \end{aligned}$$

Concretely, the $1/N_c$ expansion of a QCD operator at leading order reads [45]

$$\mathcal{O}_{\text{QCD}} = \sum_n c_n \frac{1}{N_c^{n-1}} \mathcal{O}_n, \quad (1)$$

where the sum is over all possible operators \mathcal{O}_n , $n = 0, \dots, N_c$, which are polynomials in the spin-flavor generators of total order n . \mathcal{O}_n are thus referred to as n -body operators. The spin-flavor generators can be written as 1-body quark operators acting on the N_c -quark baryon states, namely,

$$J^k = \sum_\alpha^{N_c} q_\alpha^\dagger \left(\frac{\sigma^k}{2} \otimes \mathbb{1} \right) q_\alpha, \quad (2a)$$

$$T^c = \sum_\alpha^{N_c} q_\alpha^\dagger \left(\mathbb{1} \otimes \frac{\lambda^c}{2} \right) q_\alpha, \quad (2b)$$

$$G^{kc} = \sum_\alpha^{N_c} q_\alpha^\dagger \left(\frac{\sigma^k}{2} \otimes \frac{\lambda^c}{2} \right) q_\alpha, \quad (2c)$$

where J^k are the spin generators, T^c are the flavor generators, and G^{kc} are the spin-flavor generators. The $SU(2N_f)$ spin-flavor generators satisfy the commutation relations listed in Table I [45]. The operator coefficients c_n also have power series expansions in $1/N_c$ beginning at order unity. On the other hand, q_α^\dagger and q_α are operators that create and annihilate states in the fundamental representation of $SU(6)$ and σ^k and λ^c are the Pauli spin and Gell-Mann flavor matrices, respectively. Because the baryon matrix elements of the spin-flavor generators (2) can be taken as the values in the nonrelativistic quark model, this convention is usually referred to as the quark representation [45].

III. THE QUADRUPOLE MOMENT OPERATOR IN THE LIMIT OF EXACT $SU(3)$ FLAVOR SYMMETRY

The electromagnetic current operator can be expanded in a power series of the photon momentum k_γ (the multipole expansion); the series can be expressed as [14]

$$(\mathcal{J}_{\text{em}})^{ia} \propto \mu^{ia} + \mathcal{Q}^{(ij)a} k_\gamma^j + \dots, \quad (3)$$

where μ^{ia} is the magnetic moment operator [12] and $Q^{(ij)a}$ is the quadrupole moment operator. $Q^{(ij)a}$ is a spin-2 object and a flavor octet, so it transforms as $(2, \mathbf{8})$ under $SU(2) \times SU(3)$. $Q^{(ij)a}$ is a symmetric, traceless tensor in the spin indices i and j . The electromagnetic current is T-odd, so that $Q^{(ij)a}$ is T-even.

The physical interpretation of the operators in the multipole expansion (3) can readily be seen through their matrix elements between $SU(6)$ symmetric baryon states. For example, the magnetic moment for a spin-1/2 baryon B_p , for a spin-3/2 baryon B'_q , or for transitions $B_p \rightarrow B_q$ and $B'_p \rightarrow B'_q$, can be generically denoted by

$$\mu_B = \langle B | \mu^{3Q} | B \rangle, \quad (4)$$

where the spin and flavor indices, i and a , have been set to 3 and $Q \equiv 3 + (1/\sqrt{3})8$, respectively. Hereafter, any operator of the form X^Q should be understood as $X^3 + (1/\sqrt{3})X^8$, where X^3 and X^8 denote the isovector and isoscalar components of the operator X^a , respectively.

Similarly, the zero component of the rank-2 tensor (in spin space) $Q^{(ij)a}$, or equivalently, the $\ell = 2$, $m_\ell = 0$ component for $i = j = 3$ and $a = Q$, is usually referred to as the *spectroscopic* quadrupole moment [38] for baryon B'_q , which reads

$$Q_{B'_q} = \langle B'_q | Q^{(33)Q} | B'_q \rangle. \quad (5)$$

Angular momentum selection rules forbid a spin-1/2 baryon from having a spectroscopic quadrupole moment. Similar definitions can also be given for transitions $B'_p \rightarrow B'_q$. For instance, for the radiative decay $\Delta^+ \rightarrow p\gamma$, the only multipoles that contribute are the magnetic moment ($M1$) and electric quadrupole ($E2$), which are defined as [14]

$$M1 = ek_\gamma^{1/2} \langle p | \mu^{3Q} | \Delta^+ \rangle, \quad (6)$$

and

$$E2 = \frac{1}{12} ek_\gamma^{3/2} \langle p | Q^{(33)Q} | \Delta^+ \rangle. \quad (7)$$

On the other hand, to extract information about the shape of a spatially extended particle, its *intrinsic* quadrupole moment Q_0 , given by

$$Q_0 = \int d^3r \rho(r) (3z^2 - r^2), \quad (8)$$

is generally used. Q_0 is defined with respect to the body-fixed frame. For a charge density concentrated along the z -direction, Q_0 is positive and the particle is prolate. For a charge density concentrated in the equatorial plane

perpendicular to z , Q_0 is negative and the particle is oblate [38].

The intrinsic quadrupole moment must be distinguished from the spectroscopic one measured in the laboratory frame. Although a spin-1/2 baryon does not have a spectroscopic quadrupole moment, it may have an intrinsic one. Indeed, within various models, the proton and Δ^+ are found to possess a prolate and an oblate deformation, respectively [38].

The present analysis is focused on the calculation of the spectroscopic quadrupole moment of baryons; it will be loosely referred to as the quadrupole moment hereafter. For this task, the quadrupole moment operator $Q^{(ij)a}$ is constructed in the framework of the $1/N_c$ expansion, which requires to seek all the operator structures that transform as $(2, \mathbf{8})$ under $SU(2) \times SU(3)$, written as polynomials in the spin-flavor generators J^i , T^a , and G^{ia} [45]. Symmetry requirements are used in order to eliminate those structures which are not either T-even or symmetric or traceless in the spin indices. In this regard, operator structures should contain an even number of either J , G or a combination of them, or an odd number of J , G or a combination of them, along with a factor of if^{abc} or ie^{ijk} to yield Hermitian operators. Of course, spin and flavor indices must be properly saturated to have $(2, \mathbf{8})$ resultant operators. The 1-body operator $ie^{ijk}G^{ka}$, for instance, is T-even and traceless but antisymmetric in i and j , so it is discarded.

In the limit of exact $SU(3)$ flavor symmetry, the $1/N_c$ expansion of $Q^{(ij)a}$ actually starts with the 2-body operator,

$$O_2^{(ij)a} = \{J^i, G^{ja}\} + \{J^j, G^{ia}\} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{J^r, G^{ra}\}. \quad (9)$$

At 3-body operator level, several possibilities emerge, for instance,

$$\begin{aligned} & \{T^a, \{J^i, J^j\}\}, \quad \{T^a, \{G^{ie}, G^{je}\}\}, \quad \{G^{ia}, \{T^e, G^{je}\}\}, \\ & \{G^{ie}, \{T^a, G^{je}\}\}, \quad d^{abc} \{J^i, \{T^b, G^{jc}\}\}. \end{aligned} \quad (10)$$

The use of operator identities [45] restricts the number of linearly independent operators. In the Appendix some useful operator reductions are listed. Accordingly, a convenient 3-body operator to include in the series is

$$O_3^{(ij)a} = \{T^a, \{J^i, J^j\}\} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{J^2, T^a\}, \quad (11)$$

and all additional 3-body operators are redundant and can be ignored.

On the other hand, 4-body operators can be constructed as products of four G 's, two J 's and two T 's, two J 's and two G 's, three G 's and one J , and three J 's and one G , with the spin and flavor indices properly saturated. Among these structures, a convenient 4-body operator is

$$O_4^{(ij)a} = \{\{J^i, J^j\}, \{J^r, G^{ra}\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^2, \{J^r, G^{ra}\}\}, \quad (12)$$

whereas the others, according to the operator reductions listed in the Appendix, can be expressed in terms of either (12) and the lower-order operators (9) and (11), or in terms of (9) itself and its anticommutator with J^2 . Hence, there is a second 4-body operator obtained as

$$\tilde{O}_4^{(ij)a} = \{J^2, O_2^{(ij)a}\}. \quad (13)$$

Now, 5-body operators can be constructed out of the tensor products of the 4-body operators listed above and T^a , with the proper contraction of spin and flavor indices. Following the operator reductions of the Appendix, it can be concluded that there is a single 5-body operator given by

$$O_5^{(ij)a} = \{J^2, O_3^{(ij)a}\}. \quad (14)$$

Therefore, without loss of generality, starting from $O_m^{(ij)a}$ ($m = 2, 3, 4$), higher-order operators can be obtained as anticommutators of these operators with J^2 , i.e., $O_{m+2}^{(ij)a} = \{J^2, O_m^{(ij)a}\}$, for $m \geq 3$. There are additional higher-order operators computed as $\tilde{O}_{n+2}^{(ij)a} = \{J^2, \tilde{O}_n^{(ij)a}\}$, for n even, $n \geq 4$.

Thus, in the limit of exact $SU(3)$ flavor symmetry, the $1/N_c$ expansion of $Q^{(ij)a}$ is written as

$$Q^{(ij)a} = \sum_{m=2,3}^{N_c} \frac{1}{N_c^{m-1}} k_m O_m^{(ij)a} + \sum_{n=4,6}^{N_c-1} \frac{1}{N_c^{n-1}} \tilde{k}_n \tilde{O}_n^{(ij)a}, \quad (15)$$

where k_m, \tilde{k}_n are unknown parameters which also have a $1/N_c$ expansion beginning at order unity; these parameters are multiplied by a characteristic hadronic quadrupole size (in fm^2). The vanishing trace condition can be easily verified as

$$\delta^{ij} Q^{(ij)a} = Q^{(ii)a} = 0. \quad (16)$$

Expansion (15) can be truncated for arbitrary flavor a after the first three operators $O_2^{(ij)a}$, $O_3^{(ij)a}$, and $O_4^{(ij)a}$ up to a relative correction of order $1/N_c^2$. For $N_c = 3$, only the two operators $O_2^{(ij)a}$ and $O_3^{(ij)a}$ are kept. Truncation beyond $O_3^{(ij)a}$ is justified for arbitrary N_c up to a relative correction of order $1/N_c^2$ only when the physical baryons are under consideration. Thus, for $N_c = 3$, the series reads

$$Q^{(ij)a} = \frac{k_2}{N_c} \left[\{J^i, G^{ja}\} + \{J^j, G^{ia}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^r, G^{ra}\} \right] + \frac{k_3}{N_c^2} \left[\{T^a, \{J^i, J^j\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^2, T^a\} \right], \quad (17)$$

up to corrections of order $1/N_c^3$.

The quadrupole moments of baryons in the limit of exact $SU(3)$ flavor symmetry, $Q_B^{SU(3)}$, can be obtained from the matrix elements of the baryon operators that make up $Q^{(ij)a}$, Eq. (17). These matrix elements for $N_c = 3$ are listed in Tables II–IV, for octet baryons, decuplet baryons, and decuplet-octet transitions. Although these matrix elements are provided for the special case $N_c = 3$, its overall dependence on N_c can be better seen from the matrix elements of the 1-body operators T^a and G^{ia} , $a = 3$ and $a = 8$, which occur quite often in the analysis. They can be rewritten in terms of the quark number and spin operators [45],

$$T^8 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(N_c - 3N_s), \quad (18a)$$

$$G^{i8} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(J^i - 3J_s^i), \quad (18b)$$

$$T^3 = \frac{1}{2}(N_u - N_d), \quad (18c)$$

TABLE II. Matrix elements of baryon operators corresponding to quadrupole moments of octet baryons for $N_c = 3$: $SU(3)$ case.

	n	p	Σ^-	Σ^0	Σ^+	Ξ^-	Ξ^0	Λ
$\langle \{J^3, G^{33}\} \rangle$	$-\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	0
$\langle \delta^{33}\{J^r, G^{r3}\} \rangle$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	-1	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0
$\langle \{T^3, \{J^3, J^3\}\} \rangle$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\langle \delta^{33}\{J^2, T^3\} \rangle$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0
$\langle \{J^3, G^{38}\} \rangle$	$\frac{1}{4\sqrt{3}}$	$\frac{1}{4\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
$\langle \delta^{33}\{J^r, G^{r8}\} \rangle$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\langle \{T^8, \{J^3, J^3\}\} \rangle$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\langle \delta^{33}\{J^2, T^8\} \rangle$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0	0	0	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0

TABLE III. Matrix elements of baryon operators corresponding to quadrupole moments of decuplet baryons for $N_c = 3$: $SU(3)$ case.

	Δ^{++}	Δ^+	Δ^0	Δ^-	Σ^{*+}	Σ^{*0}	Σ^{*-}	Ξ^{*-}	Ξ^{*0}	Ω^-
$\langle \{J^3, G^{33}\} \rangle$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0
$\langle \delta^{33} \{J^r, G^{r3}\} \rangle$	$\frac{15}{4}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{15}{4}$	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	0
$\langle \{T^3, \{J^3, J^3\}\} \rangle$	$\frac{27}{2}$	$\frac{9}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{27}{2}$	9	0	-9	$-\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	0
$\langle \delta^{33} \{J^2, T^3\} \rangle$	$\frac{45}{4}$	$\frac{15}{4}$	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{45}{4}$	$\frac{15}{2}$	0	$-\frac{15}{2}$	$-\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	0
$\langle \{J^3, G^{38}\} \rangle$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0	0	0	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$
$\langle \delta^{33} \{J^r, G^{r8}\} \rangle$	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	0	0	0	$-\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{5\sqrt{3}}{2}$
$\langle \{T^8, \{J^3, J^3\}\} \rangle$	$\frac{9\sqrt{3}}{2}$	$\frac{9\sqrt{3}}{2}$	$\frac{9\sqrt{3}}{2}$	$\frac{9\sqrt{3}}{2}$	0	0	0	$-\frac{9\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{9\sqrt{3}}{2}$	$-9\sqrt{3}$
$\langle \delta^{33} \{J^2, T^8\} \rangle$	$\frac{15\sqrt{3}}{4}$	$\frac{15\sqrt{3}}{4}$	$\frac{15\sqrt{3}}{4}$	$\frac{15\sqrt{3}}{4}$	0	0	0	$-\frac{15\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{15\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{15\sqrt{3}}{2}$

$$G^{i3} = \frac{1}{2}(J_u^i - J_d^i), \quad (18d)$$

where $N_c = N_u + N_d + N_s$ and $J^i = J_u^i + J_d^i + J_s^i$.

The leading N_c counting of the matrix elements of operators (18) is deduced as follows: T^8 , G^{33} , and $\{J^i, G^{i3}\}$ are order $\mathcal{O}(N_c)$; J^3 , T^3 , G^{38} , and $\{J^i, G^{i8}\}$ are order $\mathcal{O}(N_c)$. By using these counting rules and recalling that the operator coefficients k_i are order unity, the isovector leading term in the series (17) is order $\mathcal{O}(N_c^0)$ and the subleading one is order $\mathcal{O}(N_c^{-2})$. The isoscalar leading and subleading terms, on the contrary, are both order $\mathcal{O}(N_c^{-1})$. Higher-order operators $O_n^{(ij)a}$ are suppressed by a relative factor of $1/N_c^2$ with respect to $O_{n-2}^{(ij)a}$.

With all the partial results properly gathered, the explicit computation of quadrupole moments can be carried out. An immediate result is that, for any octet baryon B_p ,

$$Q_{B_p}^{SU(3)} = 0, \quad (19)$$

which is the sum of two null quantities (isovector and isoscalar quadrupole moments) and not the cancellation of two equal in magnitude but opposite in sign quantities. This is a completely expected (and consistent) result.

For decuplet baryons the quadrupole moments read

$$Q_{B'_q}^{SU(3)} = \frac{4}{9} q_{B'_q} (k_2 + k_3), \quad (20)$$

which are valid up to a correction of order $1/N_c^3$. Here $q_{B'_q}$ is the electric charge of decuplet baryon B'_q given by

$$q_{B'_q} \equiv \langle B'_q | T^Q | B'_q \rangle. \quad (21)$$

A few comments are in order here. Equation (20) has been purposely written in a way to exhibit that the effects of higher-body operators can readily be accounted for without altering the basic structure of the equation itself. Thus one would be prompted to express Eq. (20) in terms of a single parameter, let us say k , so that

$$Q_{B'_q}^{SU(3)} = \frac{4}{9} q_{B'_q} k, \quad (22)$$

which would be valid to *all orders* in the $1/N_c$ expansion. This approach, however, is not entirely correct. The reasons can be better seen when computing the transition quadrupole moments, $Q_{B'_q B_p}^{SU(3)}$. In this case,

$$Q_{\Delta^+ p}^{SU(3)} = \frac{2\sqrt{2}}{9} k_2, \quad (23a)$$

TABLE IV. Matrix elements of baryon operators corresponding to transition quadrupole moments for $N_c = 3$: $SU(3)$ case.

	$\Delta^+ p$	$\Delta^0 n$	$\Sigma^{*0} \Lambda$	$\Sigma^{*0} \Sigma^0$	$\Sigma^{*+} \Sigma^+$	$\Sigma^{*-} \Sigma^-$	$\Xi^{*0} \Xi^0$	$\Xi^{*-} \Xi^-$
$\langle \{J^3, G^{33}\} \rangle$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{2}}$
$\langle \delta^{33} \{J^r, G^{r3}\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \{T^3, \{J^3, J^3\}\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} \{J^2, T^3\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \{J^3, G^{38}\} \rangle$	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
$\langle \delta^{33} \{J^r, G^{r8}\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \{T^8, \{J^3, J^3\}\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} \{J^2, T^8\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0

$$Q_{\Delta^0 n}^{SU(3)} = \frac{2\sqrt{2}}{9} k_2, \quad (23b)$$

$$Q_{\Sigma^* 0 \Lambda}^{SU(3)} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} k_2, \quad (23c)$$

$$Q_{\Sigma^* 0 \Sigma^0}^{SU(3)} = \frac{\sqrt{2}}{9} k_2, \quad (23d)$$

$$Q_{\Sigma^* + \Sigma^+}^{SU(3)} = \frac{2\sqrt{2}}{9} k_2, \quad (23e)$$

$$Q_{\Sigma^* - \Sigma^-}^{SU(3)} = 0, \quad (23f)$$

$$Q_{\Xi^* 0 \Xi^0}^{SU(3)} = \frac{2\sqrt{2}}{9} k_2, \quad (23g)$$

and

$$Q_{\Xi^* - \Xi^-}^{SU(3)} = 0, \quad (23h)$$

which are valid up to a correction of order $1/N_c^2$. Due to the fact that the operator coefficients k_i participate differently in $Q_{B'_q}^{SU(3)}$ and $Q_{B'_q B_p}^{SU(3)}$, there is not a unique way of recombining these operator coefficients to reduce the number of free parameters. Therefore, retaining up to 3-body operators in the $1/N_c$ expansion of quadrupole moments implies the existence of two free independent parameters, k_2 and k_3 .

In the $SU(3)$ limit, two relations become evident, namely.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Q_{\Delta^{++}}^{SU(3)} &= Q_{\Delta^+}^{SU(3)} = -Q_{\Delta^-}^{SU(3)} = Q_{\Sigma^{*+}}^{SU(3)} \\ &= -Q_{\Sigma^{*-}}^{SU(3)} = -Q_{\Xi^{*-}}^{SU(3)}, \end{aligned} \quad (24)$$

and

$$\begin{aligned} Q_{\Delta^+ p}^{SU(3)} &= Q_{\Delta^0 n}^{SU(3)} = Q_{\Sigma^* + \Sigma^+}^{SU(3)} = Q_{\Xi^* 0 \Xi^0}^{SU(3)} \\ &= 2Q_{\Sigma^* 0 \Sigma^0}^{SU(3)} = \frac{2}{\sqrt{3}} Q_{\Sigma^* 0 \Lambda}^{SU(3)}. \end{aligned} \quad (25)$$

The last relations have also been noticed within the chiral constituent quark model analysis of Ref. [34]. As a side remark, notice that $Q_{\Sigma^* - \Sigma^-}^{SU(3)} = Q_{\Xi^* - \Xi^-}^{SU(3)} = 0$, which is a well-known result derived in the quark model [34]. These transitions are forbidden by U -spin conservation if flavor symmetry is exact.

Now, it is straightforward to test the combinations sensitive to $I = 3$ and $I = 2$ operators [41]. For the former case,

$$Q_{\Delta^{++}}^{SU(3)} - 3Q_{\Delta^+}^{SU(3)} + 3Q_{\Delta^0}^{SU(3)} - Q_{\Delta^-}^{SU(3)} = 0, \quad (26a)$$

and for the latter case,

$$Q_{\Delta^{++}}^{SU(3)} - Q_{\Delta^+}^{SU(3)} - Q_{\Delta^0}^{SU(3)} + Q_{\Delta^-}^{SU(3)} = 0, \quad (26b)$$

$$Q_{\Sigma^{*+}}^{SU(3)} - 2Q_{\Sigma^* 0}^{SU(3)} + Q_{\Sigma^{*-}}^{SU(3)} = 0, \quad (26c)$$

$$Q_{\Delta^+ p}^{SU(3)} - Q_{\Delta^0 n}^{SU(3)} = 0, \quad (26d)$$

$$Q_{\Sigma^* + \Sigma^+}^{SU(3)} - 2Q_{\Sigma^* 0 \Sigma^0}^{SU(3)} + Q_{\Sigma^* - \Sigma^-}^{SU(3)} = 0. \quad (26e)$$

Additional expressions valid in the limit of exact $SU(3)$ symmetry can be extracted from Ref. [39]. Apart from the isospin relations (26c), (26d), and (26e), a and a vanishing $Q_{\Delta^0}^{SU(3)}$, the expressions are given by

$$Q_{\Delta^-}^{SU(3)} + Q_{\Delta^+}^{SU(3)} = 0, \quad (27a)$$

$$2Q_{\Delta^-}^{SU(3)} + Q_{\Delta^{++}}^{SU(3)} = 0, \quad (27b)$$

$$3(Q_{\Xi^{*-}}^{SU(3)} - Q_{\Sigma^{*-}}^{SU(3)}) - (Q_{\Omega^-}^{SU(3)} - Q_{\Delta^-}^{SU(3)}) = 0, \quad (27c)$$

$$Q_{\Delta^-}^{SU(3)} - Q_{\Sigma^{*-}}^{SU(3)} - \sqrt{2}Q_{\Sigma^* - \Sigma^-}^{SU(3)} = 0, \quad (27d)$$

$$Q_{\Delta^+}^{SU(3)} - Q_{\Sigma^{*+}}^{SU(3)} + \sqrt{2}Q_{\Delta^+ p}^{SU(3)} - \sqrt{2}Q_{\Sigma^* + \Sigma^+}^{SU(3)} = 0, \quad (27e)$$

$$Q_{\Sigma^* 0}^{SU(3)} - \frac{1}{\sqrt{2}} Q_{\Sigma^* 0 \Sigma^0}^{SU(3)} + \frac{1}{\sqrt{6}} Q_{\Sigma^* 0 \Lambda}^{SU(3)} = 0, \quad (27f)$$

$$Q_{\Sigma^{*-}}^{SU(3)} - Q_{\Xi^{*-}}^{SU(3)} - \frac{1}{\sqrt{2}} Q_{\Xi^{*-} \Xi^-}^{SU(3)} - \frac{1}{\sqrt{2}} Q_{\Sigma^* - \Sigma^-}^{SU(3)} = 0, \quad (27g)$$

$$Q_{\Xi^* 0}^{SU(3)} + \frac{1}{\sqrt{2}} Q_{\Xi^* 0 \Xi^0}^{SU(3)} - \sqrt{\frac{2}{3}} Q_{\Sigma^* 0 \Lambda}^{SU(3)} = 0, \quad (27h)$$

which are also verified with the expressions obtained within the formalism presented here. Relations (27a) and (27b) are easily explained as a consequence of $Q_{B'_q}$ being proportional to the electric charge of baryon B'_q .

IV. $Q^{(ij)a}$ WITH FIRST-ORDER $SU(3)$ SYMMETRY BREAKING

In the Standard Model, flavor $SU(3)$ symmetry breaking is given by the current quark mass term in the QCD

Lagrangian with $m_u, m_d \ll m_s$ and transforms as a flavor octet.

The correction to $Q^{(ij)a}$ is obtained to linear order in SB from the tensor product of the quadrupole moment and the perturbation, which transform under $SU(2) \times SU(3)$ as $(2, \mathbf{8})$ and $(0, \mathbf{8})$, respectively. The representations contained in this tensor product are $(2, \mathbf{1})$, $(2, \mathbf{8})$, $(2, \mathbf{8})$, $(2, \mathbf{10} + \overline{\mathbf{10}})$, and $(2, \mathbf{27})$. The task of finding $1/N_c$ operator expansions for these representations is dealt with in the following subsections.

A. (2,1)

There is only a 0-body operator transforming as $(2, \mathbf{1})$ under $SU(2) \times SU(3)$,

$$O_0^{ij} = \delta^{ij} \mathbb{1}, \quad (28)$$

and a single 1-body operator,

$$O_1^{ij} = i\epsilon^{ijk} J^k, \quad (29)$$

none of which contributes to $Q^{(ij)a}$ by virtue of the symmetry or trace conditions discussed above. Thus, the only nontrivial operator found is the 2-body operator,

$$O_2^{ij} = \{J^i, J^j\} - \frac{2}{3} \delta^{ij} J^2, \quad (30)$$

because even the 3-body operator,

$$\{J^i, \{T^e, G^{je}\}\}, \quad (31)$$

is also redundant, according to Eq. (A3) of the Appendix.

Therefore, the SB contribution to $Q^{(ij)a}$ from the $(2, \mathbf{1})$ representation reads¹

$$O_{2,1}^{(ij)a} = \delta^{a8} \{J^i, J^j\} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \delta^{a8} J^2, \quad (32)$$

whereas higher-order operators are consecutively obtained as $O_{2m+2,1}^{(ij)a} = \{J^2, O_{2m,1}^{(ij)a}\}$ for $m \geq 1$.

B. (2,8)

The $(2, \mathbf{8})$ operators that generate SB corrections to $Q^{(ij)a}$ can be obtained in a close analogy with expressions (9) and (11) and read respectively for 2- and 3-body operators,

$$O_{2,8}^{(ij)a} = d^{ae8} (\{J^i, G^{je}\} + \{J^j, G^{ie}\}) - \frac{2}{3} \delta^{ij} d^{ae8} \{J^r, G^{re}\}, \quad (33)$$

and

¹Hereafter, for the ease of notation, $O_{n,\text{rep}}^{(ij)a}$ will stand for an n -body operator belonging to flavor representation **rep**.

$$O_{3,8}^{(ij)a} = d^{ae8} \{T^e, \{J^i, J^j\}\} - \frac{2}{3} \delta^{ij} d^{ae8} \{J^2, T^e\}. \quad (34)$$

Higher-order operators are obtained as $O_{n+2,8}^{(ij)a} = \{J^2, O_{n,8}^{(ij)a}\}$ for $n \geq 2$.

Additional $(2, \mathbf{8})$ operators obtained by replacing the d^{ab8} symbol with the if^{ab8} symbol turn out to be T-odd so they are forbidden by time reversal invariance.

C. (2,27)

The analysis of $(2, \mathbf{27})$ operators is more involved than the ones previously discussed. In the present case, not only the symmetry of operators under the exchange of spin indices must be manifest, but also the symmetry of operators under the exchange of flavor indices, which is required for flavor-**27** operators. Let $S_+^{(ij)\{ab\}}$ be one of such operators. The singlet and octet components are subtracted off $S_+^{(ij)\{ab\}}$ to obtain a genuine flavor-**27** operator $S^{(ij)\{ab\}}$ according to [45]

$$S^{(ij)\{ab\}} = S_+^{(ij)\{ab\}} - \frac{1}{N_f^2 - 1} \delta^{ab} S_+^{(ij)\{ee\}} - \frac{N_f}{N_f^2 - 4} d^{abe} d^{ghe} S_+^{(ij)\{gh\}}. \quad (35)$$

The contribution of $S^{(ij)\{ab\}}$ to $Q^{(ij)a}$ is actually obtained by setting $b = 8$ so the contribution is effectively $S^{(ij)\{a8\}}$.

The $1/N_c$ expansion for a $(2, \mathbf{27})$ operator that contributes to $Q^{(ij)a}$ begins with a single 2-body operator,

$$\{G^{ia}, G^{jb}\} + \{G^{ja}, G^{ib}\} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{G^{ra}, G^{rb}\}, \quad (36)$$

which, after subtracting singlet and octet components in accordance with prescription (35), gets the form,

$$\begin{aligned} & \{G^{ia}, G^{jb}\} + \{G^{ja}, G^{ib}\} - \frac{2}{N_f^2 - 1} \delta^{ab} \{G^{ie}, G^{je}\} \\ & - \frac{2N_f}{N_f^2 - 4} d^{abe} d^{egh} \{G^{ig}, G^{jh}\} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{G^{ra}, G^{rb}\} \\ & + \frac{2}{3} \frac{1}{N_f^2 - 1} \delta^{ij} \delta^{ab} \{G^{re}, G^{re}\} \\ & + \frac{2}{3} \frac{N_f}{N_f^2 - 4} \delta^{ij} d^{abe} d^{egh} \{G^{rg}, G^{rh}\}. \end{aligned} \quad (37)$$

After a straightforward algebraic manipulation, the SB correction to $Q^{(ij)a}$ from this 2-body operator becomes

$$\begin{aligned}
O_{2,27}^{(ij)a} = & \{G^{ia}, G^{j8}\} + \{G^{i8}, G^{ja}\} + \frac{1}{6}\delta^{ij}\{T^a, T^8\} + \frac{1}{3}\delta^{ij}f_{age}f^{8he}\{T^g, T^h\} - \frac{1}{N_f+2}d^{ae8}(\{J^i, G^{je}\} + \{J^j, G^{ie}\}) \\
& - \frac{1}{3}\frac{N_f}{N_f+2}\delta^{ij}d^{ae8}\{J^r, G^{re}\} - \frac{1}{N_f(N_f+1)}\delta^{a8}\{J^i, J^j\} - \frac{2}{3}\frac{1}{N_f+1}\delta^{ij}\delta^{a8}J^2 - \frac{1}{6}(N_c + N_f)\delta^{ij}d^{ae8}T^e \\
& - \frac{N_c(N_c + 2N_f)}{6N_f}\delta^{ij}\delta^{a8}.
\end{aligned} \tag{38}$$

As for 3-body operators, there is a single one given by

$$\frac{1}{2}\{T^a, \{J^i, G^{jb}\} + \{J^j, G^{ib}\}\} + \frac{1}{2}\{T^b, \{J^i, G^{ja}\} + \{J^j, G^{ia}\}\} - \frac{1}{3}\delta^{ij}(\{T^a, \{J^r, G^{rb}\}\} + \{T^b, \{J^r, G^{ra}\}\}), \tag{39}$$

which turns into

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\{T^a, \{J^i, G^{jb}\} + \{J^j, G^{ib}\}\} + \frac{1}{2}\{T^b, \{J^i, G^{ja}\} + \{J^j, G^{ia}\}\} - \frac{1}{N_f^2-1}\delta^{ab}\{T^e, \{J^i, G^{je}\} + \{J^j, G^{ie}\}\} \\
& - \frac{N_f}{N_f^2-4}d^{abe}d^{fge}\{T^f, \{J^i, G^{ig}\} + \{J^j, G^{ig}\}\} - \frac{1}{3}\delta^{ij}\{T^a, \{J^r, G^{rb}\}\} - \frac{1}{3}\delta^{ij}\{T^b, \{J^r, G^{ra}\}\} \\
& + \frac{2}{3}\frac{1}{N_f^2-1}\delta^{ij}\delta^{ab}\{T^e, \{J^r, G^{re}\}\} + \frac{2}{3}\frac{N_f}{N_f^2-4}\delta^{ij}d^{abe}d^{fge}\delta^{ij}\{T^f, \{J^r, G^{rg}\}\},
\end{aligned} \tag{40}$$

by following the prescription (35). Therefore, the SB correction to $\mathcal{Q}^{(ij)a}$ from 3-body operators is then given by

$$\begin{aligned}
O_{3,27}^{(ij)a} = & \frac{1}{2}\{T^a, \{J^i, G^{j8}\} + \{J^j, G^{i8}\}\} + \frac{1}{2}\{T^8, \{J^i, G^{ja}\} + \{J^j, G^{ia}\}\} - \frac{1}{3}\delta^{ij}\{T^a, \{J^r, G^{r8}\}\} - \frac{1}{3}\delta^{ij}\{T^8, \{J^r, G^{ra}\}\} \\
& - \frac{1}{N_f+2}d^{ae8}\{T^e, \{J^i, J^j\}\} + \frac{2}{3}\frac{1}{N_f+2}\delta^{ij}d^{ae8}\{J^2, T^e\} - \frac{N_c + N_f}{N_f+2}d^{ae8}(\{J^i, G^{je}\} + \{J^j, G^{ie}\}) \\
& + \frac{2}{3}\frac{N_c + N_f}{N_f+2}\delta^{ij}d^{ae8}\{J^r, G^{re}\} - \frac{2(N_c + N_f)}{N_f(N_f+1)}\delta^{a8}\{J^i, J^j\} + \frac{4}{3}\frac{N_c + N_f}{N_f(N_f+1)}\delta^{ij}\delta^{a8}J^2.
\end{aligned} \tag{41}$$

Next 4-body operators can be worked out. They can conveniently be constructed as tensor products of a spin-0 and a spin-1, 2-body operators. There are two of such operators, namely,

$$\{\{J^i, J^j\}, \{G^{ra}, G^{rb}\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^2, \{G^{ra}, G^{rb}\}\}, \tag{42}$$

and

$$\{\{J^i, J^j\}, \{T^a, T^b\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^2, \{T^a, T^b\}\}. \tag{43}$$

The procedure to subtract singlet and octet components yields, for the former,

$$\begin{aligned}
& \{\{J^i, J^j\}, \{G^{ra}, G^{rb}\}\} - \frac{1}{N_f^2-1}\delta^{ab}\{\{J^i, J^j\}, \{G^{re}, G^{re}\}\} - \frac{N_f}{N_f^2-4}d^{abe}d^{ghe}\{\{J^i, J^j\}, \{G^{rg}, G^{rh}\}\} \\
& - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^2, \{G^{ra}, G^{rb}\}\} + \frac{2}{3}\frac{N_f}{N_f^2-4}\delta^{ij}d^{abe}d^{ghe}\{J^2, \{G^{rg}, G^{rh}\}\} + \frac{2}{3}\frac{1}{N_f^2-1}\delta^{ij}\delta^{ab}\{J^2, \{G^{re}, G^{re}\}\},
\end{aligned} \tag{44}$$

and for the latter,

$$\begin{aligned} & \{ \{ J^i, J^j \}, \{ T^a, T^b \} \} - \frac{1}{N_f^2 - 1} \delta^{ab} \{ \{ J^i, J^j \}, \{ T^e, T^e \} \} - \frac{N_f}{N_f^2 - 4} d^{abe} d^{ghe} \{ \{ J^i, J^j \}, \{ T^g, T^h \} \} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{ J^2, \{ T^a, T^b \} \} \\ & + \frac{2}{3} \frac{1}{N_f^2 - 1} \delta^{ij} \delta^{ab} \{ J^2, \{ T^e, T^e \} \} + \frac{2}{3} \frac{N_f}{N_f^2 - 4} \delta^{ij} d^{abe} d^{ghe} \{ J^2, \{ T^g, T^h \} \}. \end{aligned} \quad (45)$$

Finally, the SB contributions from 4-body operators to $\mathcal{Q}^{(ij)a}$ are given by

$$\begin{aligned} O_{4,27}^{(ij)a} &= \{ \{ J^i, J^j \}, \{ G^{ra}, G^{r8} \} \} + \frac{1}{2} \frac{N_f + 2}{N_f(N_f^2 - 1)} \delta^{a8} \{ J^2, \{ J^i, J^j \} \} + \frac{1}{2} \frac{N_f + 4}{N_f^2 - 4} d^{ae8} \{ \{ J^i, J^j \}, \{ J^r, G^{re} \} \} \\ & - \frac{3}{4} \frac{(N_c + N_f)N_f}{N_f^2 - 4} d^{ae8} \{ T^e, \{ J^i, J^j \} \} - \frac{3}{4} \frac{N_c(N_c + 2N_f)}{N_f^2 - 1} \delta^{a8} \{ J^i, J^j \} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{ J^2, \{ G^{ra}, G^{r8} \} \} \\ & - \frac{1}{3} \frac{N_f + 2}{N_f(N_f^2 - 1)} \delta^{ij} \delta^{a8} \{ J^2, J^2 \} - \frac{1}{3} \frac{N_f + 4}{N_f^2 - 4} \delta^{ij} d^{ae8} \{ J^2, \{ J^r, G^{re} \} \} + \frac{1}{2} \frac{(N_c + N_f)N_f}{N_f^2 - 4} \delta^{ij} d^{ae8} \{ J^2, T^e \} \\ & + \frac{1}{2} \frac{N_c(N_c + 2N_f)}{N_f^2 - 1} \delta^{ij} \delta^{a8} J^2, \end{aligned} \quad (46)$$

and

$$\begin{aligned} \tilde{O}_{4,27}^{(ij)a} &= \{ \{ J^i, J^j \}, \{ T^a, T^8 \} \} - \frac{2}{N_f^2 - 1} \delta^{a8} \{ J^2, \{ J^i, J^j \} \} - \frac{2N_f}{N_f^2 - 4} d^{ae8} \{ \{ J^i, J^j \}, \{ J^r, G^{re} \} \} \\ & - \frac{(N_c + N_f)(N_f - 4)}{N_f^2 - 4} d^{ae8} \{ T^e, \{ J^i, J^j \} \} - \frac{N_c(N_c + 2N_f)(N_f - 2)}{N_f(N_f^2 - 1)} \delta^{a8} \{ J^i, J^j \} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{ J^2, \{ T^a, T^8 \} \} \\ & + \frac{4}{3} \frac{1}{N_f^2 - 1} \delta^{ij} \delta^{a8} \{ J^2, J^2 \} + \frac{4}{3} \frac{N_f}{N_f^2 - 4} \delta^{ij} d^{ae8} \{ J^2, \{ J^r, G^{re} \} \} + \frac{2}{3} \frac{(N_c + N_f)(N_f - 4)}{N_f^2 - 4} \delta^{ij} d^{ae8} \{ J^2, T^e \} \\ & + \frac{2}{3} \frac{N_c(N_c + 2N_f)(N_f - 2)}{N_f(N_f^2 - 1)} \delta^{ij} \delta^{a8} J^2. \end{aligned} \quad (47)$$

There is an additional 4-body operator constructed as

$$\frac{1}{2} \{ \{ J^r, J^r \}, \{ G^{ia}, G^{jb} \} + \{ G^{ja}, G^{ib} \} \}, \quad (48)$$

but it can be rewritten in terms of $\{ J^2, O_2^{(ij)a} \}$, so it is redundant and can be discarded.

To close this section, notice that the flavor singlet and octet components subtracted off the original flavor 27 operators could have been respectively merged into the already defined $O_{n,1}^{(ij)a}$ and $O_{n,8}^{(ij)a}$ operators. The reason to keep these components in the original expression is twofold. First, the vanishing trace condition is kept in the full expression, and second, this allows us to disentangle the effects of different representations, so the corresponding operator coefficients parametrize pure 27 effects.

D. $(2, \mathbf{10} + \overline{\mathbf{10}})$

Contrary to the previous case, $(2, \mathbf{10} + \overline{\mathbf{10}})$ operators must be antisymmetric under the exchange of flavor indices, retaining the symmetry under the exchange of spin indices.

Let $A_{-}^{(ij)[ab]}$ be one of such operators. Thus, in order to get a genuine flavor $\mathbf{10} + \overline{\mathbf{10}}$ operator $A^{(ij)[ab]}$, the flavor octet component must be subtracted off according to [45]

$$A^{(ij)[ab]} = A_{-}^{(ij)[ab]} - \frac{1}{N_f} f^{abe} f^{ghe} A_{-}^{(ij)[gh]}, \quad (49)$$

where, by construction,

$$f^{abc} A^{(ij)[ab]} = 0. \quad (50)$$

With the above considerations, the series for the $(2, \mathbf{10} + \overline{\mathbf{10}})$ SB operators actually begins with a single 3-body operator,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ T^a, \{ J^i, G^{jb} \} + \{ J^j, G^{ib} \} \} - \frac{1}{2} \{ T^b, \{ J^i, G^{ja} \} \\ & + \{ J^j, G^{ia} \} \} - \frac{1}{3} \delta^{ij} (\{ T^a, \{ J^r, G^{rb} \} \\ & - \{ T^b, \{ J^r, G^{ra} \} \}), \end{aligned} \quad (51)$$

where the octet component to be subtracted off reads

$$\frac{1}{N_f} i f^{abe} [J^2, \{J^i, G^{je}\} + \{J^j, G^{ie}\}]. \quad (52)$$

This last term is particularly interesting. First, notice that it is T-odd, so in principle it is forbidden in the $1/N_c$ expansion of $Q^{(ij)a}$. And secondly, it vanishes under contraction of spin indices. It is necessary, though, to fulfill condition (50).

Thus, the SB contribution to $Q^{(ij)a}$ from $(2, \mathbf{10} + \overline{\mathbf{10}})$ operators is

$$\begin{aligned} O_{3, \mathbf{10} + \overline{\mathbf{10}}}^{(ij)a} = & \frac{1}{2} \{T^a, \{J^i, G^{j8}\} + \{J^j, G^{i8}\}\} \\ & - \frac{1}{2} \{T^8, \{J^i, G^{ja}\} + \{J^j, G^{ia}\}\} \\ & - \frac{1}{3} \delta^{ij} \{T^a, \{J^r, G^{r8}\}\} + \frac{1}{3} \delta^{ij} \{T^8, \{J^r, G^{ra}\}\}, \end{aligned} \quad (53)$$

where the octet component has been safely ignored. Higher-order operators are obtained as $O_{n+2, \mathbf{10} + \overline{\mathbf{10}}}^{(ij)a} = \{J^2, O_{n, \mathbf{10} + \overline{\mathbf{10}}}^{(ij)a}\}$, for $n \geq 3$.

V. A FULL EXPRESSION FOR QUADRUPOLE MOMENT

The final expression for the quadrupole moment operator to linear order in SB is

$$Q^{(ij)a} + \delta Q^{(ij)a}, \quad (54)$$

where $Q^{(ij)a}$ is the operator whose matrix elements yield the $SU(3)$ symmetric values; it is given in Eq. (15). In turn, $\delta Q^{(ij)a}$ includes all the operators due to first-order SB and its $1/N_c$ expansion reads

TABLE V. Matrix elements of baryon operators corresponding to quadrupole moments of octet baryons for $N_c = 3$: broken $SU(3)$ case.

	n	p	Σ^-	Σ^0	Σ^+	Ξ^-	Ξ^0	Λ
$\langle \delta^{38} \{J^3, J^3\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} \delta^{38} J^2 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle d^{3e8} \{J^3, G^{3e}\} \rangle$	$-\frac{5}{12\sqrt{3}}$	$\frac{5}{12\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{3\sqrt{3}}$	$\frac{1}{12\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{12\sqrt{3}}$	0
$\langle \delta^{33} d^{3e8} \{J^r, G^{re}\} \rangle$	$-\frac{5}{4\sqrt{3}}$	$\frac{5}{4\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{4\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{4\sqrt{3}}$	0
$\langle d^{3e8} \{T^e, \{J^3, J^3\}\} \rangle$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0
$\langle \delta^{33} d^{3e8} \{J^2, T^e\} \rangle$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	0
$\langle \{G^{33}, G^{38}\} \rangle$	$-\frac{5}{24\sqrt{3}}$	$\frac{5}{24\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	0	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$-\frac{11}{24\sqrt{3}}$	$\frac{11}{24\sqrt{3}}$	0
$\langle \delta^{33} \{T^3, T^8\} \rangle$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\langle \delta^{33} f^{3ge} f^{8he} \{T^g, T^h\} \rangle$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	0
$\langle \delta^{33} d^{3e8} T^e \rangle$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0
$\langle \delta^{33} \delta^{38} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \{T^3, \{J^3, G^{38}\}\} \rangle$	$-\frac{1}{4\sqrt{3}}$	$\frac{1}{4\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	0
$\langle \{T^8, \{J^3, G^{33}\}\} \rangle$	$-\frac{5}{4\sqrt{3}}$	$\frac{5}{4\sqrt{3}}$	0	0	0	$-\frac{1}{4\sqrt{3}}$	$\frac{1}{4\sqrt{3}}$	0
$\langle \delta^{33} \{T^3, \{J^r, G^{r8}\}\} \rangle$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0
$\langle \delta^{33} \{T^8, \{J^r, G^{r3}\}\} \rangle$	$-\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	0	0	0	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	0
$\langle \delta^{88} \{J^3, J^3\} \rangle$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\langle \delta^{33} \delta^{88} J^2 \rangle$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\langle d^{8e8} \{J^3, G^{3e}\} \rangle$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$
$\langle \delta^{33} d^{8e8} \{J^r, G^{re}\} \rangle$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\langle d^{8e8} \{T^e, \{J^3, J^3\}\} \rangle$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\langle \delta^{33} d^{8e8} \{J^2, T^e\} \rangle$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0
$\langle \{G^{38}, G^{38}\} \rangle$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{1}{6}$
$\langle \delta^{33} \{T^8, T^8\} \rangle$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0
$\langle \delta^{33} f^{8ge} f^{8he} \{T^g, T^h\} \rangle$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{2}$
$\langle \delta^{33} d^{8e8} T^e \rangle$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\langle \delta^{33} \delta^{88} \rangle$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\langle \{T^8, \{J^3, G^{38}\}\} \rangle$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0
$\langle \delta^{33} \{T^8, \{J^r, G^{r8}\}\} \rangle$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0	0	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	0

TABLE VI. Matrix elements of baryon operators corresponding to quadrupole moments of decuplet baryons for $N_c = 3$: broken $SU(3)$ case.

	Δ^{++}	Δ^+	Δ^0	Δ^-	Σ^{*+}	Σ^{*0}	Σ^{*-}	Ξ^{*-}	Ξ^{*0}	Ω^-
$\langle \delta^{38} \{J^3, J^3\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} \delta^{38} J^2 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle d^{3e8} \{J^3, G^{3e}\} \rangle$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	0
$\langle \delta^{33} d^{3e8} \{J^r, G^{re}\} \rangle$	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5}{4\sqrt{3}}$	$-\frac{5}{4\sqrt{3}}$	$-\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5}{2\sqrt{3}}$	0	$-\frac{5}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{5}{4\sqrt{3}}$	$\frac{5}{4\sqrt{3}}$	0
$\langle d^{3e8} \{T^e, \{J^3, J^3\}\} \rangle$	$\frac{9\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{9\sqrt{3}}{2}$	$3\sqrt{3}$	0	$-3\sqrt{3}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0
$\langle \delta^{33} d^{3e8} \{J^2, T^e\} \rangle$	$\frac{15\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{15\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{5\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	0
$\langle \{G^{33}, G^{38}\} \rangle$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	$-\frac{\sqrt{3}}{8}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{8}$	0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	$-\frac{\sqrt{3}}{8}$	0
$\langle \delta^{33} \{T^3, T^8\} \rangle$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\langle \delta^{33} f^{3ge} f^{8he} \{T^g, T^h\} \rangle$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	0
$\langle \delta^{33} d^{3e8} T^e \rangle$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0
$\langle \delta^{33} \delta^{38} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \{T^3, \{J^3, G^{38}\}\} \rangle$	$\frac{9\sqrt{3}}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{9\sqrt{3}}{4}$	0	0	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0
$\langle \{T^8, \{J^3, G^{33}\}\} \rangle$	$\frac{9\sqrt{3}}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{9\sqrt{3}}{4}$	0	0	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0
$\langle \delta^{33} \{T^3, \{J^r, G^{r8}\}\} \rangle$	$\frac{15\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{15\sqrt{3}}{4}$	0	0	0	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{5\sqrt{3}}{4}$	0
$\langle \delta^{33} \{T^8, \{J^r, G^{r3}\}\} \rangle$	$\frac{15\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{15\sqrt{3}}{4}$	0	0	0	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{5\sqrt{3}}{4}$	0
$\langle \delta^{88} \{J^3, J^3\} \rangle$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$
$\langle \delta^{33} \delta^{88} J^2 \rangle$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$
$\langle d^{8e8} \{J^3, G^{3e}\} \rangle$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\langle \delta^{33} d^{8e8} \{J^r, G^{re}\} \rangle$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$	0	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$
$\langle d^{8e8} \{T^e, \{J^3, J^3\}\} \rangle$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{9}{2}$	0	0	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	9
$\langle \delta^{33} d^{8e8} \{J^2, T^e\} \rangle$	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{15}{4}$	0	0	0	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{2}$
$\langle \{G^{38}, G^{38}\} \rangle$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	0	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{2}$
$\langle \delta^{33} \{T^8, T^8\} \rangle$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	6
$\langle \delta^{33} f^{8ge} f^{8he} \{T^g, T^h\} \rangle$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	6	6	6	$\frac{27}{4}$	$\frac{27}{4}$	$\frac{9}{2}$
$\langle \delta^{33} d^{8e8} T^e \rangle$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\langle \delta^{33} \delta^{88} \rangle$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\langle \{T^8, \{J^3, G^{38}\}\} \rangle$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	0	0	0	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	9
$\langle \delta^{33} \{T^8, \{J^r, G^{r8}\}\} \rangle$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	0	0	0	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	15

$$\begin{aligned}
\delta Q^{(ij)a} = & \sum_{n=2,4}^{N_c-1} \frac{1}{N_c^{n-1}} c_{n,1} \mathcal{O}_{n,1}^{(ij)a} + \sum_{n=2}^{N_c} \frac{1}{N_c^{n-1}} c_{n,8} \mathcal{O}_{n,8}^{(ij)a} + \sum_{n=2}^{N_c} \frac{1}{N_c^{n-1}} c_{n,27} \mathcal{O}_{n,27}^{(ij)a} + \sum_{n=4,6}^{N_c-1} \frac{1}{N_c^n} \tilde{c}_{n,27} \tilde{\mathcal{O}}_{n,27}^{(ij)a} \\
& + \sum_{n=3,5}^{N_c} \frac{1}{N_c^{n-1}} c_{n,10+\overline{10}} \mathcal{O}_{n,10+\overline{10}}^{(ij)a}. \tag{55}
\end{aligned}$$

At the physical value $N_c = 3$, the series is truncated as

$$\delta Q^{(ij)a} = \frac{1}{N_c} c_{2,1} \mathcal{O}_{2,1}^{(ij)a} + \frac{1}{N_c} c_{2,8} \mathcal{O}_{2,8}^{(ij)a} + \frac{1}{N_c^2} c_{3,8} \mathcal{O}_{3,8}^{(ij)a} + \frac{1}{N_c} c_{2,27} \mathcal{O}_{2,27}^{(ij)a} + \frac{1}{N_c^2} c_{3,27} \mathcal{O}_{3,27}^{(ij)a} + \frac{1}{N_c^2} c_{3,10+\overline{10}} \mathcal{O}_{3,10+\overline{10}}^{(ij)a}, \tag{56}$$

where the operators $\mathcal{O}_{2,1}^{(ij)a}$, $\mathcal{O}_{2,8}^{(ij)a}$, $\mathcal{O}_{3,8}^{(ij)a}$, $\mathcal{O}_{2,27}^{(ij)a}$, $\mathcal{O}_{3,27}^{(ij)a}$, and $\mathcal{O}_{3,10+\overline{10}}^{(ij)a}$ are given in Eqs. (32), (33), (34), (38), (41), (53), respectively. The operator coefficient $c_{n,\mathbf{rep}}$ accompany the n -body operator belonging to the flavor representation \mathbf{rep} . The matrix elements of the operators in the expansion (56) are listed in Tables V–VII for the sake of completeness.

Thus, the complete quadrupole moments of decuplet baryons [$SU(3)$ symmetric value plus first-order SB effects] for $N_c = 3$ are given by

TABLE VII. Matrix elements of baryon operators corresponding to transition quadrupole moments for $N_c = 3$: broken $SU(3)$ case.

	$\Delta^+ p$	$\Delta^0 n$	$\Sigma^{*0} \Lambda$	$\Sigma^{*0} \Sigma^0$	$\Sigma^{*+} \Sigma^+$	$\Sigma^{*-} \Sigma^-$	$\Xi^{*0} \Xi^0$	$\Xi^{*-} \Xi^-$
$\langle \delta^{38} \{J^3, J^3\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} \delta^{38} J^2 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle d^{3e8} \{J^3, G^{3e}\} \rangle$	$\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{3\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{6}}$	$\frac{1}{3\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{6}}$
$\langle \delta^{33} d^{3e8} \{J^r, G^{re}\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle d^{3e8} \{T^e, \{J^3, J^3\}\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} d^{3e8} \{J^2, T^e\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \{G^{33}, G^{38}\} \rangle$	$\frac{1}{3\sqrt{6}}$	$\frac{1}{3\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{6}}$	$\frac{1}{3\sqrt{6}}$
$\langle \delta^{33} \{T^3, T^8\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} f^{3ge} f^{8he} \{T^g, T^h\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} d^{3e8} T^e \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} \delta^{38} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \{T^3, \{J^3, G^{38}\}\} \rangle$	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$
$\langle \{T^8, \{J^3, G^{33}\}\} \rangle$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
$\langle \delta^{33} \{T^3, \{J^r, G^{r8}\}\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} \{T^8, \{J^r, G^{r3}\}\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{88} \{J^3, J^3\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} \delta^{88} J^2 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle d^{8e8} \{J^3, G^{3e}\} \rangle$	0	0	0	$-\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{2}}$
$\langle \delta^{33} d^{8e8} \{J^r, G^{re}\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle d^{8e8} \{T^e, \{J^3, J^3\}\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} d^{8e8} \{J^2, T^e\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \{G^{38}, G^{38}\} \rangle$	0	0	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$
$\langle \delta^{33} \{T^8, T^8\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} f^{8ge} f^{8he} \{T^g, T^h\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} d^{8e8} T^e \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \delta^{33} \delta^{88} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle \{T^8, \{J^3, G^{38}\}\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\langle \delta^{33} \{T^8, \{J^r, G^{r8}\}\} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0

$$\mathcal{Q}_{\Delta^{++}} = \frac{4}{9} q_{\Delta^{++}} (k_2 + k_3) + \frac{2}{3\sqrt{3}} c_{2,1} + \frac{4}{9\sqrt{3}} (c_{2,8} + c_{3,8}) + \frac{3}{10\sqrt{3}} \left[c_{2,27} + \frac{4}{3} c_{3,27} \right], \quad (57a)$$

$$\mathcal{Q}_{\Delta^+} = \frac{4}{9} q_{\Delta^+} (k_2 + k_3) + \frac{2}{3\sqrt{3}} c_{2,1} + \frac{1}{6\sqrt{3}} \left[c_{2,27} + \frac{4}{3} c_{3,27} \right], \quad (57b)$$

$$\mathcal{Q}_{\Delta^0} = \frac{2}{3\sqrt{3}} c_{2,1} - \frac{4}{9\sqrt{3}} (c_{2,8} + c_{3,8}) + \frac{1}{30\sqrt{3}} \left[c_{2,27} + \frac{4}{3} c_{3,27} \right], \quad (57c)$$

$$\mathcal{Q}_{\Delta^-} = \frac{4}{9} q_{\Delta^-} (k_2 + k_3) + \frac{2}{3\sqrt{3}} c_{2,1} - \frac{8}{9\sqrt{3}} (c_{2,8} + c_{3,8}) - \frac{1}{10\sqrt{3}} \left[c_{2,27} + \frac{4}{3} c_{3,27} \right], \quad (57d)$$

$$\mathcal{Q}_{\Sigma^{*+}} = \frac{4}{9} q_{\Sigma^{*+}} (k_2 + k_3) + \frac{2}{3\sqrt{3}} c_{2,1} + \frac{4}{9\sqrt{3}} (c_{2,8} + c_{3,8}) - \frac{11}{30\sqrt{3}} \left[c_{2,27} + \frac{4}{3} c_{3,27} \right], \quad (57e)$$

$$\mathcal{Q}_{\Sigma^{*0}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} c_{2,1} - \frac{5}{30\sqrt{3}} \left[c_{2,27} + \frac{4}{3} c_{3,27} \right], \quad (57f)$$

$$Q_{\Sigma^{*-}} = \frac{4}{9} q_{\Sigma^{*-}} (k_2 + k_3) + \frac{2}{3\sqrt{3}} c_{2,1} - \frac{4}{9\sqrt{3}} (c_{2,8} + c_{3,8}) + \frac{1}{30\sqrt{3}} \left[c_{2,27} + \frac{4}{3} c_{3,27} \right], \quad (57g)$$

$$Q_{\Xi^{*-}} = \frac{4}{9} q_{\Xi^{*-}} (k_2 + k_3) + \frac{2}{3\sqrt{3}} c_{2,1} + \frac{5}{30\sqrt{3}} \left[c_{2,27} + \frac{4}{3} c_{3,27} \right], \quad (57h)$$

$$Q_{\Xi^{*0}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} c_{2,1} + \frac{4}{9\sqrt{3}} (c_{2,8} + c_{3,8}) - \frac{11}{30\sqrt{3}} \left[c_{2,27} + \frac{4}{3} c_{3,27} \right], \quad (57i)$$

and

$$Q_{\Omega^-} = \frac{4}{9} q_{\Omega^-} (k_2 + k_3) + \frac{2}{3\sqrt{3}} c_{2,1} + \frac{4}{9\sqrt{3}} (c_{2,8} + c_{3,8}) + \frac{9}{30\sqrt{3}} \left[c_{2,27} + \frac{4}{3} c_{3,27} \right]. \quad (57j)$$

Notice that SB effects induce nonvanishing contributions to the quadrupole moments of neutral decuplet baryons. Notice also that there is no contribution from the flavor $\mathbf{10} + \overline{\mathbf{10}}$ representation.

For the transition quadrupole moments the expressions are

$$Q_{\Delta^+ p} = \frac{2\sqrt{2}}{9} k_2 + \frac{2}{9} \sqrt{\frac{2}{3}} c_{2,8} + \frac{1}{15} \sqrt{\frac{2}{3}} \left[c_{2,27} + \frac{1}{3} c_{3,27} \right] - \frac{1}{9} \sqrt{\frac{2}{3}} c_{3,10+\overline{10}}, \quad (58a)$$

$$Q_{\Delta^0 n} = \frac{2\sqrt{2}}{9} k_2 + \frac{2}{9} \sqrt{\frac{2}{3}} c_{2,8} + \frac{1}{15} \sqrt{\frac{2}{3}} \left[c_{2,27} + \frac{1}{3} c_{3,27} \right] - \frac{1}{9} \sqrt{\frac{2}{3}} c_{3,10+\overline{10}}, \quad (58b)$$

$$Q_{\Sigma^{*0}\Lambda} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} k_2 + \frac{\sqrt{2}}{9} c_{2,8} - \frac{2\sqrt{2}}{15} \left[c_{2,27} + \frac{1}{3} c_{3,27} \right], \quad (58c)$$

$$Q_{\Sigma^{*0}\Sigma^0} = \frac{\sqrt{2}}{9} k_2 - \frac{1}{9} \sqrt{\frac{2}{3}} c_{2,8} + \frac{2}{15} \sqrt{\frac{2}{3}} \left[c_{2,27} + \frac{1}{3} c_{3,27} \right], \quad (58d)$$

$$Q_{\Sigma^{*+}\Sigma^+} = \frac{2\sqrt{2}}{9} k_2 + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \left[c_{2,27} + \frac{1}{3} c_{3,27} \right] + \frac{1}{9} \sqrt{\frac{2}{3}} c_{3,10+\overline{10}}, \quad (58e)$$

$$Q_{\Sigma^{*-}\Sigma^-} = -\frac{2}{9} \sqrt{\frac{2}{3}} c_{2,8} - \frac{1}{15} \sqrt{\frac{2}{3}} \left[c_{2,27} + \frac{1}{3} c_{3,27} \right] - \frac{1}{9} \sqrt{\frac{2}{3}} c_{3,10+\overline{10}}, \quad (58f)$$

$$Q_{\Xi^{*0}\Xi^0} = \frac{2\sqrt{2}}{9} k_2 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \left[c_{2,27} + \frac{1}{3} c_{3,27} \right] + \frac{1}{9} \sqrt{\frac{2}{3}} c_{3,10+\overline{10}}, \quad (58g)$$

$$Q_{\Xi^{*-}\Xi^-} = -\frac{2}{9} \sqrt{\frac{2}{3}} c_{2,8} - \frac{1}{15} \sqrt{\frac{2}{3}} \left[c_{2,27} + \frac{1}{3} c_{3,27} \right] - \frac{1}{9} \sqrt{\frac{2}{3}} c_{3,10+\overline{10}}. \quad (58h)$$

Notice that the flavor singlet representation does not contribute in this case but the flavor $\mathbf{10} + \overline{\mathbf{10}}$ one does.

The isospin relations listed in Sec. III, this time for the complete expressions for quadrupole moments are, for $I = 3$ operators,

$$Q_{\Delta^{++}} - 3Q_{\Delta^+} + 3Q_{\Delta^0} - Q_{\Delta^-} = 0, \quad (59a)$$

$$Q_{\Delta^{++}} - Q_{\Delta^+} - Q_{\Delta^0} + Q_{\Delta^-} = 0, \quad (59b)$$

$$Q_{\Sigma^{*+}} - 2Q_{\Sigma^{*0}} + Q_{\Sigma^{*-}} = 0, \quad (59c)$$

$$Q_{\Delta^+ p} - Q_{\Delta^0 n} = 0, \quad (59d)$$

$$Q_{\Sigma^{*+}\Sigma^+} - 2Q_{\Sigma^{*0}\Sigma^0} + Q_{\Sigma^{*-}\Sigma^-} = 0, \quad (59e)$$

and for $I = 2$ operators,

i.e., they are fulfilled in the presence of first-order SB, which is a completely expected result.

Additional expressions fulfilled in the presence of first-order SB are

$$(\mathcal{Q}_{\Sigma^{*-}} + \mathcal{Q}_{\Sigma^{*+}}) - (\mathcal{Q}_{\Delta^0} + \mathcal{Q}_{\Xi^{*0}}) = 0, \quad (60a)$$

$$\frac{2}{3}(\mathcal{Q}_{\Delta^{++}} - \mathcal{Q}_{\Omega^-}) - (\mathcal{Q}_{\Delta^+} - \mathcal{Q}_{\Xi^{*-}}) = 0, \quad (60b)$$

$$\mathcal{Q}_{\Delta^+} - 2\mathcal{Q}_{\Delta^0} + \mathcal{Q}_{\Delta^-} = 0, \quad (60c)$$

$$-2\mathcal{Q}_{\Sigma^{*0}} + \mathcal{Q}_{\Delta^0} + \mathcal{Q}_{\Xi^{*0}} = 0, \quad (60d)$$

$$\mathcal{Q}_{\Sigma^{*-}} + \mathcal{Q}_{\Delta^-} - 5\mathcal{Q}_{\Xi^{*-}} + 3\mathcal{Q}_{\Omega^-} = 0, \quad (60e)$$

$$\mathcal{Q}_{\Sigma^{*-}\Sigma^-} - \mathcal{Q}_{\Xi^{*-}\Xi^-} = 0, \quad (60f)$$

Relation (60f) is remarkable because in the $SU(3)$ limit, $\mathcal{Q}_{\Sigma^{*-}\Sigma^-}^{SU(3)} = \mathcal{Q}_{\Xi^{*-}\Xi^-}^{SU(3)} = 0$, and still the degeneracy between these two quantities is not lifted by first-order SB effects. In consequence, if $\epsilon \sim m_s$ is a (dimensionless measure) of $SU(3)$ breaking, corrections to Eqs. (60) should arise are order ϵ^2 .

Flavor SB is evaluated in Ref. [39] by replacing the spin-spin terms in the expressions for the quadrupole moments with a *quadratic* quark mass dependence as obtained from a one-gluon exchange interaction between the quarks. SB is then characterized by the ratio $r = m_u/m_s$ of u and s quark masses. The counterparts of relations (27) with SB effects are also found to vanish in Ref. [39]. However, in the formalism presented here, they are now given by

$$\mathcal{Q}_{\Delta^-} + \mathcal{Q}_{\Delta^+} = \frac{4}{3\sqrt{3}}c_{2,1} - \frac{8}{9\sqrt{3}}c_{2,8} - \frac{8}{9\sqrt{3}}c_{3,8} + \frac{1}{15\sqrt{3}}c_{2,27} + \frac{4}{45\sqrt{3}}c_{3,27}, \quad (61a)$$

$$2\mathcal{Q}_{\Delta^-} + \mathcal{Q}_{\Delta^{++}} = \frac{2}{\sqrt{3}}c_{2,1} - \frac{4}{3\sqrt{3}}c_{2,8} - \frac{4}{3\sqrt{3}}c_{3,8} + \frac{1}{10\sqrt{3}}c_{2,27} + \frac{2}{15\sqrt{3}}c_{3,27}, \quad (61b)$$

$$3(\mathcal{Q}_{\Xi^{*-}} - \mathcal{Q}_{\Sigma^{*-}}) - (\mathcal{Q}_{\Omega^-} - \mathcal{Q}_{\Delta^-}) = 0, \quad (61c)$$

$$\mathcal{Q}_{\Delta^-} - \mathcal{Q}_{\Sigma^{*-}} - \sqrt{2}\mathcal{Q}_{\Sigma^{*-}\Sigma^-} = -\frac{4}{9\sqrt{3}}c_{3,8} - \frac{2}{15\sqrt{3}}c_{3,27} + \frac{2}{9\sqrt{3}}c_{3,10+\overline{10}}, \quad (61d)$$

$$\mathcal{Q}_{\Delta^+} - \mathcal{Q}_{\Sigma^{*+}} + \sqrt{2}\mathcal{Q}_{\Delta^+p} - \sqrt{2}\mathcal{Q}_{\Sigma^{*+}\Sigma^+} = -\frac{4}{9\sqrt{3}}c_{3,8} + \frac{8}{15\sqrt{3}}c_{3,27} - \frac{4}{9\sqrt{3}}c_{3,10+\overline{10}}, \quad (61e)$$

$$\mathcal{Q}_{\Sigma^{*0}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{Q}_{\Sigma^{*0}\Sigma^0} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathcal{Q}_{\Sigma^{*0}\Lambda} = \frac{2}{3\sqrt{3}}c_{2,1} + \frac{2}{9\sqrt{3}}c_{2,8} - \frac{13}{30\sqrt{3}}c_{2,27} - \frac{14}{45\sqrt{3}}c_{3,27}, \quad (61f)$$

$$\mathcal{Q}_{\Sigma^{*-}} - \mathcal{Q}_{\Xi^{*-}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{Q}_{\Xi^{*-}\Xi^-} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{Q}_{\Sigma^{*-}\Sigma^-} = -\frac{4}{9\sqrt{3}}c_{3,8} - \frac{2}{15\sqrt{3}}c_{3,27} + \frac{2}{9\sqrt{3}}c_{3,10+\overline{10}}, \quad (61g)$$

$$\mathcal{Q}_{\Xi^{*0}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{Q}_{\Xi^{*0}\Xi^0} - \sqrt{\frac{2}{3}}\mathcal{Q}_{\Sigma^{*0}\Lambda} = \frac{2}{3\sqrt{3}}c_{2,1} + \frac{2}{9\sqrt{3}}c_{2,8} + \frac{4}{9\sqrt{3}}c_{3,8} - \frac{13}{30\sqrt{3}}c_{2,27} - \frac{23}{45\sqrt{3}}c_{3,27} + \frac{1}{9\sqrt{3}}c_{3,10+\overline{10}}. \quad (61h)$$

Equation (61c) is the only agreement between the analysis of Ref. [39] and the present one, as far as SB effects in the quadrupole moments are concerned. A noticeable difference lies in the vanishing value of \mathcal{Q}_{Δ^0} in the presence of SB even to order $\mathcal{O}(r^3)$ found in that reference, compared to Eq. (57c), which attains in principle a nonzero value precisely due to first-order SB.

In the context of the $1/N_c$ expansion analysis of Ref. [41], an additional relation is provided with N_c -independent coefficients that holds for all values of N_c in all cases of SB analyzed there. The relation, corresponding to Eq. (4.23) in that reference, reads

$$\mathcal{Q}_{\Xi^{*-}} - \mathcal{Q}_{\Omega^-} - \sqrt{2}\mathcal{Q}_{\Xi^{*-}\Xi^-} = 0. \quad (62)$$

With the results presented here, the above relation actually reads

$$\begin{aligned} &\mathcal{Q}_{\Xi^{*-}} - \mathcal{Q}_{\Omega^-} - \sqrt{2}\mathcal{Q}_{\Xi^{*-}\Xi^-} \\ &= -\frac{4}{9\sqrt{3}}c_{3,8} - \frac{2}{15\sqrt{3}}c_{3,27} + \frac{2}{9\sqrt{3}}c_{3,10+\overline{10}}. \end{aligned} \quad (63)$$

Hence, SB affects relation (63) *only* at 3-body operator level and higher. Should these operators be removed from the series (56), the single-photon exchange ansatz

prediction would be recovered. Equivalently, relation (63) vanishes when leading and subleading terms in $1/N_c$ are retained in the series (56). Beyond that point, it gets modifications.

VI. CLOSING REMARKS

The main aim of the present paper is to construct the $1/N_c$ expansion of the baryon operator whose matrix elements between $SU(6)$ baryon states yields the actual values of the *spectroscopic* quadrupole moments. This operator has well-defined properties: It is a spin-2 and a flavor octet object, which means that it transforms as $(2, \mathbf{8})$ under $SU(2) \times SU(3)$. It is a symmetric and traceless tensor in the spin indices. And most importantly, it is even under time reversal.

The operator is first constructed under the assumption of an exact $SU(3)$ flavor symmetry; it is denoted by $Q^{(ij)a}$. For the physical value $N_c = 3$, $Q^{(ij)a}$ is given by Eq. (17). The effects of SB are accounted for to linear order through the operator $\delta Q^{(ij)a}$, given by Eq. (56), which comprises all the operators that fall into the flavor representations allowed by the tensor product of the quadrupole moment and the perturbation. These representations are $(2, \mathbf{1})$, $(2, \mathbf{8})$, $(2, \mathbf{8})$, $(2, \mathbf{10} + \overline{\mathbf{10}})$, and $(2, \mathbf{27})$. The $1/N_c$ expansions of the operators that satisfy the properties mentioned above are given in detailed. The matrix elements of the operator $Q^{(ij)a} + \delta Q^{(ij)a}$ yield the actual values of the quadrupole moments. They are listed in Eqs. (57) and (58) for baryon decuplet and baryon decuplet-octet transitions. For baryon octet, the values are found to be zero, which is consistent with angular momentum selection rules. These expressions are given in terms of the free parameters of the theory. Retaining up to 3-body operators, there are two parameters (k_2 and k_3) for the case of exact flavor symmetry and six more introduced by SB ($c_{2,1}$, $c_{2,8}$, $c_{3,8}$, $c_{2,27}$, $c_{3,27}$, and $c_{3,10+\overline{10}}$). All in all, there are eight undetermined parameters. Unfortunately, the experimental information [31] is rather scarce, so at this time, it is not possible to perform a least-squares fit to compare theory

and experiment and extract information on these parameters. Any other attempts of reducing the number of free parameters are fruitless. The only pieces of information known up to now are those corresponding to the transition $\Delta^+ \rightarrow p$ [31]. The difficulties in measuring quadrupole moments depend on many factors. For instance, except for Ω^- , all of the decuplet baryons decay strongly, so couplings of the form decuplet-decuplet- γ are available only through virtual processes, which are difficult to measure [40].

To overcome the lack of experimental information on quadrupole moments, some relations among them are provided instead. Apart from the isospin relations (59) that must be satisfied by quadrupole moments in the presence of SB, other relations are also provided, (60), which can be quite useful in the future, when additional experiments are envisaged. In the meantime, the predictions of the $1/N_c$ expansion are in accordance with expectations.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors are grateful to Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Mexico) for partial support. R. F.-M. was also partially supported by Fondo de Apoyo a la Investigación (Universidad Autónoma de San Luis Potosí).

APPENDIX: REDUCTION OF BARYON OPERATORS

Different n -body operators that satisfy the properties imposed to make up the $1/N_c$ expansion of $Q^{(ij)a}$ can be constructed. However, some of them are linearly dependent and can be written in terms of the chosen linearly independent ones by using operator identities [45]. In this section a list of operator reductions, as complete as possible, is presented to identify those operators which are not eligible in the $1/N_c$ expansion of $Q^{(ij)a}$. Each one of the relations provided contains, on the left-hand side, the presumably dependent operator whereas, on the right-hand side, its equivalence in terms of the chosen operator basis.

1. 2-body operators

$$\{G^{ie}, G^{je}\} - \frac{1}{3}\delta^{ij}\{G^{re}, G^{re}\} = \frac{N_f - 1}{2N_f} \left[\{J^i, J^j\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}J^2 \right], \quad (\text{A1})$$

$$d^{abc}(\{G^{ib}, G^{jc}\} + \{G^{jb}, G^{ic}\}) - \frac{2}{3}\delta^{ij}d^{abc}\{G^{rb}, G^{rc}\} = \frac{N_f - 2}{N_f} \left[\{J^i, G^{ja}\} + \{J^j, G^{ia}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^r, G^{ra}\} \right]. \quad (\text{A2})$$

2. 3-body operators

$$\{J^i, \{T^e, G^{je}\}\} + \{J^j, \{T^e, G^{ie}\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^r, \{T^e, G^{re}\}\} = \frac{2(N_c + N_f)(N_f - 1)}{N_f} \left[\{J^i, J^j\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}J^2 \right], \quad (\text{A3})$$

$$\{T^a, \{G^{ie}, G^{je}\}\} - \frac{1}{3}\delta^{ij}\{T^a, \{G^{re}, G^{re}\}\} = \frac{N_f - 1}{2N_f} \left[\{T^a, \{J^i, J^j\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^2, T^a\} \right], \quad (\text{A4})$$

$$\begin{aligned} & \{G^{ia}, \{T^e, G^{je}\}\} + \{G^{ja}, \{T^e, G^{ie}\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{G^{ra}, \{T^e, G^{re}\}\} \\ & = \frac{(N_c + N_f)(N_f - 1)}{N_f} \left[\{J^i, G^{ja}\} + \{J^j, G^{ia}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^r, G^{ra}\} \right], \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

$$\{G^{ie}, \{T^a, G^{je}\}\} + \{G^{je}, \{T^a, G^{ie}\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{G^{re}, \{T^a, G^{re}\}\} = \frac{N_f - 1}{N_f} \left[\{T^a, \{J^i, J^j\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^2, T^a\} \right], \quad (\text{A6})$$

$$\begin{aligned} & d^{abc}(\{J^i, \{T^b, G^{jc}\}\} + \{J^j, \{T^b, G^{ic}\}\}) - \frac{2}{3}\delta^{ij}d^{abc}\{J^r, \{T^b, G^{rc}\}\} \\ & = \frac{N_f - 2}{N_f} \left[\{T^a, \{J^i, J^j\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^2, T^a\} \right] + \frac{(N_c + N_f)(N_f - 2)}{N_f} \left[\{J^i, G^{ja}\} + \{J^j, G^{ia}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^r, G^{ra}\} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

3. 4-body operators

$$\begin{aligned} & d^{abcd}(\{G^{ia}, \{G^{jb}, \{G^{rc}, G^{rd}\}\}\} + \{G^{ja}, \{G^{ib}, \{G^{rc}, G^{rd}\}\}\}) - \frac{2}{3}\delta^{ij}d^{abcd}\{G^{ma}, \{G^{mb}, \{G^{rc}, G^{rd}\}\}\} \\ & = \frac{N_f - 2}{8N_f} [5N_c(N_c + 2N_f) + 6N_f^2 + 2N_f - 8] \left[\{J^i, G^{ja}\} + \{J^j, G^{ia}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^r, G^{ra}\} \right] \\ & \quad - \frac{(N_f + 4)(N_f - 2)}{4N_f^2} \left[\{J^2, \{J^i, G^{ja}\}\} + \{J^2, \{J^j, G^{ia}\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^2, \{J^r, G^{ra}\}\} \right], \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

$$\begin{aligned} & d^{abc}\{\{G^{ib}, G^{jc}\}, \{G^{re}, G^{re}\}\} - \frac{1}{3}\delta^{ij}d^{abc}\{\{G^{mb}, G^{mc}\}, \{G^{re}, G^{re}\}\} \\ & = \frac{3N_c(N_c + 2N_f)(N_f - 2)}{8N_f} \left[\{J^i, G^{ja}\} + \{J^j, G^{ia}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^r, G^{ra}\} \right] \\ & \quad - \frac{N_f^2 - 4}{4N_f^2} \left[\{J^2, \{J^i, G^{ja}\}\} + \{J^2, \{J^j, G^{ia}\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^2, \{J^r, G^{ra}\}\} \right], \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

$$\begin{aligned} & d^{abc}\{\{J^i, J^j\}, \{T^b, T^c\}\} - \frac{1}{3}\delta^{ij}d^{abc}\{\{J^r, J^r\}, \{T^b, T^c\}\} \\ & = 2 \left[\{\{J^i, J^j\}, \{J^r, G^{ra}\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^2, \{J^r, G^{ra}\}\} \right] + \frac{(N_c + N_f)(N_f - 4)}{N_f} \left[\{T^a, \{J^i, J^j\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^2, T^a\} \right], \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

$$\begin{aligned} & d^{abc}\{\{J^i, J^j\}, \{G^{rb}, G^{rc}\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}d^{abc}\{J^2, \{G^{rb}, G^{rc}\}\} \\ & = -\frac{N_f + 4}{2N_f} \left[\{\{J^i, J^j\}, \{J^r, G^{ra}\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^2, \{J^r, G^{ra}\}\} \right] + \frac{3}{4}(N_c + N_f) \left[\{T^a, \{J^i, J^j\}\} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\{J^2, T^a\} \right], \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

$$\begin{aligned}
& \{\{J^i, G^{ja}\}, \{G^{re}, G^{re}\}\} + \{\{J^j, G^{ia}\}, \{G^{re}, G^{re}\}\} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{\{J^m, G^{ma}\}, \{G^{re}, G^{re}\}\} \\
&= \frac{3}{4} N_c (N_c + 2N_f) \left[\{J^i, G^{ja}\} + \{J^j, G^{ia}\} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{J^r, G^{ra}\} \right] \\
&\quad - \frac{N_f + 2}{2N_f} \left[\{J^2, \{J^i, G^{ja}\}\} + \{J^2, \{J^j, G^{ia}\}\} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{J^2, \{J^r, G^{ra}\}\} \right], \tag{A12}
\end{aligned}$$

$$\{\{J^r, G^{ra}\}, \{G^{ie}, G^{je}\}\} - \frac{1}{3} \delta^{ij} \{\{J^r, G^{ra}\}, \{G^{me}, G^{me}\}\} = \frac{N_f - 1}{2N_f} \left[\{\{J^i, J^j\}, \{J^r, G^{ra}\}\} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{J^2, \{J^r, G^{ra}\}\} \right]. \tag{A13}$$

4. 5-body operators

$$\begin{aligned}
& d^{abc} \{\{J^i, J^j\}, \{J^r, \{T^b, G^{rc}\}\}\} - \frac{2}{3} \delta^{ij} d^{abc} \{J^2, \{J^r, \{T^b, G^{rc}\}\}\} \\
&= \frac{N_f - 2}{N_f} \left[\{J^2, \{T^a, \{J^i, J^j\}\}\} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{J^2, \{J^2, T^a\}\} \right] \\
&\quad + \frac{(N_c + N_f)(N_f - 2)}{N_f} \left[\{\{J^i, J^j\}, \{J^r, G^{ra}\}\} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{J^2, \{J^r, G^{ra}\}\} \right], \tag{A14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{T^a, \{\{G^{ic}, G^{jc}\}, \{G^{re}, G^{re}\}\}\} - \frac{1}{3} \delta^{ij} \{T^a, \{\{G^{mc}, G^{mc}\}, \{G^{re}, G^{re}\}\}\} \\
&= -\frac{1}{4} \frac{(N_f + 2)(N_f - 1)}{N_f^2} \left[\{J^2, \{T^a, \{J^i, J^j\}\}\} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{J^2, \{J^2, T^a\}\} \right] \\
&\quad + \frac{3}{8} \frac{N_c(N_c + 2N_f)(N_f - 1)}{N_f} \left[\{T^a, \{J^i, J^j\}\} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \{J^2, T^a\} \right]. \tag{A15}
\end{aligned}$$

-
- [1] P. Ha, Decuplet baryon magnetic moments in a QCD-based quark model beyond quenched approximation, *Phys. Rev. D* **58**, 113003 (1998).
- [2] P. Ha and L. Durand, Baryon magnetic moments in a QCD-based quark model with loop corrections, *Phys. Rev. D* **58**, 093008 (1998).
- [3] J. Franklin, Phenomenological quark model for baryon magnetic moments and beta decay ratios (G_A/G_V), *Phys. Rev. D* **66**, 033010 (2002).
- [4] H. Dahiya and M. Gupta, Octet and decuplet baryon magnetic moments in the chiral quark model, *Phys. Rev. D* **67**, 114015 (2003).
- [5] B. Julia-Diaz and D. O. Riska, Baryon magnetic moments in relativistic quark models, *Nucl. Phys.* **A739**, 69 (2004).
- [6] K. Berger, R. F. Wagenbrunn, and W. Plessas, Covariant baryon charge radii and magnetic moments in a chiral constituent quark model, *Phys. Rev. D* **70**, 094027 (2004).
- [7] A. Faessler, T. Gutsche, B. R. Holstein, V. E. Lyubovitskij, D. Nicmorus, and K. Pumsa-ard, Light baryon magnetic moments and $N \rightarrow \Delta\gamma$ transition in a Lorentz covariant chiral quark approach, *Phys. Rev. D* **74**, 074010 (2006).
- [8] J. Linde, T. Ohlsson, and H. Snellman, Decuplet baryon magnetic moments in the chiral quark model, *Phys. Rev. D* **57**, 5916 (1998).
- [9] T. M. Aliev, A. Ozpineci, and M. Savci, Octet baryon magnetic moments in light cone QCD sum rules, *Phys. Rev. D* **66**, 016002 (2002); Erratum, *Phys. Rev. D* **67**, 039901 (2003).
- [10] S. T. Hong, Sum rules for baryon decuplet magnetic moments, *Phys. Rev. D* **76**, 094029 (2007).
- [11] L. Wang and F. X. Lee, Octet baryon magnetic moments from QCD sum rules, *Phys. Rev. D* **78**, 013003 (2008).
- [12] E. Jenkins and A. V. Manohar, Baryon magnetic moments in the $1/N$ expansion, *Phys. Lett. B* **335**, 452 (1994).
- [13] J. Dai, R. F. Dashen, E. Jenkins, and A. V. Manohar, Flavor symmetry breaking in the $1/N_c$ expansion, *Phys. Rev. D* **53**, 273 (1996).
- [14] E. Jenkins, X. d. Ji, and A. V. Manohar, $\Delta \rightarrow N\gamma$ in Large- N_c QCD, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 242001 (2002).

- [15] R. F. Lebed and D. R. Martin, Complete analysis of baryon magnetic moments in $1/N_c$, *Phys. Rev. D* **70**, 016008 (2004).
- [16] E. E. Jenkins, Baryon magnetic moments in the $1/N_c$ expansion with flavor symmetry breaking, *Phys. Rev. D* **85**, 065007 (2012).
- [17] D. G. Caldi and H. Pagels, Chiral perturbation theory and the magnetic moments of the baryon octet, *Phys. Rev. D* **10**, 3739 (1974).
- [18] J. Gasser, M. E. Sainio, and A. Svarc, Nucleons with chiral loops, *Nucl. Phys.* **B307**, 779 (1988).
- [19] A. Krause, Baryon matrix elements of the vector current in chiral perturbation theory, *Helv. Phys. Acta* **63**, 3 (1990).
- [20] E. Jenkins, M. E. Luke, A. V. Manohar, and M. J. Savage, Chiral perturbation theory analysis of the baryon magnetic moments, *Phys. Lett. B* **302**, 482 (1993); Erratum, *Phys. Lett. B* **388**, 866 (1996).
- [21] M. K. Banerjee and J. Milana, Decuplet reexamined in chiral perturbation theory, *Phys. Rev. D* **54**, 5804 (1996).
- [22] U. G. Meissner and S. Steininger, Baryon magnetic moments in chiral perturbation theory, *Nucl. Phys.* **B499**, 349 (1997).
- [23] L. Durand and P. Ha, Chiral perturbation theory analysis of the baryon magnetic moments revisited, *Phys. Rev. D* **58**, 013010 (1998).
- [24] S. J. Puglia and M. J. Ramsey-Musolf, Baryon octet magnetic moments in χ PT: More on the importance of the decuplet, *Phys. Rev. D* **62**, 034010 (2000).
- [25] D. Arndt and B. C. Tiburzi, Baryon decuplet to octet electromagnetic transitions in quenched and partially quenched chiral perturbation theory, *Phys. Rev. D* **69**, 014501 (2004).
- [26] L. S. Geng, J. M. Camalich, L. Alvarez-Ruso, and M. J. V. Vacas, Leading $SU(3)$ -Breaking Corrections to the Baryon Magnetic Moments in Chiral Perturbation Theory, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 222002 (2008).
- [27] L. S. Geng, J. M. Camalich, and M. J. V. Vacas, Electromagnetic structure of the lowest-lying decuplet resonances in covariant chiral perturbation theory, *Phys. Rev. D* **80**, 034027 (2009).
- [28] R. Flores-Mendieta, Baryon magnetic moments in large- N_c chiral perturbation theory, *Phys. Rev. D* **80**, 094014 (2009).
- [29] G. Ahuatzin, R. Flores-Mendieta, M. A. Hernandez-Ruiz, and C. P. Hofmann, Baryon magnetic moments in large- N_c chiral perturbation theory: Effects of the decuplet-octet mass difference and flavor symmetry breaking, *Phys. Rev. D* **89**, 034012 (2014).
- [30] I. C. Cloet, D. B. Leinweber, and A. W. Thomas, Delta baryon magnetic moments from lattice QCD, *Phys. Lett. B* **563**, 157 (2003).
- [31] M. Tanabashi *et al.* (Particle Data Group), Review of particle physics, *Phys. Rev. D* **98**, 030001 (2018).
- [32] M. I. Krivoruchenko and M. M. Giannini, Quadrupole moments of the decuplet baryons, *Phys. Rev. D* **43**, 3763 (1991).
- [33] N. Sharma and H. Dahiya, Charge radii and quadrupole moments of the low-lying baryons in the chiral constituent quark model, *Adv. High Energy Phys.* **2013**, 756847 (2013).
- [34] N. Sharma and H. Dahiya, Quadrupole moments of low lying baryons with spin $1/2^+$, spin $3/2^+$, and spin $3/2^+ \rightarrow 1/2^+$ transitions, *Pramana* **80**, 237 (2013); Erratum, *Pramana* **80**, 1083 (2013).
- [35] T. M. Aliev, K. Azizi, and M. Savci, Electric quadrupole and magnetic octupole moments of the light decuplet baryons within light cone QCD sum rules, *Phys. Lett. B* **681**, 240 (2009).
- [36] K. Azizi, Magnetic dipole, electric quadrupole and magnetic octupole moments of the Delta baryons in light cone QCD sum rules, *Eur. Phys. J. C* **61**, 311 (2009).
- [37] Y. s. Oh, Electric quadrupole moments of the decuplet baryons in the Skyrme model, *Mod. Phys. Lett. A* **10**, 1027 (1995).
- [38] A. J. Buchmann and E. M. Henley, Intrinsic quadrupole moment of the nucleon, *Phys. Rev. C* **63**, 015202 (2000).
- [39] A. J. Buchmann and E. M. Henley, Quadrupole moments of baryons, *Phys. Rev. D* **65**, 073017 (2002).
- [40] A. J. Buchmann, J. A. Hester, and R. F. Lebed, Quadrupole moments of N and Δ in the $1/N_c$ expansion, *Phys. Rev. D* **66**, 056002 (2002).
- [41] A. J. Buchmann and R. F. Lebed, Baryon charge radii and quadrupole moments in the $1/N_c$ expansion: The three flavor case, *Phys. Rev. D* **67**, 016002 (2003).
- [42] M. N. Butler, M. J. Savage, and R. P. Springer, Electromagnetic moments of the baryon decuplet, *Phys. Rev. D* **49**, 3459 (1994).
- [43] C. Alexandrou, G. Koutsou, H. Neff, J. W. Negele, W. Schroers, and A. Tsapalis, Nucleon to delta electromagnetic transition form factors in lattice QCD, *Phys. Rev. D* **77**, 085012 (2008).
- [44] C. Alexandrou, G. Koutsou, J. W. Negele, Y. Proestos, and A. Tsapalis, Nucleon to Delta transition form factors with $N_F = 2 + 1$ domain wall fermions, *Phys. Rev. D* **83**, 014501 (2011).
- [45] R. F. Dashen, E. Jenkins, and A. V. Manohar, Spin flavor structure of large N_c baryons, *Phys. Rev. D* **51**, 3697 (1995).
- [46] E. E. Jenkins and R. F. Lebed, Baryon mass splittings in the $1/N_c$ expansion, *Phys. Rev. D* **52**, 282 (1995).
- [47] R. Flores-Mendieta, E. E. Jenkins, and A. V. Manohar, $SU(3)$ symmetry breaking in hyperon semileptonic decays, *Phys. Rev. D* **58**, 094028 (1998).
- [48] R. Flores-Mendieta, V_{us} from hyperon semileptonic decays, *Phys. Rev. D* **70**, 114036 (2004).
- [49] R. F. Dashen and A. V. Manohar, Baryon—pion couplings from large- N_c QCD, *Phys. Lett. B* **315**, 425 (1993); $1/N_c$ corrections to the baryon axial currents in QCD, *Phys. Lett. B* **315**, 438 (1993).
- [50] J. L. Gervais and B. Sakita, Large- N Baryonic Soliton and Quarks, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 87 (1984); *Phys. Rev. D* **30**, 1795 (1984).

Spin and flavor projection operators in the $SU(2N_f)$ spin-flavor group

Víctor Miguel Banda Guzmán 

*Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo,
Edificio C-3, Apdo. Postal 2-82, Morelia, Michoacán 58040, México*

Rubén Flores-Mendieta , Johann Hernández , and Felipe de Jesús Rosales-Aldape

*Instituto de Física, Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Álvaro Obregón 64,
Zona Centro, San Luis Potosí, S.L.P. 78000, México*



(Received 26 June 2020; accepted 31 July 2020; published 10 August 2020)

The quadratic Casimir operator of the special unitary $SU(N)$ group is used to construct projection operators, which can decompose any of its reducible finite-dimensional representation spaces contained in the tensor product of two and three adjoint spaces into irreducible components. Although the method is general enough, it is specialized to the $SU(2N_f) \rightarrow SU(2) \otimes SU(N_f)$ spin-flavor symmetry group, which emerges in the baryon sector of QCD in the large- N_c limit, where N_f and N_c are the numbers of light quark flavors and color charges, respectively. The approach leads to the construction of spin and flavor projection operators that can be implemented in the analysis of the $1/N_c$ operator expansion. The use of projection operators allows one to successfully project out the desired components of a given operator and subtract off those that are not needed. Some explicit examples in $SU(2)$ and $SU(3)$ are detailed.

DOI: [10.1103/PhysRevD.102.036010](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.036010)

I. INTRODUCTION

The concept of symmetry, and specially gauge symmetry, is crucial in elementary particle physics. Early analyses of atomic spectra successfully implemented the use of $SU(2)$ representation theory to study the spin of particles. Further analyses in nuclear physics struggled to find out how protons and neutrons interact via a strong force to bind together into nuclei. Promptly, it was discovered that the strong force had an $SU(2)$ invariance; it was called isospin symmetry and its irreducible representations (irreps) were labeled by isospin $1/2, 1, \dots$. A well-known example is the two-dimensional isospin- $1/2$ representation made up by the proton and neutron.

In the early decade of the 60s of the past century, a large number of new strongly interacting particles were discovered so it was imperative to classify them. Gell-Mann first suggested that they could be accommodated into irreps of $SU(3)$, so he proposed an organizational scheme for hadrons. It was called the *eightfold way* [1]; this peculiar name, presumably, is closely related to the fact that Gell-Mann mainly used the eight-dimensional adjoint representation of $SU(3)$.

Eventually, it was evident that the $SU(3)$ symmetry found by Gell-Mann was due to the existence of the three light quarks, u, d, s , which fitted into the fundamental three-dimensional representation of $SU(3)$. This symmetry has been since referred to as $SU(3)$ flavor symmetry. Hadrons were thus organized into $SU(3)$ representation multiplets—octets and decuplets—of roughly the same mass.

The special unitary group also plays a role in the local $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ gauge symmetry, which defines the modern standard model (SM) of particles and their interactions. Roughly, the three factors of the gauge symmetry give rise to the three fundamental interactions. Quantum chromodynamics (QCD), the theory of the strong interactions, is the $SU(3)$ component of the SM. It is a gauge theory of fermions—the quarks—and gauge bosons—the gluons—and stems from the fact that each quark comes in three completely identical states called colors; the symmetry is thus referred to as $SU(3)$ color symmetry. Unlike flavor symmetry, which is an approximate symmetry due to the relatively small masses of the three light quarks and plays a marginal role in the SM, color symmetry is exact and does play a preponderant role. At low energies, the running coupling constant of the theory is large, and the colored quarks and gluons must clump together to form colorless hadrons.

Various attempts have been made so far to construct grand unified theories of the weak, strong, and electromagnetic interactions. These approaches mostly use Lie groups. Common examples are $SU(5)$ in the simplest grand

Published by the American Physical Society under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International license. Further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the published article's title, journal citation, and DOI. Funded by SCOAP³.

unification theory, $SO(10)$, and E_6 . Further applications of $SU(N)$ can also be found in shell models of nuclear and atomic physics [2,3], the worldline approach to non-Abelian gauge fields [4–6], to name but a few.

It should be stressed that, despite the tremendous progress achieved in the understanding of the strong interactions with QCD, the analytical calculation of the structure and interactions of hadrons directly in terms of the underlying quark-gluon dynamics is not possible because the theory is strongly coupled at low energies. Soon after the advent of QCD, 't Hooft pointed out that gauge theories based on the $SU(N_c)$ group simplify in the limit $N_c \rightarrow \infty$, where N_c is the number of color charges [7]. Baryons in large- N_c QCD were first studied by Witten [8]. Later, it was shown that in the large- N_c limit the baryon sector has an exact contracted $SU(2N_f)$ spin-flavor symmetry, where N_f is the number of light quark flavors [9–12]. Physical quantities are then considered in this limit, where corrections emerge at relative orders $1/N_c$, $1/N_c^2$, and so on; this sequence originates the $1/N_c$ expansion of QCD.

The $1/N_c$ expansion turns out to be quite useful for studying the interactions and properties of large- N_c color-singlet baryons at low energies. The construction of the $1/N_c$ expansion of any QCD operator transforming according to a given spin \otimes flavor representation is expressed in terms of n -body operators O_n , which can be written as polynomials of homogeneous degree n in the spin-flavor generators. The operators O_n make up a complete and independent operator basis [13]. It should be emphasized that for baryons at large finite N_c , the $1/N_c$ operator expansion only extends to N_c -body operators in the baryon spin-flavor generators. Although straightforward in principle, the reduction of higher-order operator structures to the physical operator basis turns out to be quite tedious due to the considerable amount of group theory involved. The fact that the operator basis is complete and independent makes those reductions possible.

Here is precisely where the aim of the present paper can be delineated: to present a general procedure to construct projection operators in $SU(N)$ out of the corresponding Casimir operators. The projection operators so obtained act on tensor operators that belong to tensor products of adjoint representation spaces, decomposing them into different operators with specific quadratic Casimir eigenvalues. The applicability to the $1/N_c$ operator expansion is immediate. The cases of physical interest for $N_f = 2$ and $N_f = 3$ are worked out to show the usefulness of the resultant projectors. In passing, it can be pointed out that the method is not limited to the $1/N_c$ expansion, but it can also be used in shell models of atomic and nuclear physics; in this case, the projector method allows one to construct tensor operators which, with the aid of the Wigner-Eckart theorem, can be used to calculate transition amplitudes. The worldline approach to non-Abelian gauge fields is also another area where the projector method can be adapted to

fit there. All in all, the method shows some potential applicability in areas where the $SU(N)$ group is involved.

The organization of the paper is as follows. In Sec. II, some theoretical aspects of the $SU(N)$ group are briefly summarized, starting with some rather elementary concepts and definitions, which are provided to set notation and conventions. A key feature in the analysis is the definition of the adjoint space and the tensor space formed by the product of n adjoint spaces. The latter can always be decomposed into subspaces labeled by a specific eigenvalue of the quadratic Casimir operator of the algebra of $SU(N)$. The procedure to do so is discussed at the end of this section, and the defining general expression of the projection operator is provided. In Sec. III, the projection operators for the tensor product space of two adjoint spaces are constructed explicitly. The properties that by definition projection operators are demanded to fulfilled are rigorously verified. The particular case $N = 2$ is also discussed at the end of this section. In Sec. IV, the projection operators previously defined are specialized to the $SU(2N_f)$ spin-flavor symmetry group, which breaks to its spin and flavor groups $SU(2) \otimes SU(N_f)$. Consequently, the spin and flavor projection operators are constructed and readily applied to the $1/N_c$ operator expansion. In Sec. V, the method is outlined for the tensor product space of three adjoint spaces. In this case, the explicit construction of projection operators becomes a rather involved task, so only a few examples are detailed. Some closing remarks and conclusions are provided in Sec. VI. The paper is complemented by two appendices, where some supplemental information is provided.

II. PROJECTOR TECHNIQUE FOR $SU(N)$ ADJOINT TENSOR OPERATORS

To start with, a salient definition is that of a Lie group. It is defined as a group in which the elements are labeled by a set of continuous parameters with a multiplication law that depends smoothly on the parameters themselves [14]. A compact Lie group, on the other hand, is a Lie group in which the parametrization consists of a finite number of bounded parameter domains; otherwise, the group is referred to as noncompact [15]. The $SU(N)$ group of all complex unitary matrices of order N with determinant 1 and the $SO(N)$ group of all real orthogonal matrices of order N with determinant 1 are two well-known examples of connected compact Lie groups.

The elements of a Lie group can be written as

$$\exp \left[i \sum_a \beta^a X^a \right], \quad (1)$$

where β^a , $a = 1, \dots, N$ are real numbers and X^a are linearly independent Hermitian operators. Hereafter, and unless explicitly noticed otherwise, the sum over repeated indices

will be implicit. The X^a are referred to as the generators of the Lie group and they satisfy the commutation relations

$$[X^a, X^b] = if^{abc}X^c. \quad (2)$$

The f^{abc} are referred to as the structure constants of the Lie group. The vector space $\beta^a X^a$, together with the commutation relations (2), define the Lie algebra associated with the Lie group.

The generators satisfy the Jacobi identity,

$$[X^a, [X^b, X^c]] + \text{cyclic permutations} = 0, \quad (3)$$

which in terms of the structure constants becomes

$$f^{bce}f^{aeg} + f^{abe}f^{ceg} + f^{cae}f^{beg} = 0. \quad (4)$$

The quadratic Casimir operator is defined as

$$C \equiv X^e X^e, \quad (5)$$

so that

$$[C, X^a] = 0. \quad (6)$$

As for the $SU(N)$ group, let T^a be operators that generate the Lie algebra of the group. There are $N^2 - 1$ of such operators, which serve as a basis for the set of traceless Hermitian $N \times N$ matrices. The generators satisfy the commutation relations

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \quad (7)$$

where a, b, c run from 1 to the dimension of the Lie algebra of $SU(N)$, i.e., from 1 to $N^2 - 1$.

In the fundamental representation of $SU(N)$, the normalization convention usually adopted for the generators reads

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}, \quad (8)$$

so in this convention the f^{abc} are totally antisymmetric with respect to the interchange of any two indices.

Let T_A^a define a set of operators such that

$$[T_A^a]^{cb} \equiv if^{abc}, \quad (9)$$

i.e., the structure constants themselves constitute a matrix representation of the operators. The representation generated by the structure constants is called the *adjoint representation*.

An $SU(N)$ adjoint operator Q^a can thus be defined, such that

$$[T^a, Q^b] = if^{abc}Q^c. \quad (10)$$

The operators Q^a can make up a basis for the carrier space where the generators of the Lie algebra of $SU(N)$ in the adjoint representation act [15]. If T_A^a are taken as the generators in the adjoint representation, relation (10) is equivalent to

$$T_A^a Q^b = if^{abc}Q^c. \quad (11)$$

Hereafter, the carrier space generated by the operators Q^a will be referred to as the *adjoint space* and will be denoted by $adj = \{Q^a\}$.

Another tensor space of interest is the one formed by the product of the adjoint space with itself n times. It is denoted by $\prod_{i=1}^n adj \otimes$. This space can usually be decomposed into subspaces labeled by a specific eigenvalue of the quadratic Casimir operator C of the Lie algebra of $SU(N)$. The decomposition can be achieved by adapting the projector technique for decomposing reducible representations introduced in Ref. [16]. Following the lines of that reference, the sought projection operators $\mathcal{P}^{(m)}$ are thus constructed as

$$\mathcal{P}^{(m)} = \prod_{i=1}^k \left[\frac{C - c_{n_i}}{c_m - c_{n_i}} \right], \quad c_m \neq c_{n_i}, \quad (12)$$

where k labels the number of different possible eigenvalues for the quadratic Casimir operator and c_m are its eigenvalues given by [17]

$$c_m = \frac{1}{2} \left[nN - \frac{n^2}{N} + \sum_i r_i^2 - \sum_i c_i^2 \right], \quad (13)$$

where n is the total number of boxes of the Young tableau for a specific representation, r_i is the number of boxes in the i th row, and c_i is the number of boxes in the i th column.

From the defining expression (12), it can be inferred that if $\prod_{i=1}^n Q_i^{a_i}$ is an $SU(N)$ tensor operator, where each $Q_i^{a_i}$ satisfies the commutation relation (10), then

$$\mathcal{P}^{(m)} \prod_{i=1}^n Q_i^{a_i} = \tilde{Q}^{a_1 \dots a_n}, \quad (14)$$

where the tensor $\tilde{Q}^{a_1 \dots a_n}$ is an eigenstate for the quadratic Casimir C with eigenvalue c_m ,

$$C \tilde{Q}^{a_1 \dots a_n} = c_m \tilde{Q}^{a_1 \dots a_n}. \quad (15)$$

In the following sections, the decompositions of the tensor spaces $adj \otimes adj$ and $adj \otimes adj \otimes adj$ will be carried out by using the projector technique described above.

III. PROJECTION OPERATORS IN THE TENSOR SPACE $adj \otimes adj$

The Young tableau for the adjoint representation is given by

$$adj = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \vdots & \\ \hline N-1 & \\ \hline \end{array}$$

The tensor space $adj \otimes adj$ decomposes as

$$adj \otimes adj = 1 \oplus 2 \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \vdots & \\ \hline N-2 & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & & \\ \hline \vdots & & \\ \hline N-2 & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \vdots & & \\ \hline N-1 & N & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 3 & & \\ \hline 3 & 4 & & \\ \hline \vdots & & & \\ \hline N-1 & N & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \vdots & \\ \hline N-2 & \\ \hline \end{array}$$

In the notation of Ref. [13], the above irreps are designated by

$$adj \otimes adj = 1 \oplus 2adj \oplus \bar{a}s \oplus \bar{s}a \oplus \bar{s}s \oplus \bar{a}a, \quad (16)$$

so this convenient notation will also be used here.

The quadratic Casimir eigenvalues for each representation in the decomposition of $adj \otimes adj$ are obtained from Eq. (13) and are listed in the second column (from left to right) of Table I.

Since five different eigenvalues are available, the projectors in Eq. (12) are computed as

$$\mathcal{P}^{(m)} = \frac{\alpha_0 - \alpha_1 C + \alpha_2 C^2 - \alpha_3 C^3 + C^4}{\prod_{i=1}^4 (c_m - c_{n_i})}, \quad c_m \neq c_{n_i}, \quad (17)$$

where

$$\alpha_0 = c_{n_1} c_{n_2} c_{n_3} c_{n_4}, \quad (18a)$$

$$\alpha_1 = c_{n_1} c_{n_2} c_{n_3} + c_{n_1} c_{n_2} c_{n_4} + c_{n_1} c_{n_3} c_{n_4} + c_{n_2} c_{n_3} c_{n_4}, \quad (18b)$$

$$\alpha_2 = c_{n_1} c_{n_2} + c_{n_1} c_{n_3} + c_{n_1} c_{n_4} + c_{n_2} c_{n_3} + c_{n_2} c_{n_4} + c_{n_3} c_{n_4}, \quad (18c)$$

and

$$\alpha_3 = c_{n_1} + c_{n_2} + c_{n_3} + c_{n_4}. \quad (18d)$$

A word of caution is in order here. The defining expression of $\mathcal{P}^{(m)}$, Eq. (12), and its subsequent version

for the tensor space $adj \otimes adj$, Eq. (17), impose the condition $c_m \neq c_{n_i}$ in order to avoid singularities. Particularly, note that $\bar{a}s$ and $\bar{s}a$ are complex-conjugated representations, so they share the same eigenvalue of the Casimir operator, $c_2 = 2N$, according to Table I. For this reason, it is not only convenient but also necessary to construct a projection operator that comprises both representations, as it is described below.

On the other hand, a complete determination of C demands the evaluation of the generators T_{2A}^a that act in the tensor space $adj \otimes adj$. In terms of T_A , they are given by

$$T_{2A}^a = T_A^a \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes T_A^a. \quad (19)$$

Therefore,

$$\begin{aligned} C &= T_{2A}^e T_{2A}^e \\ &= T_A^e T_A^e \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes T_A^e T_A^e + 2T_A^e \otimes T_A^e. \end{aligned} \quad (20)$$

Since $T_A^e T_A^e$ is the quadratic Casimir operator for the adjoint representation, then by Schur's lemma

$$T_A^e T_A^e = N\mathbb{1}. \quad (21)$$

Thus,

$$C = 2(N\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + T_A^e \otimes T_A^e). \quad (22)$$

The action of C on a tensor operator $Q_1^{b_1} Q_2^{b_2}$ yields, according to Eq. (11),

TABLE I. Quadratic Casimir eigenvalues and projectors corresponding to each representation in the decomposition of the reducible tensor representation $adj \otimes adj$.

Rep	Eigenvalue	Representation																											
1	$c_0 = 0$	1																											
adj	$c_1 = N$	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td></td></tr> <tr><td>⋮</td><td></td></tr> <tr><td>$N-1$</td><td></td></tr> </table>	1	2	2		3		⋮		$N-1$																		
1	2																												
2																													
3																													
⋮																													
$N-1$																													
$\bar{a}s \oplus \bar{s}a$	$c_2 = 2N$	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>⋮</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>$N-2$</td><td></td><td></td></tr> </table> \oplus <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td></td></tr> <tr><td>⋮</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>$N-1$</td><td>N</td><td></td></tr> </table>	1	2	3	2			⋮			$N-2$			1	2	3	2	3	4	3	4		⋮			$N-1$	N	
1	2	3																											
2																													
⋮																													
$N-2$																													
1	2	3																											
2	3	4																											
3	4																												
⋮																													
$N-1$	N																												
$\bar{s}s$	$c_3 = 2(N+1)$	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>⋮</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>$N-1$</td><td>N</td><td></td><td></td></tr> </table>	1	2	3	4	2	3			3	4			⋮				$N-1$	N									
1	2	3	4																										
2	3																												
3	4																												
⋮																													
$N-1$	N																												
$\bar{a}a$	$c_4 = 2(N-1)$	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td></td></tr> <tr><td>⋮</td><td></td></tr> <tr><td>$N-2$</td><td></td></tr> </table>	1	2	2	3	3		⋮		$N-2$																		
1	2																												
2	3																												
3																													
⋮																													
$N-2$																													

$$CQ_1^{b_1}Q_2^{b_2} = 2(N\delta^{b_1a_1}\delta^{b_2a_2} - f^{b_1a_1e}f^{b_2a_2e})Q_1^{a_1}Q_2^{a_2}. \quad (23)$$

Therefore, in components, C reads

$$\begin{aligned}
 [C]^{a_1a_2b_1b_2} &= 2(N\delta^{b_1a_1}\delta^{b_2a_2} - F^{b_1a_1b_2a_2}) \\
 &= \frac{4}{N} \left[\frac{N^2}{2} \delta^{b_1a_1}\delta^{b_2a_2} - \delta^{b_1b_2}\delta^{a_1a_2} + \delta^{b_1a_2}\delta^{b_2a_1} \right] \\
 &\quad - 2(D^{b_1b_2a_1a_2} - D^{b_1a_2b_2a_1}), \quad (24)
 \end{aligned}$$

where the second equality follows from the identities listed in Appendix A. For the ease of notation, the symbols $F^{a_1a_2b_1b_2}$ and $D^{a_1a_2b_1b_2}$ have also been introduced; they read

$$F^{a_1a_2b_1b_2} = f^{a_1a_2e}f^{b_1b_2e}, \quad (25a)$$

$$D^{a_1a_2b_1b_2} = d^{a_1a_2e}d^{b_1b_2e}, \quad (25b)$$

where the fully symmetric coefficients $d^{a_1a_2a_3}$ read

$$d^{a_1a_2a_3} = \frac{1}{4} \text{Tr}(\{T^{a_1}, T^{a_2}\}T^{a_3}). \quad (26)$$

Additionally, let us also define the operator G acting on $Q_1^{b_1}Q_2^{b_2}$ with components,

$$[G]^{a_1a_2b_1b_2} = -F^{a_1b_1a_2b_2}, \quad (27)$$

so that the quadratic Casimir C in Eq. (22) can be rewritten as

$$C = 2(N + G), \quad (28)$$

and powers of C are straightforwardly obtained as

$$C^2 = 4(N^2 + 2NG + G^2), \quad (29)$$

$$C^3 = 8(N^3 + 3N^2G + 3NG^2 + G^3), \quad (30)$$

$$C^4 = 16(N^4 + 4N^3G + 6N^2G^2 + 4NG^3 + G^4). \quad (31)$$

By making use again of the identities listed in Appendix A, the powers of the operator G required in the analysis are explicitly given by

$$\begin{aligned}
 [G^2]^{a_1a_2b_1b_2} &= \frac{1}{2}(2\delta^{a_1a_2}\delta^{b_1b_2} + \delta^{a_1b_1}\delta^{a_2b_2} + \delta^{a_1b_2}\delta^{a_2b_1}) \\
 &\quad + \frac{N}{4}(F^{a_1a_2b_1b_2} + D^{a_1a_2b_1b_2}), \quad (32a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [G^3]^{a_1a_2b_1b_2} &= -N\delta^{a_1a_2}\delta^{b_1b_2} - \frac{1}{2}(F^{a_1b_1a_2b_2} + F^{a_2b_1a_1b_2}) \\
 &\quad - \frac{N^2}{8}(F^{a_1a_2b_1b_2} + D^{a_1a_2b_1b_2}), \quad (32b)
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 [G^4]^{a_1a_2b_1b_2} &= (N^2 + 1)\delta^{a_1a_2}\delta^{b_1b_2} + \frac{1}{2}(\delta^{a_1b_1}\delta^{a_2b_2} + \delta^{a_2b_1}\delta^{a_1b_2}) \\
 &\quad + \frac{N^3}{16}F^{a_1a_2b_1b_2} + \frac{1}{16}N(N^2 + 4)D^{a_1a_2b_1b_2}. \quad (32c)
 \end{aligned}$$

All the necessary powers of C involved in Eq. (12) are now explicitly determined, so the projection operator $\mathcal{P}^{(m)}$, corresponding to eigenvalue c_m of C , can be evaluated. For instance, for $c_0 = 0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^{(0)} &= \frac{\alpha_0 - \alpha_1 C + \alpha_2 C^2 - \alpha_3 C^3 + C^4}{\prod_{i=1}^4 (0 - c_i)} \\ &= -\frac{NG + 2G^2 - NG^3 - 2G^4}{N^2(N^2 - 1)},\end{aligned}\quad (33)$$

where

$$\alpha_0 = 8N^2(N^2 - 1), \quad (34a)$$

$$\alpha_1 = 4N(5N^2 - 3), \quad (34b)$$

$$\alpha_2 = 18N^2 - 4, \quad (34c)$$

and

$$\alpha_3 = 7N. \quad (34d)$$

Thus,

$$[\mathcal{P}^{(0)}]^{a_1 a_2 b_1 b_2} = \frac{1}{N^2 - 1} \delta^{a_1 a_2} \delta^{b_1 b_2}. \quad (35)$$

The procedure can be repeated for the remaining four eigenvalues, which yields the projection operators

$$[\mathcal{P}^{(1)}]^{a_1 a_2 b_1 b_2} = \frac{N}{N^2 - 4} D^{a_1 a_2 b_1 b_2} + \frac{1}{N} F^{a_1 a_2 b_1 b_2}, \quad (36)$$

$$[\mathcal{P}^{(2)}]^{a_1 a_2 b_1 b_2} = \frac{1}{2} (\delta^{a_1 b_1} \delta^{a_2 b_2} - \delta^{a_2 b_1} \delta^{a_1 b_2}) - \frac{1}{N} F^{a_1 a_2 b_1 b_2}, \quad (37)$$

$$\begin{aligned}[\mathcal{P}^{(3)}]^{a_1 a_2 b_1 b_2} &= \frac{N+2}{4N} (\delta^{a_1 b_1} \delta^{a_2 b_2} + \delta^{a_2 b_1} \delta^{a_1 b_2}) \\ &\quad - \frac{N+2}{2N(N+1)} \delta^{a_1 a_2} \delta^{b_1 b_2} - \frac{N+4}{4(N+2)} D^{a_1 a_2 b_1 b_2} \\ &\quad + \frac{1}{4} (D^{a_1 b_1 a_2 b_2} + D^{a_2 b_1 a_1 b_2}),\end{aligned}\quad (38)$$

$$\begin{aligned}[\mathcal{P}^{(4)}]^{a_1 a_2 b_1 b_2} &= \frac{N-2}{4N} (\delta^{a_1 b_1} \delta^{a_2 b_2} + \delta^{a_2 b_1} \delta^{a_1 b_2}) \\ &\quad + \frac{N-2}{2N(N-1)} \delta^{a_1 a_2} \delta^{b_1 b_2} + \frac{N-4}{4(N-2)} D^{a_1 a_2 b_1 b_2} \\ &\quad - \frac{1}{4} (D^{a_1 b_1 a_2 b_2} + D^{a_2 b_1 a_1 b_2}).\end{aligned}\quad (39)$$

The above projection operators satisfy the properties

$$[\mathcal{P}^{(m)}]^{a_1 a_2 d_1 d_2} [\mathcal{P}^{(n)}]^{d_1 d_2 b_1 b_2} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ [\mathcal{P}^{(m)}]^{a_1 a_2 b_1 b_2}, & m = n, \end{cases}\quad (40)$$

which are demanded by definition.

Also, notice that

$$\sum_{m=0}^4 [\mathcal{P}^{(m)}]^{a_1 a_2 b_1 b_2} = \delta^{a_1 b_1} \delta^{a_2 b_2}, \quad (41)$$

so they constitute a complete set of operators.

Now, given two adjoints $Q_1^{b_1}$ and $Q_2^{b_2}$, the action of projectors $\mathcal{P}^{(m)}$ on the adjoint tensor operator $Q_1^{b_1} Q_2^{b_2}$ yields

$$\begin{aligned}[Q^{(0)}]^{b_1 b_2} &= [\mathcal{P}^{(0)} Q_1 Q_2]^{b_1 b_2} \\ &= \frac{1}{N^2 - 1} \delta^{b_1 b_2} Q_1^e Q_2^e,\end{aligned}\quad (42)$$

$$\begin{aligned}[Q^{(1)}]^{b_1 b_2} &= [\mathcal{P}^{(1)} Q_1 Q_2]^{b_1 b_2} \\ &= \frac{N}{N^2 - 4} D^{b_1 b_2 a_1 a_2} Q_1^{a_1} Q_2^{a_2} + \frac{1}{N} F^{b_1 b_2 a_1 a_2} Q_1^{a_1} Q_2^{a_2},\end{aligned}\quad (43)$$

$$\begin{aligned}[Q^{(2)}]^{b_1 b_2} &= [\mathcal{P}^{(2)} Q_1 Q_2]^{b_1 b_2} \\ &= \frac{1}{2} (Q_1^{b_1} Q_2^{b_2} - Q_1^{b_2} Q_2^{b_1}) - \frac{1}{N} F^{b_1 b_2 a_1 a_2} Q_1^{a_1} Q_2^{a_2},\end{aligned}\quad (44)$$

$$\begin{aligned}[Q^{(3)}]^{b_1 b_2} &= [\mathcal{P}^{(3)} Q_1 Q_2]^{b_1 b_2} \\ &= \frac{N+2}{4N} (Q_1^{b_1} Q_2^{b_2} + Q_1^{b_2} Q_2^{b_1}) \\ &\quad - \frac{N+2}{2N(N+1)} \delta^{b_1 b_2} Q_1^e Q_2^e \\ &\quad - \frac{N+4}{4(N+2)} D^{a_1 a_2 b_1 b_2} Q_1^{a_1} Q_2^{a_2} \\ &\quad + \frac{1}{4} (D^{b_1 a_1 b_2 a_2} + D^{b_1 a_2 b_2 a_1}) Q_1^{a_1} Q_2^{a_2},\end{aligned}\quad (45)$$

$$\begin{aligned}[Q^{(4)}]^{b_1 b_2} &= [\mathcal{P}^{(4)} Q_1 Q_2]^{b_1 b_2} \\ &= \frac{N-2}{4N} (Q_1^{b_1} Q_2^{b_2} + Q_1^{b_2} Q_2^{b_1}) \\ &\quad + \frac{N-2}{2N(N-1)} \delta^{b_1 b_2} Q_1^e Q_2^e \\ &\quad + \frac{N-4}{4(N-2)} D^{a_1 a_2 b_1 b_2} Q_1^{a_1} Q_2^{a_2} \\ &\quad - \frac{1}{4} (D^{b_1 a_1 b_2 a_2} + D^{b_1 a_2 b_2 a_1}) Q_1^{a_1} Q_2^{a_2}.\end{aligned}\quad (46)$$

The operators on the left-hand sides in Eqs. (42)–(46) are labeled by an index that indicates the space representation they belong to. Therefore, when projection operator $\mathcal{P}^{(m)}$ acts on the tensor product of two adjoints, it projects out precisely the component of the representation it belongs to. Two simple examples for $N = 2$ and $N = 3$ suffice to illustrate the usefulness of the projection operators so far

constructed. These examples are worked out in the following sections.

A. Projection operators for $N=2$

$SU(2)$ is the simplest non-Abelian Lie group. It appears in two scenarios in physics. One is as the spin double cover of the rotation $SO(3)$ group, and the other is as an internal symmetry relating types of particles. Explicit realizations of them are spin and isotopic spin symmetries. The generators J^i and I^a correspond to spin and isospin, respectively, and the corresponding conventional structure constants are ϵ^{ijk} ($i, j, k = 1, 2, 3$) and ϵ^{abc} ($a, b, c = 1, 2, 3$), which are totally antisymmetric.

To construct the projection operators for $N=2$, an important issue to be kept in mind is the fact that $SU(2)$ does not admit representations for the eigenvalues $c_2 = 2N$ and $c_4 = 2(N-1)$ of the quadratic Casimir operator in the space $adj \otimes adj$ listed in Table I, so the procedure to construct $\mathcal{P}^{(m)}$ must be adapted accordingly because, in particular, $\mathcal{P}^{(1)}$ of Eq. (36) as it stands is ill-defined for $N=2$. Therefore, the procedure must be repeated accounting for the eigenvalues c_0, c_1 , and c_3 only.

While the projector $\mathcal{P}^{(0)}$ is easily obtained as

$$[\mathcal{P}^{(0)}]^{a_1 a_2 b_1 b_2} = \frac{1}{3} \delta^{a_1 a_2} \delta^{b_1 b_2}, \quad (47)$$

$\mathcal{P}^{(1)}$ is constructed as

$$\mathcal{P}^{(1)} = \frac{C^2 - (c_0 + c_3)C + c_0 c_3}{(c_1 - c_0)(c_1 - c_2)}. \quad (48)$$

From C and C^2 given in Eqs. (28) and (29) for $N=2$, it follows that

$$\mathcal{P}^{(1)} = \frac{1}{8} (6C - C^2), \quad (49)$$

so that

$$[\mathcal{P}^{(1)}]^{a_1 a_2 b_1 b_2} = \frac{1}{2} (\delta^{a_1 b_1} \delta^{a_2 b_2} - \delta^{a_2 b_1} \delta^{a_1 b_2}). \quad (50)$$

Similarly,

$$[\mathcal{P}^{(3)}]^{a_1 a_2 b_1 b_2} = \frac{1}{2} (\delta^{a_1 b_1} \delta^{a_2 b_2} + \delta^{a_2 b_1} \delta^{a_1 b_2}) - \frac{1}{3} \delta^{a_1 a_2} \delta^{b_1 b_2}. \quad (51)$$

Now, given two adjoints $Q_1^{b_1}$ and $Q_2^{b_2}$ defined in spin space, for instance, the projectors $\mathcal{P}^{(0)}$, $\mathcal{P}^{(1)}$, and $\mathcal{P}^{(3)}$, given by Eqs. (47), (50), and (51), acting on the adjoint tensor operator $Q_1^{b_1} Q_2^{b_2}$, project out the $J=0$, $J=1$, and $J=2$ spin components of that tensor product, respectively. Similar conclusions can be reached for isospin space, of course.

IV. PROJECTION OPERATORS IN $SU(2N_f) \rightarrow SU(2) \otimes SU(N_f)$ SPIN-FLAVOR SYMMETRY

In the introductory section, it was pointed out that the baryon sector of QCD has a contracted $SU(2N_f)$ symmetry, where N_f is the number of light quark flavors [9–12]. Under the decomposition $SU(2N_f) \rightarrow SU(2) \otimes SU(N_f)$, the spin-flavor representation yields a tower of baryon flavor representations with spins $J = 1/2, 3/2, \dots, N_c/2$ [11,13]. The spin-flavor generators of $SU(2N_f)$ can be written as one-body quark operators acting on the N_c -quark baryon states, namely,

$$J^k = \sum_{\alpha}^{N_c} q_{\alpha}^{\dagger} \left(\frac{\sigma^k}{2} \otimes \mathbb{1} \right) q_{\alpha}, \quad (52a)$$

$$T^c = \sum_{\alpha}^{N_c} q_{\alpha}^{\dagger} \left(\mathbb{1} \otimes \frac{\lambda^c}{2} \right) q_{\alpha}, \quad (52b)$$

$$G^{kc} = \sum_{\alpha}^{N_c} q_{\alpha}^{\dagger} \left(\frac{\sigma^k}{2} \otimes \frac{\lambda^c}{2} \right) q_{\alpha}. \quad (52c)$$

Here q_{α}^{\dagger} and q_{α} constitute a set of quark creation and annihilation operators, where $\alpha = 1, \dots, N_f$ denote the N_f quark flavors with spin up and $\alpha = N_f + 1, \dots, 2N_f$ the N_f quark flavors with spin down. Likewise, J^k are the spin generators, T^c are the flavor generators, and G^{kc} are the spin-flavor generators. The $SU(2N_f)$ spin-flavor generators satisfy the commutation relations listed in Table II [13].

The approach to obtain projection operators discussed in the previous sections can now be implemented to the $SU(2N_f)$ spin-flavor symmetry to construct spin and flavor projection operators, which will act on well-defined n -body operators. For the ease of notation, throughout this section, lowercase letters (i, j, \dots) will denote indices transforming according to the vector representation of spin and (a, b, \dots) will denote indices transforming according to the adjoint representation of the $SU(N_f)$ flavor group.

Spin projection operators are easily adapted from Eqs. (47), (50), and (51) as

$$[\mathcal{P}_{\text{spin}}^{(J=0)}]^{j_1 j_2 k_1 k_2} = \frac{1}{3} \delta^{j_1 j_2} \delta^{k_1 k_2}, \quad (53)$$

TABLE II. $SU(2N_f)$ commutation relations.

$[J^i, T^a] = 0,$	
$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk} J^k,$	$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c,$
$[J^i, G^{ja}] = i\epsilon^{ijk} G^{ka},$	$[T^a, G^{ib}] = if^{abc} G^{ic},$
$[G^{ia}, G^{jb}] = \frac{i}{4} \delta^{ij} f^{abc} T^c + \frac{i}{2N_f} \delta^{ab} \epsilon^{ijk} J^k + \frac{i}{2} \epsilon^{ijk} d^{abc} G^{kc}.$	

$$[\mathcal{P}_{\text{spin}}^{(J=1)}]^{j_1 j_2 k_1 k_2} = \frac{1}{2} (\delta^{j_1 k_1} \delta^{j_2 k_2} - \delta^{j_2 k_1} \delta^{j_1 k_2}), \quad (54)$$

$$[\mathcal{P}_{\text{spin}}^{(J=2)}]^{j_1 j_2 k_1 k_2} = \frac{1}{2} (\delta^{j_1 k_1} \delta^{j_2 k_2} + \delta^{j_2 k_1} \delta^{j_1 k_2}) - \frac{1}{3} \delta^{k_1 k_2} \delta^{j_1 j_2}. \quad (55)$$

As for flavor projection operators, the tensor product of two adjoints can be separated into an antisymmetric and a symmetric product, $(adj \otimes adj)_A$ and $(adj \otimes adj)_S$, respectively. In the notation of Ref. [13], these products are written as

$$(adj \otimes adj)_A = adj \oplus \bar{a}s \oplus \bar{s}a \quad (56a)$$

and

$$(adj \otimes adj)_S = 1 \oplus adj \oplus \bar{s}s \oplus \bar{a}a. \quad (56b)$$

Thus, the explicit forms of flavor projection operators read as

$$[\mathcal{P}_{\text{flavor}}^{(1)}]^{a_1 a_2 b_1 b_2} = \frac{1}{N_f^2 - 1} \delta^{a_1 a_2} \delta^{b_1 b_2}, \quad (57)$$

$$[\mathcal{P}_{\text{flavor}}^{(adj)}]^{a_1 a_2 b_1 b_2} = \frac{1}{N_f} f^{a_1 a_2 c} f^{b_1 b_2 c} + \frac{N_f}{N_f^2 - 4} d^{a_1 a_2 c} d^{b_1 b_2 c}, \quad (58)$$

$$[\mathcal{P}_{\text{flavor}}^{(\bar{a}s + \bar{s}a)}]^{a_1 a_2 b_1 b_2} = \frac{1}{2} (\delta^{a_1 b_1} \delta^{a_2 b_2} - \delta^{a_2 b_1} \delta^{a_1 b_2}) - \frac{1}{N_f} f^{a_1 a_2 c} f^{b_1 b_2 c}, \quad (59)$$

$$[\mathcal{P}_{\text{flavor}}^{(\bar{s}s)}]^{a_1 a_2 b_1 b_2} = \frac{N_f + 2}{4N_f} (\delta^{a_1 b_1} \delta^{a_2 b_2} + \delta^{a_2 b_1} \delta^{a_1 b_2}) - \frac{N_f + 2}{2N_f(N_f + 1)} \delta^{a_1 a_2} \delta^{b_1 b_2} - \frac{N_f + 4}{4(N_f + 2)} d^{a_1 a_2 c} d^{b_1 b_2 c} + \frac{1}{4} (d^{a_1 b_1 c} d^{a_2 b_2 c} + d^{a_2 b_1 c} d^{a_1 b_2 c}), \quad (60)$$

$$[\mathcal{P}_{\text{flavor}}^{(\bar{a}a)}]^{a_1 a_2 b_1 b_2} = \frac{N_f - 2}{4N_f} (\delta^{a_1 b_1} \delta^{a_2 b_2} + \delta^{a_2 b_1} \delta^{a_1 b_2}) + \frac{N_f - 2}{2N_f(N_f - 1)} \delta^{a_1 a_2} \delta^{b_1 b_2} + \frac{N_f - 4}{4(N_f - 2)} d^{a_1 a_2 c} d^{b_1 b_2 c} - \frac{1}{4} (d^{a_1 b_1 c} d^{a_2 b_2 c} + d^{a_2 b_1 c} d^{a_1 b_2 c}). \quad (61)$$

It should be remarked that the first and second summands of Eq. (58) define the antisymmetric and symmetric components of $[\mathcal{P}_{\text{flavor}}^{(adj)}]^{a_1 a_2 b_1 b_2}$, respectively.

Let us also notice that

$$[\mathcal{P}_{\text{flavor}}^{(\bar{s}s)} + \mathcal{P}_{\text{flavor}}^{(\bar{a}a)}]^{a_1 a_2 b_1 b_2} = \frac{1}{2} (\delta^{a_1 b_1} \delta^{a_2 b_2} + \delta^{a_1 b_2} \delta^{a_2 b_1}) - \frac{1}{N_f^2 - 1} \delta^{a_1 a_2} \delta^{b_1 b_2} - \frac{N_f}{N_f^2 - 4} d^{a_1 a_2 c} d^{b_1 b_2 c}. \quad (62)$$

Implicit forms of the projectors (59) and (62) can be inferred, respectively, from Eqs. (A13) and (A17) of Ref. [13]. Both approaches yield the same results.

A. Applications of spin and flavor projection operators in the $1/N_c$ operator expansion

The way spin and flavor projection operators work can be better seen through a few examples. For definiteness, the analysis can be confined to the physically interesting case of $N_f = 3$ light quark flavors; thus, the lowest-lying baryon states fall into a representation of the $SU(6)$ spin-flavor group, which decomposes as $SU(2) \otimes SU(3)$.

For the $SU(3)$ flavor group, the adj , $\bar{a}s + \bar{s}a$, and $\bar{s}s$ representations are the 8, $10 + \bar{10}$, and 27, respectively, while the representation $\bar{a}a$ does not exist. In consequence, it can be shown that

$$[\mathcal{P}_{\text{flavor}}^{(\bar{a}a)} \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_2]^{a_1 a_2} = 0 \quad (63)$$

for $SU(3)$.

First, let us analyze the two-body operator $J^{j_1} J^{j_2}$, which is a spin-2 object. It can be written as

$$J^{j_1} J^{j_2} = \frac{1}{2} \{J^{j_1}, J^{j_2}\} + \frac{1}{2} [J^{j_1}, J^{j_2}]. \quad (64)$$

Projecting out the $J = 0$, $J = 1$, and $J = 2$ components of this product of operators is straightforwardly done with the help of projection operators (53), (54), and (55). The spin projections for the operator $J^{j_1} J^{j_2}$ read

$$[\mathcal{P}_{\text{spin}}^{(J=0)}]^{k_1 k_2 j_1 j_2} (J^{j_1} J^{j_2}) = \frac{1}{3} \delta^{k_1 k_2} J^2, \quad (65a)$$

$$[\mathcal{P}_{\text{spin}}^{(J=1)}]^{k_1 k_2 j_1 j_2} (J^{j_1} J^{j_2}) = \frac{i}{2} \epsilon^{k_1 k_2 i} J^i, \quad (65b)$$

and

$$[\mathcal{P}_{\text{spin}}^{(J=2)}]^{k_1 k_2 j_1 j_2} (J^{j_1} J^{j_2}) = \frac{1}{2} \{J^{k_1}, J^{k_2}\} - \frac{1}{3} \delta^{k_1 k_2} J^2, \quad (65c)$$

whereas the nonzero spin projections of the anticommutator and commutator in Eq. (64) read

$$[\mathcal{P}_{\text{spin}}^{(J=0)}]^{k_1 k_2 j_1 j_2} \{J^{j_1}, J^{j_2}\} = \frac{2}{3} \delta^{k_1 k_2} J^2, \quad (66a)$$

$$[\mathcal{P}_{\text{spin}}^{(J=2)}]^{k_1 k_2 j_1 j_2} \{J^{j_1}, J^{j_2}\} = \{J^{k_1}, J^{k_2}\} - \frac{2}{3} \delta^{k_1 k_2} J^2, \quad (66b)$$

and

$$[\mathcal{P}_{\text{spin}}^{(J=1)}]^{k_1 k_2 j_1 j_2} [J^{j_1}, J^{j_2}] = i e^{k_1 k_2 i} J^i, \quad (66c)$$

where $J^2 \equiv J^i J^i$. The consistency between these relations can be checked by a simple inspection.

Less trivial examples are found when spin and flavor are simultaneously involved so the corresponding projectors can act in conjunction. For example, the operator $X^{(j_1 b_1)(j_2 b_2)} = \{G^{j_1 b_1}, G^{j_2 b_2}\} + \{G^{j_2 b_1}, G^{j_1 b_2}\}$ is a spin-2 object and transforms as a flavor 27. Projecting out the

spin $J = 0$, $J = 1$, and $J = 2$ components of this operator yields

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}_{\text{spin}}^{(J=0)}]^{k_1 k_2 j_1 j_2} (\{G^{j_1 b_1}, G^{j_2 b_2}\} + \{G^{j_1 b_2}, G^{j_2 b_1}\}) \\ = \frac{2}{3} \delta^{k_1 k_2} \{G^{i b_1}, G^{i b_2}\}, \end{aligned} \quad (67)$$

$$[\mathcal{P}_{\text{spin}}^{(J=1)}]^{k_1 k_2 j_1 j_2} (\{G^{j_1 b_1}, G^{j_2 b_2}\} + \{G^{j_1 b_2}, G^{j_2 b_1}\}) = 0, \quad (68)$$

and

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}_{\text{spin}}^{(J=2)}]^{k_1 k_2 j_1 j_2} (\{G^{j_1 b_1}, G^{j_2 b_2}\} + \{G^{j_1 b_2}, G^{j_2 b_1}\}) \\ = \{G^{k_1 b_1}, G^{k_2 b_2}\} + \{G^{k_1 b_2}, G^{k_2 b_1}\} \\ - \frac{2}{3} \delta^{k_1 k_2} \{G^{i b_1}, G^{i b_2}\}. \end{aligned} \quad (69)$$

Now, the flavor 1, 8, $10 + \overline{10}$, and 27 components of $X^{(j_1 b_1)(j_2 b_2)}$, for each spin, can be straightforwardly projected out. The $J = 0$ projections read

$$[\mathcal{P}_{\text{spin}}^{(J=0)}]^{k_1 k_2 j_1 j_2} [\mathcal{P}_{\text{flavor}}^{(1)}]^{a_1 a_2 b_1 b_2} (\{G^{j_1 b_1}, G^{j_2 b_2}\} + \{G^{j_1 b_2}, G^{j_2 b_1}\}) = \frac{1}{12} \delta^{k_1 k_2} \delta^{a_1 a_2} \{G^{i c}, G^{i c}\}, \quad (70)$$

$$[\mathcal{P}_{\text{spin}}^{(J=0)}]^{k_1 k_2 j_1 j_2} [\mathcal{P}_{\text{flavor}}^{(8)}]^{a_1 a_2 b_1 b_2} (\{G^{j_1 b_1}, G^{j_2 b_2}\} + \{G^{j_1 b_2}, G^{j_2 b_1}\}) = \frac{2}{5} \delta^{k_1 k_2} d^{a_1 a_2 c} d^{b_1 b_2 c} \{G^{i b_1}, G^{i b_2}\}, \quad (71)$$

$$[\mathcal{P}_{\text{spin}}^{(J=0)}]^{k_1 k_2 j_1 j_2} [\mathcal{P}_{\text{flavor}}^{(10+\overline{10})}]^{a_1 a_2 b_1 b_2} (\{G^{j_1 b_1}, G^{j_2 b_2}\} + \{G^{j_1 b_2}, G^{j_2 b_1}\}) = 0, \quad (72)$$

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}_{\text{spin}}^{(J=0)}]^{k_1 k_2 j_1 j_2} [\mathcal{P}_{\text{flavor}}^{(27)}]^{a_1 a_2 b_1 b_2} (\{G^{j_1 b_1}, G^{j_2 b_2}\} + \{G^{j_1 b_2}, G^{j_2 b_1}\}) \\ = \frac{2}{3} [\delta^{k_1 k_2} \{G^{i a_1}, G^{i a_2}\} - \frac{1}{8} \delta^{k_1 k_2} \delta^{a_1 a_2} \{G^{i c}, G^{i c}\} - \frac{3}{5} \delta^{k_1 k_2} d^{a_1 a_2 c} d^{b_1 b_2 c} \{G^{i b_1}, G^{i b_2}\}], \end{aligned} \quad (73)$$

the $J = 1$ projections vanish, and the $J = 2$ projections become

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}_{\text{spin}}^{(J=2)}]^{k_1 k_2 j_1 j_2} [\mathcal{P}_{\text{flavor}}^{(1)}]^{a_1 a_2 b_1 b_2} (\{G^{j_1 b_1}, G^{j_2 b_2}\} + \{G^{j_1 b_2}, G^{j_2 b_1}\}) \\ = \frac{1}{8} \delta^{a_1 a_2} [\{G^{k_1 b_2}, G^{k_2 b_2}\} + \{G^{k_2 c}, G^{k_1 c}\} - \frac{2}{3} \delta^{k_1 k_2} \{G^{i c}, G^{i c}\}], \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}_{\text{spin}}^{(J=2)}]^{k_1 k_2 j_1 j_2} [\mathcal{P}_{\text{flavor}}^{(8)}]^{a_1 a_2 b_1 b_2} (\{G^{j_1 b_1}, G^{j_2 b_2}\} + \{G^{j_1 b_2}, G^{j_2 b_1}\}) \\ = \frac{3}{5} d^{a_1 a_2 c} d^{b_1 b_2 c} [\{G^{k_1 b_1}, G^{k_2 b_2}\} + \{G^{k_1 b_2}, G^{k_2 b_1}\} - \frac{2}{3} \delta^{k_1 k_2} \{G^{i b_1}, G^{i b_2}\}], \end{aligned} \quad (75)$$

$$[\mathcal{P}_{\text{spin}}^{(J=2)}]^{k_1 k_2 j_1 j_2} [\mathcal{P}_{\text{flavor}}^{(10+\overline{10})}]^{a_1 a_2 b_1 b_2} (\{G^{j_1 b_1}, G^{j_2 b_2}\} + \{G^{j_1 b_2}, G^{j_2 b_1}\}) = 0, \quad (76)$$

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}_{\text{spin}}^{(J=2)}]^{k_1 k_2 j_1 j_2} [\mathcal{P}_{\text{flavor}}^{(27)}]^{a_1 a_2 b_1 b_2} (\{G^{j_1 b_1}, G^{j_2 b_2}\} + \{G^{j_1 b_2}, G^{j_2 b_1}\}) \\ = \{G^{k_1 a_1}, G^{k_2 a_2}\} + \{G^{k_1 a_2}, G^{k_2 a_1}\} - \frac{2}{3} \delta^{k_1 k_2} \{G^{i a_1}, G^{i a_2}\} - \frac{1}{4} \delta^{a_1 a_2} [\{G^{k_1 c}, G^{k_2 c}\} - \frac{1}{3} \delta^{k_1 k_2} \{G^{i c}, G^{i c}\}] \\ - \frac{3}{5} d^{a_1 a_2 c} d^{b_1 b_2 c} [\{G^{k_1 b_1}, G^{k_2 b_2}\} + \{G^{k_1 b_2}, G^{k_2 b_1}\} - \frac{2}{3} \delta^{k_1 k_2} \{G^{i b_1}, G^{i b_2}\}]. \end{aligned} \quad (77)$$

In particular, both sides of Eq. (77) are spin-2 objects and transform purely as flavor 27 tensors, i.e., their spin 0 and 1 components and their flavor singlet and octet components have been properly subtracted off by using the appropriate spin and flavor projectors. Operators of this kind appear in the analysis of baryon quadrupole moments [18].

V. PROJECTION OPERATORS EXTENDED TO THE TENSOR SPACE $adj \otimes adj \otimes adj$: A FEW EXAMPLES

Projection operators defined in the tensor space $adj \otimes adj \otimes adj$ can be obtained by extending the approach used in the construction of the corresponding ones in the tensor space $adj \otimes adj$. The starting point is the decomposition of the tensor product $adj \otimes adj$ into the irreps indicated in Eq. (16), so the tensor product of the adjoint representation and each of these irreps can be evaluated.

The simplest construction is the tensor product of the adjoint and the singlet representation 1, i.e., $1 \otimes adj = adj$. Therefore, the projector

$$[\mathcal{P}^{(adj)}]^{a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3} = \frac{1}{N^2 - 1} \delta^{a_1 a_2} \delta^{b_1 b_2} \delta^{b_3 a_3} \quad (78)$$

acting on the tensor operator $Q_1^{b_1} Q_2^{b_2} Q_3^{b_3}$ yields

$$\frac{1}{N^2 - 1} \delta^{a_1 a_2} Q_1^e Q_2^e Q_3^{a_3}, \quad (79)$$

which transforms as an adjoint operator.

Increasing complexity can be found in the tensor product $\bar{3}s \otimes adj$, which can be represented by

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 3 & & \\ \hline 3 & 4 & & \\ \hline \vdots & & & \\ \hline N-1 & N & & \\ \hline \end{array} \otimes adj = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 3 & 4 & & & \\ \hline \vdots & & & & & \\ \hline N-1 & N & N+1 & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 & & & \\ \hline \vdots & & & & \\ \hline N-2 & N-1 & & & \\ \hline N-1 & & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \hline 3 & 4 & 5 & & \\ \hline \vdots & & & & \\ \hline N-1 & N & N+1 & & \\ \hline \end{array} \\ \\ \oplus 2 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 3 & & \\ \hline \vdots & & & \\ \hline N-1 & N & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 4 & \\ \hline 3 & 4 & & \\ \hline \vdots & & & \\ \hline N-2 & N-1 & & \\ \hline N-1 & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & & \\ \hline \vdots & & \\ \hline N-2 & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \vdots & & \\ \hline N-1 & N & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \vdots & \\ \hline N-1 & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Let T_{3A}^a denote the generators for the tensor product space $\bar{3}s \otimes adj$. These generators are given by

$$T_{3A}^a = \mathcal{P}^{(3)} T_{2A}^a \otimes \mathbb{1} + \mathcal{P}^{(3)} \otimes T_A^a, \quad (80)$$

where T_{2A}^a are defined in Eq. (19). Accordingly, the quadratic Casimir operator reads

$$C = \mathcal{P}^{(3)} T_{2A}^a T_{2A}^a \otimes \mathbb{1} + 2\mathcal{P}^{(3)} T_{2A}^a \otimes T_A^a + \mathcal{P}^{(3)} \otimes T_A^a T_A^a, \quad (81)$$

whose explicit form in components becomes

$$\begin{aligned} [C]^{a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3} &= (3N + 2) [\mathcal{P}^{(3)}]^{a_1 a_2 b_1 b_2} \delta^{a_3 b_3} \\ &\quad - 2\{[\mathcal{P}^{(3)}]^{a_1 a_2 b_2 e} F^{e b_1 a_3 b_3} + (b_1 \leftrightarrow b_2)\}, \end{aligned} \quad (82)$$

which follows from the use of the identity

$$[\mathcal{P}^{(3)}]^{a_1 a_2 d_1 d_2} F^{d_1 b_1 d_2 b_2} = -[\mathcal{P}^{(3)}]^{a_1 a_2 b_1 b_2}, \quad (83)$$

along with Eqs. (21) and (24).

The eigenvalues of the quadratic Casimir operator for each representation are displayed in Table III. Following relation (12) and gathering together partial results, the corresponding projection operators are

TABLE III. Quadratic Casimir eigenvalues for the representations obtained in the tensor product $\bar{5}_S \otimes adj$.

Eigenvalue	Representation	Eigenvalue	Representation																																																																													
$c_0 = 3(N+2)$	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>⋮</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>$N-1$</td><td>N</td><td>$N+1$</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	2	3	4				⋮						$N-1$	N	$N+1$				$c_3 = 3N+2$	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>⋮</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>$N-2$</td><td>$N-1$</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>$N-1$</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	1	2	3	4	2	3	4		3	4			⋮				$N-2$	$N-1$			$N-1$																																
1	2	3	4	5	6																																																																											
2	3	4																																																																														
⋮																																																																																
$N-1$	N	$N+1$																																																																														
1	2	3	4																																																																													
2	3	4																																																																														
3	4																																																																															
⋮																																																																																
$N-2$	$N-1$																																																																															
$N-1$																																																																																
$c_1 = 3(N+1)$	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>⋮</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>$N-2$</td><td>$N-1$</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>$N-1$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table> \oplus <table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>⋮</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>$N-1$</td><td>N</td><td>$N+1$</td><td></td><td></td></tr> </table>	1	2	3	4	5	2	3				⋮					$N-2$	$N-1$				$N-1$					1	2	3	4	5	2	3	4	5		3	4	5			⋮					$N-1$	N	$N+1$			$c_4 = 2N$	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>⋮</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>$N-2$</td><td></td><td></td></tr> </table> \oplus <table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td></td></tr> <tr><td>⋮</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>$N-1$</td><td>N</td><td></td></tr> </table>	1	2	3	2			⋮			$N-2$			1	2	3	2	3	4	3	4		⋮			$N-1$	N	
1	2	3	4	5																																																																												
2	3																																																																															
⋮																																																																																
$N-2$	$N-1$																																																																															
$N-1$																																																																																
1	2	3	4	5																																																																												
2	3	4	5																																																																													
3	4	5																																																																														
⋮																																																																																
$N-1$	N	$N+1$																																																																														
1	2	3																																																																														
2																																																																																
⋮																																																																																
$N-2$																																																																																
1	2	3																																																																														
2	3	4																																																																														
3	4																																																																															
⋮																																																																																
$N-1$	N																																																																															
$c_2 = 2(N+1)$	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>⋮</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>$N-1$</td><td>N</td><td></td><td></td></tr> </table>	1	2	3	4	2	3			⋮				$N-1$	N			$c_5 = N$	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td></td></tr> <tr><td>⋮</td><td></td></tr> <tr><td>$N-1$</td><td></td></tr> </table>	1	2	2		⋮		$N-1$																																																						
1	2	3	4																																																																													
2	3																																																																															
⋮																																																																																
$N-1$	N																																																																															
1	2																																																																															
2																																																																																
⋮																																																																																
$N-1$																																																																																

$$\tilde{\mathcal{P}}^{(m)} = \prod_{i=1}^5 \left[\frac{C - c_{n_i}}{c_m - c_{n_i}} \right] = \frac{-\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 C - \tilde{\alpha}_2 C^2 + \tilde{\alpha}_3 C^3 - \tilde{\alpha}_4 C^4 + C^5}{\prod_{i=1}^5 (c_m - c_{n_i})}, \quad (84)$$

where the coefficients $\tilde{\alpha}_i$ read

$$\tilde{\alpha}_0 = c_{n_1} c_{n_2} c_{n_3} c_{n_4} c_{n_5}, \quad (85a)$$

$$\tilde{\alpha}_1 = c_{n_1} c_{n_2} c_{n_3} c_{n_4} + c_{n_1} c_{n_2} c_{n_3} c_{n_5} + c_{n_1} c_{n_2} c_{n_4} c_{n_5} + c_{n_1} c_{n_3} c_{n_4} c_{n_5} + c_{n_2} c_{n_3} c_{n_4} c_{n_5}, \quad (85b)$$

$$\tilde{\alpha}_2 = c_{n_1} c_{n_2} c_{n_3} + c_{n_1} c_{n_2} c_{n_4} + c_{n_1} c_{n_3} c_{n_4} + c_{n_2} c_{n_3} c_{n_4} + c_{n_1} c_{n_2} c_{n_5} + c_{n_1} c_{n_3} c_{n_5} + c_{n_2} c_{n_3} c_{n_5} + c_{n_1} c_{n_4} c_{n_5} + c_{n_2} c_{n_4} c_{n_5} + c_{n_3} c_{n_4} c_{n_5}, \quad (85c)$$

$$\tilde{\alpha}_3 = c_{n_1} c_{n_2} + c_{n_1} c_{n_3} + c_{n_2} c_{n_3} + c_{n_1} c_{n_4} + c_{n_2} c_{n_4} + c_{n_3} c_{n_4} + c_{n_1} c_{n_5} + c_{n_2} c_{n_5} + c_{n_3} c_{n_5} + c_{n_4} c_{n_5}, \quad (85d)$$

and

$$\tilde{\alpha}_4 = c_{n_1} + c_{n_2} + c_{n_3} + c_{n_4} + c_{n_5}. \quad (85e)$$

The powers of C required in Eq. (84) are obtained as

$$C = aE_0 + 2E_1, \quad (86a)$$

$$C^2 = a^2 E_0 + 4aE_1 + 4E_2, \quad (86b)$$

$$C^3 = a^3 E_0 + 6a^2 E_1 + 12aE_2 + 8E_3, \quad (86c)$$

$$C^4 = a^4 E_0 + 8a^3 E_1 + 24a^2 E_2 + 32aE_3 + 16E_4, \quad (86d)$$

and

$$C^5 = a^5 E_0 + 10a^4 E_1 + 40a^3 E_2 + 80a^2 E_3 + 80aE_4 + 32E_5, \quad (86e)$$

with $a = 3N + 2$ and

$$[E_0]^{a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3} = [\mathcal{P}^{(3)}]^{a_1 a_2 b_1 b_2} \delta^{a_3 b_3}, \quad (87a)$$

$$[E_1]^{a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3} = [\mathcal{P}^{(3)}]^{a_1 a_2 d_1 d_2} [T]^{d_1 d_2 a_3 b_1 b_2 b_3}, \quad (87b)$$

$$[E_2]^{a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3} = [\mathcal{P}^{(3)}]^{a_1 a_2 d_1 d_2} [T^2]^{d_1 d_2 a_3 b_1 b_2 b_3}, \quad (87c)$$

$$[E_3]^{a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3} = [\mathcal{P}^{(3)}]^{a_1 a_2 d_1 d_2} [T^3]^{d_1 d_2 a_3 b_1 b_2 b_3}, \quad (87d)$$

$$[E_4]^{a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3} = [\mathcal{P}^{(3)}]^{a_1 a_2 d_1 d_2} [T^4]^{d_1 d_2 a_3 b_1 b_2 b_3}, \quad (87e)$$

and

$$[E_5]^{a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3} = [\mathcal{P}^{(3)}]^{a_1 a_2 d_1 d_2} [T^5]^{d_1 d_2 a_3 b_1 b_2 b_3}. \quad (87f)$$

Here E_0 represents the identity for the tensor product space under consideration and the tensor $[T]^{a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3}$ is defined as

$$\begin{aligned} [T]^{a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3} &= [T_{2A}^a \otimes T_A^a]^{a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3} \\ &= -F^{a_1 b_1 a_3 b_3} \delta^{a_2 b_2} - F^{a_2 b_2 a_3 b_3} \delta^{a_1 b_1}. \end{aligned} \quad (88)$$

The final expression for the projectors $\tilde{\mathcal{P}}^{(m)}$ can be cast into the compact form

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}^{(m)} &= \frac{1}{h_m} [e_0^{(m)} E_0 + e_1^{(m)} E_1 + e_2^{(m)} E_2 + e_3^{(m)} E_3 \\ &\quad + e_4^{(m)} E_4 + e_5^{(m)} E_5], \end{aligned} \quad (89)$$

where the coefficients h_m and $e_n^{(m)}$ are listed in Appendix B.

B. An example of projection operators in $SU(3)$

Formally, given three $SU(3)$ adjoints $Q_1^{a_1}$, $Q_2^{a_2}$, and $Q_3^{a_3}$, the tensor product between them, $Q_1^{a_1} Q_2^{a_2} Q_3^{a_3}$, possesses all flavor 1, 8, $10 + \overline{10}$, 27, $35 + \overline{35}$, and 64 components. Operators transforming in the flavor 64 representation, for instance, are relevant in the analysis of baryon mass splittings of the spin-1/2 octet and spin-3/2 decuplet baryons in the $1/N_c$ expansion combined with perturbative flavor breaking at order $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, where $\epsilon \sim m_s$ is a (dimensionless) measure of $SU(3)$ breaking [19].

In order to subtract off all but the flavor 64 component, the projection operator $\tilde{\mathcal{P}}^{(m)}$, for $m = 0$, is constructed following the lines of Eq. (89); this procedure leads to $\tilde{\mathcal{P}}_{\text{flavor}}^{(64)}$. The eigenvalue of the Casimir operator is

A long and tedious but otherwise standard calculation is required to prove that

$$\begin{aligned} &[\tilde{\mathcal{P}}^{(m)}]^{a_1 a_2 a_3 d_1 d_2 d_3} [\tilde{\mathcal{P}}^{(n)}]^{d_1 d_2 d_3 b_1 b_2 b_3} \\ &= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ [\tilde{\mathcal{P}}^{(m)}]^{a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3}, & m = n \end{cases} \end{aligned} \quad (90)$$

and

$$\sum_{m=0}^5 [\tilde{\mathcal{P}}^{(m)}]^{a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3} = E_0^{a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3}. \quad (91)$$

A. An example of projection operators in $SU(2)$

In this case, the projector $\mathcal{P}^{(3)}$ corresponds to the representation with spin-2 given in Eq. (51). Therefore, the projector $\tilde{\mathcal{P}}^{(5)}$ which, according to Table III, corresponds to an adjoint representation (spin-1 with three indices) and is given by

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}^{(5)} &= \frac{e_0^{(5)} E_0 + e_1^{(5)} E_1 + e_2^{(5)} E_2 + e_3^{(5)} E_3 + e_4^{(5)} E_4 + e_5^{(5)} E_5}{h_5} \\ &= \frac{-4E_1 + 4E_2 + 9E_3 - E_4 - 2E_5}{210}. \end{aligned} \quad (92)$$

Using the expressions for E_i given in (87a)–(87f) for $N = 2$, $\tilde{\mathcal{P}}^{(5)}$ in components can be rewritten as

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathcal{P}}^{(5)}]^{a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3} &= \frac{1}{15} \delta^{a_1 a_2} \delta^{b_1 b_2} \delta^{a_3 b_3} + \frac{3}{20} \{ \delta^{a_1 a_3} \delta^{a_2 b_2} \delta^{b_1 b_3} + \delta^{a_1 a_3} \delta^{a_2 b_1} \delta^{b_2 b_3} + (a_1, b_1) \leftrightarrow (a_2, b_2) \} \\ &\quad - \frac{1}{10} \{ \delta^{a_3 b_2} \delta^{a_1 a_2} \delta^{b_1 b_3} + \delta^{a_1 b_3} \delta^{a_2 c_3} \delta^{b_1 b_2} + (a_1, b_1) \leftrightarrow (a_2, b_2) \}. \end{aligned} \quad (93)$$

$c_0 = 3(N_f + 2)$, and the corresponding Young tableau can easily be obtained from the corresponding one depicted in Table III for $N_f = 3$.

Let $Q^{(64)}$ be the operator that transforms as a genuine flavor 64. It is thus given by

$$[Q^{(64)}]^{a_1 a_2 a_3} = [\tilde{\mathcal{P}}_{\text{flavor}}^{(64)} Q_1 Q_2 Q_3]^{a_1 a_2 a_3}. \quad (94)$$

The projection operator $\tilde{\mathcal{P}}_{\text{flavor}}^{(64)}$ itself has a rather involved form, containing several hundreds of terms. Because of the length and unilluminating nature of the resultant expression, it is more convenient to list a few components of $Q^{(64)}$. For instance,

$$\begin{aligned}
[Q^{(64)}]^{888} = & \frac{1}{70} [3Q_1^8 Q_2^1 Q_3^1 - \sqrt{3}Q_1^6 Q_2^4 Q_3^1 - \sqrt{3}Q_1^7 Q_2^5 Q_3^1 - \sqrt{3}Q_1^4 Q_2^6 Q_3^1 - \sqrt{3}Q_1^5 Q_2^7 Q_3^1 + 3Q_1^1 Q_2^8 Q_3^1 \\
& + 3Q_1^8 Q_2^2 Q_3^2 + \sqrt{3}Q_1^7 Q_2^4 Q_3^2 - \sqrt{3}Q_1^6 Q_2^5 Q_3^2 - \sqrt{3}Q_1^5 Q_2^6 Q_3^2 + \sqrt{3}Q_1^4 Q_2^7 Q_3^2 + 3Q_1^2 Q_2^8 Q_3^2 \\
& + 3Q_1^8 Q_2^3 Q_3^3 - \sqrt{3}Q_1^4 Q_2^4 Q_3^3 - \sqrt{3}Q_1^5 Q_2^5 Q_3^3 + \sqrt{3}Q_1^6 Q_2^6 Q_3^3 + \sqrt{3}Q_1^7 Q_2^7 Q_3^3 + 3Q_1^3 Q_2^8 Q_3^3 \\
& - \sqrt{3}Q_1^6 Q_2^1 Q_3^4 + \sqrt{3}Q_1^7 Q_2^2 Q_3^4 - \sqrt{3}Q_1^4 Q_2^3 Q_3^4 - \sqrt{3}Q_1^5 Q_2^4 Q_3^4 - 9Q_1^8 Q_2^4 Q_3^4 - \sqrt{3}Q_1^1 Q_2^6 Q_3^4 \\
& + \sqrt{3}Q_1^2 Q_2^7 Q_3^4 - 9Q_1^4 Q_2^8 Q_3^4 - \sqrt{3}Q_1^7 Q_2^1 Q_3^5 - \sqrt{3}Q_1^6 Q_2^2 Q_3^5 - \sqrt{3}Q_1^5 Q_2^3 Q_3^5 - \sqrt{3}Q_1^3 Q_2^5 Q_3^5 \\
& - 9Q_1^8 Q_2^5 Q_3^5 - \sqrt{3}Q_1^2 Q_2^6 Q_3^5 - \sqrt{3}Q_1^1 Q_2^7 Q_3^5 - 9Q_1^5 Q_2^8 Q_3^5 - \sqrt{3}Q_1^4 Q_2^1 Q_3^6 - \sqrt{3}Q_1^5 Q_2^2 Q_3^6 \\
& + \sqrt{3}Q_1^6 Q_2^3 Q_3^6 - \sqrt{3}Q_1^1 Q_2^4 Q_3^6 - \sqrt{3}Q_1^2 Q_2^5 Q_3^6 + \sqrt{3}Q_1^3 Q_2^6 Q_3^6 - 9Q_1^8 Q_2^6 Q_3^6 - 9Q_1^6 Q_2^8 Q_3^6 \\
& - \sqrt{3}Q_1^5 Q_2^1 Q_3^7 + \sqrt{3}Q_1^4 Q_2^2 Q_3^7 + \sqrt{3}Q_1^7 Q_2^3 Q_3^7 + \sqrt{3}Q_1^2 Q_2^4 Q_3^7 - \sqrt{3}Q_1^1 Q_2^5 Q_3^7 + \sqrt{3}Q_1^3 Q_2^7 Q_3^7 \\
& - 9Q_1^8 Q_2^7 Q_3^7 - 9Q_1^7 Q_2^8 Q_3^7 + 3Q_1^1 Q_2^1 Q_3^8 + 3Q_1^2 Q_2^2 Q_3^8 + 3Q_1^3 Q_2^3 Q_3^8 - 9Q_1^4 Q_2^4 Q_3^8 \\
& - 9Q_1^5 Q_2^5 Q_3^8 - 9Q_1^6 Q_2^6 Q_3^8 - 9Q_1^7 Q_2^7 Q_3^8 + 27Q_1^8 Q_2^8 Q_3^8], \tag{95}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Q^{(64)}]^{883} = & \frac{1}{126} [Q_1^3 Q_2^1 Q_3^1 + Q_1^1 Q_2^3 Q_3^1 + Q_1^3 Q_2^2 Q_3^2 + Q_1^2 Q_2^3 Q_3^2 + Q_1^1 Q_2^1 Q_3^3 + Q_1^2 Q_2^2 Q_3^3 + 3Q_1^3 Q_2^3 Q_3^3 \\
& - 5Q_1^4 Q_2^4 Q_3^3 - 5Q_1^5 Q_2^5 Q_3^3 - 5Q_1^6 Q_2^6 Q_3^3 - 5Q_1^7 Q_2^7 Q_3^3 + 15Q_1^8 Q_2^8 Q_3^3 - 5Q_1^4 Q_2^3 Q_3^4 \\
& - 5Q_1^3 Q_2^4 Q_3^4 - 5\sqrt{3}Q_1^8 Q_2^4 Q_3^4 - 5\sqrt{3}Q_1^4 Q_2^8 Q_3^4 - 5Q_1^5 Q_2^3 Q_3^5 - 5Q_1^3 Q_2^5 Q_3^5 - 5\sqrt{3}Q_1^8 Q_2^5 Q_3^5 \\
& - 5\sqrt{3}Q_1^5 Q_2^8 Q_3^5 - 5Q_1^6 Q_2^3 Q_3^6 - 5Q_1^3 Q_2^6 Q_3^6 + 5\sqrt{3}Q_1^8 Q_2^6 Q_3^6 + 5\sqrt{3}Q_1^6 Q_2^8 Q_3^6 - 5Q_1^7 Q_2^3 Q_3^7 \\
& - 5Q_1^3 Q_2^7 Q_3^7 + 5\sqrt{3}Q_1^8 Q_2^7 Q_3^7 + 5\sqrt{3}Q_1^7 Q_2^8 Q_3^7 + 15Q_1^8 Q_2^3 Q_3^8 - 5\sqrt{3}Q_1^4 Q_2^4 Q_3^8 \\
& - 5\sqrt{3}Q_1^5 Q_2^5 Q_3^8 + 5\sqrt{3}Q_1^6 Q_2^6 Q_3^8 + 5\sqrt{3}Q_1^7 Q_2^7 Q_3^8 + 15Q_1^3 Q_2^8 Q_3^8], \tag{96}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Q^{(64)}]^{833} = & \frac{1}{70\sqrt{3}} [-3\sqrt{3}Q_1^8 Q_2^1 Q_3^1 + 3Q_1^6 Q_2^4 Q_3^1 + 3Q_1^7 Q_2^5 Q_3^1 + 3Q_1^4 Q_2^6 Q_3^1 + 3Q_1^5 Q_2^7 Q_3^1 - 3\sqrt{3}Q_1^1 Q_2^8 Q_3^1 \\
& - 3\sqrt{3}Q_1^8 Q_2^2 Q_3^2 - 3Q_1^7 Q_2^4 Q_3^2 + 3Q_1^6 Q_2^5 Q_3^2 + 3Q_1^5 Q_2^6 Q_3^2 - 3Q_1^4 Q_2^7 Q_3^2 - 3\sqrt{3}Q_1^2 Q_2^8 Q_3^2 \\
& + 7\sqrt{3}Q_1^8 Q_2^3 Q_3^3 - 7Q_1^4 Q_2^4 Q_3^3 - 7Q_1^5 Q_2^5 Q_3^3 + 7Q_1^6 Q_2^6 Q_3^3 + 7Q_1^7 Q_2^7 Q_3^3 + 7\sqrt{3}Q_1^3 Q_2^8 Q_3^3 \\
& + 3Q_1^6 Q_2^1 Q_3^4 - 3Q_1^7 Q_2^2 Q_3^4 - 7Q_1^4 Q_2^3 Q_3^4 - 7Q_1^5 Q_2^4 Q_3^4 - \sqrt{3}Q_1^8 Q_2^4 Q_3^4 + 3Q_1^1 Q_2^6 Q_3^4 \\
& - 3Q_1^2 Q_2^7 Q_3^4 - \sqrt{3}Q_1^4 Q_2^8 Q_3^4 + 3Q_1^7 Q_2^1 Q_3^5 + 3Q_1^6 Q_2^2 Q_3^5 - 7Q_1^5 Q_2^3 Q_3^5 - 7Q_1^3 Q_2^5 Q_3^5 \\
& - \sqrt{3}Q_1^8 Q_2^5 Q_3^5 + 3Q_1^2 Q_2^6 Q_3^5 + 3Q_1^1 Q_2^7 Q_3^5 - \sqrt{3}Q_1^5 Q_2^8 Q_3^5 + 3Q_1^4 Q_2^1 Q_3^6 + 3Q_1^5 Q_2^2 Q_3^6 \\
& + 7Q_1^6 Q_2^3 Q_3^6 + 3Q_1^1 Q_2^4 Q_3^6 + 3Q_1^2 Q_2^5 Q_3^6 + 7Q_1^3 Q_2^6 Q_3^6 - \sqrt{3}Q_1^8 Q_2^6 Q_3^6 - \sqrt{3}Q_1^6 Q_2^8 Q_3^6 \\
& + 3Q_1^5 Q_2^1 Q_3^7 - 3Q_1^4 Q_2^2 Q_3^7 + 7Q_1^7 Q_2^3 Q_3^7 - 3Q_1^2 Q_2^4 Q_3^7 + 3Q_1^1 Q_2^5 Q_3^7 + 7Q_1^3 Q_2^7 Q_3^7 \\
& - \sqrt{3}Q_1^8 Q_2^7 Q_3^7 - \sqrt{3}Q_1^7 Q_2^8 Q_3^7 - 3\sqrt{3}Q_1^1 Q_2^1 Q_3^8 - 3\sqrt{3}Q_1^2 Q_2^2 Q_3^8 + 7\sqrt{3}Q_1^3 Q_2^3 Q_3^8 \\
& - \sqrt{3}Q_1^4 Q_2^4 Q_3^8 - \sqrt{3}Q_1^5 Q_2^5 Q_3^8 - \sqrt{3}Q_1^6 Q_2^6 Q_3^8 - \sqrt{3}Q_1^7 Q_2^7 Q_3^8 + 3\sqrt{3}Q_1^8 Q_2^8 Q_3^8], \tag{97}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
[Q^{(64)}]^{333} = & \frac{1}{126} [-25Q_1^3 Q_2^1 Q_3^1 - 25Q_1^1 Q_2^3 Q_3^1 - 25Q_1^3 Q_2^2 Q_3^2 - 25Q_1^2 Q_2^3 Q_3^2 - 25Q_1^1 Q_2^1 Q_3^3 - 25Q_1^2 Q_2^2 Q_3^3 \\
& + 51Q_1^3 Q_2^3 Q_3^3 - Q_1^4 Q_2^4 Q_3^3 - Q_1^5 Q_2^5 Q_3^3 - Q_1^6 Q_2^6 Q_3^3 - Q_1^7 Q_2^7 Q_3^3 + 3Q_1^8 Q_2^8 Q_3^3 - Q_1^4 Q_2^3 Q_3^4 \\
& - Q_1^3 Q_2^4 Q_3^4 - \sqrt{3}Q_1^8 Q_2^4 Q_3^4 - \sqrt{3}Q_1^4 Q_2^8 Q_3^4 - Q_1^5 Q_2^3 Q_3^5 - Q_1^3 Q_2^5 Q_3^5 - \sqrt{3}Q_1^8 Q_2^5 Q_3^5 \\
& - \sqrt{3}Q_1^5 Q_2^8 Q_3^5 - Q_1^6 Q_2^3 Q_3^6 - Q_1^3 Q_2^6 Q_3^6 + \sqrt{3}Q_1^8 Q_2^6 Q_3^6 + \sqrt{3}Q_1^6 Q_2^8 Q_3^6 - Q_1^7 Q_2^3 Q_3^7 \\
& - Q_1^3 Q_2^7 Q_3^7 + \sqrt{3}Q_1^8 Q_2^7 Q_3^7 + \sqrt{3}Q_1^7 Q_2^8 Q_3^7 + 3Q_1^8 Q_2^3 Q_3^8 - \sqrt{3}Q_1^4 Q_2^4 Q_3^8 - \sqrt{3}Q_1^5 Q_2^5 Q_3^8 \\
& + \sqrt{3}Q_1^6 Q_2^6 Q_3^8 + \sqrt{3}Q_1^7 Q_2^7 Q_3^8 + 3Q_1^3 Q_2^8 Q_3^8]. \tag{98}
\end{aligned}$$

Note in expressions (95)–(98) the symmetry under interchange of any two flavor indices, as required for flavor-64 operators.

Returning to the issue of the analysis of baryon mass splittings in the $1/N_c$ expansion combined with perturbative flavor breaking at order $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ [19], relations (95)–(98) can be adapted and used in the evaluation of operator structures such as the three-body operator $\{T^a, \{T^b, T^c\}\}$, or even higher-order operators such as $\{T^a, \{T^b, \{J^i, G^{ic}\}\}\}$, $\{T^a, \{\{J^i, G^{ib}\}, \{J^j, G^{jc}\}\}\}$, and so on. Therefore, the method introduced here becomes a useful tool to effectively project out spin and flavor representation components in the analysis of large- N_c baryons.

VI. CONCLUDING REMARKS

In this paper, the quadratic Casimir operator of the $SU(N)$ group is employed to construct projection operators that can decompose any of its reducible finite-dimensional representation spaces contained in the tensor product of two and three adjoint spaces into irreducible components. The method was first introduced for the Lorentz group in Ref. [16] and has proven to be quite effective for $SU(N)$.

The projection operators were computed first for the tensor space $adj \otimes adj$. For $N > 3$, there are five irreducible representations contained in $adj \otimes adj$, with well-defined eigenvalues of the Casimir operator C . This information is summarized in Table I. The corresponding projectors are explicitly given in Eqs. (35)–(39). For the tensor space $adj \otimes adj \otimes adj$, the complexity raises considerably, so only the subspace $\bar{3}_s \otimes adj$ is studied in detail. This information is summarized in Table III. The corresponding projectors are provided in Eq. (89).

Although the method is general enough, it is specialized to the $SU(2N_f) \rightarrow SU(2) \otimes SU(N_f)$ spin-flavor symmetry. The approach thus leads to the construction of spin and flavor projection operators, which can be implemented in the analysis of the $1/N_c$ operator expansion. The use of projection operators allows one to successfully project out the desired components of a given operator and subtract off those that are not needed. To exemplify the method, the projection operators are applied to adjoint tensor operators with two and three flavor indices which, for $SU(3)$, fall into flavor-27 and flavor-64 representations, respectively. The projectors effectively project out spin and flavor representations of operator structures present in analyses of baryon mass splittings or baryon quadrupole moments, for instance.

The applicability of the approach is not limited to large- N_c QCD. The approach presented here paves the way to potential applications in shell models of atomic and nuclear physics to construct tensor operators which, with the aid of the Wigner-Eckart theorem, can be used to calculate transition amplitudes. Further applications to the worldline approach to non-Abelian gauge fields should also be seriously considered. In particular, for models that

require the construction of a Hamiltonian with an $SU(N)$ symmetry, the method can provide a mechanism to obtain the different irreducible contributions of the operators that appear in such a Hamiltonian. This way the relevance of each different contribution to the spectra can be studied. A clear example can be found in the interacting boson model of nuclear physics [20].

A well-known procedure advocated in the literature to deal with the direct products of irreps of $SU(N)$ (mostly for $N = 2$ and 3) is based on the derivation of Clebsh-Gordan (CG) coefficients, either analytically [21,22] or numerically [23]. CG coefficients arise in the decomposition of the tensor product of the representation spaces of two irreps of some group into a direct sum of irreducible representation spaces. The utility of CG coefficients in characterizing hadronic decays is irrefutable. States are usually labeled by $|N, Y, I, I_3\rangle$, where Y and I stand for hypercharge and isospin, respectively, and I_3 represents the third component of isospin. The method discussed here encodes the information on these coefficients in the components of the projectors, although there is neither an obvious nor a direct relation between them. For example, for $SU(2)$, in order to find the relations that connect the CG coefficients with the projectors, the first step would consist in changing, after projection, the spin generators to a spherical tensor basis. Afterward, the CG coefficients could be found. In applications where there are operators that satisfy Eq. (10), the method presented here has the advantage of working directly with these operators rather than the states mentioned above. In contrast, using CG coefficients requires to change first to a basis where these coefficients are defined. In addition, the projector method gives general expressions in terms of the f^{abc} and d^{abc} symbols, without having to specify a value of N .

To close this paper, it should be pointed out that, for a given representation, constructing the whole set of projection operators might seem uninviting for computational difficulty; nonetheless, the technique represents a powerful tool to project out flavor components rigorously.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors are grateful to Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Mexico) for support.

APPENDIX A: IDENTITIES INVOLVING STRUCTURE CONSTANTS OF THE LIE ALGEBRA OF $SU(N)$

In this section, some relations between the structure constants of the Lie algebra of $SU(N)$ used repeatedly in the present analysis are provided. The list by no means is exhaustive, but it ranges from the Jacobi identity up to the product of 8 f 's. The relations read

$$F^{a_1 a_2 b_1 b_2} + F^{b_1 a_1 a_2 b_2} + F^{a_2 b_1 a_1 b_2} = 0, \quad (\text{A1})$$

$$F^{a_1 a_2 b_1 b_2} = \frac{2}{N} (\delta^{a_1 b_1} \delta^{a_2 b_2} - \delta^{a_1 b_2} \delta^{a_2 b_1}) + D^{a_1 b_1 a_2 b_2} - D^{a_1 b_2 a_2 b_1}, \quad (\text{A2})$$

$$F^{a_1 e_1 a_2 e_1} = N \delta^{a_1 a_2}, \quad (\text{A3})$$

$$F^{a_1 a_2 e_1 e_2} F^{b_1 e_1 b_2 e_2} = \frac{N}{2} F^{a_1 a_2 b_1 b_2}, \quad (\text{A4})$$

$$D^{a_1 a_2 e_1 e_2} F^{b_1 e_1 b_2 e_2} = \frac{N}{2} D^{a_1 a_2 b_1 b_2}, \quad (\text{A5})$$

$$D^{a_1 e_1 a_2 e_2} F^{b_1 e_1 b_2 e_2} = \delta^{a_1 a_2} \delta^{b_1 b_2} - \frac{1}{2} \delta^{a_1 b_1} \delta^{a_2 b_2} - \frac{1}{2} \delta^{a_1 b_2} \delta^{a_2 b_1} + \frac{N}{4} D^{a_1 a_2 b_1 b_2} + \frac{N^2 - 8}{4N} F^{a_1 b_1 a_2 b_2} - \frac{N}{4} F^{a_1 b_2 a_2 b_1}, \quad (\text{A6})$$

$$F^{a_1 e_1 a_2 e_2} F^{b_1 e_1 b_2 e_2} = \delta^{a_1 a_2} \delta^{b_1 b_2} + \frac{1}{2} \delta^{a_1 b_1} \delta^{a_2 b_2} + \frac{1}{2} \delta^{a_1 b_2} \delta^{a_2 b_1} + \frac{N}{4} (D^{a_1 a_2 b_1 b_2} + F^{a_1 a_2 b_1 b_2}), \quad (\text{A7})$$

$$F^{a_1 e_1 a_2 e_2} F^{e_1 e_3 e_2 e_4} F^{b_1 e_3 b_2 e_4} = N \delta^{a_1 a_2} \delta^{b_1 b_2} + \frac{N^2}{8} (D^{a_1 a_2 b_1 b_2} + F^{a_1 a_2 b_1 b_2}) + \frac{1}{2} (F^{a_1 b_1 a_2 b_2} + F^{a_1 b_2 a_2 b_1}), \quad (\text{A8})$$

$$F^{a_1 e_1 b_1 e_2} F^{a_2 e_3 b_2 e_4} F^{e_3 e_5 e_4 e_6} F^{e_1 e_5 e_2 e_6} = \frac{N^2 + 6}{8} \delta^{a_1 a_2} \delta^{b_1 b_2} + \frac{7N^2 + 4}{8} \delta^{a_1 b_1} \delta^{a_2 b_2} + \frac{3}{4} \delta^{a_1 b_2} \delta^{a_2 b_1} + \frac{N(N^2 + 2)}{16} (F^{a_1 a_2 b_1 b_2} + D^{a_1 a_2 b_1 b_2}) + \frac{N}{8} (D^{a_1 b_2 a_2 b_1} - F^{a_1 b_2 a_2 b_1}). \quad (\text{A9})$$

APPENDIX B: DEFINING COEFFICIENTS OF THE PROJECTORS $\tilde{\mathcal{P}}^{(m)}$

The final form of the projection operators $\tilde{\mathcal{P}}^{(m)}$, defined in Eq. (89), is written in terms of a few coefficients h_m and $e_n^{(m)}$. The former is explicitly given by

$$h_0 = 6(N+3)(N+4)(N+6),$$

$$h_1 = 3(N+1)(N+3)(2N+3),$$

$$h_2 = N(N+1)(N+2)(N+4),$$

$$h_3 = 2N(N+1)(N+2),$$

$$h_4 = N(N+2)(N+3)(N+6),$$

and

$$h_5 = N(N+1)(N+2)(N+3)(2N+3),$$

and the latter is given by

$$\begin{aligned} e_0^{(0)} &= 0, \\ e_1^{(0)} &= -N(N+1)(N+2), \\ e_2^{(0)} &= 2N^3 + N^2 - 6N - 4, \\ e_3^{(0)} &= 2N(5N+6), \\ e_4^{(0)} &= 4(4N+3), \\ e_5^{(0)} &= 8, \\ e_0^{(1)} &= 0, \\ e_1^{(1)} &= 16N(N^2 + 3N + 2), \\ e_2^{(1)} &= -8(N^3 - 7N^2 - 18N - 8), \\ e_3^{(1)} &= -8(5N^2 - 6N - 12), \\ e_4^{(1)} &= -64N, \\ e_5^{(1)} &= -32, \\ e_0^{(2)} &= 0, \\ e_1^{(2)} &= -8(N+1)(N+2), \\ e_2^{(2)} &= 4(5N^2 + 9N + 2), \\ e_3^{(2)} &= -4(2N^2 - 9N - 12), \\ e_4^{(2)} &= -8(3N - 1), \\ e_5^{(2)} &= -16, \\ e_0^{(3)} &= 2N(N^2 + 3N + 2), \\ e_1^{(3)} &= -5N^3 - 5N^2 + 10N + 8, \\ e_2^{(3)} &= 2N^3 - 19N^2 - 30N - 4, \\ e_3^{(3)} &= 2(5N^2 - 10N - 12), \\ e_4^{(3)} &= 16N - 4, \\ e_5^{(3)} &= 8, \\ e_0^{(4)} &= 0, \\ e_1^{(4)} &= 8N(N+1), \\ e_2^{(4)} &= -4(N-1)(5N+4), \\ e_3^{(4)} &= 4(2N^2 - 13N - 6), \\ e_4^{(4)} &= 24(N-1), \\ e_5^{(4)} &= 16, \\ e_0^{(5)} &= 0, \\ e_1^{(5)} &= -N(2N+4), \\ e_2^{(5)} &= 5N^2 + 2N - 8, \\ e_3^{(5)} &= -2(N^2 - 8N - 6), \\ e_4^{(5)} &= -4(2N-3), \\ e_5^{(5)} &= -8. \end{aligned}$$

- [1] M. Gell-Mann and Y. Ne'eman, *The Eightfold Way* (W. A. Benjamin, New York, 1964).
- [2] J. Cseh, Algebraic models for shell-like quarteting of nucleons, *Phys. Lett. B* **743**, 213 (2015).
- [3] A. Csordás, É. Szöke, and P. Szépfalusy, Cluster states of fermions in the single l-shell model, *Eur. Phys. J. D* **42**, 113 (2007).
- [4] O. Corradini and J. P. Edwards, Mixed symmetry tensors in the worldline formalism, *J. High Energy Phys.* **05** (2016) 056.
- [5] J. P. Edwards and O. Corradini, Mixed symmetry Wilson-loop interactions in the worldline formalism, *J. High Energy Phys.* **09** (2016) 081.
- [6] J. P. Edwards and O. Corradini, Worldline colour fields and non-Abelian quantum field theory, *EPJ Web Conf.* **182**, 02038 (2018).
- [7] G. 't Hooft, A planar diagram theory for strong interactions, *Nucl. Phys.* **B72**, 461 (1974).
- [8] E. Witten, Baryons in the $1/N$ expansion, *Nucl. Phys.* **B160**, 57 (1979).
- [9] R. F. Dashen and A. V. Manohar, Baryon-pion couplings from large N_c QCD, *Phys. Lett. B* **315**, 425 (1993).
- [10] R. F. Dashen and A. V. Manohar, $1/N_c$ corrections to the baryon axial currents in QCD, *Phys. Lett. B* **315**, 438 (1993).
- [11] J. Gervais and B. Sakita, Large N QCD Baryon Dynamics: Exact Results from its Relation to the Static Strong Coupling Theory, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 87 (1984).
- [12] J. Gervais and B. Sakita, Large N baryonic soliton and quarks, *Phys. Rev. D* **30**, 1795 (1984).
- [13] R. F. Dashen, E. E. Jenkins, and A. V. Manohar, Spin flavor structure of large N_c baryons, *Phys. Rev. D* **51**, 3697 (1995).
- [14] H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics*, Frontiers in Physics (Addison-Wesley, New York, 1982).
- [15] W. Greiner and B. Muller, *Theoretical Physics. Vol. 2: Quantum Mechanics. Symmetries* (Springer, Berlin, 1989).
- [16] V. M. B. Guzmán and M. Kirchbach, Lorentz group projector technique for decomposing reducible representations and applications to high spins, *Universe* **5**, 184 (2019).
- [17] D. J. Gross and W. Taylor, Two-dimensional QCD is a string theory, *Nucl. Phys.* **B400**, 181 (1993).
- [18] V. M. Banda Guzmán, R. Flores-Mendieta, J. Hernández, and F. J. Rosales-Aldape, Baryon quadrupole moment in the $1/N_c$ expansion of QCD, *Phys. Rev. D* **101**, 074018 (2020).
- [19] E. E. Jenkins and R. F. Lebed, Baryon mass splittings in the $1/N(c)$ expansion, *Phys. Rev. D* **52**, 282 (1995).
- [20] F. Iachello and A. Arima, *The Interacting Boson Model* (Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 1987).
- [21] J. J. de Swart, The octet model and its Clebsch-Gordan coefficients, *Rev. Mod. Phys.* **35**, 916 (1963).
- [22] P. S. J. McNamee and F. Chilton, Tables of Clebsch-Gordan coefficients of SU_3 , *Rev. Mod. Phys.* **36**, 1005 (1964).
- [23] A. Alex, M. Kalus, A. Huckleberry, and J. von Delft, A numerical algorithm for the explicit calculation of $SU(N)$ and $SL(N, \mathbb{C})$ Clebsch-Gordan coefficients, *J. Math. Phys. (N.Y.)* **52**, 023507 (2011).