



Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Facultad de Ciencias

**Evaluación de la actividad electrocortical  
durante las fases A del sueño**

**Tesis Profesional**

Para obtener el título de:

**Maestro en Ciencias Aplicadas**

Presenta:

**Medina Ibarra David Israel**

San Luis Potosí

Agosto 2019





Universidad Autónoma de San Luis Potosí  
Facultad de Ciencias

**Evaluación de la actividad electrocortical  
durante las fases A del sueño**

**Tesis Profesional**

Para obtener el título de:

**Maestro en Ciencias Aplicadas**

Presenta:

**Medina Ibarra David Israel**

Asesores:

**Dr. José Salomé Murguía I.**

**Dr. Martín Oswaldo Méndez G.**

San Luis Potosí

Agosto 2019





## **Evaluación de la actividad electrocortical durante las fases A del sueño.**

---

I. E. David Israel Medina Ibarra

### **Sinodales:**

Dr. José Salomé Murguía Ibarra (Asesor) \_\_\_\_\_

Dr. Martín Oswaldo Méndez García (Asesor) \_\_\_\_\_

Dra. Marcela Mejía Carlos \_\_\_\_\_

Dr. Raúl Eduardo Balderas Navarro \_\_\_\_\_

Dr. Marco Tulio Ramírez Torres \_\_\_\_\_

San Luis Potosí

Agosto 2019



# ***Agradecimientos***

Deseo expresar los siguientes reconocimientos.

A mis asesores el Doctores Martín Méndez y Salomé Murguía por haber guiado este trabajo, ellos han sido parte importante para mi crecimiento académico y personal.

Agradezco el apoyo otorgado por parte de CONACYT a través de la beca nacional (479976) para realizar los estudios de maestría. Además de obtener el apoyo de una beca mixta para realizar una estancia académica y el apoyo parcial del proyecto CB 2017-2018 A1-S-45697 para realizar esta tesis.

Al Instituto de Investigación en Comunicación Óptica, principalmente a los profesores que me impartieron clase y las personas que colaboraron para la elaboración de este trabajo.

Al Laboratorio Nacional de Investigación en Imagenología e Instrumentación Médica donde se realizó el trabajo de esta tesis.

A mi madre, hermanos y amigos que me han apoyado para lograr todas y cada una de mis metas así como me impulsan a lograr nuevos retos.

A Gabriela Cruz porque siempre me ha brindado un apoyo incondicional.





# ***Resumen***

El sueño es un proceso esencial en nuestra vida, que cubre al menos un tercio de ella. Pero este proceso puede verse afectado por trastornos que producen graves consecuencias a nivel fisiológico y conductual. Uno de los principales índices relacionados con los trastornos del sueño es la dinámica de la macroestructura del sueño que se utiliza para evaluar la calidad del sueño. Más allá de la macroestructura del sueño, recientemente también se presta atención a una estructura más fina del sueño llamada Patrón de alternancia cíclica (CAP). CAP está compuesto por cambios bruscos en frecuencia y en amplitud en la actividad eléctrica del cerebro (fases A), donde se pueden observar algunos procesos de transición. Con el objetivo de revelar las propiedades de este fenómeno de transición, en este trabajo presentamos un análisis de singularidad wavelet de la señal EEG durante el inicio y el desplazamiento de las fases A. Los resultados mostraron que la señal EEG presenta diferencias significativas entre algunas fases A y la actividad de fondo cuando se considera el promedio de las singularidades. Esto puede ayudar a identificar mejor las fases A del sueño CAP y comprender los mecanismos detrás de la dinámica CAP.



---

---

# ***Índice general***

---

---

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1. Electroencefalografía (EEG) . . . . .	4
1.2. Etapas del sueño . . . . .	5
1.3. Patrón Alternante Cíclico (CAP) . . . . .	7
1.3.1. Clasificación de las fases A . . . . .	8
1.4. Base de datos . . . . .	10
1.5. Análisis de Singularidades . . . . .	12
1.6. Estado del arte . . . . .	13
1.7. Objetivo . . . . .	15
1.8. Hipótesis . . . . .	15
1.9. Organización . . . . .	16
<b>2. ANÁLISIS TIEMPO-ESCALA</b>	<b>17</b>
2.1. Preliminares . . . . .	22
2.1.1. Expansión en series de señales . . . . .	23
2.2. Transformada Wavelet . . . . .	24
2.3. Transformada Wavelet Continua . . . . .	25
2.3.1. Propiedades de la transformada wavelet . . . . .	28
<b>3. ANÁLISIS WAVELET</b>	<b>31</b>
3.1. Regularidad de Hölder . . . . .	31
3.1.1. Análisis Wavelet de la regularidad local de Hölder . . . . .	34

---

3.2. Estimación de singularidades aisladas con la transformada wavelet . . . . .	36
3.2.1. Módulo Máximo de la Transformada Wavelet (MMTW) . .	37
3.3. Ejemplos . . . . .	40
<b>4. IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO</b>	<b>45</b>
4.1. Gráfico Violín . . . . .	47
4.2. Análisis de Singularidades para señales EEG . . . . .	47
4.3. Resultados . . . . .	50
<b>5. CONCLUSIONES</b>	<b>63</b>
<b>A. ENTROPÍA</b>	<b>65</b>
<b>B. KRUSKAL-WALLIS</b>	<b>67</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>69</b>

---

---

# Índice de figuras

---

---

1.1. Ejemplo de hipnograma de un sujeto adulto. Las etapas NREM (N1-N4) se denotan con los valores 1-4 respectivamente, REM tiene un valor de 5 y 0 denota el estado de vigilia. . . . .	7
1.2. Ejemplo de la una secuencia CAP. Un ciclo CAP se caracteriza por una fase A seguido de una fase B. Fuente: Physionet. . . .	8
1.3. Ejemplos de fases A: (a) Fase tipo A1. (b) Fase tipo A2. (c) Fase tipo A3. Con la función pulso (línea roja) se denota la duración de la fase. . . . .	10
2.1. (a): Señal estacionaria con diferentes frecuencias $f_1 = 10$ Hz, $f_2 = 25$ Hz $f_3 = 100$ Hz. (b): Espectro de Fourier de la señal estacionaria $x(t)$ . . . . .	19
2.2. (a): Señal no estacionaria con diferentes frecuencias $f_k$ . (b): Espectro de Fourier de la señal no estacionaria $x_2(t)$ . . . . .	20
2.3. (a): Función wavelet de Haar. (b): Función wavelet de Morlet. (c): Función wavelet de Gauss de primer orden. (d): Función wavelet Sombrero Mexicano. . . . .	25
2.4. Función wavelet Gaussiana con diferentes valores de escala $a$ y traslación $b$ . Cuando $a < 1$ la función wavelet se contrae, cuando $a > 1$ la función se expande. . . . .	27
2.5. El cono de influencia del punto $t_0$ recae en los puntos del plano escala-tiempo $(a, b)$ donde el soporte de $\psi_{a,b}(t)$ intersecta la línea del tiempo en $t = t_0$ . . . . .	30

3.1. La función Gaussiana se observa en la parte superior de la figura y las gráficas restantes son respectivamente la primer y segunda derivada de $\phi(t)$ . . . . .	40
3.2. La gráfica en la parte superior muestra la transformada wavelet. La línea blanca muestra la localización de LMMTW. En la parte inferior de la figura se muestra la gráfica de la función (3.15). . . . .	41
3.3. La gráfica en la parte superior muestra la transformada wavelet. En la parte inferior de la figura se muestra la gráfica de la función (3.16). . . . .	42
3.4. La gráfica en la parte superior muestra la transformada wavelet. La línea blanca muestra la localización de LMMTW. En la parte inferior de la figura se muestra la gráfica de la función (3.16). . . . .	43
4.1. Diagrama a bloques de la metodología. . . . .	45
4.2. Fase A3 típica de un sujeto en condición saludable con una frecuencia de muestreo de 512 Hz. El escalón indica la duración de la fase. . . . .	48
4.3. Transformada Wavelet de Módulo Máximo para la fase A3 mostrada en la figura (4.2), donde las líneas indican la existencia de una singularidad en la señal y de fondo se aprecia la transformada wavelet de la señal. . . . .	49
4.4. Ilustración del ventaneo realizado en cada fase A. Tomando 7 segundos para el inicio de la fase y 7 segundos para el final de la fase. . . . .	50

4.5. Gráfico violín correspondiente al promedio del exponente de Hölder, correspondiente al inicio de la fase A1. El punto de referencia ( $t = -2$ ) es comparado con el resto de segundos. . . . .	52
4.6. Gráfico violín del promedio correspondiente al exponente de Hölder durante el inicio de la fase A2. . . . .	54
4.7. Gráfica violín para el promedio del exponente de Hölder entorno al inicio de la fase A3. . . . .	55
4.8. Gráfica correspondiente al promedio del exponente de Hölder durante el final de la fase A1. El punto de referencia es en $t = 2$ . . . . .	57
4.9. Comparación del promedio del exponente de Hölder durante el fin de la fase A2. . . . .	58
4.10.Comparación correspondiente al promedio del exponente de Hölder durante el fin de la fase A3. La fase no presenta cambios importantes durante su final. . . . .	59
4.11.Comparación correspondiente al promedio del exponente de Hölder para secciones aleatorias donde las fases A no están presentes. . . . .	61

---

## INTRODUCCIÓN

---

En las últimas décadas, el interés por estudiar diversos procesos fisiológicos ha incrementado con la finalidad de comprender el funcionamiento de los seres vivos. El sueño es un proceso fisiológico de los más relevantes que hasta la actualidad no es del todo comprendido. Debido a esto existen diversas investigaciones que intentan explicar las principales causas que generan el sueño, además de argumentar del porqué es necesario.

Actualmente, se conoce que el sueño está fuertemente vinculado con la calidad de vida en los seres humanos. Cabe destacar que la ausencia de sueño puede provocar graves conflictos a la salud y si la ausencia permanece por largos periodos, puede generar alteraciones en los sistemas fisiológicos. Para estudiar los diversos procesos relacionados con el sueño, se realiza el registro de las señales eléctricas del cerebro, las cuales son captadas por sensores colocados sobre el cuero cabelludo. Este proceso se le conoce como electroencefalografía (EEG) y hasta el momento se considera para el estudio del sueño. Una de las principales razones por la que el EEG es excelente para analizar el sueño, es debido a que esta señal se encuentra directamente vinculada con la actividad neuronal. Además, esta señal contiene varias dimensiones, de hecho contienen al menos cuatro



(tiempo, frecuencia, espacio y potencia) lo que representa otra gran ventaja para analizar el sueño [1].

En una señal de EEG se pueden apreciar una variedad de ritmos que se repiten de manera cíclica unas 4 a 6 veces durante una noche de sueño. En la actualidad se pueden considerar cinco ritmos principales presentes en una señal de EEG, denominados como Delta, Theta, Beta, Alfa y Gamma (ver Tabla 1.1)[2].

Ritmo	Voltaje	Frecuencia	Resumen
Delta	20-200 $\mu$ V	0.5-4 Hz	Presente durante el sueño profundo con gran amplitud.
Theta	20-200 $\mu$ V	4-7.5 Hz	Ritmo que está vinculado con el sueño profundo.
Alfa	5 -20 $\mu$ V	8-13 Hz	Ritmo presente durante el sueño ligero.
Beta	20-100 $\mu$ V	13-30 Hz	Ritmo presente durante el estado REM y estado consciente.
Gamma	N/D	30-100Hz	Este ritmo está asociado principalmente a las funciones cognitivas.

**Tabla 1.1:** Ritmos de EEG.

Las señales EEG son el resultado de un proceso clínico conocido como polisomnografía (PSG), el cual consiste en la captura de la actividad cerebral, muscular, ocular y otras señales fisiológicas. La información que genera

## INTRODUCCIÓN

---

las señales EEG normalmente son complejas de analizar y estudiar, por lo tanto existe la necesidad de organizar estas señales en etapas o estados. Los expertos consideran las señales de la actividad muscular y ocular para diferenciar las dos grandes etapas del sueño. Estas etapas se denominan Movimientos Oculares Rápidos (REM por sus siglas en inglés: Rapid Eye Movement), y Sin Movimientos Oculares Rápidos (NREM por sus siglas en inglés: Non Rapid Eye Movement). A su vez, la etapa NREM se subdivide en cuatro etapas, donde la duración de cada etapa es variada, y dicha duración va desde unos pocos minutos hasta decenas de minutos. La forma de organizar las etapas del sueño se denomina macroestructura y esta fuertemente relacionada con las diferentes patologías que afectan el sueño. Debido a lo anterior, el estudio del sueño se enfoca en el tiempo de sueño para cada etapa y la forma en que se organizan.

Existe una alternativa para organizar y evaluar las etapas del sueño, la cual surge del concepto conocido como Patrón Alternante Cíclico del sueño (CAP por sus siglas en inglés: Cyclic Alternating Pattern). Terzano en 1985 [3, 4] descubrió que durante pequeños lapsos de tiempo, los ritmos sobre los cuales están definidos los estados del sueño en un EEG son cambiados de manera continua tanto en frecuencia como en amplitud. Estos cambios fueron denominados Fases A, las cuales conforman el fenómeno de CAP [3, 4]. El CAP está directamente relacionado con el mantenimiento y transición entre las etapas del sueño, y con un sistema de vigilancia que se encarga de localizar diferentes eventos peligrosos en el ambiente interno y externo del cuerpo.

De manera análoga a la macroestructura, el fenómeno CAP se enfoca

en constituir una relación entre la aparición del fenómeno y las distintas patologías que están relacionadas al sueño.

## **1.1 Electroencefalografía (EEG)**

Una electroencefalografía (EEG), es una técnica indolora, no invasiva, la cual es usada para registrar la actividad eléctrica del cerebro. Esta técnica se lleva a cabo colocando electrodos sobre el cuero cabelludo, los cuales captan la actividad eléctrica que genera la comunicación entre neuronas. Cabe mencionar, que la actividad eléctrica que genera una sola neurona no es suficientemente potente para ser medida por los electrodos colocados en la cabeza, pero si cuando la actividad eléctrica de una población de neuronas se sincroniza, es decir, la actividad eléctrica de cada neurona se suman, dando como resultado un campo eléctrico suficientemente grande que puede ser medido desde el cuero cabelludo. Las señales de EEG muestran las oscilaciones que reflejan los cambios rítmicos de la excitabilidad de una población de neuronas. Estas oscilaciones neuronales se observan tanto en forma temporal como espacial. Las oscilaciones están relacionadas a distintos eventos neurobiológicos como la percepción consciente, la memoria y hasta las etapas del sueño.

El objetivo principal de un EEG, es proporcionar información fundamental del funcionamiento del cerebro, lo que ayuda a diagnosticar de manera certera a pacientes que sufren de alguna patología como epilepsia, apnea, coma y en general enfermedades degenerativas del cerebro. Actualmente el EEG es la herramienta de oro debido a que no existe otra alternativa que

revele toda la información que un EEG proporciona.

### **1.2 Etapas del sueño**

Con la finalidad de tener una mejor apreciación y evaluación del sueño, Rechtschaffen & Kales [2] en 1968 presentan un criterio para la organizar el sueño, el cual se basa en las diferentes frecuencias de las señales eléctricas del cerebro captadas por un EEG.

Anteriormente se mencionó que el sueño se divide en dos grandes etapas, REM y NREM. Esta última significa el 75-80% de sueño en personas adultas [5], y se subdivide en cuatro etapas a las que denominaremos N1, N2, N3 y N4. Cabe mencionar que para la evaluación del sueño, el tiempo total de sueño se divide en épocas de 30 segundos y cada una se relaciona con una etapa del sueño dependiendo de los ritmos observados.

Cada etapa se relaciona con diferentes procesos del sueño. La etapa NREM(N1) ocupa el 3-8% del tiempo de sueño, se considera un estado de transición entre la vigilia e inicio del sueño y se presenta principalmente cuando la actividad cerebral disminuye y el cuerpo se relaja. En este estado se encuentran principalmente frecuencias correspondientes a los ritmos Beta y Gamma. A esta etapa se le denomina sueño ligero debido a la facilidad de interrumpir el sueño y despertar.

La etapa NREM (N2) representa el 45-50% del tiempo total de sueño. En el transcurso de esta etapa la actividad muscular se reduce y la conciencia disminuye, el ritmo dominante en este estado es Theta, sin embargo, se presentan otras señales de actividad cerebral denominados Spindles y

Complejos K, los cuales están relacionados con la protección del sueño y la consolidación de la memoria.

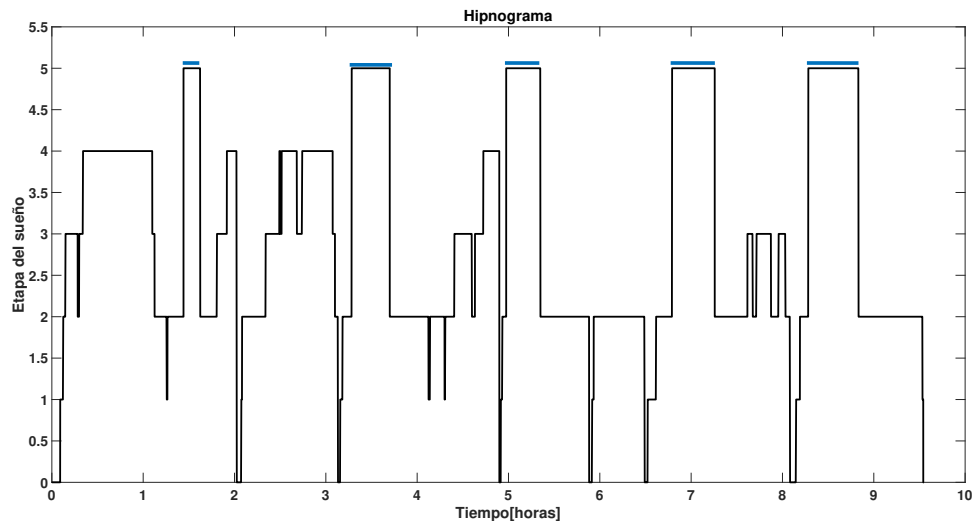
Actualmente las etapas NREM(N3 y N4), se consideran una sola por la American Academy of Sleep Medicine (AASM), debido a la gran similitud en su contenido. Ambas etapas ocupan el 20% del tiempo total de sueño. Cabe mencionar que durante estas etapas, el sujeto entra en sueño profundo, donde la actividad cerebral disminuye de manera significativa. Además, si se despierta a una persona en el transcurso del sueño profundo, es posible que se sienta desorientada por un algunos minutos. El ritmo dominante durante estas etapas es Delta, las cuales son señales de baja frecuencia.

Finalmente la etapa REM representa un 20-25% del tiempo total de sueño. Durante la etapa REM existe un aumento en la actividad cerebral, donde los ritmos de frecuencia dominantes son Beta y Gamma. La etapa REM es la conclusión de un ciclo de sueño completo y aparece por primera vez alrededor de los 90 minutos después de haber iniciado el proceso del sueño.

La representación gráfica de las etapas del sueño se conoce como hipnograma. En un hipnograma se observan las diferentes etapas del sueño en función del tiempo total de sueño, y permite ver la transición entre ciclos de sueño NREM-REM, del cual su duración promedio es de 90 minutos aproximadamente. El hipnograma se ve afectado notablemente por la existencia de las diversas patologías que afectan el sueño. La figura (1.1) muestra un hipnograma de una persona adulta donde se observa el historial de etapas de sueño durante una noche.

## INTRODUCCIÓN

---



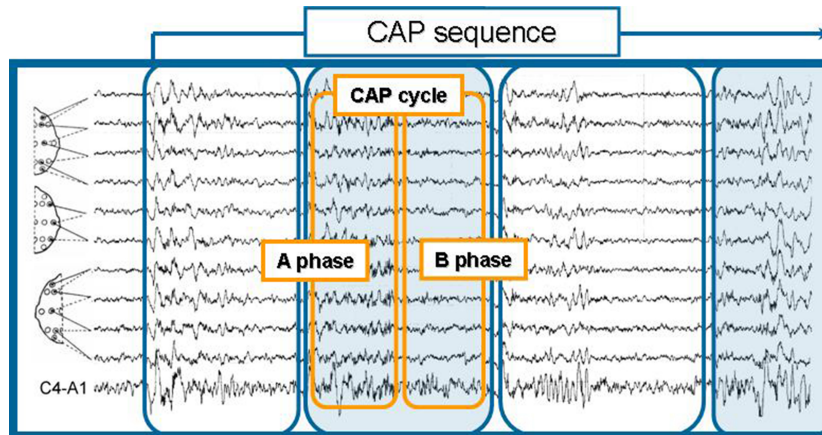
**Figura 1.1:** Ejemplo de hipnograma de un sujeto adulto. Las etapas NREM (N1-N4) se denotan con los valores 1-4 respectivamente, REM tiene un valor de 5 y 0 denota el estado de vigilia.

### 1.3 Patrón Alternante Cíclico (CAP)

El Patrón Alternante Cíclico del sueño se forma a partir de los diferentes eventos (fases A) existentes en la actividad eléctrica del cerebro durante las cuatro etapas del sueño N1, N2, N3 y N4. El tiempo de duración de estos eventos varía entre 2-60 segundos. Las fases A se pueden diferenciar fácilmente de los ritmos que caracterizan al EEG y comúnmente se identifican por cambios bruscos en frecuencia y cambios en amplitud. Para construir un ciclo CAP es necesario de una fase A seguida de una fase B, la cual es el ritmo que define a la etapa del sueño [3, 4]. Una secuencia CAP se compone por dos o más ciclos consecutivos, además cualquier secuencia CAP inicia con una fase A y termina con una fase B. En

la figura (1.2) se ilustra una secuencia del fenómeno CAP. Las secuencias de CAP comúnmente se presentan durante la transición de las etapas NREM a REM, pero cabe mencionar que, para personas en condiciones normales no existe CAP durante la etapa REM.

El CAP-rate, es una medida que proviene de estudiar el fenómeno CAP y tiene como principal propósito medir la inestabilidad del sueño, la cual está definida como la cantidad del sueño en secuencias CAP dividido entre el tiempo total de sueño [4]. Con base a esta medida, los expertos consideran que el CAP es una característica bastante útil del EEG para realizar un buen diagnóstico en trastornos del sueño.



**Figura 1.2:** Ejemplo de la una secuencia CAP. Un ciclo CAP se caracteriza por una fase A seguido de una fase B. Fuente: Physionet.

### 1.3.1 Clasificación de las fases A

Para tener una mejor representación del fenómeno CAP, Terzano realizó una clasificación de las fases A en tres tipos: A1, A2 y A3 [2, 8]. La clasificación de estas fases se realiza con base a la proporción de ondas

## **INTRODUCCIÓN**

---

lentas de alto voltaje (ritmo Delta) contenidas en cada fase A. En breve se realiza una pequeña descripción para cada tipo de fase A:

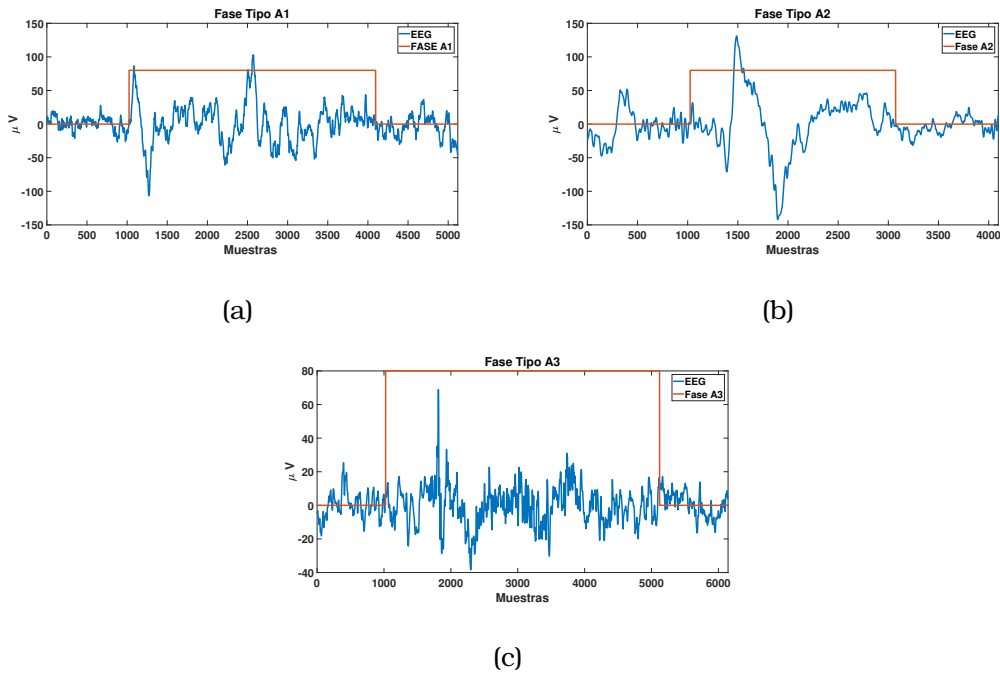
Fase(A1): Dentro de esta fase el ritmo dominante es Delta, el cual ocupa cerca del 80% del tiempo total de la fase A1, durante el tiempo complementario existe una desincronización de EEG. Esta fase es la más común dentro de un EEG.

Fase(A2): En esta fase existe una combinación de ritmos lentos y rápidos(Delta y Beta). Donde el ritmo Beta tiene una duración del 20 al 50% del tiempo total de la fase A2.

Fase(A3): Los ritmos dominantes en esta fase son Theta y Alfa, los cuales ocupan más del 50% del tiempo total de la fase A3.

Los ritmos lentos son una de las principales características para la fase A1, mientras que, para las fases A2 y A3 las ondas lentas son dominantes solo en su inicio. A continuación, en la figura (1.3) se presentan ejemplos de la señal EEG donde se localizan los distintos tipos de fase A.





**Figura 1.3:** Ejemplos de fases A: (a) Fase tipo A1. (b) Fase tipo A2. (c) Fase tipo A3. Con la función pulso (línea roja) se denota la duración de la fase.

## 1.4 Base de datos

Physionet [18] cuenta con una amplia colección de registros de señales fisiológicas con la intención de promover la investigación poniendo en disposición señales biomédicas en acceso público. La base de datos empleada en el presente trabajo está enfocada al estudio del sueño y contiene registros polisomnográficos con señales de ritmo cardíaco, movimiento muscular, movimiento ocular, respiración y electroencefalografía. En este trabajo de tesis se enfoca en las señales de electroencefalograma (EEG). Cabe mencionar que la información clínica de los registros de los sujetos que conforman la

## INTRODUCCIÓN

---

base de datos, entre los datos más relevantes se encontró los siguientes. La captura de señales fisiológicas fueron realizadas en el centro de estudios del sueño del Hospital Mayor de Parma, Italia. La institución fué la encargada de realizar la valoración clínica, el consentimiento y el registro polisomnográfico de los sujetos. Los sujetos se consideran clínicamente saludables en relación al sueño debido a que no se encontró trastornos que estén vinculados con este. Los sujetos tampoco consumieron alcohol o medicamentos que pudieran afectar el sistema nervioso central y por consiguiente la posibilidad de afectar el comportamiento de la actividad cerebral. Para realizar el registro de señales se utilizaron sensores de montaje superficial (electrodos), además una noche de condicionamiento para adaptarse al hospital y los aparatos.

La base de datos cuenta con 16 registros polisomnográficos en condición saludable y algunos otros registros de sujetos con distintos trastornos del sueño, sin embargo, nos centraremos en los sujetos saludables. El rango de edad es de 23-42 años ( $33.1 \pm 5.5$  años). De la totalidad de los registros, 9 son mujeres con rango de edad 24-42 años ( $33.5 \pm 6.5$  años) y 7 son hombres cuyo rango de edad es 23-34 años ( $30.8 \pm 3.7$  años).

De manera particular, las señales de encefalografía fueron obtenidos por diferente número de canales, derivaciones y frecuencias de muestro de las señales EEG. La frecuencia de muestreo (fs) es distinta para cada registro, entre las frecuencias más comunes fueron de 100Hz, 128Hz, 200Hz y 512Hz. La tabla [1.2](#) muestra la información relevante de la captura de los registros en cada sujeto.

Sujeto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Frecuencia de muestreo	512	512	512	100	512	128	128	100	128	512	512	100	200	200	200	100
Número de canales	9	5	13	5	13	2	2	5	2	13	13	4	6	6	6	5

**Tabla 1.2:** Información de la frecuencia de muestreo y el número de canales utilizados en cada sujeto.

## 1.5 Análisis de Singularidades

Las singularidades son estructuras irregulares que en la mayoría de los casos cargan con información importante. Por ejemplo, en una señal de electrocardiograma, la información de interés es caracterizada por la presencia de picos, un fenómeno transitorio. En temas financieros, las singularidades se presentan cuando los valores de la bolsa cambian de forma repentina. Las fases A también presentan esta característica debido a un estímulo o cambio de frecuencia. De ahí la importancia de detectar y determinar cuantitativamente las singularidades existentes, y por ende extraer características para la correcta evaluación o caracterización de una señal o sistema.

La transformada de Fourier ha sido una de las principales herramientas utilizadas para describir o analizar singularidades de forma global. Sin embargo, esta transformación no provee información acerca de un evento localizado en el dominio del tiempo [35]. Por otra parte, la transformada wavelet realiza la descomposición de la señal en bloques, con los cuales puede realizar una localización en tiempo-frecuencia o escala-frecuencia. La amplitud de la transformada wavelet a través de las escalas se ve relacionada con la regularidad de una señal y el exponente de Hölder.

Esta relación resulta en una poderosa herramienta, la cual localiza singularidades en múltiples escalas [29]. En los capítulos 2 y 3 se detalla la transformada wavelet y el exponente de Hölder, respectivamente.

### 1.6 Estado del arte

El estudio del sueño ha sido una de las áreas de investigación más destacada durante las últimas décadas [6, 7, 13, 11]. Hasta el momento, se han implementado una gran variedad de métodos para evaluar el sueño, principalmente se utiliza el EEG [12], imágenes de resonancia magnética [25] e inclusive con tractografía [21].

De manera general, los trabajos enfocados en el proceso del sueño, tienen como objetivo principal la evaluación de procesos cognitivos como las emociones [27], caracterización de las etapas del sueño [22] y determinar trastornos relacionados con el sueño [19]. La mayoría de los trabajos desarrollados se enfocan en determinar un diagnóstico clínico. Cabe mencionar que el sueño cuenta con dos principales estructuras, macroestructura (Estados NREM y REM) y microestructura (Fenómeno CAP-Fases A). Este último ha sido poco explorado para evaluar el proceso del sueño debido a que es un proceso fisiológico de larga duración, además, la principal forma para detectar las fases A es mediante la observación de médicos especializados a través de la identificación de eventos en la señal EEG.

El trabajo realizado en [20] presenta una evaluación de la estabilidad y calidad del sueño para la macroestructura y microestructura del EEG con base en el método de Hjorth's Descriptors.

Los descriptores de Hjorth's denominados actividad, movilidad y complejidad son relacionados a la amplitud, la frecuencia principal y el cambio en frecuencia de la señal, respectivamente. El procedimiento fue probado en primera instancia para ratas macho posteriormente fue evaluado en humanos. Las señales de EEG para los sujetos fueron grabadas mediante 10 electrodos bipolares, posteriormente se filtro la señal para 1-32 Hz. Después de la fase de filtrado, las señales se dividieron por épocas de 30 segundos con base al manual propuesto por Rechtschaffen & Kales en [2]. Finalmente se calcularon los descriptores de Hjorth para épocas de 2 segundos. Como conclusión de este trabajo fue una aproximación de la organización del sueño.

Por otra parte, el trabajo elaborado en [13], donde también utilizan los parámetros de Hjorth, pero en esta ocasión se enfocan en el fenómeno CAP. Además se utilizó un análisis de componentes principales (PCA) para la reducción de información. El estudio realizó una caracterización con base a las componentes espectrales de las señales EEG y determinaron que existen alternativas a explorar para el reconocimiento y evaluación del fenómeno CAP.

El CAP-rate es una medida cuantitativa para la calidad del sueño, pero es arduo de realizar. Generalmente producen una alta variabilidad entre los anotadores [15]. Con la intención de disminuir el error en las anotaciones se ha intentado obtener una expresión matemática para las fases A, algunas investigaciones han evaluado las fases A mediante descomposición espectral y medidas de complejidad [14, 16].

Otras investigaciones mencionan que durante el CAP, las oscilaciones

presentes tienen una fuerza diferente dependiendo del subtipo de la fase A [17].

La presencia del fenómeno CAP produce importantes cambios en la señal de EEG, estos cambios son dominantes tanto en tiempo como en frecuencia. Las fases A presentan un aumento en potencia dependiendo de la banda de frecuencia en la que estas se encuentren [14]. Esto significa que el médico observa un cambio brusco de señal en frecuencia o amplitud cuando ocurre una fase A. Por lo tanto, podría ser interesante saber si existe de manera local una transición suave o una transición repentina, y esto dará una nueva perspectiva sobre la aparición de la fase A y comprender si estos cambios están programados o aparecen inesperadamente.

También se han evaluado las señales de EEG desde el punto de vista de singularidades, pero la evaluación se realizó de forma global [28]. Determinaron que las funciones wavelet pueden detectar singularidades no oscilatorias y oscilatorias en señales EEG.

### **1.7 Objetivo**

El objetivo principal de este trabajo es evaluar las singularidades del EEG correspondientes al inicio y fin de las fases A a través del exponente de Hölder calculado con la Transformada Wavelet.

### **1.8 Hipótesis**

Se puede observar que los trabajos para entender y caracterizar las propiedades de las fases A en muchas ocasiones se basan solamente en

los cambios de amplitud y frecuencia. Sin embargo, la misma definición de las fases A las describe como cambios bruscos tanto en frecuencia como en amplitud, lo cual da la impresión de que las fases A son fenómenos que se sobre imponen a los ritmos basales de las etapas del sueño y podrían estar caracterizados por singularidades en la señal de EEG y no como transiciones suaves de un estado a otro.

## **1.9 Organización**

Este trabajo cuenta con cinco capítulos, dos anexos y la bibliografía. La introducción se encuentra en este capítulo y contiene de manera general la información relevante para esta investigación, el estado del arte, hipótesis y el objetivo.

En el capítulo dos se describe el análisis tiempo-escala, además se introduce la teoría wavelet en tiempo continuo y las expresiones que gobiernan a la transformada wavelet. Mientras que en el capítulo tres se presentan los conceptos de exponentes de Hölder, singularidades y la relación con la transformada wavelet, así como la forma numérica de calcularlos en términos de la transformada wavelet.

En el capítulo cuatro se detalla el análisis de singularidades aplicado a la información de las fases A del sueño y se presentan los resultados obtenidos.

Finalmente, el capítulo cinco contiene las principales conclusiones y el posible trabajo a futuro.

---

## ANÁLISIS TIEMPO-ESCALA

---

En este capítulo se justifica el uso del análisis tiempo-escala, se introduce la teoría wavelet en tiempo continuo y las expresiones que gobiernan a la transformada wavelet.

La mayoría de los fenómenos físicos pueden ser representados mediante señales en el dominio del tiempo, donde el tiempo es una variable independiente y la amplitud es la variable dependiente. Cuando la señal se representa mediante un gráfico da como resultado una función tiempo-amplitud. Sin embargo, la información presente en el gráfico no es la óptima para analizar la señal, en muchos casos es necesario realizar una transformación de la misma para evidenciar características que no están presentes en el tiempo.

El procesamiento de señales es el área encargada de estudiar diferentes operadores y algoritmos que nos permiten analizar y caracterizar las señales, en otras palabras, permite descomponer las señales, estudiar sus componentes, extraer propiedades, reconstruir la señal original o su aproximación, etc. En la actualidad, se sabe que la diversidad de señales se puede procesar, analizar o describir de forma adecuada si se expresan mediante una combinación lineal de funciones elementales [36].



Una de las herramientas más conocidas y utilizadas para analizar señales en las diversas áreas de la ciencia es el análisis de Fourier, que a partir de su transformada se puede definir el concepto de espectro en frecuencias de una señal, el cual nos permite descomponer las señales dependiendo de su contenido en frecuencia.

La Transformada de Fourier (TF) para una función de energía finita  $f(t)$  se denota como  $\widehat{f}(w)$  y se define de la siguiente forma

$$\widehat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{jwt} dt. \quad (2.1)$$

La TF de una señal proporciona la información en frecuencia de la señal, sin embargo, esta herramienta no entrega el instante de tiempo en el que sucede. Esta información no es indispensable para señales estacionarias, pero es de suma importancia para señales no estacionarias. Cabe mencionar que una señal estacionaria es aquella que no cambia su contenido en frecuencia durante el tiempo, esta es la razón por la cual no es necesario conocer el instante de tiempo donde aparecen las componentes de frecuencia. Por otro lado, las señales no estacionarias son aquellas que varían su contenido de frecuencia en función del tiempo y para poder analizarla, la mayoría de las veces es necesario obtener la localización temporal de sus componentes espectrales, información que la TF no puede proveer. Para ejemplificar lo anterior, consideremos la siguiente señal estacionaria

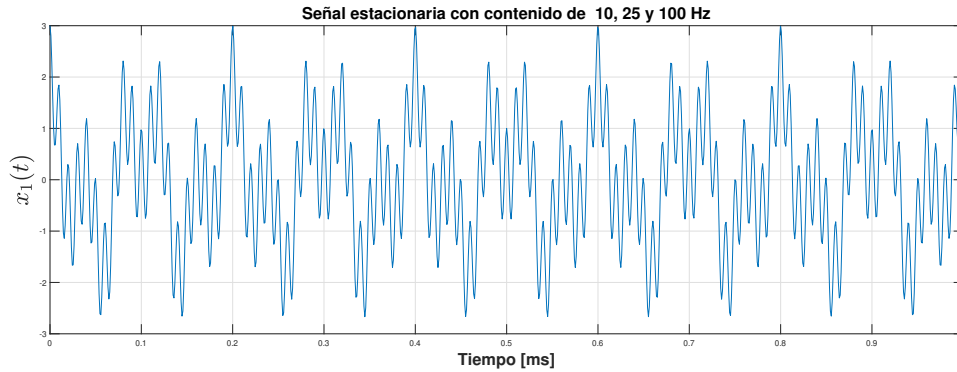
$$x(t) = \sum_{k=1}^3 \cos(2\pi f_k t). \quad (2.2)$$

donde las  $f_1 = 10$ ,  $f_2 = 25$  y  $f_3 = 100$  Hz se encuentran presentes en cualquier instante de tiempo y es posible visualizarlo si aplicamos la TF. En la

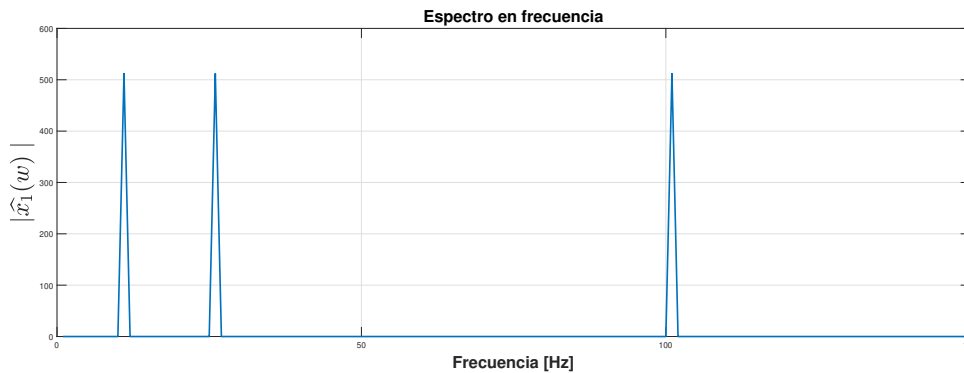
## ANÁLISIS TIEMPO-ESCALA

---

Figura(2.1(a)) se grafica la señal (2.2), mientras que en la Figura(2.1(b)) se visualiza su espectro en frecuencias de la señal, donde se pueden observar las frecuencias de la señal transformada.



(a)



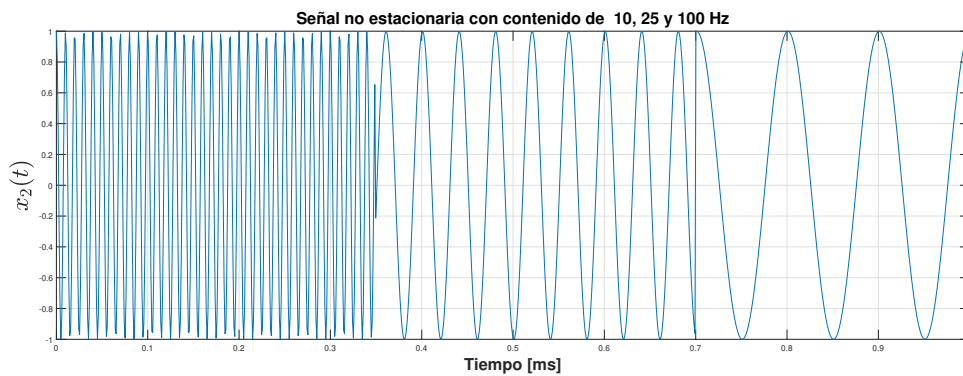
(b)

**Figura 2.1:** (a): Señal estacionaria con diferentes frecuencias  $f_1 = 10$  Hz,  $f_2 = 25$  Hz  $f_3 = 100$  Hz. (b): Espectro de Fourier de la señal estacionaria  $x(t)$ .

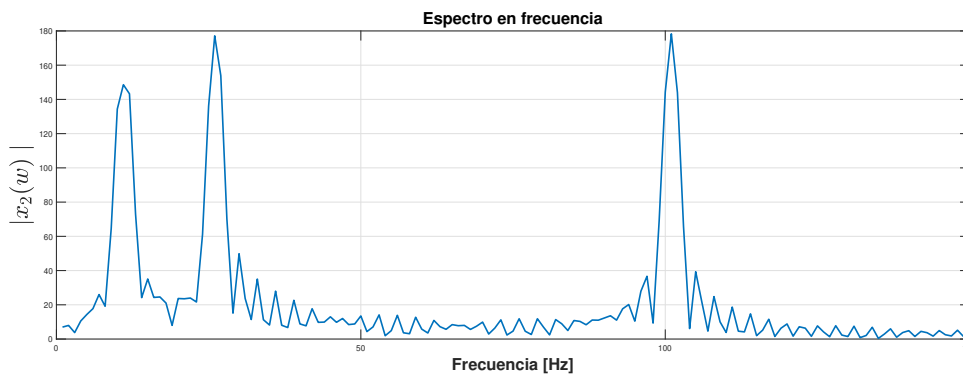
Ahora, al realizar el mismo procedimiento para una señal no estacionaria, es decir, tendrá los mismos valores de frecuencia  $f_k$ , pero solo un valor de frecuencia estará presente dentro de un intervalo de tiempo. La frecuencia  $f_1$  se localiza en el intervalo de 0 a 350 ms, la frecuencia  $f_2$  dentro del intervalo

de 350 a 700 ms y la frecuencia  $f_3$  en el intervalo de 700 a 1000 ms.

En la Figura(2.2(a)) se muestra la señal no estacionaria y en la Figura(2.2(b)) se observa el espectro en frecuencias de la señal no estacionaria. En ambas señales, el contenido en frecuencia es el mismo, sin embargo, las señales en tiempo son completamente diferentes.



(a)



(b)

**Figura 2.2:** (a): Señal no estacionaria con diferentes frecuencias  $f_k$ . (b): Espectro de Fourier de la señal no estacionaria  $x_2(t)$ .

Con base a lo anterior, se puede observar que la TF solo muestra información de frecuencia contenida en una señal, pero no el tiempo donde

se localiza dicha frecuencia. Esta es una de las principales deficiencias de la TF para analizar señales no estacionarias [1].

Una posible solución es utilizar la Transformada Corta de Fourier (STFT por sus siglas en inglés: Short-Time Fourier Transform), una transformación que se implementa por segmentos o ventanas que al trasladarla en función del tiempo, es posible obtener información del tiempo donde sucede cada armónico. En particular, la aplicación de STFT divide la señal en segmentos de longitud finita, en los cuales se considera que la señal es estacionaria y se calcula la TF para cada segmento. Esto pareciera resolver la resolución tiempo-frecuencia, sin embargo la resolución es limitada por el ancho de banda y el tipo de ventana a utilizar. La expresión matemática de STFT se define como:

$$STFT(\tau, w) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)v^*(t - \tau)]e^{-j\omega t} dt, \quad (2.3)$$

donde la señal  $v$  es la función ventana, para la cual se calcula la transformada de Fourier para cada instante  $\tau$  y frecuencia  $w$ . Cabe mencionar que, mientras más estrecha sea la ventana se obtiene buena resolución en tiempo pero pobre en frecuencia, mientras que con una ventana ancha sucede lo contrario. Si se considera un ancho infinito o igual al de la señal, es como aplicar la transformada de Fourier ordinaria.

Sin embargo, la STFT no aporta una representación exacta de tiempo-frecuencia y sigue siendo deficiente para señales no estacionarias, como lo son las señales acústicas, biológicas, etc., debido a que su espectro en frecuencias varía en función al tiempo. Esto nos obliga a buscar otras alternativas para obtener información adicional de las señales. Una de las

alternativas es aplicar la Transformada Wavelet (TW), proporcionando una representación en tiempo-frecuencia o tiempo-escala de la señal.

La TW es una herramienta que permite analizar señales grandes de manera local, describe de manera eficaz anomalías, cambios bruscos, y eventos que se encuentren dentro de la señal. Además puede encontrar discontinuidades y singularidades con gran facilidad en comparación con la transformada de Fourier. Antes de definir la Transformada Wavelet, es necesario revisar algunos conceptos que serán útiles y que a continuación se exponen.

## **2.1 Preliminares**

Para realizar el análisis de una señal o función, antes se debe tomar en cuenta el espacio de trabajo, así como seleccionar un conjunto de vectores o funciones que formen una base conveniente en el espacio.

Se denotará a  $\mathbb{R}$  como el conjunto de números reales y cualquier señal  $f$  evaluada en tiempo continuo se denota como  $f(t)$ , donde  $t \in \mathbb{R}$ .  $L^2(\mathbb{R})$  denota el espacio de Hilbert para el caso continuo y cualquier función continua  $f(t)$  pertenece a  $L^2(\mathbb{R})$  si cumple con

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty. \quad (2.4)$$

Comúnmente a estos espacios se les conoce como espacios de energía finita, en los cuales se definen algunas operaciones importantes que definen conceptos relevantes.

La norma de una función  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  esta dada por

$$\| f(t) \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt. \quad (2.5)$$

Dadas dos funciones  $f(t)$  y  $g(t)$  que están en  $L^2(\mathbb{R})$ , se puede definir el producto escalar o producto punto en  $L^2(\mathbb{R})$  de la siguiente manera

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t)dt. \quad (2.6)$$

donde el símbolo "\*" nos indica el complejo conjugado de la función  $g$ .

### **2.1.1 Expansión en series de señales**

Generalmente, para cualquier señal o función  $f(t)$  de algún espacio  $E$ , de dimension finita o infinita, podemos encontrar un conjunto de señales elementales o base  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , tal que  $f(t)$  se expresa como una combinación lineal mostrada en (2.7), a la cual se le conoce como expansión o serie para  $f(t)$  [36]

$$f(t) = \sum_k a_k \varphi_k. \quad (2.7)$$

Además, el conjunto  $\{\varphi_k\}$  es completo para el espacio  $E$ , si todas las señales  $f \in E$  pueden ser expandidas como en (2.7) y es llamado una base para  $E$ . Los coeficientes  $a_k$  de la expansión mostrada en la ecuación (2.7) se calculan como:

$$a_k = \langle f(t), \varphi_k \rangle = \int f(t) \widehat{\varphi}_k(t) dt, \quad (2.8)$$

para señales de tiempo continuo, donde  $\widehat{\varphi}_k$  significa un conjunto dual.

Comúnmente, se utiliza la expresión (2.7) para analizar, describir o procesar eficazmente a  $f(t)$ , ya que el análisis de la expansión lineal resulta

ser fácil y favorable debido a que ofrece más información en comparación con la señal original.

## 2.2 Transformada Wavelet

Al momento de realizar una transformación de una señal comúnmente se busca la representación de la misma en un dominio diferente, de esta manera buscar información que en el dominio original son difíciles y en algunos casos imposibles de detectar, también puede que facilite el uso de algunas operaciones [33].

Una wavelet es una función  $\psi(t)$  que oscila en un pequeño intervalo de tiempo de carácter real o carácter complejo, y cumple generalmente con las siguientes propiedades:

1. La integral de la función wavelet es cero,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (2.9)$$

2. Debe tener energía finita,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty. \quad (2.10)$$

3. Cumplir con la condición de admisibilidad [33, 35, 36],

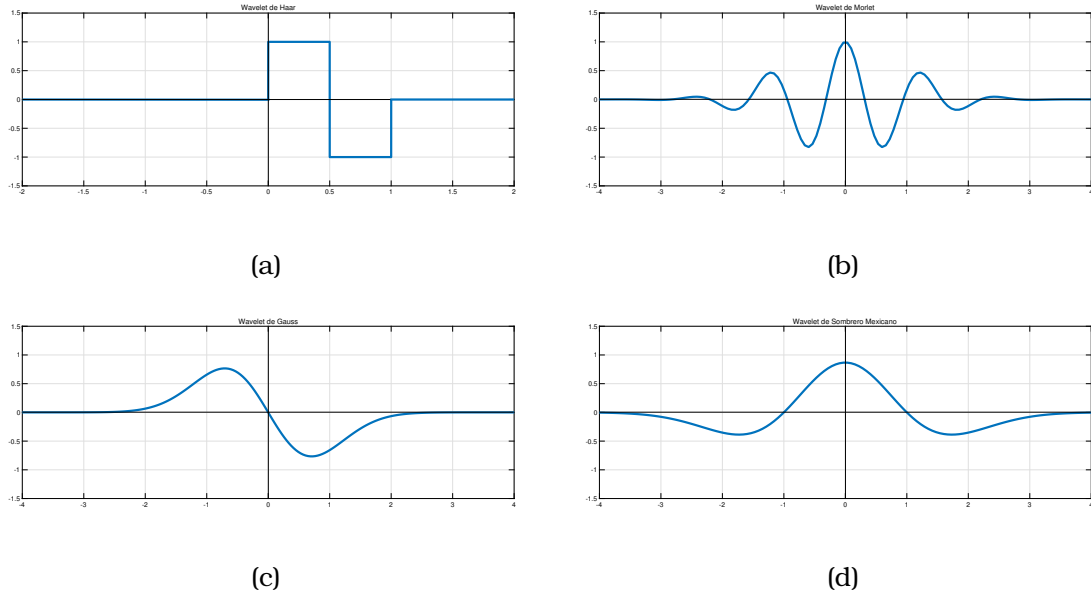
$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(w)|^2}{|w|} dw < \infty \quad (2.11)$$

en donde  $\Psi(w)$  es la Transformada de Fourier de  $\psi(t)$ .

## ANÁLISIS TIEMPO-ESCALA

---

La expresión que se muestra en (2.10), indica que cualquier wavelet debe estar dentro del conjunto  $L^2(\mathbb{R})$ . En la actualidad existe una gran variedad de funciones que satisfacen las tres propiedades, algunas de ellas han sido bien estudiadas y empleadas en la transformada wavelet. Entre las funciones wavelet más conocidas y utilizadas están la wavelet de Haar, Morlet, Gauss de primer orden y sombrero mexicano, las cuales se ilustran en la figura(2.3).



**Figura 2.3:** (a): Función wavelet de Haar. (b): Función wavelet de Morlet. (c): Función wavelet de Gauss de primer orden. (d): Función wavelet Sombrero Mexicano.

## 2.3 Transformada Wavelet Continua

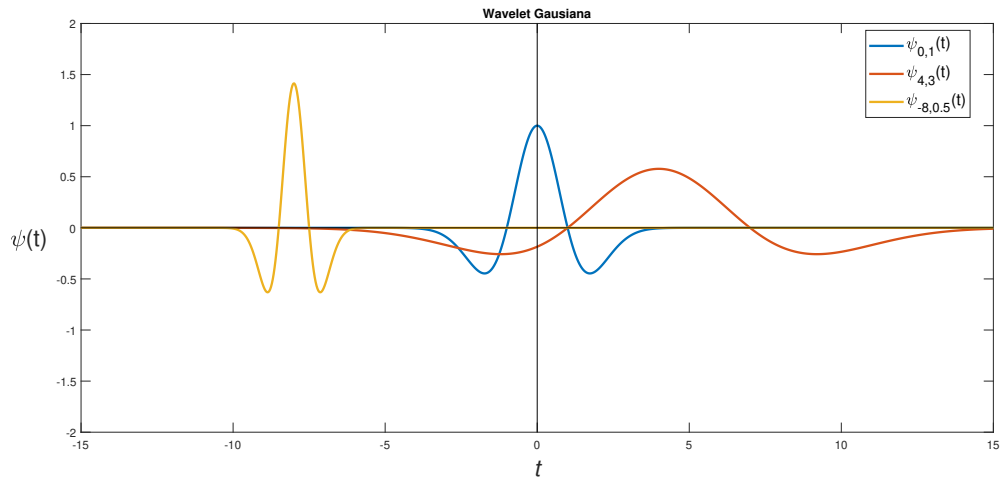
Generalmente, en la definición de la TW continua se considera a la función wavelet base, también conocida como wavelet madre  $\psi(t)$ , a la



cual se le aplican las operaciones de escalamiento (dilatación) y traslación (desplazamiento) en el dominio del tiempo. Las funciones resultantes son denominadas wavelet hijas  $\psi_{a,b}(t)$  y se denotan como

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (2.12)$$

donde  $b \in \mathbb{R}$  es el parámetro de traslación, y  $a \in \mathbb{R}^+$  con ( $a \neq 0$ ) es el parámetro de escala. El parámetro de escala  $a$  está relacionada con la información de frecuencia, donde grandes escalas se relaciona con información de la señal en bajas frecuencias, mientras que escalas pequeñas se vinculan con el contenido de altas frecuencias de la señal. El factor  $\frac{1}{\sqrt{a}}$  es una constante de normalización que nos permite conservar la energía, además de cambiar la amplitud de la función wavelet. Se puede realizar una analogía entre el análisis wavelet y un microscopio, donde el parámetro de escala corresponde a la resolución del microscopio y el parámetro de traslación es el lugar donde se realiza la observación. Si se desea observar detalles muy pequeños de una muestra, la resolución debe ser muy grande. Esto se representa como una wavelet muy compacta a pasos de traslación pequeños. En la figura (2.4) se ilustra el efecto de escalamiento y traslación en el tiempo sobre la función wavelet Sombrero Mexicano.



**Figura 2.4:** Función wavelet Gaussiana con diferentes valores de escala  $a$  y traslación  $b$ . Cuando  $a < 1$  la función wavelet se contrae, cuando  $a > 1$  la función se expande.

Con base a lo anterior, podemos definir la transformada wavelet continua (TWC) de una función  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  como:

$$W_{\psi}f(a, b) = \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (2.13)$$

donde  $\langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle$  es el producto punto, definido en (2.6), entre la función  $f(t)$  y la función wavelet  $\psi_{a,b}(t)$ . Al momento de emplear la transformada wavelet, los coeficientes resultantes serán grandes cuando la función wavelet  $\psi(t)$  en la escala y traslación correspondientes y la función  $f(t)$  tienen parecido. De lo contrario, los coeficientes tienden a cero. Básicamente, la (TWC) mide la variación de la función  $f$  en los alrededores de  $b$ , donde el tamaño es proporcional a la escala  $a$ . Por otra parte, es importante mencionar que la función  $f$  puede ser recuperada mediante la siguiente fórmula de reconstrucción [33]

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{dad b}{a^2}, \quad (2.14)$$

donde  $C_\psi$  es una constante positiva que cumple con la condición de admisibilidad definida en (2.11).

### 2.3.1 Propiedades de la transformada wavelet

Se comentan las principales propiedades de la transformada wavelet en una dimensión.

- Linealidad: Dadas  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$W_\psi [\alpha f + \beta g](a, b) = \alpha W_\psi f(a, b) + \beta W_\psi g(a, b). \quad (2.15)$$

- Invariabilidad en corrimiento: Para  $t_0 \in \mathbb{R}$

$$W_\psi [f(t - t_0)](a, b) = W_\psi f(a, b - t_0) \quad (2.16)$$

- Invariabilidad en escala: Para cada  $c \neq 0$

$$W_\psi \left[ f\left(\frac{t}{c}\right) \right](a, b) = \frac{1}{c} W_\psi f\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) \quad (2.17)$$

- Conservación de energía: Existe una identidad similar a la de Parseval's

$$\langle f, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |W_\psi f(a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2} \quad (2.18)$$

## Momentos de desvanecimiento de una wavelet

Los momentos de desvanecimiento de una wavelet, es una propiedad bastante importante, ya que nos permite conocer la versatilidad de la

wavelet para analizar funciones o señales de carácter polinomial de orden  $n$  [29, 34].

Se dice que una wavelet tiene  $n$  momentos de desvanecimiento, la cual se denotara como  $\psi_n$ , si y solo si cumple con

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi_n(t) dt = 0, \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.19)$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi_n(t) dt \neq 0, \quad \text{para } k = n.$$

Con base a lo anterior, una wavelet que cuenta con  $n$  momentos de desvanecimiento es ortogonal a polinomios de orden  $n-1$ . Cabe señalar que, la condición de admisibilidad (2.11) requiere como mínimo un momento de desvanecimiento [33, 35]. Para comprender la gran importancia que tienen los momentos de desvanecimiento, consideremos una wavelet  $\psi_n$  con  $n$  momentos de desvanecimiento que se puede representar como la  $(n-1)$  derivada de una wavelet  $\psi = \psi_1$  con solo un momento de desvanecimiento. Si  $\psi$  cumple con la condición de admisibilidad, entonces

$$\psi_n(t) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \psi(t) = \frac{d^n \phi(t)}{dt^n} \quad (2.20)$$

además

$$W_{\psi_n} f(a, b) = (-a)^{n-1} W_{\psi} \left[ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(t) \right] (a, b) = (-a)^n \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) \frac{1}{\sqrt{a}} \phi \left( \frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (2.21)$$

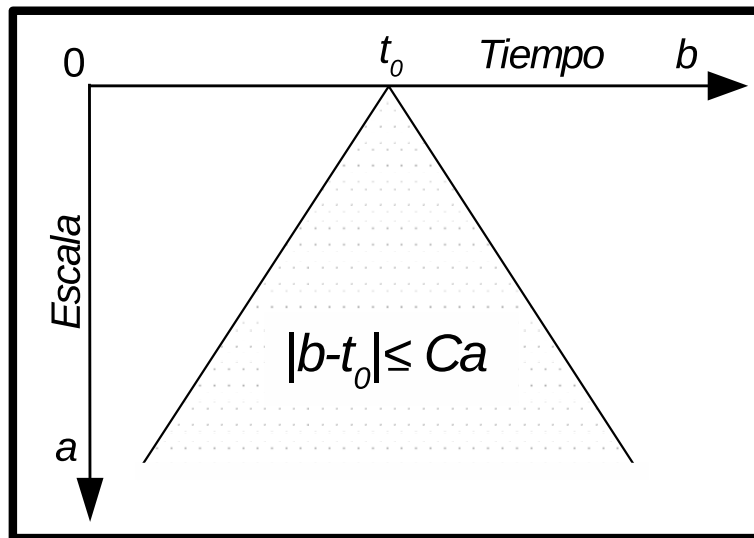
donde  $\phi = e^{-\frac{t^2}{2}}$ , generalmente conocida como función Gaussiana. Esta ecuación se puede probar mediante una repetición de integración por partes de (2.13). Entonces la transformada wavelet de  $f(t)$  con una wavelet  $\psi_n(t)$  que tiene  $n$  momentos de desvanecimiento es una versión "suave" de la  $n$ -ésima derivada de  $f(t)$  en varias escalas.

## El cono de influencia

Ahora suponga que  $\psi$  es de soporte compacto  $[-C, C]$  un intervalo en  $\mathbb{R}$ . El cono de influencia de  $\psi$  en un punto  $t_0$  es el conjunto de puntos  $(a, b)$  en el plano escala-tiempo, de tal manera que  $t_0$  está en el soporte de  $\psi_{a,b}(t)$ . El plano escala-tiempo de la transformada wavelet será denotado como el plano  $(a, b)$ . Dado que el soporte de  $\psi_{a,b}$  es  $[b - Ca, b + Ca]$ , el punto  $(a, b)$  está en el cono de influencia de  $t_0$  si

$$|b - t_0| \leq Ca. \quad (2.22)$$

El dominio resulta ser un cono que tiene el punto de intersección en  $t_0$  sobre el eje temporal. Esta situación se representa en la figura( 2.5 ).



**Figura 2.5:** El cono de influencia del punto  $t_0$  recae en los puntos del plano escala-tiempo  $(a, b)$  donde el soporte de  $\psi_{a,b}(t)$  intersecta la línea del tiempo en  $t = t_0$ .

---

## ANÁLISIS WAVELET

---

En este capítulo se presenta un método para la detección y medición de singularidades mediante el exponente de Hölder de funciones continuas. Se comenzará con la definición de la regularidad de Hölder, posteriormente comentaremos la relación entre los exponentes de Hölder y la transformada wavelet continua.

Las singularidades y las estructuras con irregularidades generalmente poseen información importante en las señales. Por ejemplo, en las imágenes, las discontinuidades indican un cambio de intensidad (contorno de un objeto). La transformada wavelet se puede enfocar en localizar ciertas irregularidades de la señal con un aumento adecuado, es decir, se reduce de manera progresiva el parámetro de escala [29].

### 3.1 Regularidad de Hölder

Para caracterizar estructuras singulares, es preciso comentar la regularidad local de una señal  $f(t)$ . Dentro del análisis matemático, el exponente de Hölder es capaz de caracterizar la regularidad local de una señal. La singularidad de una función  $f(t)$  en un punto  $t_0$  significa que, la función

es continua en todo momento, pero no es diferenciable en  $t_0$ . El exponente de Hölder en el punto  $t_0$  caracteriza la singularidad en la señal, en otras palabras, describe la regularidad de la señal [30, 31, 34, 35, 32].

Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es continua en Hölder con exponente  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) si para cada intervalo acotado  $(c, d) \subset \mathbb{R}$  se puede encontrar una constante positiva  $K$  de tal manera que

$$|f(t) - f(t_0)| \leq K|t - t_0|^\alpha \quad (3.1)$$

para todo  $t, t_0 \in (c, d)$ .

El espacio de Hölder para funciones continuas se denota como  $C^\alpha$ . Una función se dice que es  $C^{n+\alpha}$  si es  $C^n$  y su  $n$ -ésima derivada es Hölder continua con exponente  $\alpha$ . Es decir, si el exponente es  $n < \alpha < n+1$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , la función puede ser diferenciable  $n$  veces, pero la  $(n+1)$ -ésima derivada no existe. Por consiguiente se dice que una función es singular en la  $n$ -ésima derivada. Con base a esto, se define la regularidad de Hölder de una función continua [35, 34].

**Definición 3.1 (Regularidad de Hölder)**

1. Sea  $n$  un entero positivo y  $n < \alpha < n + 1$ . Una función  $f(t)$  tiene un exponente de Hölder  $\alpha$  local en  $t_0$ , si y sólo si existe una constante  $K$  y un polinomio  $P_n(t)$  de orden  $n$ , tal que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |f(t) - P_n(t - t_0)| \leq K|t - t_0|^\alpha \quad (3.2)$$

2. La función  $f(t)$  tiene un exponente de Hölder global  $\alpha$  en el intervalo  $(c, d)$  si y sólo si existe una constante  $K$  y un polinomio de orden  $n$ ,  $P_n(t)$ , tal que la ecuación (3.2) se cumple para todo  $t \in (c, d)$ .

3. La regularidad de Hölder de  $f(t)$  en  $t_0$ , es el supremo de todos los  $\alpha$  tal que  $f(t)$  tiene un exponente de Hölder  $\alpha$  en  $t_0$ .
4. La  $n$ -ésima derivada de alguna función  $f(t)$  es singular en  $t_0$  si  $f(t)$  tiene un exponente de Hölder  $\alpha$  en  $t_0$  con  $n < \alpha < n + 1$ .

Consideremos una función  $f(t)$  la cual es continuamente diferenciable en un punto, podrá tener un exponente de Hölder no menor a 1 en ese punto. Además, si la derivada es discontinua pero acotada,  $f(t)$  sigue siendo Hölder 1.

En relación con la definición (3.1) se tiene que el exponente de Hölder puede medir que tan irregular es la función  $f(t)$  en el punto  $t_0$ . Cabe mencionar que el polinomio  $P_n$  corresponde a los primeros  $(n + 1)$  términos de la serie de Taylor alrededor del punto  $t_0$ . Por ejemplo, para  $n = 0$ ,  $P_0(t - t_0) = f(t_0)$ . Si el exponente de Hölder es diferente de 1 en el punto  $t_0$  se dice que la función  $f(t)$  es singular en ese punto. Si el exponente de Hölder  $\alpha \in (n, n + 1)$  en (3.2), la función  $f(t)$  es  $n$  veces diferenciable pero no  $(n + 1)$ .

Con la finalidad de ilustrar la definición(3.1), se considera el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.1**

La siguiente función

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ t & \text{si } t \geq 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

no es singular en  $t = 0$ , y tiene un exponente local de Hölder  $\alpha = 1$  en ese punto.



Ahora consideremos la función

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ t^l & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

donde  $0 < l < 1$ . La derivada de la función  $g(t)$  no está definida en  $t_0 = 0$  y la función tiene un exponente de Hölder en  $t_0 = 0$  que es menor a 1, es decir, la señal es singular en ese punto. Dado que la función no está acotada en  $t_0 = 0$ , se concluye que  $0 < \alpha < 1$  y que  $n = 0$ . De la ecuación (3.2) se sigue que  $g(t)$  tiene un exponente local de Hölder  $\alpha = l$  en  $t_0 = 0$ .

### 3.1.1 Análisis Wavelet de la regularidad local de Hölder

Sin duda, la transformada de Fourier es una herramienta muy utilizada dentro del procesamiento de señales, sin embargo, la transformada de Fourier no es la mejor opción para medir la regularidad local de Hölder de funciones, debido a que genera o provee información global de la regularidad de funciones o señales. En cambio, la transformada wavelet continua, es una herramienta que se adapta para estimar la regularidad de Hölder de funciones sobre intervalos y puntos. A continuación se presentan algunos teoremas que relacionan la TWC con la regularidad local de Hölder de una función  $f(t)$ .

El siguiente teorema relaciona la regularidad de Hölder de  $f(t)$  con la transformada wavelet en escalas finitas, es decir, cuando el parámetro de escala se acerca a cero.

#### **Teorema 3.1 (Exponente global de Hölder y la TWC)**

Suponga que  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|(1 + |t|)dt < \infty$  y que  $\Psi(0) = 0$ . Consideremos una función  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  y un intervalo  $[c, d]$  de  $\mathbb{R}$ . La función  $f(t)$  tiene un exponente de

*Hölder*  $0 < \alpha < 1$  en  $(c + \epsilon, d - \epsilon)$ , si y solo si para un  $\epsilon > 0$  existe una constante  $C$  tal que para un  $a > 0$  y  $b \in (c + \epsilon, d - \epsilon)$

$$|W_\psi f(a, b)| \leq C a^{\alpha + \frac{1}{2}}, \quad (3.5)$$

donde la condición  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|(1 + |t|) dt < \infty$  nos indica que  $\psi(t)$  tiende a cero más rápido que  $\frac{1}{t}$ .

Para exponentes de Hölder  $\alpha$  mayores a 1. Consideremos una wavelet que tenga  $n$  momentos de desvanecimiento,  $\psi_n(t)$ . Anteriormente se mencionó que una wavelet con  $n$  momentos de desvanecimiento se puede obtener como la  $(n - 1)$  derivada de una wavelet con un momento de desvanecimiento. Por completez, se reescribe la expresión.

$$W_{\psi_n} f(a, b) = (-a)^{n-1} W_\psi \left[ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(t) \right] (a, b) \quad (3.6)$$

Ahora consideremos  $0 < \alpha - (n - 1) < 1$ . La función  $f(t)$  tiene un exponente de Hölder  $\alpha$  en el intervalo  $(c, d)$ , si y solo si la  $n - 1$  derivada de la función  $(\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(t))$  cuenta con un exponente uniforme de Hölder  $\alpha - (n - 1)$  en el mismo intervalo [35]. Sustituyendo la condición anterior dentro del teorema (3.1) se obtiene lo siguiente

$$|W_\psi \left[ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(t) \right] (a, b)| \leq C a^{\alpha - (n-1) + \frac{1}{2}}, \quad (3.7)$$

donde  $C$  indica una constante arbitraria y la función wavelet  $\psi$  cuenta solo con un momento de desvanecimiento. Evaluando la ecuación (3.6) en la ecuación (3.7), con una wavelet  $\psi_n$  como la  $n - 1$  derivada de  $\psi$ ,

$$|W_{\psi_n} f(a, b)| \leq C a^{\alpha + \frac{1}{2}}. \quad (3.8)$$

La expresión anterior es una ampliación del teorema (3.1) para  $0 < \alpha < n$ . De hecho, el teorema descrito con wavelet  $\psi$  y la condición del número de momentos de desvanecimiento, nos permite describir la regularidad de la  $(n-1)$  derivada de la función  $f(t)$  mediante el decaimiento de los coeficientes wavelet  $|W_{\psi_n} f(a, b)|$ .

**Teorema 3.2 (Exponente local de Hölder y la TWC)**

Consideremos una función  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  que es continua y acotada. Si para algún  $\gamma > 0$  y  $\alpha \in ]0, 1[$

$$|W_{\psi_n} f(a, b)| \leq C a^{\gamma + \frac{1}{2}}, \tag{3.9}$$

y

$$|W_{\psi_n} f(a, (b - b_0))| \leq C a^{\alpha + \frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{|b - b_0|^\alpha}{a^\alpha |\log|b - b_0||} \right). \tag{3.10}$$

Del teorema (3.1) y la ecuación (3.10) se deduce que  $f(t)$  tiene un exponente de Hölder  $\gamma$  en  $b_0$ .

## 3.2 Estimación de singularidades aisladas con la transformada wavelet

Se puede lograr la localización de singularidades de una función a través de la transformada wavelet continua, mediante una línea que converge a la singularidad. Las líneas se denominan *líneas máximas*, ya que representan los máximos locales de la TWC con respecto a su posición.

En esta sección será preciso dar a conocer la definición del Módulo Máximo de la Transformada Wavelet. Además se mostrará que el exponente local de Hölder de una función puede ser calculado a lo largo de los

puntos del módulo máximo de la wavelet en el plano tiempo-escala. El conjunto de puntos generan líneas en el plano tiempo-escala. Estas líneas se denominan *líneas del módulo máximo de la transformada wavelet (LMMTW)*. Dependiendo del comportamiento que tengan las LMMTW, se puede estimar la regularidad de Hölder.

### 3.2.1 Módulo Máximo de la Transformada Wavelet (MMTW)

Con base a Mallat y Hwang en [34], se realiza lo siguiente:

#### **Definición 3.2 (Módulo Máximo de la Transformada Wavelet (MMTW))**

1. Un extremo local es un punto  $(a_0, b_0)$  tal que  $(\partial W_\psi f(a_0, b) / \partial b)$  tiene una raíz en  $b = b_0$ .
2. Un punto  $(a_0, b_0)$  es un módulo máximo de la transformada wavelet (MMTW), si existe un  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $b \in (b_0 - \varepsilon, b_0 + \varepsilon)$ , con  $b \neq b_0$ , entonces  $|W_\psi f(a_0, b)| < W_\psi f(a_0, b_0)$ .
3. Una línea del módulo máximo de la transformada wavelet (LMMTW) es una curva colocada en el plano tiempo-escala en la cual todo los puntos son módulos del máximo.

Un módulo del máximo  $(a_0, b_0)$  de la transformada wavelet es un máximo estrictamente local del módulo. En relación con la definición 3.2, el teorema que se comenta a continuación demuestra que si  $W_\psi f(a_0, b_0)$  no cuenta con un módulo máximo en escalas finas, entonces  $f(t)$  es considerada regular localmente.

Considere una función  $f(t)$  la cual su transformada wavelet esté completamente definida en  $(c, d)$  y sea  $b_0 \in (c, d)$ . Suponga que existe una escala  $a_0 > 0$ , y una constante  $C$ , tal que para  $b \in (c, d)$  y  $a < a_0$ , todos los módulos de los máximos de  $W_\psi f(a_0, b_0)$  pertenece al plano tiempo-escala definido por

$$|b - b_0| \leq Ca. \quad (3.11)$$

Entonces, para todos los puntos  $b_1 \in (c, d)$ ,  $b_1 \neq b_0$ ,  $f(t)$  tiene un exponente global de Hölder  $n$  en los alrededores de  $b_1$ . Sea  $\alpha < n$  un número que no es entero. La función  $f(t)$  tiene exponente global de Hölder  $\alpha$  en  $b_0$ , si, y sólo si existe una constante  $A$  tal que en cada módulo de los máximos  $(a, b)$  en el plano definido en la ecuación (3.11) se tiene

$$|W_\psi f(a, b)| \leq Aa^{\alpha+1/2}. \quad (3.12)$$

El comportamiento del escalamiento de la LMMTW representado en la ecuación anterior puede reescribirse como

$$\log |W_\psi f(a, b)| \leq \log(A) + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \log(a). \quad (3.13)$$

Por lo tanto, para calcular los exponentes de Hölder mediante la transformada wavelet se realizan los siguientes pasos:

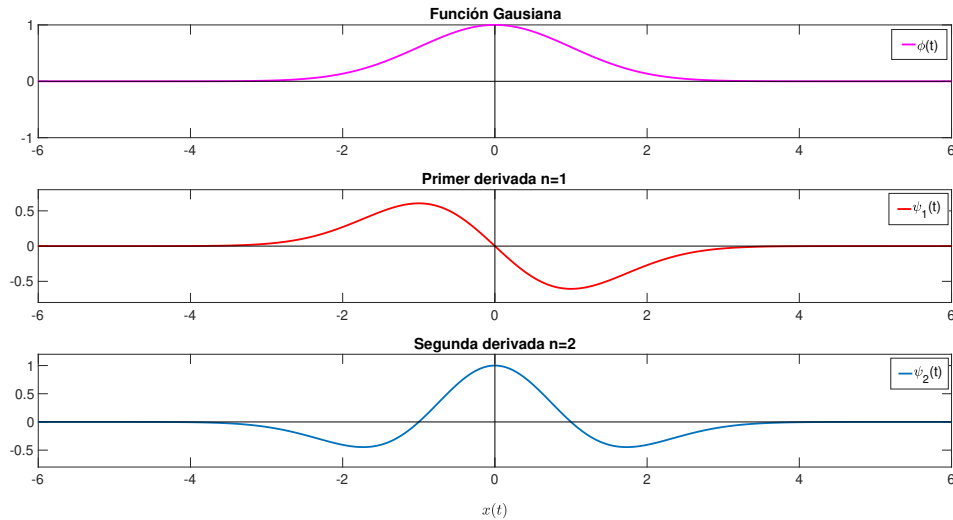
1. Calcular la transformada wavelet de la señal  $f(t)$  a analizar, tomando en cuenta los momentos de desvanecimiento de la función wavelet.
2. Determinar el módulo máximos de la transformada wavelet que se calculó en el punto anterior para cada escala. Interpolan los máximos de la TWC en forma de líneas.

3. Si las Líneas de Módulo Máximo satisfacen la distribución del cono mostrada en (3.11), entonces, se utiliza la relación lineal descrita en la ecuación (3.13) para calcular el valor de  $\alpha$  en una escala logarítmica.

Cabe resaltar que para estudio y/o análisis de singularidades, se consideran funciones wavelet con  $n$  momentos de desvanecimiento, en particular wavelets resultantes de la derivación sucesiva de la función gaussiana  $\phi = e^{-t^2/2}$ , esto es,

$$\psi_n(t) = \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2/2}. \quad (3.14)$$

Se tomaron en consideración valores de  $n = 1, 2$ , primera y segunda derivada de la función mostrada en la ecuación (3.14). En la siguiente figura (3.1) se presenta la función gaussiana  $\phi(t)$  y sus primeras dos derivadas,  $\psi_1(t)$  y  $\psi_2(t)$ . Las funciones wavelet derivadas de la función  $\phi(t)$  son de gran utilidad para estudiar singularidades ya que son funciones que están bien definidas en tiempo y frecuencia, además, cuenta con la propiedad de momentos de desvanecimiento. Cabe mencionar que el número de momentos de desvanecimiento es igual al valor de la derivada  $n$ , es decir, la función  $\psi_1(t)$  cuenta con un momento de desvanecimiento,  $\psi_2(t)$  cuenta con dos momentos de desvanecimiento, y así sucesivamente.



**Figura 3.1:** La función Gaussiana se observa en la parte superior de la figura y las gráficas restantes son respectivamente la primer y segunda derivada de  $\phi(t)$ .

### 3.3 Ejemplos

Se consideran los siguientes ejemplos para ilustrar la medición de los exponentes de Hölder mediante el procedimiento mencionado con anterioridad. El ejemplo mostrará que, mientras se incrementa el número de momentos de desvanecimiento de la función wavelet también aumenta el rango de detectar singularidades.

#### **Ejemplo 3.2**

Consideremos la siguiente función como

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^{0.65} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

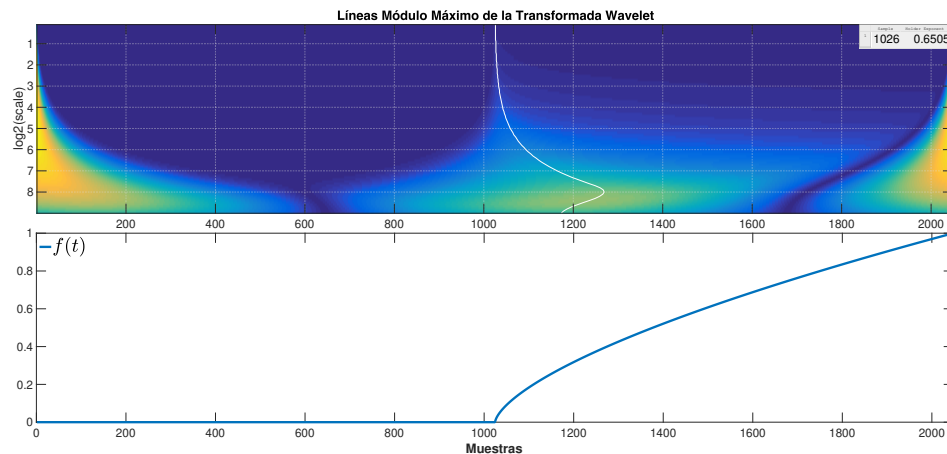
y siguiendo el ejemplo (3.1), podemos determinar que la función (3.15)

## ANÁLISIS WAVELET

---

cuenta con un exponente de Hölder  $\alpha = 0.65$  en  $t = 0$ . Para calcular la transformada wavelet de  $f(t)$  y siguiendo el procedimiento para el cálculo del exponente de Hölder, seleccionamos como función wavelet la primer derivada de la función gaussiana  $\psi(t)$ , ya que sólo cuenta con un momento de desvanecimiento.

En la parte inferior de la figura (3.2) se observa la gráfica de la función (3.15), la gráfica se presenta en muestras y no en tiempo debido a que se tiene una mejor apreciación de la señal. En la parte superior de la figura (3.2) se muestra la LMMTW la cual indica que existe una singularidad en la muestra  $n = 1026$  con el valor de  $\alpha = 0.6505$ , este valor es un aproximado al resultado que se esperaba.



**Figura 3.2:** La gráfica en la parte superior muestra la transformada wavelet. La línea blanca muestra la localización de LMMTW. En la parte inferior de la figura se muestra la gráfica de la función (3.15).

### Ejemplo 3.3

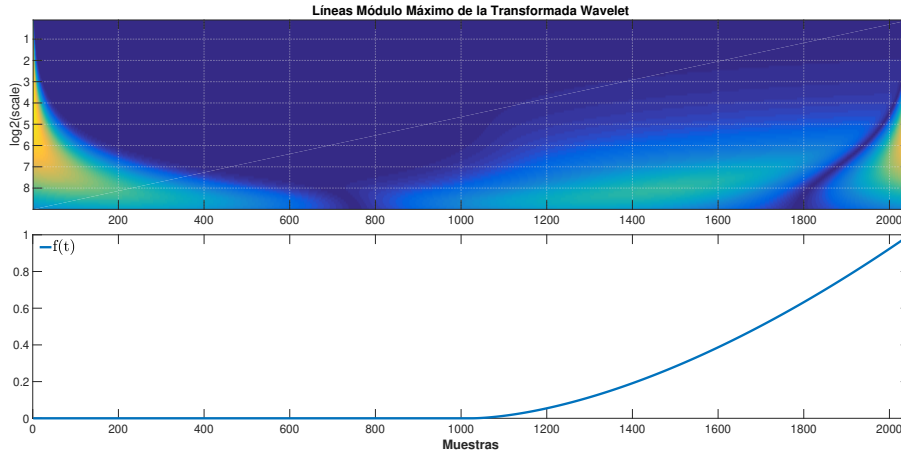
En el mismo sentido del ejemplo anterior, ahora consideremos la siguiente



función

$$f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^{1.65} & \text{si } t \geq 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

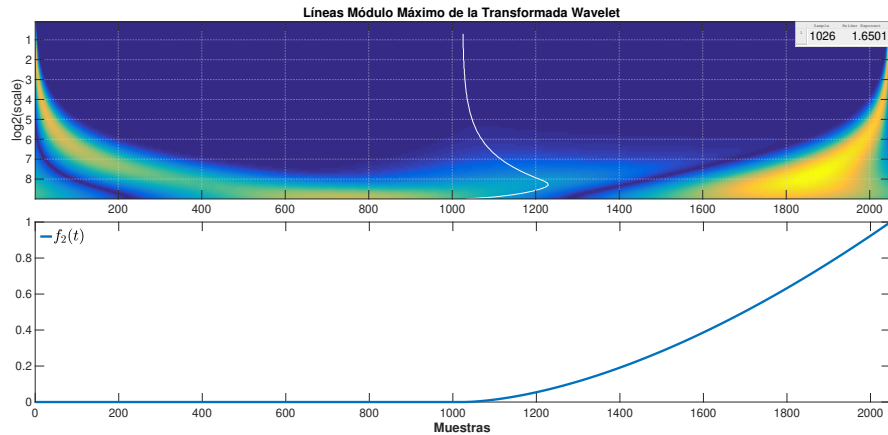
Es claro que la función es al menos una vez diferenciable y sigue sin presentar singularidades, pero si se calcula la segunda derivada la función presenta una singularidad. Para analizar la transformada wavelet de la función (3.16) seguiremos el procedimiento para calcular el exponente de Hölder, considerando la primer derivada de la función gaussiana. En la figura (3.3) se muestran los resultados obtenidos. Es claro que la transformada wavelet no muestra ningún módulo máximo, lo que era de esperarse. Con base a lo anterior, esta wavelet no contribuye para detectar singularidades que presenta la función (3.16).



**Figura 3.3:** La gráfica en la parte superior muestra la transformada wavelet. En la parte inferior de la figura se muestra la gráfica de la función (3.16).

Tomando en cuenta que la función es una vez diferenciable, ahora tomamos como función wavelet  $\psi(t)$  la segunda derivada de la función gaussiana. Entonces  $\psi(t)$  ahora cuenta con dos momentos de desvanecimiento. En la

figura (3.4) se muestran los resultados, en la parte inferior se presenta la gráfica de la función (3.16), mientras que en la parte superior se observa la transformada wavelet donde la línea blanca es LMMTW la cual indica que la función tiene una singularidad en la muestra  $n = 1026$  con el valor de  $\alpha = 1.6501$ , la parte entera de este valor indica que la función es una vez diferenciable y la parte decimal corresponde a la aproximación del exponente de Hölder.



**Figura 3.4:** La gráfica en la parte superior muestra la transformada wavelet. La línea blanca muestra la localización de LMMTW. En la parte inferior de la figura se muestra la gráfica de la función (3.16).



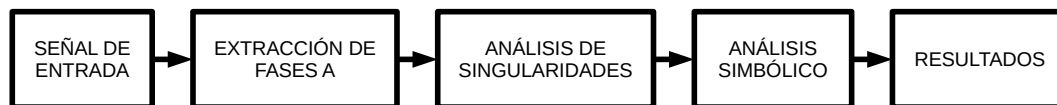
---

## IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO

---

El objetivo de esta tesis es evaluar las singularidades del EEG en presencia de las fases A. En el capítulo anterior se expuso una técnica para la detección de singularidades mediante la transformada wavelet. Este método fue implementado en Matlab y utilizado para la evaluación de las fases A.

Dado que la información necesaria no se encuentra acomodada por fases A, sino por noche de sueño, es necesario realizar un procesamiento que permita extraer dicha información. El procedimiento resultante para la evaluación de las señales correspondientes a las fases A, se representa mediante el diagrama a bloques de la figura(4.1).



**Figura 4.1:** Diagrama a bloques de la metodología.

Los registros de electroencefalografía contienen la actividad cerebral

durante el periodo de sueño completo y los tiempos de duración de las fases A. Las fases A se dividen y se clasifican en tres clases conocidas como A1, A2 y A3 las cuales fueron procesadas con el método presentado con anterioridad en el 3. Cabe mencionar que las fases tienen diferencias en su contenido previo de iniciar la fase, en comparación al que se presenta después de su inicio, sin embargo, también se observan diferencias entre las distintas fases A, lo que indica la gran variabilidad de los datos. De manera general se espera un cambio con respecto al exponente de Hölder a causa de la aparición de las fases A. Dentro de la literatura que se revisó no se encontró ningún trabajo que cuantificará este fenómeno con una gran resolución en tiempo-escala, a pesar que las fases A están definidas por el cambio de frecuencia a través del tiempo. En cada segundo de las señales analizadas existe una cantidad variable de singularidades, debido a esto se realiza un promedio general para cada segundo de las fases A con la intención de reducir la cantidad de información obtenida. Cabe mencionar que un promedio provee información general sobre la tendencia de un conjunto de datos o una población. Para tratar de comprender el comportamiento que tienen las fases A antes y después a su inicio y final, se considera la entropía como una forma de cuantificar las singularidades presentes en las mismas. Esta medida nos permite ponderar si las singularidades en una ventana de tiempo es estable (es decir, que sea más probable que aparezca el mismo valor) o si las singularidades en esa ventana son inestables (todos los valores tienen la misma probabilidad de aparecer).

### **4.1 Gráfico Violín**

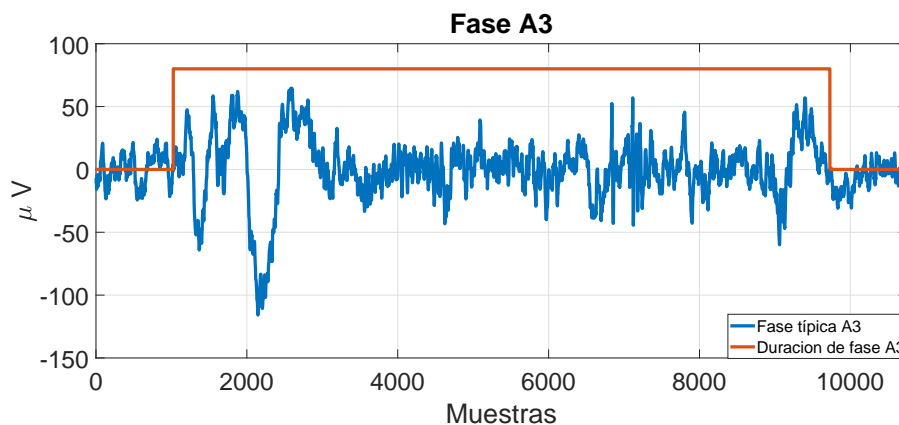
Existen una gran cantidad de posibilidades para representar de manera gráfica datos cuantitativos. Se puede realizar un histograma, diagrama de tallo, diagramas de caja (boxplot) y mucho más. Pero cuando se requiere comparar datos de una variable cuantitativa para varias poblaciones o tratamientos, la mayoría no es funcional. Por ejemplo, comparar varios histogramas o gráficos de tallo suele ser una tarea complicada, por la cantidad de espacio que requieren. Una opción es utilizar el boxplot, sin embargo los cuartiles son elementos que conllevan una difícil interpretación. En un gráfico de violín la distribución de datos es más visible. El gráfico de violín se utiliza para visualizar la distribución de los datos y su densidad de probabilidad. La gráfica de violín es una combinación de un boxplot y una gráfica de densidad que se gira y se coloca en cada lado para mostrar la forma de distribución de datos. De manera general, esta representación puede mostrar mas información.

### **4.2 Análisis de Singularidades para señales EEG**

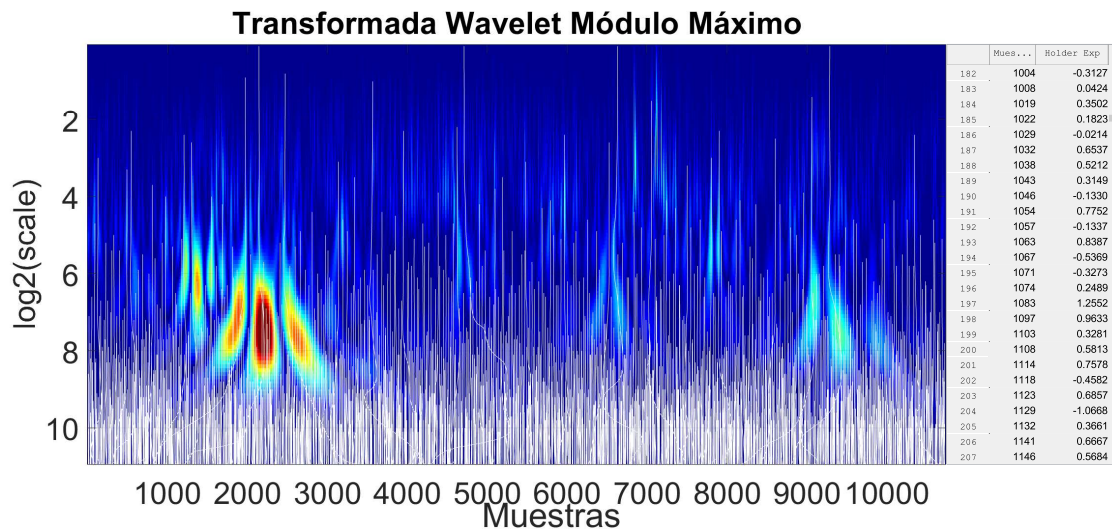
En el siguiente experimento se evalúa el método para calcular las singularidades en el fenómeno CAP de las señales EEG. Todas las señales utilizadas contienen frecuencias que abarcan el ancho de banda donde se define la actividad eléctrica del cerebro, es decir, frecuencias de 1Hz - 35Hz. Sumado a lo anterior el ruido que es parte de la señal, en un principio se considero la posibilidad de disminuir el ruido mediante la aplicación de

un filtro, sin embargo, la información de interés (singularidades) podría ser eliminada o desvanecida. Cabe mencionar que el procedimiento se evaluó con base en un solo canal del EEG en cada paciente, de manera específica el canal C4A1 y en los casos donde no se tenían registros de este canal se optó por el canal O2A1.

El cálculo de las singularidades se describió en el capítulo 3. Por otro lado, para determinar las singularidades de todas las fases A se consideraron dos segundos antes del inicio de la fase y dos segundos posteriores al final de la fase con la intención de tener una mejor interpretación de los resultados. Las gráficas de singularidades, además de mostrar la transformada wavelet de la señal, se observan líneas que tienden a cero indicando la ubicación y valor de la singularidad. En la figura (4.2) se muestra una fase A3 típica, mientras que en la figura(4.3) se observan las singularidades que presenta la fase A3. El algoritmo fue realizado con la segunda derivada de la función gaussiana como wavelet.



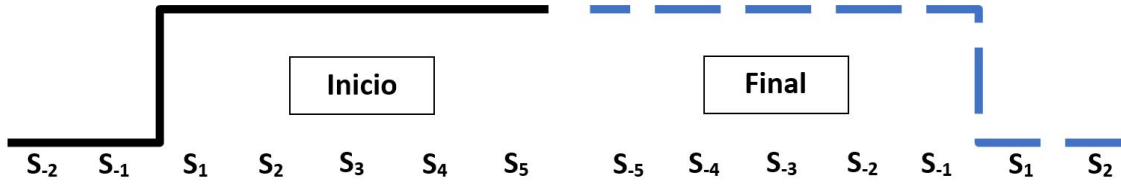
**Figura 4.2:** Fase A3 típica de un sujeto en condición saludable con una frecuencia de muestreo de 512 Hz. El escalón indica la duración de la fase.



**Figura 4.3:** Transformada Wavelet de Módulo Máximo para la fase A3 mostrada en la figura (4.2), donde las líneas indican la existencia de una singularidad en la señal y de fondo se aprecia la transformada wavelet de la señal.

Una vez calculado los exponentes de Hölder para todas las fases A de los registros de EEG, se consideran los valores de los exponentes contenidos en segmentos de siete segundos tanto al inicio como al final de las fases para evaluar su comportamiento. Los segmentos de tiempo se dividen de la siguiente manera, ventana de inicio) dos ventanas con duración de un segundo cada una antes del inicio de la fase y cinco ventanas de un segundo posteriores a su inicio y ventana del final) cinco ventanas con duración de un segundo cada una antes de terminar la fase y dos ventanas posteriores a su final. El tipo de ventaneo se ilustra en la figura (4.4).





**Figura 4.4:** Ilustración del ventaneo realizado en cada fase A. Tomando 7 segundos para el inicio de la fase y 7 segundos para el final de la fase.

Para cada ventana se calculó el promedio, mediana y entropía de los exponentes de Hölder, además cada uno de ellos se agrupó en el vector  $P_{N_f}$ , el cual se define como

$$P_{N_f}(t) = \begin{pmatrix} P_{1_f}(t) \\ P_{2_f}(t) \\ \vdots \\ P_{k_f}(t) \end{pmatrix}, -2 < t < 5 \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (4.1)$$

donde  $N$  denota la cantidad de fases A que tiene un paciente y  $f$  representa el subtipo de fase A.

### 4.3 Resultados

La interpretación de los resultados del análisis de singularidades en las fases A, para el inicio se tomó como punto de referencia 2 segundos antes del inicio de la fase y 5 segundos después de terminar la fase. Se aplicó la TWMM sobre las diferentes fases A existentes en un solo canal de cada sujeto disponible en la base de datos, además, para interpretar el valor del exponente de Hölder se consideró el promedio, mediana y entropía de estos

## IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO

---

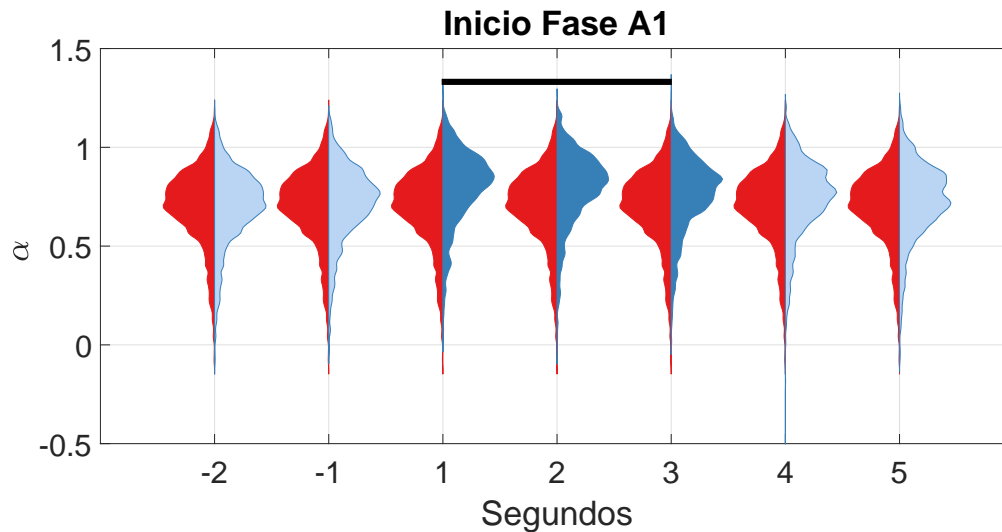
en ventanas de un segundo.

Cada sujeto fue evaluado de manera independiente, sin embargo, los resultados que a continuación se exponen corresponden a la población que cuentan con una frecuencia de muestreo a 512 Hz.

Como primer análisis se evaluó el cambio de singularidades al inicio de la fase A1. Es decir, se analizó el comportamiento del exponente de Hölder en los segundos previos al inicio de la fase con respecto a los cinco segundos posteriores de su inicio. Este análisis se realizó por las siguientes razones: la primera razón fue para identificar las fases A mediante un valor de singularidades, si el inicio es evidente o se comporta como el resto del ritmo basal. Una segunda razón fue entender si en realidad la aparición de las fases A genera un aumento general del exponente de Hölder  $\alpha$  entorno a un punto en particular.

Para determinar un cambio estadístico significativo se utilizó la prueba de Kruskal-Wallis, la cual se describe en el anexo A. En este trabajo se usó un valor de  $p$  igual al 5% para definir un cambio estadístico significativo en la prueba de Kruskal-Wallis.

En la figura (4.5) se muestra un gráfico violín resultante del promedio del exponente de Hölder, entorno al inicio de todas las fases tipo A1. En ella se puede observar un cambio significativo del exponente de Hölder durante los primeros tres segundos de haber iniciado la fase, el cual es estadísticamente significativo ( $p < 0.05$ ). En la tabla (4.1) se ubican los resultados obtenidos para el promedio, mediana y entropía. Los cambios más evidentes se pueden observar tanto en el promedio como en la media, donde el incremento es aproximadamente del 10% en comparación con la actividad de fondo. Sin



**Figura 4.5:** Gráfico violín correspondiente al promedio del exponente de Hölder, correspondiente al inicio de la fase A1. El punto de referencia ( $t = -2$ ) es comparado con el resto de segundos.

embargo, la entropía mantiene un valor casi constante durante los siete segundos analizados; es claro que la entropía indica una incertidumbre baja debido a que el valor del exponente de Hölder está acotado. Un aumento en el exponente de Hölder sugiere que las singularidades existentes durante el inicio de la fase A1 son más “suaves”, es decir, los cambios durante ese lapso no son tan abruptos. La identificación de la fase A1 se obtiene cuando existe un incremento en el exponente de Hölder. En color azul oscuro se encuentran los segundos donde existe un cambio estadístico significativo.

La figura (4.6) presenta una gráfica de violín correspondiente al promedio durante el inicio de la fase A2. La duración de esta fase es generalmente mayor que la fase A1 (aproximadamente 3 segundos). Por lo anterior, se esperaría que el cambio existente en el inicio de la fase se mantuviera

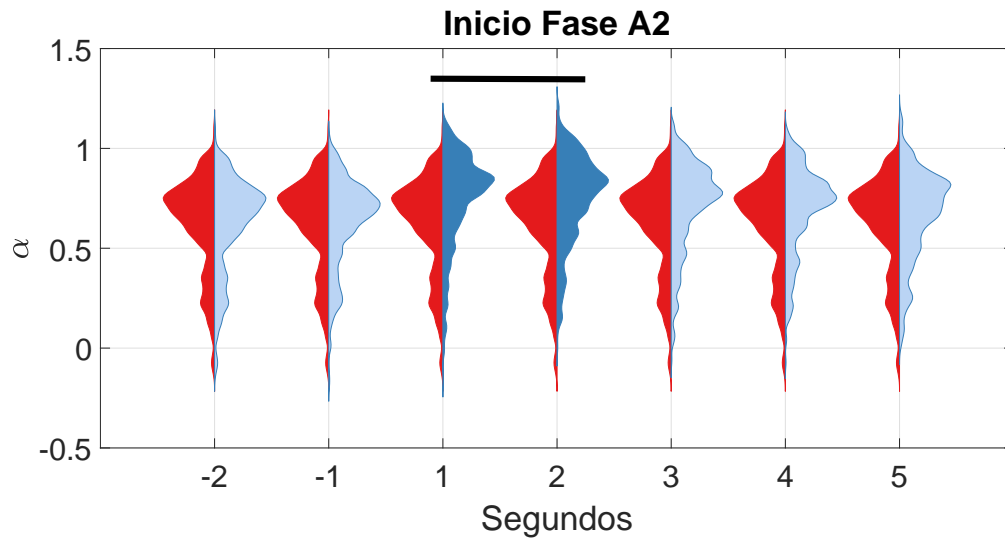
## IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO

---

Segundos	-2	-1	1	2	3	4	5
Promedio	0.706	0.721	<b>0.804</b>	<b>0.8</b>	<b>0.769</b>	0.746	0.733
Mediana	0.728	0.743	<b>0.835</b>	<b>0.829</b>	<b>0.795</b>	0.772	0.747
Entropía	0.366	0.368	0.311	0.319	0.351	0.364	0.367

**Tabla 4.1:** Promedio, mediana y entropía del exponente de Hölder durante el inicio de la fase tipo A1, donde se resalta los valores más significativos.

durante más segundos que la fase A1, pero no es así. Durante esta fase existe un cambio significativo al iniciar la fase, el cual se mantiene durante los primeros dos segundos. Otra vez, el cambio significativo es equivalente al 10 – 15%. El cambio se puede observar en el promedio y mediana, como sucedió en el caso anterior. Cabe mencionar que la entropía nuevamente no presenta cambio evidente. La tabla (4.2) muestra los resultados evaluados para la fase tipo A2 durante su inicio, donde el aumento es significativo  $p < 0.05\%$  en los primeros tres segundos.



**Figura 4.6:** Gráfico violín del promedio correspondiente al exponente de Hölder durante el inicio de la fase A2.

Segundos	-2	-1	1	2	3	4	5
Promedio	0.626	0.637	<b>0.756</b>	<b>0.755</b>	0.717	0.699	0.672
Mediana	0.688	0.691	<b>0.814</b>	<b>0.8</b>	0.775	0.749	0.716
Entropía	0.332	0.331	0.338	0.346	0.366	0.367	0.366

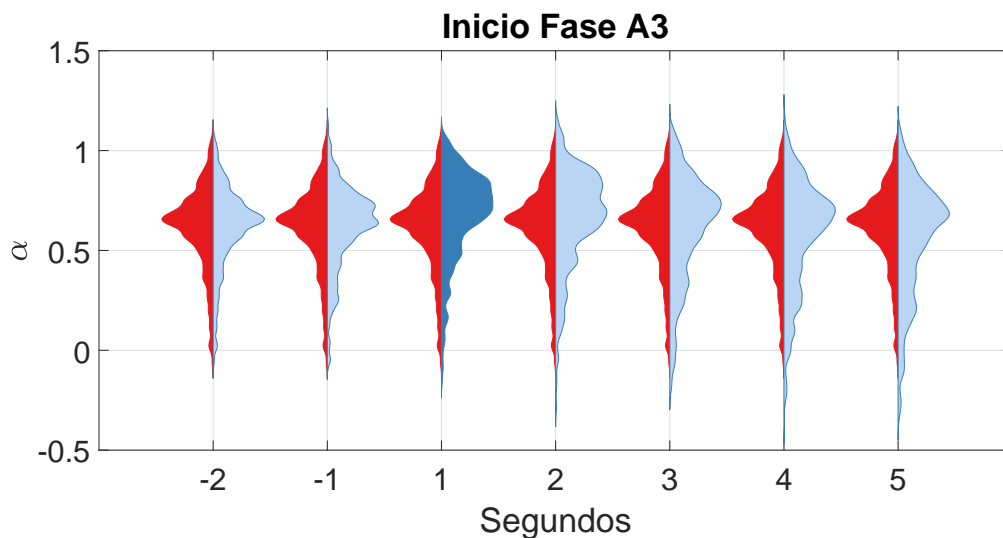
**Tabla 4.2:** Promedio, mediana y entropía del exponente de Hölder durante el inicio de la fase A2. Los cambios significativos  $p < 0.05\%$  son resaltados.

Finalmente, la figura (4.7) muestra la gráfica resultante para el promedio del exponente de Hölder durante el inicio de la fase A3. En un principio, se consideraba que esta fase mostraría cambios más evidentes debido a su comportamiento. Aunque se puede observar un cambio en el promedio y mediana durante el primer segundo del inicio de la fase A3, sin embargo, el

## IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO

---

cambio no cumple con las condiciones estadísticas ( $p > 0.05$ ). La variabilidad de la fase y su dinámica puede ser la causa por la que esta fase no encaja con los resultados deseados. La fase A3, es la fase con mayor duración, la cual llega a ser hasta de un minuto, pero los cambios que caracteriza a esta fase no suceden siempre en el mismo lugar. La tabla (4.3) muestra el promedio, mediana y entropía del exponente de Hölder para el inicio de la fase A3. Los resultados no reflejan un cambio estadístico significativo  $p > 0.05\%$ .



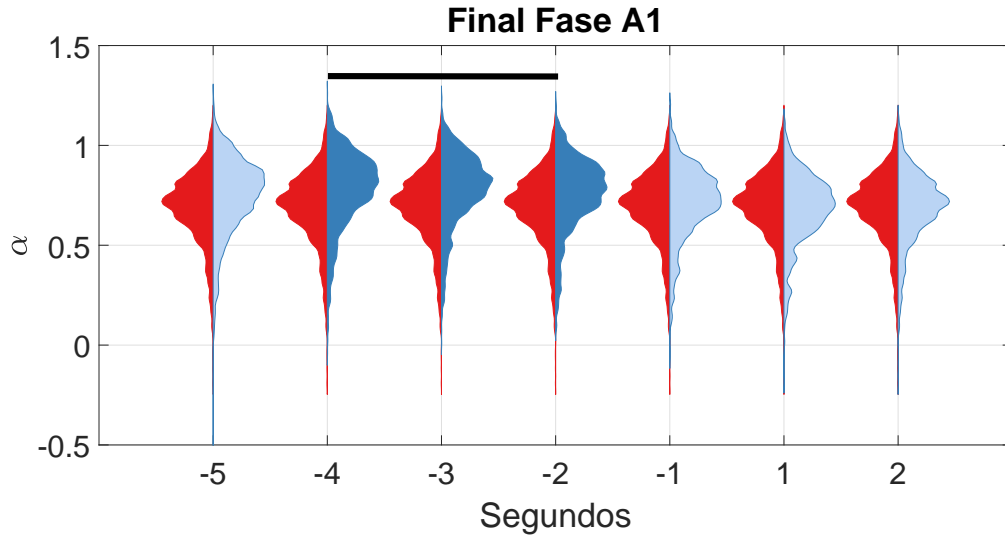
**Figura 4.7:** Gráfica violín para el promedio del exponente de Hölder entorno al inicio de la fase A3.

Con la intención de evaluar el comportamiento de las fases A, se decidió evaluar el final de las fases y observar si sucede un fenómeno similar que al inicio de las fases. Para esta evaluación se consideró la ventana previamente mencionada, tomando cinco segundos antes del final de la fase y dos segundos después de su final, el cual se consideró punto de referencia ( $t = 2$ ).

Segundos	-2	-1	1	2	3	4	5
Promedio	0.619	0.624	<b>0.688</b>	0.666	0.613	0.581	0.561
Mediana	0.651	0.657	<b>0.726</b>	0.702	0.671	0.641	0.632
Entropía	0.29	0.294	0.367	0.366	0.339	0.318	0.311

**Tabla 4.3:** Promedio, mediana y entropía del exponente de Hölder correspondiente al inicio de la fase A3. Se puede observar que los datos no reflejan cambio significativo al inicio de la fase A3.

En la figura (4.8) se muestra la gráfica equivalente al promedio del exponente de Hölder para el final de la fase A1. En este análisis existe un comportamiento similar al que se encontró en el inicio de la fase, pero en esta ocasión el cambio significativo es ligeramente menor. Sin embargo, el cambio significativo existente cumple de manera estadística ( $p < 0.05\%$ ) en tres segundos previos al final de la fase. La tabla (4.4) muestra el resultados del promedio, mediana y entropía del exponente de Hölder, se puede observar que el cambio es evidente en el promedio y mediana, pero la entropía es constante durante toda la fase.



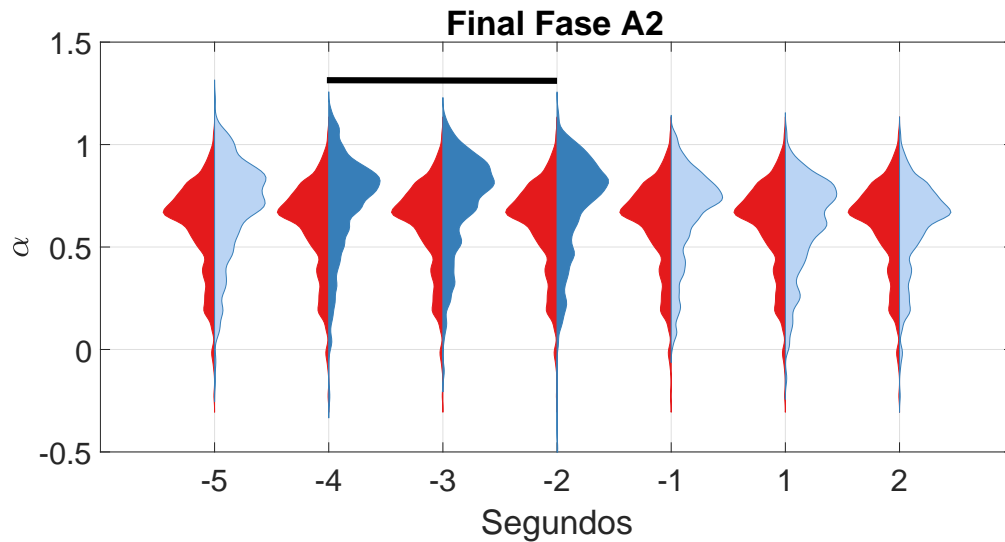
**Figura 4.8:** Gráfica correspondiente al promedio del exponente de Hölder durante el final de la fase A1. El punto de referencia es en  $t = 2$ .

Segundos	-5	-4	-3	-2	-1	1	2
Promedio	0.755	<b>0.786</b>	<b>0.786</b>	<b>0.761</b>	0.718	0.685	0.693
Mediana	0.784	<b>0.813</b>	<b>0.811</b>	<b>0.786</b>	0.738	0.705	0.715
Entropía	0.357	0.337	0.337	0.357	0.367	0.351	0.355

**Tabla 4.4:** Promedio, mediana y entropía del exponente de Hölder correspondiente al fin de la fase A1. Se puede observar que los datos reflejan cambio significativo durante los últimos segundos de la fase A1.

Los resultados correspondientes al final de la fase A2 son presentados en la tabla (4.5) y la figura (4.10) muestra el promedio del exponente de Hölder. Como en el caso anterior el cambio significativo ( $p < 0.05$ ) se observa tanto en el promedio como en la mediana.





**Figura 4.9:** Comparación del promedio del exponente de Hölder durante el fin de la fase A2.

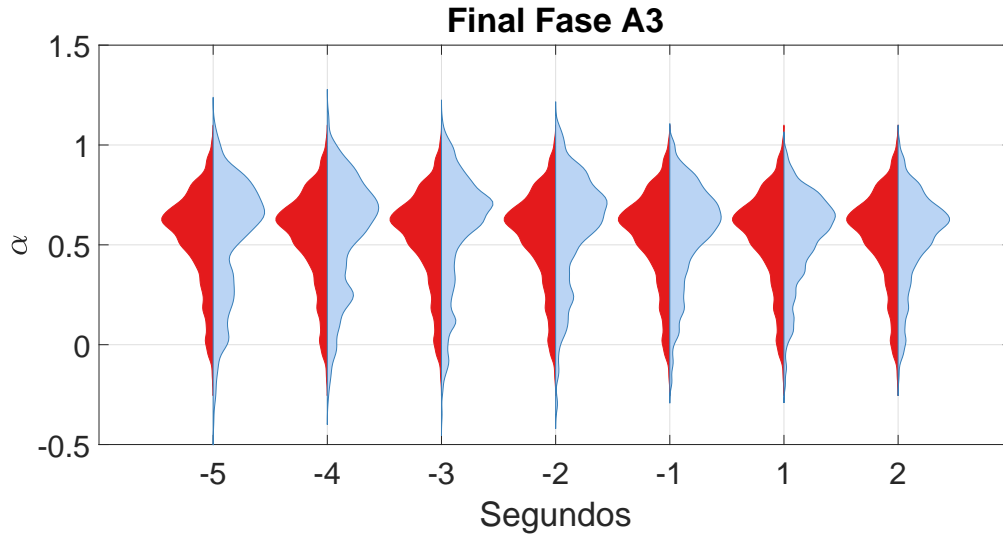
Segundos	-5	-4	-3	-2	-1	1	2
Promedio	0.7	<b>0.72</b>	<b>0.729</b>	<b>0.715</b>	0.66	0.617	0.61
Mediana	0.737	<b>0.773</b>	<b>0.784</b>	<b>0.775</b>	0.724	0.661	0.663
Entropía	0.368	0.363	0.354	0.359	0.359	0.333	0.29

**Tabla 4.5:** Promedio, mediana y entropía del exponente de Hölder correspondiente al final de la fase A2. El cambio significativo se presenta en los segundos -2 y -3 antes de finalizar la fase.

Una vez más, el final de la fase A3 no presenta ningún cambio significativo como se esperaba. La figura (4.10) presenta la gráfica de violín correspondiente al promedio del exponente de Hölder. La tabla (4.6) muestra los datos obtenidos respecto a la fase A3, donde no hay cambio relevante en

## IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO

los cálculos realizados. Este resultado es interesante, ya que la fase A3 no presenta un patrón bien definido como lo hacen el resto de las fases.



**Figura 4.10:** Comparación correspondiente al promedio del exponente de Hölder durante el fin de la fase A3. La fase no presenta cambios importantes durante su final.

Segundos	-5	-4	-3	-2	-1	1	2
Promedio	0.535	0.556	0.578	0.59	0.564	0.544	0.543
Mediana	0.614	0.622	0.647	0.646	0.614	0.589	0.591
Entropía	0.307	0.321	0.323	0.331	0.288	0.195	0.228

**Tabla 4.6:** Promedio, mediana y entropía del exponente de Hölder correspondiente al final de la fase A3. Se puede observar que los datos no reflejan cambio significativo al final de la fase A3.

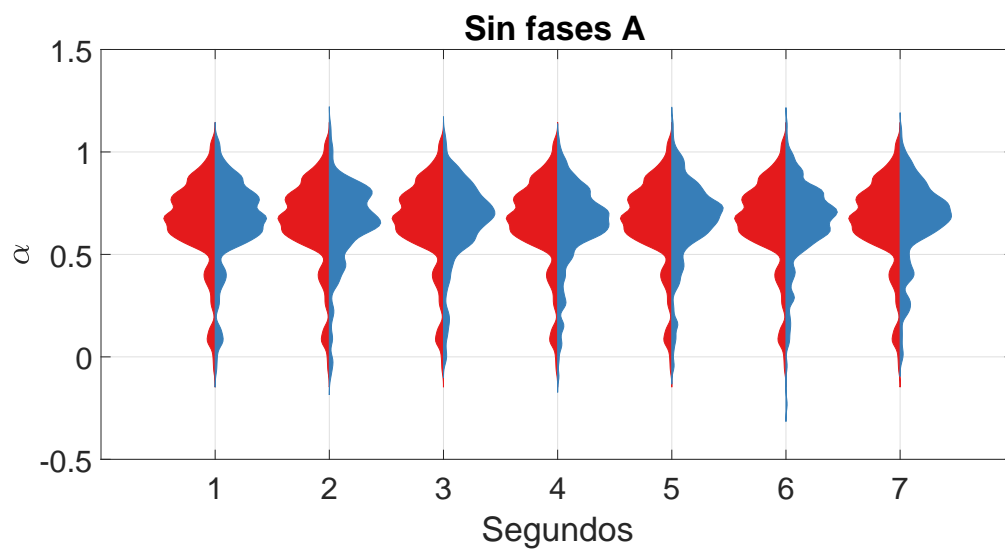
Finalmente, para comparar la información obtenida, se seleccionaron

secciones aleatorias de cada sujeto y se realizó el mismo procedimiento que las fases A. Las secciones corresponden a la actividad de fondo de la señales EEG, en las cuales no existe presencia de fases A. Este análisis nos auxilia a estar seguros que los cambios estadísticos que encontramos son debido a las fases A. Para ilustrar este caso, se consideró para toda la población.

Se obtuvieron 50 secciones aleatorias de cada registro EEG donde las fases A no estuviesen presentes, cada una con una duración de siete segundos. Posteriormente se aplicó el mismo procedimiento que a las fases A. La figura (4.11) presenta el gráfico violín correspondiente al promedio del exponente de Hölder de las secciones aleatorias. Como punto de referencia se tomó el primer segundo capturado. Se puede observar que no hay cambio significativo entre los siete segundos, el promedio y la mediana se mantienen constantes. Este resultado no cumple con un cambio estadístico ( $p > 0.05\%$ ), como era de esperarse. En la tabla (4.7) se muestran los valores de promedio, mediana y entropía del exponente de Hölder.

Segundos	1	2	3	4	5	6	7
Promedio	0.662	0.661	0.651	0.666	0.646	0.67	0.66
Mediana	0.693	0.686	0.68	0.694	0.676	0.7	0.69
Entropía	0.341	0.343	0.341	0.347	0.328	0.345	0.339

**Tabla 4.7:** Promedio, mediana y entropía del exponente de Hölder correspondiente a secciones aleatorias de EEG.



**Figura 4.11:** Comparación correspondiente al promedio del exponente de Hölder para secciones aleatorias donde las fases A no están presentes.



---

## CONCLUSIONES

---

En este trabajo, se presentó un análisis de singularidades mediante el uso de la transformada wavelet en la señal EEG durante las fases A, las cuales se describen como cambios bruscos y repentinos durante la actividad electrocortical. Existe diversos caminos para la evaluación de las fases A, y entre las más comunes se encuentran análisis de frecuencia, sincronización en tiempo y frecuencia. El análisis en frecuencia generalmente se realiza con la transformada de Fourier debido a que se ha consolidado como la primera opción cuanto a frecuencia se habla; sin embargo las señales contenidas en un EEG se consideran señales no estacionarias ya que cambian constantemente su contenido en frecuencia. Por lo cual, la aplicación de la transformada wavelet se convierte en una excelente alternativa para obtener información de la frecuencia en señales no estacionarias. De manera particular, la transformada wavelet aunado a la regularidad de Hölder mostraron tener un resultado positivo para la medición de actividad eléctrica del cerebro.

La metodología aplicada para el análisis de singularidades en este trabajo refleja un incremento en el promedio del exponente de Hölder tanto en el inicio como en el final de la fase A1 y A2. Los resultados indican que las

fases A1 y A2 contienen singularidades poco pronunciadas, dicho de otra manera, la transición se realiza de manera lenta y no inmediata como se planteó en la hipótesis. En cambio, la fase A3 no expresa ningún cambio sobresaliente, esto se adjudica a la gran duración de la fase y su variabilidad de aparición. Además del promedio y mediana, se calculó la entropía, sin embargo, esta medición no aportó datos interesantes o relevantes en este trabajo. Adicionalmente a este experimento, se evaluaron secciones de EEG donde las fases A no estuvieran presentes. Los resultados obtenidos reflejan un comportamiento neutral del exponente de Hölder, donde los valores obtenidos no muestran ningún cambio evidente durante los segundos evaluados. Por otro lado, el uso de otras herramientas matemáticas como un análisis multifractal puede ser de gran ayuda para caracterizar de manera contundente las propiedades de las singularidades [31, 32].

Finalmente, una de las principales limitaciones fue la organización de los registros de polisomnografía, los cuales tenían un número diferente de canales y frecuencia de muestreo. La frecuencia de muestreo puede afectar los resultados al momento de calcular el exponente de Hölder. Sin embargo, a pesar de estas limitaciones, el exponente de Hölder puede ser considerado como un identificador de cambios en las señales EEG durante los cambios basales en personas saludables. Además, esta herramienta nos indica que tan fuerte es el cambio en las fases A.

# A

---

---

## ENTROPÍA

---

---

La extracción de características es uno de los grandes retos cuando se trabaja con señales EEG debido a que son señales complejas, no lineales, no estacionarias y se comporta al “azar”. Cabe mencionar que las señales son estacionarias por pequeños intervalos, sin embargo, las características de la señal generalmente son no estacionarias[23]. Por lo anterior, es necesario una medida que proporcione información sobre la variación de los datos.

La entropía es una medida de incertidumbre asociada a una variable aleatoria. Dentro de los procesos fisiológicos, la entropía mide el nivel de caos del proceso [24]. Esta es una medida que logra cunificar el grado de complejidad en una serie temporal. Consideremos a  $X$  un conjunto de variables aleatorias discretas  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  para  $(m = 1, 2, \dots, M)$  y donde la probabilidad de un evento  $x_m$  es  $p_k = P[X = x_m]$  [24].

La entropía de Shannon,  $H(X)$ , se define como:

$$H(X) = - \sum_{m=0}^M p(x_m) \ln(p(x_m)) \quad (\text{A.1})$$

donde  $p(x_m)$  es la probabilidad de  $x_m \in X$  que satisface la ecuación A.2.



$$\sum_{m=0}^M p(x_m) = 1. \quad (\text{A.2})$$

La entropía indica que tan bien se puede predecir el comportamiento de un sistema. En otras palabras, una entropía alta indica una complejidad del sistema alta, entonces, el sistema es menos predecible. de lo contrario, cuando la entropía es baja indica un sistema predecible. Consideramos que la entropía provee información y características únicas de las señales.

# *B*

---

---

## **KRUSKAL-WALLIS**

---

---

Se utilizó el análisis por rasgos de Kruskal-Wallis (KW) con la intención de evaluar los cambios significativos en cada segundo de la fase A (antes, durante y posteriormente). Kruskal-Wallis es una prueba que compara más de dos muestras con el propósito de conocer si provienen de la misma población. Es decir, nos interesa conocer si las diferencias entre las muestras o grupos son diferencias significativas en cada población o si solo son cambios que se pueden obtener de manera aleatoria en la misma población. Entonces la prueba de Kruskal-Wallis verifica la hipótesis nula de que  $n$  números de muestras provienen de la misma población. La hipótesis nula para la prueba de KW considera que no existe diferencia entre los tratamientos, mientras que la hipótesis alternativa indica que existen diferencias entre al menos un par de tratamientos. Entonces, la hipótesis nula es  $H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n$  y la hipótesis alternativa sería  $H_1 = \theta_{n1} \neq \theta_{n2}$ .



---

---

## ***Bibliografia***

---

---

- [1] M. Cohen. “*Analyzing neural time series data: theory and practice*”, MIT press, 2014.
- [2] A. Kales, A. Rechtschaffen, Los Angeles University of California, and NINDB Neurological Information Network (U.S.). “*A manual of standardized terminology, techniques and scoring system for sleep stages of human subjects*”. U. S. National Institute of Neurological Diseases and Blindness, Neurological Information Network Bethesda, Md, 1968.
- [3] M. G. Terzano, L. Parrino, A. Sherieri, R. Chervin, Ss Chokroverty, C. Guilleminault, M. Hirshkowitz, M. Mahowald, H. Moldofsky, A. Rosa, R. Thomas, and A. Walters. “*Atlas, rules, and recording techniques for the scoring of Cyclic Alternating Pattern (CAP) in human sleep*”, *Sleep Medicine*, 2(6):537–553, 2001.
- [4] M. G. Terzano, D. Mancia, M. R. Salati, G. Costani, A. Decembrino, and L. Parrino. “*The cyclic alternating pattern as a physiologic component of normal NREM sleep*”. *Sleep*, 8(2):137–145, 1985.
- [5] S. Chokroverty. *Overview of normal sleep. Sleep Disorders Medicine* Springer, New York, NY, 2017.
- [6] L. Parrino, M. Boselli, G. P. Buccino. M. C. Spaggiari, G. Di Giovanni & M. G. Terzano. “*The cyclic alternating pattern plays a gate-control on*

- periodic limb movements during non-rapid eye movement sleep*". *Journal of clinical neurophysiology*, 13(4), 314-323, 1996.
- [7] L. Parrino, P. Halasz, C. A. Tassinari & M. G. Terzano. "CAP, epilepsy and motor events during sleep: the unifying role of arousal". *Sleep medicine reviews*, 10(4), 267-285, 2006.
- [8] C. Iber, S. Ancoli-Israel, A. Chesson, S. Quan, and American Academy of Sleep Medicine. "The AASM Manual for the Scoring of Sleep and Associated Events: Rules, Terminology and Technical Specifications", American Academy of Sleep Medicine, 2007.
- [9] P. Jiruska, M. de Curtis, J. G. R. Jefferys, C. A. Schevon, S. J. Schindler, and K. Schindler. "Synchronization and desynchronization in epilepsy: Controversies and hypotheses". *The Journal of Physiology*, 591(4):787-797, 2013.
- [10] F. Varela, J. P. Lachaux, E. Rodriguez, and J. Martinerie. "The brainweb: Phase synchronization and large-scale integration". *Nat Rev Neurosci*, 2(4):229-239, 2001.
- [11] M. O. Mendez, I. Chouvarda, A. Alba, A. M. Bianchi, A. Grassi, E. Arce & L. Parrino. "Analysis of A-phase transitions during the cyclic alternating pattern under normal sleep", *Medical & biological engineering & computing*, 54(1), 133-148, 2016.
- [12] A. Kaplan, J. Röschke, B. Darkhovsky & J. Fell. "Macrostructural EEG characterization based on nonparametric change point segmentation:

- application to sleep analysis*”, *Journal of neuroscience methods*, 106(1), 81-90, 2001.
- [13] S. Mariani, E. Manfredini, V. Rosso, M. O. Mendez, A. M. Bianchi, M. Matteucci & L. Parrino. “Characterization of A phases during the cyclic alternating pattern of sleep”. *Clinical Neurophysiology*, 122(10), 2016-2024, 2011.
- [14] R. Ferrri, O. Bruni, S. Miano, S. Miano, G. Plazzi, and M. G. Terzano, “All-night eeg power spectral analysis of the cyclic alternating pattern components in young adult subjects”, *Clinical Neurophysiology*, 116(10), 2429-2440, 2005.
- [15] R. Ferrri, O. Bruni, S. Miano, A. Smerieri, K. Spruyt and M. G. Terzano. “Inter-rater reliability of sleep cyclic alternating pattern (cap) scoring and validation of a new computer-assisted cap scoring method”, *Clinical neurophysiology*, 116(3), 696-707, 2005.
- [16] F. De Carli, L. Nobili, M. Beelke, T. Watanabe, A. Smerieri, L. Parrino, M. G. Terzano, and F. Ferrillo. “Quantitative analysis of sleep eeg microstructure in the time-frequency domain”, *Brain Research Bulletin*, 63(5), 399-405, 2004.
- [17] M. G. Terzano & L. Parrino, “Origin and significance of the cyclic alternating pattern (CAP)”. *Sleep medicine reviews*, 4(1), 101-123, 2000.
- [18] *PhysioBank PhysioToolkit and PhysioNet*. “The CAP sleep database”. <https://physionet.org/pn6/capslpdb>, 2000.

- [19] A. Kutlu, P. Feri, M. Selekler, G. Benbir, & D. Karadeniz. "Cyclic alternating pattern analysis in REM sleep behavior disorder". *Sleep and Breathing*, 17(1), 209-215, 2013.
- [20] H. Depoortere, D. Fracon, P. Graner, & M. G. Terzano. "Evaluation of the stability and quality of sleep using Hjorth's descriptors". *Physiology & behavior*. 54(4), 785-793, 1993.
- [21] O. David, L. Garnero, D. Cosmelli & F. J. Varela. "Estimation of neural dynamics from MEG/EEG cortical current density maps: application to the reconstruction of large-scale cortical synchrony". *IEEE transactions on biomedical engineering*, 49(9), 975-987, 2002.
- [22] Y. Kawashima, T. Yoshida, M. Hayashi & N. Aikawa. "An automatic analysis of sleep stage 2 based on the Fujimori method". *Electronics and Communications in Japan*, 101(9), 34-41, 2018.
- [23] P. Nguyen, D. Tran, X. Huang & D. Sharma. A proposed feature extraction method for EEG-based person identification. In *Proceedings on the International Conference on Artificial Intelligence*, CSREA Press, 2012.
- [24] N. Kannathal, M. L. Choo, U. R. Acharya & P. K. Sadasivan. "Entropies for detection of epilepsy in EEG". *Computer methods and programs in biomedicine*, 80(3), 187-194, 2005.
- [25] T. Murta, M. Leite, D. W. Carmichael, P. Figueiredo & Lemieux. "Electrophysiological correlates of the BOLD signal for EEG-informed fMRI", *Human brain mapping*, 36(1), 391-414, 2015.

- [26] E. Valdemar. “Estudio de la sincronización cerebral durante las fases A del sueño”, Tesis de doctorado, UASLP, 2018.
- [27] C. Valderrama & G. U. Villegas. “Análisis espectral de parámetros fisiológicos para la detección de emociones”, (2012).
- [28] P. Venkatakrishnan & S. Sangeetha, “Singularity detection in human EEG signal using wavelet leaders”, *Biomedical Signal Processing and Control*, 13, 282-294, 2014.
- [29] J.F. Muzy, E. Bacry & A. Arneodo, “The Multifractal Formalism Revisited with Wavelets”, *Int. Journal of Bifurcations and Chaos*, 4(2), 245-302, 1994.
- [30] A. Arneodo, E. Bacry, S. Jaffard & J.F. Muzy, “Oscillating singularities on Cantor sets: a grand-canonical multifractal formalism, preprint (1996).
- [31] A. Arneodo, E. Bacry, S. Jaffard & J.F. Muzy, “Singularity spectrum of multifractal functions involving oscillating singularities, preprint (1996).
- [32] J.S. Murguía. “Wavelet Methods in Dynamical Systems”, Tesis de doctorado, UASLP, San Luis Potosí, México, 2002.
- [33] I. Daubechies. “Ten Lectures on Wavelets”, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992.
- [34] S. Mallat & W.L. Hwang. “Singularity detection and processing with wavelets”, *IEEE Trans. on Information Theory* 38, 617-643 1992.
- [35] S. Mallat. “A Wavelet Tour of Signal Processing”, 2nd. Edition, Academic Press, 1999.



- [36] *M. Vetterli & J. Kovacevic. "Wavelets and subband coding", Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ, 1995.*