UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORÍA DE ENTROPÍA LOCAL Y TEMAS RELACIONADOS

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS APLICADAS

PRESENTA:

VÍCTOR MARTÍN MUÑOZ LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. FELIPE GARCÍA-RAMOS AGUILAR

San Luis Potosí, SLP. Julio 2021

Declaración de autoría

Yo, Víctor Martín Muñoz López, estudiante del Posgrado en Ciencias Aplicadas de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, como autor de la tesis “Teoría de entropía local y temas relacionados”, declaro que la tesis es una obra original, inédita, auténtica, personal, que se han citado las fuentes correspondientes y que en su ejecución se respetaron las disposiciones legales vigentes que protegen los derechos de autor y de propiedad intelectual e industrial. Las ideas, doctrinas, resultados y conclusiones a los que he llegado son de mi absoluta responsabilidad.

Resumen

El objetivo de esta tesis es plantear un proyecto de investigación en el área de los sistemas dinámicos. Para esto presentaremos resultados recientes de temas como: acciones de grupo, entropía local, sensibilidad y teoría espectral.

Abstract

The objective of this thesis is to propose a research project in the area of dynamical systems. For this we will give a summary of recent results in the following areas of dynamical systems: group actions, local entropy, sensitivity and spectral theory.

Agradecimientos

Agradezco profundamente a mi familia, principalmente a mis padres por apoyarme siempre en cada aspecto de mi vida. A Irma por su gran apoyo y estar siempre a mi lado.

También quiero agradecer al Dr. Felipe por su labor, como guía, en este trabajo de tesis. De igual forma a mis sinodales por sus certeras observaciones.

Finalmente, agradezco al CONACyT por el apoyo económico otorgado para mis estudios de maestría.

Tabla de contenidos

Capítulo 1

Proyecto

En esta tesis se plantea un proyecto de investigación enfocado a la entropía local y otros temas relacionados con los sistemas dinámicos.

1.1. Objetivos

El objetivo de esta tesis es dar a conocer las herramientas necesarias para plantear un proyecto de investigación. El proyecto que se plantea esta relacionado con la teoría de entropía local. La motivación de este proyecto son las relaciones que se encuentran entre esta teoría con otros conceptos como la independencia, factores de entropía cero maximales, teoría espectral, entre otros.

1.2. Metodología

Para desarrollar el proyecto se ha hecho una recopilación de artículos y libros. A continuación se listan la bibliografía principal a utilizar.

- Ergodic Theory: Independence and Dichotomies
  D. Kerr y H. Li

- Combinatorial independence in measurable dynamics
  D. Kerr y H. Li

- Independence in topological and C*-dynamics
  D. Kerr y H. Li

- Weak forms of topological and measure-theoretical equicontinuity: Relationships with discrete spectrum and sequence entropy
  F. García-Ramos

- Local entropy theory
  E. Glasner y X, Ye

- Mean sensitive, mean equicontinuous and almost periodic functions for dynamical systems
  F. García-Ramos y B. Marcus

1.3. Resultado 1

Se hizo un resumen de definiciones como por ejemplo definiciones de parejas de entropía, parejas de entropía de secuencia, parejas de independencia, parejas IN, sensibilidad, sensibilidad en promedio, μ-sensible en promedio, entre otras.

1.4. Resultado 2

Se leyeron y comprendieron diferentes resultados, incluyendo algunas demostraciones, relacionados con la entropía local. Entre los resultados más destacados se encuentran los Teoremas 5.6 y 6.7.

1.5. Resultado 3

Se planteó una pregunta abierta relacionada con la entropía local y la sensibilidad, más precisamente, se pregunta si las parejas de entropía se secuencia son iguales a las parejas de μ-sensibilidad en promedio.

Capítulo 2

Introducción

En sus inicios, la teoría ergódica, o el estudio de sistemas dinámicos medibles, era estudiada principalmente con herramientas de análisis funcional. A cada sistema dinámico se le asignaba un operador (de Koopman) en un espacio L^2, y se podían estudiar propiedades dinámicas usando el espectro del operador. Por ejemplo, von Neumann probó que el operador de un sistema dinámico ergódico tenía espectro discreto (funciones propias generan el espacio L^2) si y solo si el sistema era isomorfo a una rotación en un grupo. Sin embargo, estas herramientas no resultaron muy útiles para estudiar sistemas muy caóticos, en particular von Neumann se preguntaba si los sistemas inducidos por medidas uniformes Bernoulli en dos y tres símbolos eran isomorfos. Esta pregunta fue resuelta unos años después por Kolmogorov, al introducir un nuevo invariante dinámico: la noción de entropía para sistemas dinámicos (usando como base la entropía de Shannon). Además, Kolmogorov se dió cuenta que la entropía podia ser utilizada para caracterizar nociones que venían de la probabilidad. Vio que un sistema satisfacía lo que se conoce como la ley 0-1 de Kolmogorov si y solo si el sistema tenía entropía positiva con respecto a cualquier partición no trivial (al menos dos conjuntos con medida positiva). Tiempo después Blanchard introdujo un concepto equivalente para sistemas dinámicos topológicos (SDT). Se dice que un SDT tiene entropia positiva uniforme, si tiene entropía topológica positiva con respecto a cualquier cubierta (no densa). Además Blanchard vió que esta propiedad podía ser caracterizada estudiando la entropía localmente, al definir las parejas de entropía. Un SDT tiene entropía positiva uniforme si y solo si toda pareja no trivial es una pareja de entropía. Además, un sistemá dinámico tiene entropía topológica positiva si y solo si tiene una pareja de entropía. De alguna forma las parejas de clasificar los sistemas con entropía positiva. Poco tiempo después Blanchard, Host, Maass, Martinez y Rudolph definen las parejas de entropía con respecto a una medida. Estas parejas te ayudan a estudiar propiedades medibles de sistemas dinámicos topológicos.

Regresando en el tiempo, el primer resultado que logro conectar la teoria ergódica inicial, con la entropía fue Kushnirenko. Kushnirenko definió la entropía con respecto a una secuencia y probó que un sistema dinámico medible tiene entropía cero con respecto a cualquier secuencia si y solo si el sistema tiene espectro discreto. Naturalmente, Huang, Maass y Ye definieron las parejas de entropía secuencial.

Uno de los grandes resultados de la entropía local, es la caracterización de Kerr y Li. Por resultados de Weiss ya se sabía que la entropía estaba conectada con la noción de independencia, sin embargo la conección exacta fue probada hasta que definieron las parejas de independencia de entropía. En esta tesis revisaremos varias nociones de independencia que pueden ser usadas para caracterizar diferentes parejas. Por último revisaremos un poco de la teoría de sensibilidad y plantearemos una pregunta.

Capítulo 3

Preliminares

En el desarrollo de esta tesis consideramos a G un grupo numerable.

3.1. Grupos promediables y acciones de grupo

En esta sección explicamos lo que es un grupo promediable y damos algunas definiciones relacionadas con ellos y algunos resultados importantes para el desarrollo del tema. Originalmente, la definición de grupo promediable está dada por funciones promedio, la cual explicamos a continuación. Más adelante damos una equivalencia utilizando los subconjuntos finitos de dicho grupo.

Denotamos por $\ell_\infty(G)$ el conjunto de sucesiones acotadas en $\mathbb{R}$ indexadas por G, dicho de otra forma $\ell_\infty(G) = \{f : G \to \mathbb{R} | f \text{ es acotada}\}$. Se tiene que $\ell_\infty(G)$ es un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$ con la norma $\|f\| = \sup_{s\in G} |f(s)|$.

Una *función promedio* para G sobre $\ell_\infty(G)$ es un funcional lineal positivo $\sigma : \ell_\infty(G) \to \mathbb{R}$ tal que $\sigma(\mathbf{1}) = 1$, donde $\mathbf{1}$ es la función de G en $\mathbb{R}$ definida por $\mathbf{1}(s) = 1$, para todo $s \in G$.

Un funcional $\sigma : \ell_\infty(G) \to \mathbb{R}$ se dice invariante por la izquierda si $\sigma(sf) = \sigma(f)$ para cualesquiera $s \in G$ y $f \in \ell_\infty(G)$, donde $(sf)(t) = f(s^{-1}t)$, para todo $t \in G$.

Definición 3.1. Un grupo G se dice *promediable* si existe una función promedio invariante por la izquierda sobre $\ell_\infty(G)$.

Definición 3.2. Sea G un grupo y $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos finitos de G. Decimos que $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de *Følner* si para todo $s \in G$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} |sF_n \Delta F_n|/|F_n| \to 0.$$

La siguiente equivalencia fue demostrada por Følner en [3].

Teorema 3.3 (Følner)**.** Sea G un grupo. Se tiene que G es promediable si y sólo si existe una sucesión de Følner en G.

Definición 3.4. Sean G un grupo promediable y $F, K \subseteq G$ finitos. Decimos que F es (K,δ)-invariante si

$$|\{s \in F : Ks \subseteq F\}| \geq (1-\delta)|F|.$$

Denotamos por $M(K,\delta)$ a la colección de subconjuntos finitos de G que son (K,δ)-invariantes.

Definición 3.5. Sean G un grupo y φ una función con valores reales definida sobre los conjuntos finitos de G. Decimos que $\varphi(F)$ *converge a* L *cuando* F *se hace más y más invariante* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $K \subset G$ y $\delta > 0$ tales que $|\varphi(F) - L| < \varepsilon$ para todo $F \subseteq G$ finito y (K, δ)-invariante.

Definición 3.6. Sean G un grupo y φ una función con valores reales definida sobre los conjuntos finitos de G. Definimos el *límite superior* e *inferior* de $\frac{\varphi(F)}{|F|}$ cuando F es más y más invariante como

$$\lim_{(K,\varepsilon)} \sup_{F \in M(K,\varepsilon)} \frac{\varphi(F)}{|F|} \quad \text{y} \quad \lim_{(K,\varepsilon)} \inf_{F \in M(K,\varepsilon)} \frac{\varphi(F)}{|F|},$$

respectivamente, donde la red es construida mediante la relación $(K, \varepsilon) \succ (K', \varepsilon')$ si $K \supseteq K'$ y $\varepsilon \leq \varepsilon'$.

Teorema 3.7. Sea G un grupo promediable y φ una función con valores reales definida sobre el conjunto de los subconjuntos finitos de G que satisface:

1. $0 \leq \varphi(A) < \infty$ y $\varphi(\emptyset) = 0$,
2. $\varphi(A) \leq \varphi(B)$ para todo $A \subseteq B$,
3. $\varphi(As) = \varphi(A)$ para todo conjunto finito $A \subseteq G$ y todo $s \in G$,
4. $\varphi(A \cup B) \leq \varphi(A) + \varphi(B)$.

Entonces $\frac{1}{|F|}\varphi(F)$ converge a algún límite b cuando el conjunto F se hace más y más invariante.

3.2. Sistema dinámicos

Definición 3.8. Sea G un grupo con elemento neutro e y X un conjunto. Una *acción de* G *en* X es una función $T : G \times X \to X$ que cumple lo siguiente:

1. $T(s, T(t, x)) = T(st, x)$, para cualesquiera $s, t \in G$ y $x \in X$.
2. $T(e, x) = x$, para todo $x \in X$.

Usualmente denotamos por $T^s(x)$ a $T(s, x)$. También denotemos por $T^G(A) = \{T^s(x) : s \in G \text{ y } x \in A\}$.

Definición 3.9. Decimos que (X, T) es un *G-sistema dinámico topológico* si X es un espacio métrico compacto y T es una acción de G en X que actúa por homeomorfismos, es decir, T^s es un homeomorfismo para todo $s \in G$.

Definición 3.10. Un *G-sistema dinámico medible* es una cuádrupla (X, Σ, μ, T), donde (X, Σ, μ) es un espacio de probabilidad y T es una acción de G en X, tal que T^s es medible y preserva a μ, para todo $s \in G$.

Dado X un espacio métrico, denotamos por $B(X)$ la σ-álgebra de Borel de X.

Definición 3.11. Sea (X, T) un G-sistema dinámico topológico y μ. Decimos que T *preserva a* μ o que μ es *invariante* bajo T si $\mu(T^s(A)) = \mu(A)$, para cualesquiera $s \in G$ y $A \subseteq X$ medible. Denotamos por $M(X, T)$ al conjunto de medidas invariantes bajo T.

Definición 3.12. Sean (X, Σ, μ) y (Y, Γ, ν) espacios de medida y $\pi : X \to Y$ una función medible. Decimos que π *preserva la medida* si $\mu(\pi^{-1}(A)) = \nu(A)$, para todo $A \subseteq X$ medible.

Definición 3.13. Sean (X, Σ, μ, T) y (Y, Γ, ν, H) dos G-sistemas dinámicos medibles. Decimos que (Y, Γ, ν, S) es un *factor* de (X, Σ, μ, T) si existe una función medible $\pi : X \to Y$ que preserva la medida tal que $\pi \circ T = H \circ \pi$.

El siguiente teorema nos asegura que para acciones continuas de grupos promediables existen medidas invariantes. Dicho teorema es una parte del Teorema 4.4 de [11].

Teorema 3.14. Sea G un grupo. Se tiene que G es promediable si y solo si toda acción continua sobre un espacio de Hausdorff compacto admite una medida de probabilidad de Borel regular invariante.

Definición 3.15. Sea (X, T) un G-sistema dinámico topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es *G-invariante* si $T^G(A) = A$. Cuando (X, Σ, μ, T) es un G-sistema dinámico medible, decimos que A es *G-invariante* si $\mu(T^s(A)\Delta A) = 0$.

Definición 3.16. Un sistema dinámico (X, Σ, μ, T) se dice *ergódico* (o bién que μ es *ergódica*) si $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$, para todo conjunto medible G-invariante $A \subseteq X$. Dado (X, T) un G-sistema dinámico topológico, denotamos por $M_e(X, T)$ al conjunto de medidas ergódicas para (X, T).

Definición 3.17. Sean G un grupo promediable, $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Følner y $J \subset G$. Definimos la *densidad inferior* de J como

$$\underline{D}(J) = \liminf_{n\to\infty} \frac{|F_n \cap J|}{|F_n|},$$

la *densidad superior* de J como

$$\overline{D}(J) = \lim_{n\to\infty} \frac{|F_n \cap J|}{|F_n|}.$$

En caso de que $\lim_{n\to\infty} \frac{|F_n \cap J|}{|F_n|}$ exista, definimos la densidad de J como

$$D(J) = \lim_{n\to\infty} \frac{|F_n \cap J|}{|F_n|}.$$

3.3. Entropía topológica

A lo largo de esta sección se considera a G un grupo numerable promediable. Esta propiedad es fundamental para definir la entropía.

Definición 3.18. Sean $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_n$ cubertas abiertas para X definimos el *ensamble* de estas cubiertas como

$$\bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} U_i : U_i \in \mathcal{U}_i,\ \text{para } i = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

Notemos que para (X, T) un G-sistema dinámico topológico, $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X y $s \in G$, se tiene que $T^{-s}\mathcal{U}$ es una cubierta abierta para X. Denotemos por $N(\mathcal{U})$ a la cardinalidad de la subcubierta abierta más pequeña de $\mathcal{U}$.

Denotemos por $\mathcal{C}(X)$ al conjunto de las cubiertas abiertas de X.

Definición 3.19. Sean (X,T) un G-sistema dinámico topológico, $\mathcal{U}$ una cubierta abierta finita para X y $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Følner. Definimos la *entropía topológica de* (X,T) *con respecto a* $\mathcal{U}$ como

$$h_{top}(T,\mathcal{U}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|F_n|} \log N\left(\bigvee_{s\in F_n} T^{-s}\mathcal{U}\right).$$

Definimos la *entropía topológica* de (X,T) como

$$h_{top}(T) = \sup_{\mathcal{U}\in\mathcal{C}(X)} h_{top}(T,\mathcal{U}).$$

Se tiene que la entropía topológica no depende de la suceción de Følner que se elija.

Definición 3.20. Sean (X,T) un G-sistema dinámico topológico, $\mathcal{U}$ una cubierta abierta finita para X y $\mathfrak{s} = \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en G. Definimos la *entropía topológica de secuencia de* (X,T) *con respecto a* $\mathcal{U}$ como

$$h_{top}(T,\mathcal{U};\mathfrak{s}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N\left(\bigvee_{i=1}^{n} T^{-s_i}\mathcal{U}\right).$$

Definimos la *entropía topológica de secuencia* como

$$h_{top}(T;\mathfrak{s}) = \sup_{\mathcal{U}\in\mathcal{C}(X)} \{h_{top}(T,\mathcal{U};\mathfrak{s})\}.$$

Decimos que (X,T) es *nulo* si para toda sucesión $\mathfrak{s}$ se tiene que $h_{top}(T,\mathfrak{s}) = 0$.

3.4. Entropía para medidas

Definición 3.21. Sean (X,μ) un espacio de probabilidad y $\mathcal{P}$ una partición medible finita de X. Definimos la *entropía de Shannon* de $\mathcal{P}$ como

$$H_\mu(P) = -\sum_{P\in\mathcal{P}} \mu(P)\log(\mu(P)).$$

Definición 3.22. Sea (X,μ,T) y $\mathcal{P}$ una partición medible finita. Definimos la *entropía de* (X,μ,T) *respecto a* $\mathcal{P}$ como

$$h_\mu(T,\mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|F_n|} H_\mu\left(\bigvee_{s\in F_n} T^{-s}(\mathcal{P})\right).$$

Definimos la *entropía* de (X,μ,T) como

$$h_\mu(T) = \sup_{\mathcal{P}} h_{top}(T,\mathcal{U}).$$

De igual forma que en el caso topológico, la entropía de un G-sistema dinámico medible no depende de la suceción de Følner que se elija.

Definición 3.23. Sea (X,Σ,μ,T) un sistema dinámico. Definimos la *σ-álgebra de Pinsker*, $\mathcal{P}_\mu$, como la σ-álgebra más pequeña tal que para toda partición $\mathcal{P}\in\mathcal{P}_\mu$ de X finita se cumple que $h_\mu(T,\mathcal{P}) = 0$. El factor $(X,\mathcal{P}_\mu,\mu|_{\mathcal{P}_\mu},T)$ se le conoce como el *factor de Pinsker*.

Notemos que el factor de Pinsker es el factor más grande de entropía cero. Es decir, cualquier factor de (X, Σ, μ, T) de entropía cero es también factor del factor de Pinsker. Para más información sobre la σ-álgebra de Pinsker consular [6] y [8].

El siguiente teorema se conoce como el principio variacional el cual relaciona la entropía topológica con la entropía de medidas.

Teorema 3.24. Sea (X, T) un G-sistema dinámico topológico. Se tiene que

$$h_{top}(X, T) = \sup\{h_\mu(X, T) : \mu \in M(X, T)\}.$$

Definición 3.25. Sea (X, Σ, μ, T) un G-sistema dinámico medible. Dada $\mathcal{P}$ una partición finita medible, y $\mathfrak{s} = \{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en G. Definimos la *entropía de secuencia* de (X, μ, T) *respecto a* $\mathcal{P}$ y $\mathfrak{s}$ como

$$h_\mu(T, P; \mathfrak{s}) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} H_\mu \left(\bigvee_{i=1}^{n} T^{-s_i}(\mathcal{P}) \right),$$

y la *entropía de secuencia* de (X, Σ, μ, T) con respecto a $\mathfrak{s}$ como

$$h_\mu(T; \mathfrak{s}) = \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(T, \mathcal{P}; \mathfrak{s}).$$

Decimos que (X, Σ, μ, T) es *nulo* si $h_\mu(T; \mathfrak{s}) = 0$, para toda sucesión $\mathfrak{s}$. Si (X, T) es un G-sistema dinámico topológico y $\mu \in M(X, T)$, decimos que (X, T) es *μ-nulo* si $h_\mu(T; \mathfrak{s}) = 0$, para toda sucesión $\mathfrak{s}$.

Capítulo 4

Teoría de entropía local

A lo largo de este capítulo se considera que G es un grupo numerable promediable.

Definición 4.1. Sean (X,T) un G-sistema dinámico topológico y $(x,y)\in X^2$. Decimos que (x,y) es una *pareja de entropía* si $x\neq y$ y cada par de vecindades cerradas U, V de x y y respectivamente tenemos que

$$h_{top}(T,\{U^c,V^c\})>0.$$

Definición 4.2. Sean (X,T) un G-sistema dinámico topológico y $(x,y)\in X^2$. Decimos que (x,y) es una *pareja de entropía de secuencia* si $x\neq y$ y para todo para de vecindades cerradas U,V de x y y respectivamente, existe una secuencia $\mathfrak{s}$ tal que $h_{top}(T,\{U^c,V^c\};\mathfrak{s})>0$.

Definición 4.3. Sea (X,T) un G-sistema dinámico topológico. Sea $A=(A_1,\dots,A_n)$ una tupla de subconjuntos de X. Decimos que $J\subset G$ es un *conjunto de independencia* para A si para cualquier $I\subset J$ finito y cualquier $\phi: I\to\{1,\dots,|I|\}$ tenemos que

$$\bigcap_{i\in I}T^{i^{-1}}A_{\phi(i)}\neq\emptyset.$$

Consideremos $A=(A_1,\dots,A_n)$ una tupla de subconjuntos de X. Definamos la función $\varphi_A(F)=\text{máx}\{|F\cap J|: J \text{ es un conjunto de independencia para } A\}$ sobre los conjuntos finitos de G. Por el Teorema 3.7 se tiene que existe el límite de $\frac{1}{|F|}\varphi_A(F)$ cuando F se hace más y más invariante.

Definición 4.4. Sea X un G-sistema dinámico topológico y $A=(A_1,\dots,A_n)$ una tupla de subconjuntos de X. Definimos la *densidad de independencia* $I(A)$, como el límite de $\frac{1}{|F|}\varphi_A(F)$ cuando F se hace más y más invariante.

Teorema 4.5. Sea (X,T) un G-sistema dinámico topológico. Dados $A=(A_1,\dots,A_n)$ una tupla de subconjuntos de X y $c>0$. Lo siguiente es equivalente:

1. $I(A)\geq c$,

2. para todo $\varepsilon>0$ existen $K\subseteq G$ conjunto finito y $\delta>0$ tales que para todo $F\in M(K,\delta)$ existe un conjunto de independencia J para A con $|J\cap F|\geq(c-\varepsilon)|F|$.

3. para cualesquiera $K\subseteq G$ finito y $\varepsilon>0$ existen $F\in M(K,\varepsilon)$ y J un conjunto de independencia para A tales que

$$|J\cap F|\geq(c-\varepsilon)|F|$$

.

Teorema 4.6. Sean G un grupo promediable numerable (X, T) un G-sistema dinámico topológico. Dados $A = (A_1, \dots, A_n)$ una tupla de subconjuntos de X y $c > 0$. Lo siguiente es equivalente:

1. $I(A) \geq c$,
2. existe una sucesión de Følner $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de G y un conjunto de independencia J para A tal que $D(J) \geq c$.

Definición 4.7. Sean (X, T) un G-sistema dinámico topológico y $(x, y) \in X^2$. Decimos que (x, y) es una *pareja de independencia* o una *pareja* IE si cualquier par de conjuntos abiertos (U, V) con $x \in U$ y $y \in V$, tiene densidad de independencia positiva. Denotamos el conjunto de parejas de independencia con $IE(X, T)$.

Teorema 4.8. Sea (X, T) un G-sistema dinámico topológico. Se tiene que $E(X, T) \cup \Delta = IE(X, T)$, donde Δ es la diagonal en X^2.

Definición 4.9. Sean (X, T) un G-sistema dinámico topológico y $(x, y) \in X^2$. Decimos que (x, y) es una *pareja* IN si para cualesquiera $U, V \subseteq X$ abiertos con $x \in U$ y $y \in V$, la pareja (U, V) tiene conjuntos de independencia finitos arbitrariamente grandes.

Teorema 4.10. Sea (X, T) un G-sistema dinámico topológico. Se tiene que $(x, y) \in X^2 \setminus \Delta$ es una pareja de entropía de secuencia si y solo si es una pareja IN.

4.1. Entropía local medible

Definición 4.11. Sean (X, T) un G-sistema dinámico topológico y $(x, y) \in X^2$. Decimos que (x, y) es una *pareja de entropía respecto a* μ o una *pareja de* μ*-entropía* si $x \neq y$ y para cualquier partición medible $P = \{A, B\}$ tal que $x \in \operatorname{int}(A)$ y $y \in \operatorname{int}(B)$ se tiene que $h_\mu(T, P) > 0$. Denotamos por $E_\mu(X, T)$ al conjunto de parejas de entropía respecto a μ.

Teorema 4.12. Sea (X, T) un G- sistema dinámico y $\mu \in M(X, T)$. Se tiene que $E_\mu(X, T) \subseteq E(X, T)$.

Sea $\pi : (X, \mu, T) \to (Z, \nu, T)$ el factor de Pinsker de (X, μ, T), sea $\mu = \int_Z \mu_Z d\nu(z)$ la desintegración de μ sobre (Z, ν). Hagamos

$$\lambda = \int_Z (\mu_z \times \mu_z) d\nu(z)$$

y $\Lambda_\mu = \operatorname{Supp}(\lambda)$ el soporte de λ .

Teorema 4.13. Se cumple los siguiente:

1. Para $\mu \in M(X, T)$ tal que $h_\mu(X, T) > 0$, se tiene que $E_\mu(X, T) = \Lambda_\mu \setminus \Delta$.
2. Si μ es ergódica y cumple que $h_\mu(X, T) > 0$, se tiene que $\overline{E_\mu(X, T)} = \Lambda_\mu$.
3. Para (X, T) un sistema dinámico topológico existe una medida $\mu \in M(X, T)$ con $E(X, T) = \Lambda_\mu \setminus \Delta$.

4. $\overline{E(X,T)} = \overline{\bigcup\{\Lambda_\mu : \mu \in M_e(X,T)\}}$

Sea $\delta > 0$ denotemos por $\mathcal{B}(\mu,\delta)$ a la colección de todos los subconjuntos de Borel D de X tales que $\mu(D) \geq 1-\delta$, y por $\mathcal{B}'(\mu,\delta)$ la colección de todas las funciones $D : G \to \mathcal{B}(X)$ tales que $\inf_{s\in G} \mu(D_s) \geq 1-\delta$. Sea $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ una pareja de subconjuntos de X y dado $\delta > 0$. Para todo subconjunto finito F de G definimos

$$\varphi_{\mathbf{A},\delta}(F) = \min_{D\in\mathcal{B}(\mu,\delta)} \max\{|F\cap J| : J \text{ es un conjunto de independencia para } \mathbf{A} \text{ relativo a } D\},$$

$$\varphi'_{\mathbf{A},\delta}(F) = \min_{D\in\mathcal{B}'(\mu,\delta)} \max\{|F\cap J| : J \text{ es un conjunto de independencia para } \mathbf{A} \text{ relativo a } D\}.$$

Definimos $\bar{\mathrm{I}}_\mu(A,\delta)$ como el límite superior de $\frac{1}{|F|}\varphi_{\mathbf{A},\delta(F)}$ cuando F es mas y más invariante y $\underline{\mathrm{I}}_\mu(A,\delta)$ corresponde al límite inferior. Similarmente, definimos $\bar{\mathrm{I}}'_\mu(A,\delta)$ es el límite superior de $\frac{1}{|F|}\varphi'_{\mathbf{A},\delta(F)}$ cuando F es mas y mas invariante, y $\underline{\mathrm{I}}'_\mu(A,\delta)$ el límite inferior.

Definición 4.14. Definimos la *μ-densidad de independencia superior* como

$$\bar{\mathrm{I}}_\mu(A) = \sup_{\delta>0} \bar{\mathrm{I}}_\mu(A,\delta),$$

y la *μ-densidad de independencia inferior* como

$$\underline{\mathrm{I}}_\mu(A) = \sup_{\delta>0} \underline{\mathrm{I}}_\mu(A,\delta).$$

Definición 4.15. Sean (X,T) un G-sistema dinámico topológico, $\mu \in M(X,T)$ y $(x,y) \in X^2$. Decimos que (x,y) es una *pareja μ-IE* si para cualquier vecindad de la forma $U \times V$ de (x,y) la pareja (U,V) tiene μ-densidad de independencia superior positiva. Denotamos por $IE_\mu(X,T)$ al conjunto de parejas μ-IE.

Observación Toda pareja μ-IE es una pareja IE.

Teorema 4.16. Sea (X,T) un G-sistema dinámico topológico y $\mu \in M(X,T)$. Se tiene que $E_\mu(X,T) \cup \Delta = IE_\mu(X,T)$.

Dado $\delta > 0$ decimos que una pareja (U,V) de subconjuntos de X tiene *δ-μ-densidad de independencia sobre conjuntos finitos arbitrariamente grandes* si existe un $c > 0$ tal que para todo $M > 0$ existe un conjunto finito $F \subseteq G$ de cardinalidad al menos M que posee la propiedad que para todo $D \in \mathcal{B}(X,\delta)$ existe un conjunto de independencia $I \subseteq F$ relativo a D con $|I| \geq c|F|$. Decimos que (U,V) tiene *μ-densidad de independencia secuencial positiva* si para algún $\delta > 0$ este tiene δ-μ-densidad de independencia sobre conjuntos finitos arbitrariamente grandes.

Definición 4.17. Sean (X,T) un G-sistema dinámico topológico, $\mu \in M(X,T)$ y $(x,y) \in X^2$. Decimos que (x,y) es una *pareja μ-IN* si para cualquier vecindad producto $U \times V$ de (x,y), la pareja (U,V) tiene μ-densidad de independencia secuencial positiva. Denotamos por $IN_\mu(X,T)$ al conjunto de μ-IN pares.

Observación: Toda pareja μ-IN es una pareja IN.

Teorema 4.18. Sean (X,T) un G-sistema dinámico topológico y $\mu \in M(X,T)$. Se cumple lo siguiente:

1. Sea $A = (A_1, A_2)$ es un par de conjuntos cerrados de X con μ-densidad de independencia secuencial positiva. Se tiene que existe una pareja μ-IN, (x, y), tal que $x \in A_1$ y $y \in A_2$.
2. $IN_\mu(X, T) \setminus \Delta$ es no vacío si y solo si (X, T) no es μ-nulo.
3. $IN_\mu(X, T)$ es cerrado en X^2 y $T \times T$-invariante.

Definición 4.19. Sean (X, T) un G-sistema dinámico topológico, $\mu \in M(X, T)$ y $(x, y) \in X^2$. Decimos que (x, y) es una *μ-pareja de entropía de secuencia* si para cualquier partición finita $\mathcal{P}$, tal que no existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $x, y \in \overline{P}$, existe $S \subset G$ tal que $h_\mu^S(\mathcal{P}, T) > 0$.

Teorema 4.20. Sea (X, T) un G-sistema dinámico topológico, $\mu \in M(X, T)$ y $(x, y) \in X^2 \setminus \Delta$. Se tiene que (x, y) es una pareja μ-IN si y solo si es una pareja de μ-entropía de secuencia.

Corolario 4.21. Sea (X, T) un G-sistema dinámico topológico y $\mu \in M(X, T)$. Se tiene que (X, T) es μ-nulo si y solo si no existen parejas de μ-entropía de secuencia.

Capítulo 5

Sensibilidad

En este capítulo se considera que G es un grupo numerable promediable y que tiene asignada una sucesión de Følner.

Definición 5.1. Sea (X,T) un G-sistema dinámico topológico. Decimos que (X,T) es *sensible a las condiciones iniciales* o *sensible* si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $U \subseteq X$ abierto no vacío existen $x, y \in U$ y $s \in G$ tales que $d(T^s(x), T^s(y)) > \varepsilon$.

Definición 5.2. Sea (X,T) un G-sistema dinámico topológico. Decimos que (X,T) es *sensible en promedio* si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo conjunto abierto no vacío U existen $x, y \in U$ tales que

$$\overline{D}(\{s \in G : d(T^s(x), T^s(y)) > \varepsilon\}) > \varepsilon.$$

Definición 5.3. Sea (X,T) un G-sistema dinámico topológico. Definimos $\Delta_\delta := \{s \in G : d(T^s(x), T^s(y)) > \delta\}$ y la *pseudométrica de Besicovitch* como $d_b(x,y) := \text{ínf}\{\delta > 0 : \overline{D}(\Delta_\delta(x,y)) < \delta\}$. Al identificar los puntos con con pseudo-distancia cero, obtenemos el espacio métrico $(X/d_b, d_b)$ que es llamado el *espacio de Besicovitch*. La proyección $f_b : (X,d) \to (X/d_b, d_b)$ es llamada la *proyección de Besicovitch*.

Definición 5.4. Sea (X,T) un G-sistema dinámico topológico. Decimos que (X,T) es *μ-sensible en promedio* si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $A \in \mathcal{B}^+(X)$ existen $x, y \in A$ tales que $d_b(x,y) > \varepsilon$ (y en consecuencia $\overline{D}(\{s \in G : d(T^s(x), T^s(y)) > \varepsilon\}) > \varepsilon$). En este caso decimos que ε es una *constante de μ-sensibilidad en promedio.*

Definición 5.5. Sean (X,T) un G-sistema dinámico topológico y $(x,y) \in X^2$. Decimos que (x,y) es una *pareja de μ-sensibilidad en promedio* μ si $x \neq y$ y para todas las vecindades U_x de x y U_y de y, existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $A \in \mathcal{B}^+(X)$ existen $p, q \in A$ con $\overline{D}(\{s \in G : T^s(p) \in U_x \text{ y } T^s(q) \in U_y\}) > \varepsilon$. Denotamos por $S_\mu^m(X,T)$ al conjunto de parejas de μ-sensibilidad en promedio.

Teorema 5.6. Sea (X,T) un sistema dinámico topológico y μ una medida ergódica para X. Se cumple que (X,T) es μ-sensible en promedio si y solo si $S_\mu^m(X,T) \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos que (X,T) es μ-sensible en promedio con constante ε_0 y sea $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Consideremos el siguiente conjunto

$$X^\varepsilon = \{(x,y) \in X^2 : d(x,y) \geq \varepsilon\}.$$

Notemos que X^ε es compacto. Supongamos que $S_\mu^m(X,T)=\emptyset$. Para todo $(x,y)\in X^2$ existen vecindades U_x, U_y, tales que para todo $\delta>0$ existe un conjunto $A_\delta(x,y)\in\mathcal{B}_X^+$ tal que

$$\overline{D}(\{s\in G:(T^sp,T^sq)\in U_x\times U_y\})\leq\delta$$

para todo $p,q\in A_\delta(x,y)$. Dado que X^ε es compacto, existe un conjunto finito $F\subset X^\varepsilon$ tal que

$$X^\varepsilon\subseteq\bigcup_{(x,y)\in F}U_x\times U_y.$$

Sea $\delta=\varepsilon/|F|$. Dado que μ es ergódica, para todo $(x,y)\in F$ existe $t(x,y)\in G$ talque $A=\bigcap_{(x,y)\in F}T^{t(x,y)}(A_\delta(x,y))\in\mathcal{B}_X^+$. De aquí, para todo $(x,y)\in F$

$$\overline{D}(\{s\in G:(T^s(p),T^s(q))\in U_x\times U_y\})\leq\delta, \tag{5.1}$$

para todo $p,q\in A$.

Dado que $\varepsilon<\varepsilon_0$ existen $p,q\in A$ tales que

$$\overline{D}(\{s\in G:(T^s(p),T^s(q))\in X^\varepsilon\})>\varepsilon$$

y por tanto

$$\overline{D}(\{s\in G:(T^s(p),T^s(q))\in\bigcup_{(x,y)\in F}U_x\times U_y\})>\varepsilon.$$

Esto implica que existe $(x_0,y_0)\in F$ tal que

$$\overline{D}(\{s\in G:(T^s(p),T^s(q))\in U_{x_0}\times U_{y_0}\})>\varepsilon/|F|=\delta.$$

Lo cual contradice (5.1). Por lo tanto se tiene que $S_\mu^m(X,T)\neq\emptyset$.

Ahora supongamos que $S_\mu^m(X,T)\neq\emptyset$. Sea $(x,y)\in S_\mu^m(X,T)$. Existen vecindades U_x de x, U_y de y y $\varepsilon>0$ tales que $d(U_x,U_y)>0$ y para todo $A\in\mathcal{B}_X^+$ existen $p,q\in A$ y $S\subseteq G$ con $\overline{D}(S)>\varepsilon$ tal que $T^s(p)\in U_x$ y $T^s(q)\in U_y$, para todo $s\in S$. Esto implica que $\overline{D}(\{s\in G: d(T^s(p),T^s(q))\geq d(U_x,U_y)\})>\varepsilon$. Por lo tanto, (X,T) es μ-sensible en promedio. $\square$

Capítulo 6

Espectro discreto

En esta capítulo se considera que G es un grupo numerable promediable y que tiene asignada una sucesión de Følner.

Recordemos que $L^2(X,\mu)$ denota al conjunto de funciones complejas cuadrado integrables en X y que un G-sistema dinámico medible (X,Σ,μ,T) define una familia de operadores lineales unitarios sobre $L^2(X,\mu)$, dados por $U_T^s(f) = f \circ T^s$, para todo $f \in L^2(X,\mu)$. Dichos operadores son conocidos como operadores de Koopman.

Definición 6.1. Sea (X,Σ,μ,T) un G-sistema dinámico medible ergódico y $f \in L^2(X,\mu)$. Decimos que f es *casi periódica* si $\overline{\{U_T^s f : s \in G\}}$ es un conjunto compacto de $L^2(X,\mu)$. Denotamos como el conjunto de funciones casi periódicas como H_{ap}.

Definición 6.2. Sea (X,Σ,μ,T) un G-sistema dinámico medible ergódico. Decimos que (X,Σ,μ,T) tiene espectro discreto si $L^2(X,\mu) = H_{ap}$.

El siguiente resultado fue probado por Kushnirenko en [12].

Teorema 6.3. Sea (X,Σ,μ,T) un G-sistema dinámico medible ergódico. Se cumple que (X,Σ,μ,T) tiene espectro discreto si y sólo si $h_\mu(T;\mathfrak{s}) = 0$, para toda sucesión $\mathfrak{s} \subseteq G$.

Definición 6.4. Sea $f \in L^2(X,\mu)$. Definimos

$$d_f(x,y) = \limsup \left(\frac{1}{|F_n|} \sum_{s \in F_n} |f(T^s(x)) - f(T^s(y))|^2 \right)^{1/2}.$$

Definición 6.5. Sean (X,Σ,μ,T) un G-sistema dinámico medible y $f \in L^2(X,\mu)$. Decimos que (X,Σ,μ,T) es μ-f-sensible en promedio si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $A \in \Sigma$ con medida positiva existen $x,y \in A$ tales que $d_f(x,y) > \varepsilon$. En este caso, decimos que f es *μ-sensible en promedio* y ε es una *constante de μ-sensibilidad* para f. Denotamos por H_{ms} al conjunto de funciones μ-sensible en promedio.

El siguiente resultado de los Teoremas 3.7 y 3.10 de [5].

Teorema 6.6. Sean (X,T) un G-sistema dinámico topológico y $\mu \in M_e(X,T)$. Se tiene que (X,T) es μ-sensible en promedio si y solo si (X,T) es μ-f-sensible en promedio, para toda $f \in L^2(X,\mu)$.

Teorema 6.7. Sea (X,Σ,μ,T) un G-sistema dinámico medible ergódico. Se tiene que $H_{ap}^c = H_{ms}$.

El siguiente resultado se obtiene de los teoremas Teorema 26 y 36 de [4]

Teorema 6.8. Sea (X, T) un G-sistema dinámico topológico y μ una medida ergódica. Si existe una sucesión $\mathfrak{s} \subseteq G$ tal que $h_\mu(T; \mathfrak{s}) > 0$, entonces (X, T) es μ-sensible en promedio.

El siguiente corolario se obtiene a partir de los Teoremas 6.8, 6.3, 6.7 y 6.6.

Corolario 6.9. Sea (X, T) un G-sistema dinámico topológico y μ una medida ergódica. Se tiene que $IN_\mu(X, T) \setminus \Delta = \emptyset$ si y solo si (X, T) no es μ-sensible en promedio.

El siguiente corolario se obtiene del Corolario 6.9 y Teorema 5.6.

Corolario 6.10. Sea (X, T) un G-sistema dinámico topológico y μ una medida ergódica. Se tiene que $IN_\mu(X, T) \setminus \Delta = \emptyset$ si y solo si $S_\mu^m(X, T) = \emptyset$.

Pregunta: Dado (X, T) un G-sistema dinámico topológico y $\mu \in M_e(X, T)$ ¿Son iguales los conjuntos $IN_\mu(X, T) \setminus \Delta$ y $S_\mu^m(X, T)$?

Capítulo 7

Conclusiones

En este capítulo le llamamos *sistema dinámico* a los $\mathbb{Z}$-sistemas dinámicos topológicos .

A lo largo del tiempo se ha tratado de describir el desorden en un sistema dinámico, esto es comúnmente llamado caos. Existen varias maneras de describir este concepto. Una definición de caos muy popular es el caos de Li-Yorke. Un sistema dinámico (X, T) se dice *Li-Yorke caótico* si existe un conjunto no numerable S tal que para todo $x, y \in S$ con $x \neq y$ se tiene que

$$\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \quad \text{y} \quad \limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) \geq 0.$$

Otra noción de caos es la de mezclante. Un sistema dinámico (X, T) se dice *topológicamente mezclante* o *mezclante* si para cualesquiera $U, V \subseteq X$ abiertos no vacíos existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$, para todo $k \geq n$.

En este escrito también abordamos otras nociones de caos, tales como la entropía y la sensibilidad, ver definiciones 3.19 y 5.1.

Observemos que, desde un punto de vista topológico, la sensibilidad es una propiedad que se encuentra en todas partes, ya que en la definición se tiene que para todo $U \subseteq X$ existen $x, y \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$. Por otra parte, notemos que el caos de Li-Yorke no necesariamente esta en todas partes ya que al conjunto S solo se le pide que sea no numerable. A estas nociones se le conoce como caos global o caos parcial. En otras palabras, tal como se describe en [1], el caos es global si se encuentra en todas partes, en otro caso decimos que es caos parcial. En este sentido, la entropía es una noción parcial, mientras que mezclante es una propiedad global.

Un área de interés es estudiar las relaciones que existen entre las distintas formas de caos. Por ejemplo, en [2] fue demostrado que entropía positiva implica caos de Li-Yorke. Por otra parte, se puede verificar que mezclante implica sensibilidad. En simbolos se escribe como sigue:

$$\text{entropía positiva} \implies \text{caos de Li-Yorke}$$

y

$$\text{mezclante} \implies \text{sensibilidad.}$$

En un principio, se tiene que la entropía y la sensibilidad no tienen una relación en común debido a que una es caos global y la otra es caos parcial. De hecho, si consideramos el sistema dinámico (X, σ), donde $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \cup \{2^\infty\}$ y σ el shift. Tenemos que $h_{top}(X) > 0$, sin embargo no es sensible ya que el abierto $\{2^\infty\}$ no satisface la definición de sensibilidad. Por otra parte, todo shift sin puntos aislados es sensible, en particular los shifts Strumianos son sensibles los cuales tienen entropía cero.

Sin embargo, al considerar una noción mas débil de entropía, entropía de secuencia, y una noción mas fuerte de sensibilidad, sensibilidad en promedio, resulta que que hay una relación entre estas propiedades. De hecho, si (X, T) un G-sistema dinámico topológico y μ una media ergódica. Se tiene que (X, T) es μ-sensible en promedio si y solo si tiene entropía topológica de secuencia positiva (Teorema 6.8). El objetivo de este proyecto es estudiar que tan fuerte es esta relación utilizando la forma local de estas definiciones, es decir, las parejas de μ-sensibilidad en promedio y las parejas μ entropía de secuencia. En otras palabras, nos preguntamos si las parejas de μ sensibilidad en promedio y las parejas de μ-entropía de secuencia coinciden.

Para el desarrollo de este proyecto se plantea revisar y entender los detalles de la demostración del resultado en su versión global. Para la versión local de este resultado se plantea usar teoría de independencia (ver Capítulo 4).

Bibliografía

[1] F. Blanchard. Topological chaos: what may this mean? *Journal of Difference Equations and Applications*, 15(1):23–46, 2009.

[2] F. Blanchard, E. Glasner, S. Kolyada, and A. Maass. On li-yorke pairs. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 547:51–68, 01 2002.

[3] E. Følner. On groups with full banach mean value. *Mathematica Scandinavica*, 3:243–254, 1955.

[4] F. García-Ramos. Weak forms of topological and measure-theoretical equicontinuity: Relationships with discrete spectrum and sequence entropy. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 37(4):1211–1237, 2017.

[5] F. García-Ramos and B. Marcus. Mean sensitive, mean equicontinuous and almost periodic functions for dynamical systems. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, 39(2):729–746, 2019.

[6] E. Glasner. *Ergodic theory via joinings*. Mathematical Surveys and Monographs 101. American Mathematical Society, 2003.

[7] E. Glasner and X. Ye. Local entropy theory. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 29(2):321–356, 2009.

[8] M. Hochman. Lectures on dynamical systems and entropy. https://math.huji.ac.il/ mhochman/courses/dynamics2014/notes.5.pdf, Junio 2014.

[9] D. Kerr and H. Li. Independence in topological and C*-dynamics. *Mathematische Annalen*, 338(4):869–926, 2007.

[10] D. Kerr and H. Li. Combinatorial independence in measurable dynamics. *Journal of Functional Analysis*, 256(5):1341–1386, 2009.

[11] D. Kerr and H. Li. *Ergodic Theory: Independence and Dichotomies*. Springer Monographs in Mathematics. Springer International Publishing, 2016.

[12] A. G. Kushnirenko. On metric invariants of entropy type. *Russian Mathematical Surveys*, 22(5):53–61, 1967.

[13] J. P. Pier. *Amenable Locally Compact Groups*. John Wiley & Sons, Inc., 1984.