UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE SAN LUIS POTOSÍ

FACULTAD DE ECONOMÍA

Juegos Bayesianos bajo órdenes de prioridad

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MAESTRO EN ECONOMÍA MATEMÁTICA

PRESENTA:

Lic. Mario Augusto Díaz Fach

TUTOR

Dr. William José Olvera López

México, SLP, No. 046 2024

Agradecimientos

A mis padres por la educación, el ejemplo y la confianza que siempre me han dado, por haberme dado la oportunidad de crecer y convertirme en la persona que soy.

A mi novia, gracias por ser parte de mi vida.

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología CONAHCyT por brindar el apoyo para mis estudios de maestría.

A toda mi familia, por siempre estar presente en mi vida y regalarme su cariño y apoyo a lo largo de todo este camino.

A mis amigos por las risas, los momentos y por siempre ser ellos.

A mis compañeros de maestría por estos dos años increíbles.

A todos y cada uno de los maestros de esta nuestra maestría por el importante trabajo que hacen. Gracias por enseñarnos a ver más allá.

A mis sinodales Dr. Karla y Dr. Iván por sus observaciones y consejos durante la elaboración de la investigación.

Al Dr. William Olvera por haberme dado la confianza y las herramientas para el desarrollo de está nuestra investigación.

Resumen

En este trabajo se aborda a través de la teoría de juegos el problema de cómo gestionar el comercio dentro de una cola. El objetivo principal es desarrollar un modelo matemático que permita determinar el precio de equilibrio que maximiza la utilidad esperada de los participantes, esta se ve influenciada por su posición en la cola y el costo en el cual se incurre para obtener dicha posición. Para solucionar esta problemática se busca crear un modelo matemático donde se simule una subasta con sobre cerrado al primer precio, en donde la puja de equilibrio sea el precio que paga una persona para tener un lugar en la cola que maximice su utilidad esperada. A lo largo del trabajo se construyen distintas situaciones que representan el comportamiento del comercio dentro de una cola, de esta forma se logró determinar que, si los jugadores dentro de la cola están dispuestos a ceder su lugar, entonces se es capaz de encontrar un equilibrio, que está en función de la cantidad de jugadores fuera de la cola y de la valoración que le dan estar en la misma. A su vez, si los jugadores dentro de la cola están dispuestos a ceder su lugar y además se supone que estos no modifican su pago independientemente del lugar que terminen alcanzando, entonces se es capaz de encontrar un equilibrio que está en función de la cantidad de jugadores fuera de la fila y de la valoración que le dan estar en la misma.

Palabras claves: Teoría de Juego, subasta, cola, precio de equilibrio.

Summary

In this work, the problem of how to manage trade within a queue is addressed through game theory. The main objective is to develop a mathematical model that allows determining the equilibrium price that maximizes the expected utility of the participants, which is influenced by their position in the queue and the cost incurred to obtain that position. To solve this problem, it seeks to create a mathematical model where an auction with a sealed envelope is simulated at the first price, where the equilibrium bid is the price paid by a person to have a place in the queue that maximizes its expected utility. Throughout the work, different situations are built that represent the behavior of the trade within a queue, in this way it was possible to determine that, if the players inside the queue are willing to give up their place, then it is possible to find a balance, which is a function of the number of players outside the queue and the valuation they give to being in it. In turn, if the players in the queue are willing to give up their place and it is also assumed that they do not modify their payout regardless of the place they end up reaching, then you are able to find a balance that is a function of the number of players outside the queue and the valuation they give to being in the queue.

Keywords: Game Theory, auction, queue, equilibrium price.

Índice general

Índice de tablas

CAPÍTULO 1

Introducción

Uno de los rasgos distintivos de estos tiempos es la matematización de todas las esferas del conocimiento, donde se ha ampliado la aplicación de modelos para la profundización de los conocimientos y la toma de decisiones, exigido por el alto nivel de complejidad que caracteriza los procesos, y facilitado por el impetuoso avance en los equipos de cómputo automatizado y el desarrollo de software que facilitan su formulación y procesamiento; y las ciencias económicas y administrativas no son una excepción.

El presente trabajo se basa en la creación de un modelo matemático, en donde se busca estudiar una situación en la cual existen un grupo de jugadores (personas, agentes, y se le denotará de esta forma a lo largo del trabajo) dentro de una cola (fila) y otro grupo fuera de la misma, en donde aquellos agentes fuera de la cola mediante un pago intentan acceder a uno de estos lugares ocupados de la cola, buscando así que los jugadores dentro de la cola cedan su lugar. En concreto este ha sido un fenómeno poco estudiado, dado que no existe regulación para la compra-venta de lugares en una cola, a pesar de ocurrir en ciertos casos, como por ejemplo en colas a conciertos o para realizar ciertos tramites. Otros casos en donde puede llegar a ocurrir este fenómeno son por ejemplo la prioridad de operaciones (principalmente despegues) en aeropuertos: los aeropuertos tienen definido de antemano un orden de despegue de las distintas aerolíneas, que puede verse afectado por factores externos (problemas técnicos, abordaje, etc.) y hoy en día este orden no puede ser modificado.

Entonces, puede ocurrir el hecho de que una aerolínea esté lista para su despegue, pero se encuentre en espera dado el retraso en la salida de otra aerolínea y podrá querer que su vuelo despegue antes que otros por compromisos de conexiones y reputación, para ello podría estar dispuesta a realizar una compensación a la aerolínea que se encuentra delante, para que esta le ceda su lugar. También, las aerolíneas tienen establecido un sistema de sobreventa (cuando venden más boletos que asientos en el avión, lo cual está regulado por ley en todos los países). Cuando los asientos se encuentran saturados, se forma una lista de espera entre clientes, generalmente asignados al azar. Podría implementarse un mecanismo de compensaciones, adicional a la protección de las aerolíneas, para los pasajeros que no pudieran viajar. En estos casos existe un común denominador, y es la existencia de la situación que nuestro modelo busca recrear. Siendo así, el objetivo de la investigación representar dicho modelo con el fin de obtener los equilibrios (la decisión de cuánto ofrecer) que permitan a los jugadores fuera de la cola obtener un lugar en la misma, utilizando la teoría de juegos como la herramienta fundamental.

El procedimiento para encontrar dichos equilibrios lo podemos extraer de la resolución de subastas, en especial de las subastas con sobre cerrado al primer precio y con sobre cerrado al segundo precio, donde dichas subastas se explican a profundidad en el capítulo de antecedentes. De forma general, el objetivo de dicho procedimiento es encontrar una puja (es aquello que se está dispuesto a pagar por un producto), basada en la valoración que se le tiene al objeto por el cual se puja, la cual sea aceptada (la más alta) y a su vez, maximice la utilidad del jugador que realiza la puja. Este tipo de resolución no es exclusivo de las subastas, suele utilizarse con regularidad como un problema de negociar posiciones de espera en una cola. La posición de un individuo en una cola es considerada por su ocupante como su propiedad que posee temporalmente. Manipular la posición de una persona en la cola constituye privarla de su propiedad, encontrándose así con una fuerte objeción. Por ello el sistema FIFO (primero en entrar, primero en salir) es predominante en sistemas de servicios.

Por otro lado, la regla FIFO no toma en cuenta la sensibilidad al tiempo de espera de los ocupantes de la cola. Si los clientes más sensibles al tiempo se adelantan y reciben un servicio más rápido, sería un sistema más eficiente. Con ese fin, los proveedores de servicios a menudo venden prioridades a los clientes (suscripciones, bonos, etc.), el problema es que los ingresos van al proveedor de servicios, pero se inflige una espera más larga a los clientes que no pagan y estos no son compensados. Dicho problema se resolvería si la transferencia monetaria fuera entre los propios clientes, por ejemplo, si los clientes con mayor sensibilidad al tiempo están dispuestos a pagar para adquirir la posición de otro cliente dispuesto a ceder su lugar para obtener ganancias monetarias. Entonces, como tales intercambios no influyen en las posiciones de ningún otro cliente en la lista de espera, ningún cliente es afectado por las necesidades de otro sin ser compensado. Por lo tanto, los clientes pueden mantener sus derechos de propiedad a las posiciones de espera (como en el sistema FIFO) o cederlas a través de una compensación, mejorando la eficiencia del sistema. Siendo éste el enfoque que nuestro trabajo intenta dar, y a su vez, en distintas investigaciones se ha buscado soluciones a la organización eficiente de las colas.

En Yang *et al.* (2017) se estudia cómo el comercio en una cola se puede organizar mediante subastas simples en un entorno donde los clientes son informados de forma privada sobre sus costos de espera. Diseñaron mecanismos óptimos desde tres perspectivas diferentes: el bienestar social, los ingresos del proveedor de servicios y los ingresos de la plataforma comercial que media el comercio, en donde el orden de la cola es establecido por una entidad externa, dado que la infraestructura que facilita el comercio depende de la tecnología (por ejemplo, aplicaciones móviles) que normalmente va más allá de la experiencia del proveedor de servicios. Por lo tanto, si un intermediario especializado es responsable de desarrollar, implementar y mantener la plataforma en nombre del proveedor de servicios, el proveedor de servicios no se distraerá de sus actividades básicas. En la industria de restaurantes, por ejemplo, las plataformas de reserva de restaurantes (intermediarios) generalmente no están completamente integradas con los restaurantes (proveedores de servicios); por otra parte, si el proveedor de servicios decide operar dichas plataformas, se beneficiará de un mercado de reventa de posiciones en espera, y esto podría crear una reacción violenta de los clientes dada la naturaleza sensible del salto en la fila.

En la medida en que esto resulte en una pérdida, el proveedor de servicios preferiría separarse de la plataforma de negociación y dejar que un intermediario externo arbitre los cambios de posiciones en espera, planteando la pregunta de cuál es el mecanismo óptimo para cobrar tarifas de los clientes comerciales para un intermediario. Rosenblum (1992) plantea en su modelo dicha idea asumiendo que los costos de espera de los clientes son información pública y que se ignoran los valores futuros de las transacciones, en ambos casos se estudia la idea de que el comercio en la cola éste regulado por un intermediario entre los clientes y el proveedor de servicios.

Gershkov y Schweinzer (2010) modelan un problema de diseño de mecanismos de reprogramación de un número fijo de jugadores en un sistema de compensación donde no hay proceso de llegada y el comercio se completa antes de que comience el servicio. Dado que todos los clientes están presentes en el momento cero, no está claro cómo se forman los derechos de propiedad iniciales, por lo que estudian diferentes asignaciones iniciales y muestran que se puede implementar un mecanismo eficiente si el cronograma inicial es de orden aleatorio, pero no si es determinista como FIFO. El Haji y Onderstal (2019) examina experimentalmente cómo los jugadores comercian en un entorno de cola similar al de Gershkov y Schweinzer (2010). Proporcionan evidencia de que organizar un mercado de comercio de tiempo de este tipo puede lograr una cantidad no trivial de ganancias de eficiencia. Nuestro modelo se diferencia de los anteriores dado que buscamos solo estudiar las relaciones de aquellos involucrados directamente en la cola y cómo se compensan entre ellos mismos sin necesidad de una intervención externa.

Este trabajo cuenta con tres capítulos, comenzando con un primer capítulo de antecedentes, en el cual se exponen las bases teóricas que nos permiten la construcción y resolución del modelo propuesto. Luego, se comienza la construcción del modelo y sus particularidades, en busca de encontrar las soluciones al problema planteado. Primeramente, se propone un modelo general, del cual analizamos un caso reducido, posteriormente añadimos una serie de cambios al modelo general, que principalmente consta de la decisión de los jugadores dentro de la cola de ceder su lugar, dándonos como resultado dos variaciones del modelo general. El último de estos capítulos es el de las conclusiones, en donde se exponen los resultados obtenidos.

CAPÍTULO 2

Antecedentes

En este capítulo, exploraremos algunos de los conceptos fundamentales necesarios para la investigación en cuestión. Como punto inicial, es crucial comprender qué es la teoría de juegos y su importancia.

La teoría de juegos constituye el estudio de modelos matemáticos que representan situaciones de conflicto entre jugadores racionales. Estas situaciones implican a dos o más jugadores con objetivos individuales, donde las decisiones de cada uno afectan los resultados obtenidos, basándose principalmente en sus preferencias. De manera amplia, un juego consiste en un conjunto de jugadores, un conjunto de estrategias disponibles para cada jugador y una especificación de recompensas asociadas a estas estrategias.

En este contexto, la teoría de juegos nos capacita para predecir el comportamiento de los jugadores y ofrecer recomendaciones sobre las medidas más adecuadas para alcanzar objetivos sociales específicos. Esta disciplina abarca una amplia gama de situaciones, desde partidas de póquer hasta decisiones empresariales, como determinar la viabilidad de ingresar a un nuevo mercado.

Según Maschler et al. (2013), aunque la teoría de juegos tradicionalmente se ha dividido en dos grandes grupos, juegos cooperativos y no cooperativos, en la actualidad se incluyen otras categorías importantes, como problemas de negociación, *matching*, división justa y elección social. Los juegos no cooperativos se caracterizan por la competencia entre los jugadores, donde cada jugador actúa de manera independiente buscando su propio beneficio. En contraste, en los juegos cooperativos, los jugadores pueden colaborar y coordinarse para lograr acciones que aumenten la ganancia individual o colectiva. Este trabajo se enfoca en los juegos no cooperativos, y esta elección se justifica debido a la naturaleza de la situación en estudio, que involucra a jugadores que actúan de manera independiente y buscan maximizar su beneficio propio en un entorno competitivo. Por lo tanto, la comprensión y el análisis de los juegos no cooperativos resultan fundamentales para abordar eficazmente los objetivos del trabajo.

Sección 2.1.

Juegos no cooperativos

Como se mencionó previamente, los juegos no cooperativos se distinguen de los cooperativos por la ausencia de cooperación entre los jugadores, quienes toman decisiones de forma independiente y estratégica. Un juego no cooperativo es un modelo de competencia entre agentes individuales tomando decisiones. Los juegos no cooperativos más usuales son los juegos en forma normal, donde los jugadores eligen simultáneamente su estrategia, y los juegos en forma extensiva, donde podemos analizar dos formas de resolverlos; uno donde los jugadores no poseen información de las desiciones del otro jugador y eligen su estrategia de forma alternativa y otra donde los jugadores poseen información y las desiciones son secuenciales.

Definición 1: *Un juego en forma normal es una tripleta* $(N; S; u)$*, con* $N = \{1, 2, ..., n\}$ *el conjunto de jugadores,* $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ *el conjunto de perfiles de estrategias, donde* S_i *son las estrategias o acciones del jugador* $i \in N$*, y con* $u_i : S \to \mathbb{R}$ *la función de utilidad.*

Perfil de acciones $s = (s_1, s_2, ..., s_n) \in S$.

Perfil de utilidades $u(s) = (u_1(s), u_2(s), ..., u_n(s))$.

Un juego en forma normal está compuesto por tres elementos principales: jugadores, estrategias y utilidades. Cada jugador busca seleccionar una estrategia que maximice su propia utilidad, lo que puede tanto beneficiar como perjudicar a los demás participantes. Un ejemplo concreto es la "Batalla de los sexos", que ilustra este concepto. El juego en cuestión queda representado en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1: Batalla de los sexos

	F	B
F	2,1	0,0
B	0,0	1,2

Mario, el jugador 1, y María, jugador 2, deben elegir a qué espectáculo asistir un sábado por la noche. Se trata de un partido de fútbol o de un espectáculo de ballet, en donde, Mario prefiere el fútbol mientras que María el ballet. Ambos coinciden en que lo mejores ir juntos, aunque la elegida sea la diversión menos preferida. Esta situación puede plantearse como un juego en forma normal.

El juego en forma normal está formado por las estrategias de Mario y de María, en donde los renglones representan las decisiones que toma Mario y las columnas las decisiones de María. La primera entrada de la matriz corresponde a la utilidad de la respectiva decisión que tome Mario y la segunda es la utilidad que le corresponde a María según su decisión. Estas utilidades pueden tomar valores de 2,1 y 0 respectivamente, la utilidad de 2 se da cuando asisten a su lugar preferido y van juntos, la de 1 se da cuando asisten juntos pero no a su lugar preferido y la utilidad de 0 se da cuando asisten a distintos lugares.

Analizando primero las estrategias de Mario, se puede observar que es preferida la estrategia F a la estrategia B; siempre y cuando María elija la estrategia F, ya que la decisión de tomar esa estrategia para Mario le da una utilidad de 2; también se puede observar que la estrategia B será preferida sobre la F siempre y cuando María tome la estrategia B dándole una utilidad a Mario de 1, ya que si Mario escoge la F recibirá una utilidad de 0.

Para María, se puede observar que es preferida la estrategia B a la estrategia F, siempre y cuando Mario elija la estrategia B, ya que la decisión de tomar esa estrategia para María le da una utilidad de 2; también se puede observar que la estrategia F será preferida sobre la B siempre y cuando Mario tome la estrategia B. Por lo tanto, podemos observar cuál estrategia es la preferida por los jugadores. En este ejemplo se puede observar cómo las decisiones de los jugadores afectan directamente en los resultados del juego.

Los elementos de este juego representados por la tripleta $(N; S; u)$ son:

$N = \{1, 2\}$ el conjunto de jugadores.

$S = \{(F, F), (F, B), (B, F), (B, B)\}$ el conjunto de acciones.

$S_1 = S_2 = \{(F), (B)\}$, siendo las acciones por jugador.

La utilidad para la estrategia $s = (F, F)$ es $u(s) = (2, 1)$ y de esta misma manera se obtiene para las demás estrategias.

Sin embargo, para completar la comprensión de un juego, es fundamental abordar cómo se resuelve o cuál es su solución. En este sentido, el concepto clave es el equilibrio, donde cada jugador elige la estrategia óptima dada la elección de estrategias de los demás participantes, sin que ninguno tenga incentivos para cambiar su decisión unilateralmente.

Definición 2: *Un vector de estrategias $s^* \in S$ es un equilibrio en estrategias puras si se cumple:*

$$u_i(s^*) \geq u_i(s_i; s^*_{-i}), \forall s_i \in S_i, \forall i \in N$$

$(s_i; s^*_{-i})$ representa aquella situación donde todos los jugadores aplican la estrategia s^* y el jugador i implementa $s_i \in S_i$.

Es importante distinguir entre dos tipos de estrategias que permiten resolver juegos: las estrategias puras y las estrategias mixtas. Bajo el equilibrio de Nash, que fue propuesto por John Nash (1950), se establece que en todo juego con un número finito de estrategias, siempre existe al menos un equilibrio. Sin embargo, este equilibrio puede ser en estrategias mixtas, ya que no siempre existe en estrategias puras.

Definición 3: *Una estrategia mixta del jugador $i \in N$ es una distribución de probabilidad sobre su conjunto de estrategias S_i. Al conjunto de estrategias mixtas del jugador i lo denotaremos como $\triangle_i$ y se define así:*

$$\triangle_i = \{\sigma_i : S_i \to [0,1] \mid \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1\}$$

Por lo tanto, $\sigma_i(s_i)$ representa la probabilidad de que el jugador i aplique la estrategia s_i. Para distinguir entre el conjunto de estrategias mixtas $\triangle_i$ y el conjunto de todas las estrategias S_i, a éste último lo denominaremos estrategias puras.

Teorema 1 *(Nash, 1950) Todo juego en forma extensiva $n - personal$ tiene al menos un equilibrio en estrategias mixtas.*

El equilibrio de Nash es fundamental en la teoría de juegos, ya que representa una condición de racionalidad individual. Si una combinación de estrategias no constituye un equilibrio de Nash, al menos un jugador podría mejorar su utilidad cambiando su estrategia. Por lo tanto, el equilibrio de Nash se considera una solución del juego, ya que ningún jugador tiene incentivos para desviarse de él.

En conclusión, el equilibrio de Nash es un concepto esencial en la teoría de juegos, ya que proporciona un marco para analizar las decisiones estratégicas de los jugadores y predecir los resultados en situaciones de conflicto. Su relevancia radica en su capacidad para modelar el comportamiento racional de los agentes en un contexto competitivo.

Sección 2.2.

Juegos bayesianos

En la teoría de juegos, un juego bayesiano es aquel en el cual la información sobre las características de los otros jugadores es incompleta. Esta idea fue desarrollada a partir de las contribuciones de John Harsanyi (1967), quien propuso un enfoque para modelar este tipo de juegos incorporando la noción de la naturaleza como un jugador en el juego. En un juego bayesiano, la naturaleza asigna una variable aleatoria a cada jugador, la cual puede tomar valores de acuerdo a un conjunto de tipos el cual representa las posibles características de los jugadores. Además, se asocian funciones de distribución junto con las probabilidades asociadas o una función de densidad de probabilidad. Durante el transcurso del juego, la naturaleza elige aleatoriamente un tipo para cada jugador de acuerdo con la distribución de probabilidad conjunta sobre el espacio de características de jugador.

Harsanyi introdujo un enfoque que permite que los juegos bayesianos se modelen de tal manera que los juegos de información incompleta se conviertan en juegos de información imperfecta, donde la historia del juego no está disponible para todos los jugadores. Esto significa que al menos un jugador no está seguro del tipo del otro jugador, lo que contribuye a la incompletitud de la información en el juego.

Los juegos Bayesianos se caracterizan por el análisis probabilístico inherente en el juego. Los jugadores inicialmente tienen creencias sobre el tipo de cada jugador, expresadas como distribuciones de probabilidad sobre los tipos posibles de un jugador. Estas creencias pueden actualizarse durante el juego según la regla de Bayes, es decir, la creencia de un jugador sobre el tipo de otro jugador puede cambiar en función de las acciones que se llevan a cabo en el juego.

Definición 4: *Un juego bayesiano está formado por:*

$$G = \langle N, \Omega, \langle A_i, u_i, T_i, \tau_i, p_i, C_i \rangle_{i \in N} \rangle$$

donde:

Un conjunto de agentes $N = \{1, 2, ..., n\}$.

Un conjunto de estados de la naturaleza $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m\}$.

A_i es el conjunto de acciones para el jugador i.

Sea $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.

T_i es el tipo del jugador i, decidido por la función $\tau_i : \Omega \to T_i$.

$C_i \subseteq A_i \times T_i$ define las acciones disponibles para el jugador i de algún tipo T_i.

$u_i : \Omega \times A \to \mathbb{R}$ es la función de utilidad. Más formalmente, sea:

$$L = \{(\omega, a_1, ..., a_N) | \omega \in \Omega, \forall_i, (a_i, \tau_i(\omega)) \in C_i\}, \text{y } u_i : L \to \mathbb{R}.$$

p_i es la distribución de probabilidad sobre Ω para cada jugador i.

La idea que se utiliza para solucionar estos juegos es el de Equilibrio Bayesiano de Nash (EBN), que es similar al Equilibrio de Nash pero existe una diferencia acerca de lo que definiría una estrategia al tratarse de juegos con información incompleta. Las estrategias tienen que incluir todas las acciones posibles que haría el jugador y tiene que depender del tipo de jugador que es cada jugador.

Para clarificar un poco más la idea de los juegos bayesianos, consideremos el siguiente ejemplo donde suponemos una variante del juego mostrado en la sección anterior:

- El jugador 1 no está seguro de que la jugadora 2 prefiera salir con él o evitarlo.

- Con probabilidad 1/2 la jugadora 2 quiere salir con el, mientras que con probabilidad 1/2 quiere evitarlo (quizá porque estudió comportamientos anteriores de esta persona).

• Es decir, siguiendo las tablas 2.2 y 2.3, él piensa que con igual probabilidad está en un juego como el de la tabla 2.2 o como el de la tabla 2.3.

Tabla 2.2: Quiere salir con él

	F	B
F	2,1	0,0
B	0,0	1,2

Tabla 2.3: No quiere salir con él

	F	B
F	2,0	0,2
B	0,1	1,0

Por tanto:

• Un conjunto de agentes $N = \{1, 2\}$.

• Un conjunto de estados de la naturaleza $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.

• Un conjunto de acciones $A_1 = \{F, B\}$ y $A_2 = \{FF, FB, BB, BF\}$.

• Las utilidades están dadas por:

Utilidad del jugador 1	Utilidad del jugador 2
$u_1(F, FF) = 2$	$u_2(F, FF) = 1/2$
$u_1(F, BB) = 0$	$u_2(B, FF) = 1/2$
$u_1(B, FF) = 0$	$u_2(F, BB) = 1$
$u_1(F, FB) = 1$	$u_1(B, BB) = 1$
$u_1(F, BF) = 1$	$u_2(B, FB) = 0$
$u_1(B, BB) = 1$	$u_2(F, BF) = 0$
$u_1(B, BF) = 1/2$	$u_2(F, FB) = 3/2$
$u_1(B, FB) = 1/2$	$u_2(B, BF) = 3/2$

Nótese que las utilidades son ahora utilidades esperadas.

Transformamos nuestro juego en un juego en forma normal:

Tabla 2.4: Utilidades esperadas

	FF	FB	BB	BF
F	2,1/2	1,3/2	0,1	1,0
B	0,1/2	1/2,0	1,1	1/2,3/2

Solución:

• Si el jugador 1 juega F, entonces la jugadora 2 juega FB; si la jugadora 2 juega FB, el jugador 1 juega F.

• El $EBN = (F, FB)$, el jugador 1 propone futbol, y la jugadora 2 propone futbol si quiere conocerlo y ballet si no quiere conocerlo.

La falta de información y el modelado de las creencias en manos de los jugadores hacen que los juegos bayesianos sean útiles para analizar escenarios de información imperfecta. Por lo tanto, estos juegos no solo capturan la incompletitud de la información, sino que también permiten estudiar cómo las creencias de los jugadores evolucionan a lo largo del juego en respuesta a las acciones observadas. En resumen, los juegos bayesianos constituyen un marco valioso para explorar situaciones donde la información es incompleta y las creencias de los jugadores son fundamentales para la toma de decisiones estratégicas.

Sección 2.3.

Subastas

Las subastas representan una de las aplicaciones más relevantes de la teoría de juegos, y su importancia ha aumentado significativamente en las últimas décadas, siendo utilizadas en una amplia variedad de contextos para la compra y venta de diversos bienes. Desde la antigüedad, las subastas han sido utilizadas para la venta de diferentes objetos, y en la actualidad, algunos de los mercados más importantes del mundo se estructuran como subastas.

En general, la esencia de una subasta radica en la asignación de un bien a aquel individuo que esté dispuesto a pagar el precio más alto, reflejado a través de las pujas realizadas por los compradores. Las subastas se utilizan particularmente cuando el vendedor no conoce la valoración que los compradores tienen por el objeto en subasta. Por lo tanto, una subasta puede definirse como un juego en el cual los compradores compiten mediante pujas para adquirir un bien, y el resultado del juego se determina por la información contenida en dichas pujas.

Las subastas se rigen por reglas que determinan quién será el ganador y cuál será el precio a pagar, caracterizadas por la presencia de información asimétrica entre los participantes. El objetivo de las subastas es lograr eficiencia en la asignación de recursos y extender el mercado. McAfee y McMillan (1987) definen las subastas como instituciones de mercado que establecen reglas explícitas para determinar la asignación de recursos y los precios basándose en las pujas realizadas por los participantes.

Existen varios tipos de subastas, cada una con sus propias características y mecanismos de funcionamiento. Dentro de las subastas de un solo bien, se distinguen la subasta ascendente o inglesa, la subasta holandesa o descendente, las subastas con sobre cerrado al primer precio y al segundo precio (también conocida como subasta de Vickrey). Estos tipos de subastas varían en la forma en que se establecen y revelan las pujas de los participantes, así como en la determinación del ganador y el precio a pagar.

2.3.1 Subastas de un solo bien

Se va a subastar sólo un objeto. Desde el trabajo de Vickrey (1961) se consideran cuatro tipos de subastas básicos.

- Subasta ascendente o inglesa.

Es el tipo de subasta que más se utiliza. El subastador comienza solicitando un precio muy bajo, a partir del cual los compradores pueden hacer pujas más altas. La subasta finaliza cuando hay un comprador que tiene una puja que nadie está dispuesto a superar, entonces, el comprador obtiene el objeto y paga el precio que ha pujado. El precio va aumentando sucesivamente hasta que solo queda un comprador, que será el que adquiera el bien al precio final. Los compradores pueden mostrar las pujas que quieran con la única condición de superar a la puja más alta en ese momento. Los que participan en la subasta observan las demás pujas y deciden si aumentan su oferta o no. Los compradores saben en todo momento el nivel actual de la puja máxima.

- Subasta holandesa o subasta descendente.

El subastador empieza solicitando un precio muy alto y la cantidad mínima a la que está dispuesto a vender el bien, y luego va bajando el precio hasta que algún comprador esté de acuerdo con el precio y decida hacer la compra, o hasta que llegue al precio de reserva, es decir, el mínimo que el oferente está dispuesto a aceptar. Este tipo de subasta se comenzó a usar tradicionalmente para la venta de flores en Holanda. Lo ideal en este tipo de subastas es que el vendedor obtenga el mayor precio posible. Este tipo de subastas son convenientes cuando se necesita vender la mercancía o el bien rápidamente, ya que no requiere varias pujas entre los distintos participantes de la subasta.

- Subastas con sobre cerrado al primer precio.

El ganador va a pagar la cantidad que previamente puja. Los compradores van a mostrar las pujas en sobre cerrado, el bien se concede al mejor postor y el precio va a corresponder con la mejor puja. En el momento de mostrar las pujas, los compradores no conocen cuáles son las pujas de los demás, y cada jugador podrá realizar una única puja, con diferencia a los otros tipos de subastas.

- Subastas con sobre cerrado al segundo precio. (o subasta de Vickrey).

El ganador paga la segunda puja más alta entre las distintas pujas. Similar a la subasta con sobre cerrado al primer precio pero diferenciándose en que el precio a pagar no sería la puja del ganador, sino que será igual a la segunda puja más alta mostrada. El comprador conoce que en caso de que gane, los precios no se van a alterar.

En conclusión, las subastas representan un campo de estudio importante en la teoría de juegos, ofreciendo un marco analítico para comprender la competencia entre compradores y la asignación eficiente de recursos en diversos contextos de mercado. La variedad de tipos de subastas y sus diferentes características proporcionan a los participantes opciones estratégicas para maximizar sus beneficios o adquirir los bienes deseados al mejor precio posible.

CAPÍTULO 3

Modelo

La idea principal de la investigación es la creación y estudio de un modelo matemático que permita describir un fenómeno real, que presenta similitudes con el funcionamiento de una subasta. Este fenómeno se centra en la existencia de una cola, y las estrategias que los individuos utilizan para intentar obtener un lugar dentro de ella. Para abordar este análisis, se recurre a la teoría de juegos cómo herramienta analítica.

En secciones anteriores observamos como existen estudios de fenómenos similares donde los autores han tratado el problema como negociación de posiciones de espera en una cola. En estos casos, los individuos que ocupan un lugar en la cola no abandonan ésta y son compensados por aquellos que entran en ella. Sin embargo, en nuestro modelo y sus variaciones, las personas que ceden su lugar deben abandonar la cola.

Esta diferencia fundamental en la dinámica de la cola tiene implicaciones significativas en el comportamiento estratégico de los individuos involucrados. Mientras que en el caso de la compensación por entrar en la cola, los participantes pueden tener incentivos para permanecer en ella y esperar su turno, en nuestro modelo donde los individuos deben abandonar la cola al ceder su lugar, se introduce una dinámica competitiva diferente.

Al abordar este fenómeno como un problema de teoría de juegos, se busca comprender y predecir el comportamiento estratégico de los individuos en este contexto particular. Se espera que el modelo matemático desarrollado permita analizar diferentes estrategias y escenarios, así como evaluar el impacto de políticas o intervenciones diseñadas para mejorar la eficiencia y equidad en la asignación de lugares en la cola.

En resumen, la investigación se centra en la creación y estudio de un modelo matemático que describa el comportamiento estratégico de individuos en un fenómeno real relacionado con la formación y gestión de una cola, utilizando la teoría de juegos cómo marco analítico. La diferencia fundamental con los enfoques anteriores en la literatura radica en la dinámica competitiva introducida por la necesidad de abandonar la cola al ceder un lugar, lo que implica la exploración de nuevas estrategias y resultados en este contexto específico.

Este modelo de forma general está compuesto por dos conjuntos de jugadores que buscan interactuar entre sí. Los jugadores dentro de la cola estarán representados por el conjunto $M = \{1, 2, ..., m\}$, siendo m el número de jugadores dentro de la cola y los jugadores fuera de la cola estarán representados por el conjunto $N = \{1, 2, ..., n\}$ siendo n el número de jugadores que quieren un lugar en la cola. Dado que la situación que pretendemos representar está enmarcada en el proceso de pertenecer a cierto lugar dentro de una cola, entonces, el tiempo de espera que tarda un jugador dentro de la cola es una variable necesaria en el modelo, dado que el tiempo influye directamente en la utilidad de los jugadores se necesita una variable que represente el valor monetario del tiempo, por lo que incluimos dicha variable como $t_i \in \mathbb{R}_{++}$, con $i \in N$.

Introducimos un término δ que nos permita depreciar la utilidad de los jugadores en la cola a medida que se alejen del primer lugar, siendo $\delta \in (0, 1)$ el valor de depreciación de los jugadores en la cola y tiene sentido considerar que este factor es el mismo para todos los jugadores dado que está en función de las posiciones, y el verdadero valor de depreciación individual depende de esté y del tiempo de cada jugador. Los jugadores fuera de la cola cuentan con un interés de acceder a la misma. Dicho interés puede tener distintas causas: para este trabajo se asume que el interés estará representado por V_i, la valoración que los jugadores fuera de la cola le dan a estar dentro de la misma, y se asume que ésta se comporta como una variable aleatoria con soporte en $[0, \overline{V}]$ siendo $\overline{V}$ la máxima valoración posible. Para que los jugadores que están fuera de la cola logren un lugar en la misma deben de convencer a los jugadores que están dentro mediante una puja y ésta estará denotada por $b(x)$, una función que representa la puja.

La utilidad del jugador i de estar en el lugar j de la cola depende de cuánto valore estar en la misma una vez que realice su puja y se descuente el valor que le da al tiempo transcurrido en ella. A su vez, la utilidad de estar en un lugar específico de la cola se obtiene según el valor de depreciación que le coresponda a cada lugar en la cola multiplicado por la utilidad de estar en la misma.

Utilidad:

$$U_{ij}(x) = \delta^{j-1}(V_i - b(x) - t_i) \tag{3.1}$$

Con $i = 1, 2, ..., n$ y $j = 1, 2, ..., m$.

Se está considerando que los jugadores establecen su puja de acuerdo con un valor intrínseco y personal, por lo que la función anterior denotaría la utilidad del agente i por estar en la posición j cuando puja de acuerdo con un criterio x. A continuación, procedemos a realizar transformaciones del modelo general.

Sección 3.1.

Caso $n = 2, m = 2$

Este es un caso reducido del modelo general, en el cual existen dos personas dentro de la cola y dos fuera de ella que intentan obtener un lugar en la misma. El objetivo de modelar esta situación es analizar como los jugadores, dentro y fuera de la cola, toman desiciones basandose en sus intereses. Para ello se presentarán las bases del modelo reducido, en donde, se mostrarán las distintas variables que interactuan en el mismo, así como su comportamiento.

Los conjuntos de jugadores que interactuan en el juego son los siguientes, siendo M las personas dentro de la cola y N los que estan fuera de la misma, $M = \{1, 2\}$ y $N = \{1, 2\}$. A su vez, suponemos que el valor monetario del tiempo de espera t es conocido e igual para todos (esto facilita el análisis y tiene sentido cuando se tienen colas donde los jugadores que quieren entrar a la misma realizan el mismo trámite, por ejemplo, comprar un único boleto para un concierto, ponerse una vacuna o recoger una despensa, por mencionar algunos). Se toma en cuenta que si un jugador cede su lugar o un jugador realiza una oferta y es rechazada, entonces abandona la cola, esto es, la cola no tiene lugares adicionales disponibles y no puede crecer. Aplicable en situaciones donde se tiene un limitado número de trámites que pueden realizarse, como en la vacunación individual (se tiene un número disponible de vacunas y por lo tanto de lugares posibles).

Asumimos que la puja será una función creciente (dado que es natural considerar que mientras mayor sea el criterio en el que se basa la puja, como por ejemplo la valoración del bien, más alta será la puja ofrecida) y derivable (por el hecho de evitar que la función tenga comportamientos como cambios bruscos en las preferencias o discontinuidades en las mismas), y estará denotada por b. De igual forma y como mencionamos en el modelo general, asumimos que la puja de los jugadores fuera de la cola está en función de una variable intrínseca (los jugadores pueden llegar a pujar en función de infinidad de criterios) y a esta se le denotará por x. Las valoraciones de los jugadores fuera de la cola son V_1, V_2, las cuales denotarán variables aleatorias con la misma distribución y soporte en $[0, \overline{V}]$ siendo $\overline{V}$ la máxima valoración posible y se representarán por V. Se asume que para los jugadores que están dentro de la cola existe una utilidad máxima $\bar{u}$ y $u_j \sim U(0, \bar{u})$ (dado que no se conoce su comportamiento se asume que existe la misma probabilidad de ocurrencia para cada posible opción, que es lo mismo que asumir que no se tiene información a priori sobre los sujetos dentro de la cola), además que de los jugadores que estén fuera de la cola solo pueden aceptar a uno, el que realice la mayor oferta.

Dados los supuestos anteriores podemos construir las siguientes funciones de utilidad de los jugadores fuera de la cola:

$$U_1(x) = p_1(V_1 - b(x) - t) + p_2(\delta(V_1 - b(x) - t)) \tag{3.2}$$

$$U_2(y) = p_3(V_2 - b(y) - t) + p_4(\delta(V_2 - b(y) - t)) \tag{3.3}$$

Donde p_r es la probabilidad de que a los jugadores fuera de la cola los acepten en uno de los lugares de la misma y $r = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Consideraremos que cada jugador asume que su contrincante pujará en función de su propia valoración, y en parte tiene sentido por la falta de información sobre el contrincante. Con ello, nos enfocaremos a encontrar como debe pujar el jugador tomando en cuenta este supuesto de su contrincante. Con ello, las probabilidades se construyen a continuación:

- p_1 es la probabilidad de que a n_1 lo acepten en m_1 y que $b(x) > b(V_2)$. Debido a que b es una funcion creciente, y asumiendo que u_1 y V_2 son independientes, ya que no se conocen entre los jugadores:

$$\begin{aligned} p_1 &= P(b(x) > u_1, b(x) > b(V_2)) \\ p_1 &= P(b(x) > u_1, x > V_2) \\ p_1 &= P(u_1 < b(x))P(V_2 < x) \\ p_1 &= F_u(b(x))F_V(x) \end{aligned} \tag{3.4}$$

- p_2 es la probabilidad de que a n_1 lo acepten en m_2, que a n_1 no lo acepten en m_1 y que $b(x) > b(V_2)$. Debido a que b es una funcion creciente, y suponiendo que u_1, u_2 y V_2 son independientes, dado que no se conocen entre ellos:

$$\begin{aligned} p_2 &= P(b(x) < u_1, \delta b(x) > u_2, b(x) > b(V_2)) \\ p_2 &= P(b(x) < u_1, \delta b(x) > u_2, x > V_2) \\ p_2 &= P(u_1 > b(x))P(u_2 < \delta b(x))P(V_2 < x) \\ p_2 &= (1 - F_u(b(x)))(F_u(\delta b(x)))F_V(x) \end{aligned} \tag{3.5}$$

- p_3 es la probabilidad de que a n_2 lo acepten en m_1 y que $b(y) < b(V_1)$. Debido a que b es una funcion creciente, y suponiendo que u_1 y V_1 son independientes, dado que no se conocen entre ellos:

$$\begin{aligned} p_3 &= P(b(y) > u_1, b(y) > b(V_1)) \\ p_3 &= P(b(y) > u_1, y > V_1) \\ p_3 &= P(u_1 < b(y))P(V_1 < y) \\ p_3 &= F_u(b(y))F_V(y) \end{aligned} \tag{3.6}$$

- p_4 es la probabilidad de que a n_2 lo acepten en m_2 y que $b(y) > b(V_1)$. Debido a que b es una funcion creciente, y suponiendo que u_1, u_2 y V_1 son independientes, dado que no se conocen entre ellos:

$$\begin{aligned} p_4 &= P(b(y) < u_1, \delta b(y) > u_2, b(y) > b(V_1)) \\ p_4 &= P(b(y) < u_1, \delta b(y) > u_2, y > V_1) \\ p_4 &= P(u_1 > b(y))P(u_2 < \delta b(y))P(V_1 < y) \\ p_4 &= (1 - P(u_1 < b(y)))P(u_2 < \delta b(y))P(V_1 < y) \\ p_4 &= (1 - F_u(b(y)))(F_u(\delta b(y)))F_V(y) \end{aligned} \tag{3.7}$$

- p_5 es la probabilidad de que no acepten a ninguno de los dos.

$$p_5 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 \tag{3.8}$$

Una vez determinada las probabilidades podemos dar paso a la construcción del modelo y a la búsquedad de los equilibrios. Sin pérdida de generalidad podemos realizar el análisis tomando en cuenta solo a uno de los jugadores:

$$\begin{aligned} U_1(x) &= F_u(b(x))F_V(x)(V_1 - b(x) - t) + \\ &\quad ((1 - F_u(b(x)))(F_u(\delta b(x)))F_V(x))(\delta(V_1 - b(x) - t)) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Nótese que la ecuación (3.9) es la utilidad esperada del jugador 1 bajo todos los supuestos mencionados anteriormente cuando puja de acuerdo a un criterio x.

El primer paso en la búsqueda de equilibrios es optimizar las funciones de utilidad, a través de obtener las condiciones de primer orden para encontrar la forma de la puja de mejor respuesta para el jugador 1.

Derivando:

$$\begin{aligned} U_1'(x) &= (V_1 - b(x) - t)(b'(x)f_u(b(x))F_V(x) + F_u(b(x))f_V(x)) - b'(x)(F_u(b(x))F_V(x)) \\ &\quad +(\delta(V_1 - b(x) - t))(\delta b'(x)f_u(\delta b(x)F_V(x) + f_V(x)F_u(\delta b(x))(1 - F_u(b(x))) \\ &\quad -b'(x)f_u(b(x))F_u(\delta b(x)F_V(x))) - \delta b'(x)((1 - F_u(b(x)))(F_u(\delta b(x)))F_V(x)) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Dado que en los supuestos del modelo asumimos que la utilidad de los jugadores dentro de la cola tiene una distribución uniforme, entonces podemos determinar las funciones de densidad y distribución de u_j:

$$f_u(x) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{u}} & \text{si } x \in [0, \overline{u}] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{3.11}$$

$$F_u(x) = \int_0^x \frac{1}{\bar{u}} dt = \frac{x}{\bar{u}} \tag{3.12}$$

Dado que estamos asumiendo jugadores simétricos (o sea, que tienen el mismo nivel de información respecto al juego y respecto a sus contrincantes, mismo comportamiento genérico y buscan los mismos objetivos), la forma de la puja en el equilibrio debe ser simétrica. Como asumimos que el jugador 2 puja de acuerdo con su valoración, sustituiremos el criterio $x = V_1$ para igualar el comportamiento entre ellos.

Entonces podemos decir que:

$$\begin{aligned} &(V_1 - t)(\frac{b'(V_1)}{\bar{u}}F_V(V_1) + \frac{b(V_1)}{\bar{u}}f_V(V_1)) + (\delta(V_1 - t))(\frac{\delta b'(V_1)}{\bar{u}}F_V(V_1) + \\ &\frac{f_V(V_1)\delta b(V_1)}{\bar{u}})(1 - \frac{b(V_1)}{\bar{u}}) - \frac{\delta b(V_1)b'(V_1)F_V(V_1)}{\bar{u}^2}) \\ = \; &\frac{d(\frac{b(V_1)^2 F_V(V_1)}{\bar{u}})}{dV_1} + \frac{d(\frac{\delta^2 b(V_1)^2 F_V(V_1)}{\bar{u}}(1 - \frac{b(V_1)}{\bar{u}}))}{dV_1} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Nótese que los términos multiplicados por $(V_i - \alpha t)$ y por $(\delta(V_i - \alpha t))$ se pueden descomponer en derivadas:

$$
\begin{aligned}
& (V_1 - t)\frac{d(\frac{b(V_1)F_V(V_1)}{\bar{u}})}{dV_1} + (\delta(V_1 - t))\frac{d(\frac{\delta b(V_1)F_V(V_1)(1-\frac{b(V_1)}{\bar{u}})}{\bar{u}})}{dV_1} \\
= \quad & \frac{d(\frac{b(V_1)^2F_V(V_1)}{\bar{u}})}{dV_1} + \frac{d(\frac{\delta^2 b(V_1)^2F_V(V_1)}{\bar{u}}(1-\frac{b(V_1)}{\bar{u}}))}{dV_1} \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

Dándonos como resultado la siguiente ecuación diferencial:

$$
\begin{aligned}
& (V_1 - t)\frac{d(\frac{b(V_1)F_V(V_1)}{\bar{u}} + \frac{\delta^2 b(V_1)F_V(V_1)(1-\frac{b(V_1)}{\bar{u}})}{\bar{u}})}{dV_1} \\
= \quad & \frac{d(\frac{b(V_1)^2F_V(V_1)}{\bar{u}} + \frac{\delta^2 b(V_1)^2F_V(V_1)}{\bar{u}}(1-\frac{b(V_1)}{\bar{u}}))}{dV_1} \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

Nótese que la puja $b(V_1) = 0$ satisface la Ecuación 3.15, lo cual es un resultado un tanto desalentador porque indica que pujar cero es mejor respuesta para el jugador 1.

También pueden existir otros equilibrios, los cuales no conocemos dada la complejidad de resolver la ecuación diferencial mostrada anteriormente.

Sección 3.2.

Caso $N = \{2, 3, ..., n\}$,$m = 2$

Dado los resultados anteriores, ahora procedemos a realizar cambios en nuestro modelo con el objetivo de extraer conclusiones sobre las interacciones de los jugadores. Al igual que en el caso anterior, en éste, intentamos determinar la forma de la puja de los jugadores fuera de la cola para que puedan obtener un lugar en la misma. Para ello, reformularemos los supuestos del modelo, aplicando cambios importantes como la cantidad de jugadores que participarán, el tiempo de espera y las probabilidades. De esta forma damos paso a formular los nuevos supuestos.

Los conjuntos de jugadores que interactuan en el juego son los siguientes, siendo M los jugadores dentro de la cola y N los que estan fuera de la misma, $M = \{1, 2\}$ y $N = \{2, ..., n\}$. Los jugadores dentro de la cola están dispuestas a dar su lugar ante cualquier oferta (aceptando la mayor, en caso de recibir varias. O sea, estamos modelando ahora una situación donde los que se formaron en la cola no están interesados en realizar el trámite o proceso de la misma, sino que sólo están interesados en vender su lugar. Este comportamiento suele observarse cada vez más frecuentemente como en reventas de conciertos, eventos deportivos, etc.), por lo que no tomaremos en cuenta su utilidad y suponemos que los tiempos de espera no tienen relevancia en este caso. Se toma en cuenta que si un jugador cede su lugar o un jugador realiza una oferta y es rechazada, entonces abandona la cola.

Asumimos que la forma de la puja será una función creciente y derivable, y estará denotada por b. De igual forma, asumimos que la puja de los jugadores fuera de la cola está en función de una variable intrínseca , a ésta se le denotará por x. Las valoraciones de los sujetos fuera de la cola son V_i con $i = \{2, ..., n\}$, las cuales denotarán variables aleatorias con la misma distribución y soporte en $[0, \overline{V}]$ siendo $\overline{V}$ la máxima valoración posible y se representarán por V. Las justificaciones de los supuestos en esta modificación del modelo puede consultarse en la sección del primer modelo.

Dado el cambio en los supuestos del modelo, también cambian las probabilidades de ocurrencia en cada caso, estas son:

• p_1 es la probabilidad de que a n_1 lo acepten en m_1, dado que la puja $b(x)$ es mayor a todas las demas. Dado que b es una funcion creciente, y asumiendo que las pujas que hacen los jugadores fuera de la cola son independientes entre sí, ya que no se conocen.

$$\begin{aligned} p_1 &= P(b(x) > b(V_2), b(x) > b(V_3), ..., b(x) > b(V_n)) \\ p_1 &= P(x > V_2, x > V_3, ..., x > V_n) \\ p_1 &= P(x > V_2)P(x > V_3)...P(x > V_n) \\ p_1 &= F_V(x)^{n-1} \end{aligned} \tag{3.16}$$

• p_2 es la probabilidad de que a n_1 lo acepten en m_2, dado que la puja $b(x)$ es mayor a todos los demas excepto a una. Asumiendo que las pujas que hacen los jugadores fuera de la cola son independiente entre sí, ya que no se conocen.

$$\begin{aligned} p_2 &= P(x > V)^{n-2}P(x < V) \\ p_2 &= (n-1)F_V(x)^{n-2}(1 - F_V(x)) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Nótese que, al igual que en el caso anterior, estamos suponiendo que cada jugador asume que sus contrincantes pujarán de acuerdo a su valoración. La justificación es la misma que en ese caso. Una vez determinadas las probabilidades podemos dar paso a la construcción del modelo y a la búsqueda de equilibrios bajo el procedimiento y supuestos explicados en el caso del modelo anterior:

$$U_1(x) = (V_1 - b(x))F_V(x)^{n-1} + \delta(V_1 - b(x))(n-1)F_V(x)^{n-2}(1 - F_V(x)) \tag{3.18}$$

Nuevamente procedemos a encontrar la forma funcional de la puja que sea mejor respuesta a la forma de pujar de los adversarios:

$$\begin{aligned} U_1'(x) &= (V_1 - b(x))(n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x) - b'(x)F_V(x)^{n-1} \\ &\quad +\delta(V_1 - b(x))(n-1)[(n-2)F_V(x)^{n-3}f_V(x) \\ &\quad -(n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x)] - \delta b'(x)((n-1)F_V(x)^{n-2}(1 - F_V(x))) \\ &= 0 \\ U_1'(x) &= (V_1 - b(x))[(n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x) + \delta(n-1)[(n-2)F_V(x)^{n-3}f_V(x) \\ &\quad -(n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x)]] - b'(x)[F_V(x)^{n-1} \\ &\quad +\delta((n-1)F_V(x)^{n-2}(1 - F_V(x)))] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Reacomodando términos de la ecuación anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} & V_1[(n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x) \\ & +\delta(n-1)[(n-2)F_V(x)^{n-3}f_V(x)-(n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x)]] \\ = \; & b(x)(n-1)[F_V(x)^{n-2}f_V(x) \\ & +\delta[(n-2)F_V(x)^{n-3}f_V(x)-(n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x)]] \\ & +b'(x)[F_V(x)^{n-1}+\delta((n-1)F_V(x)^{n-2}(1-F_V(x)))] \end{aligned} \tag{3.20}$$

Por las mismas razones referentes a la simetría de los jugadores explicadas en el caso general, sustituiremos $x = V_1$ y procederemos a encontrar la forma funcional de la puja cuando ésta se hace tomando en cuenta la valoración.

Tenemos entonces la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} & V_1(n-1)[F_V(V_1)^{n-2}f_V(V_1)(1-\delta(n-1))+\delta(n-2)F_V(V_1)^{n-3}f_V(V_1)] \\ = \; & \frac{d(b(V_1)[F_V(V_1)^{n-1}+\delta(n-1)(F_V(V_1)^{n-2}-F_V(V_1)^{n-1})])}{dV_1} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Utilizando el teorema fundamental del cálculo, tenemos que:

$$\begin{aligned} & b(V_1)(F_V(V_1)^{n-1}+\delta(n-1)(F_V(V_1)^{n-2}-F_V(V_1)^{n-1}) \\ = \; & \int_0^{V_1}[x(n-1)[F_V(x)^{n-2}f_V(x)(1-\delta(n-1)) \\ & +\delta(n-2)F_V(x)^{n-3}f_V(x)]]dx+c \end{aligned} \tag{3.22}$$

En donde c es la constante de integración, dado que sabemos que cuando $V_1 = 0 \Rightarrow b(V_1) = 0$ podemos determinar que $c = 0$. Con ello, estamos en condiciones de citar nuestro primer resultado.

Teorema 2 *Para $M = \{1, 2\}$ jugadores dentro de una cola dispuestos a ceder su lugar y $N = \{2, 3, ..., n\}$ jugadores fuera de la cola con valoraciones V_i individuales y pujas independientes, la puja de equilibrio está dada por:*

$$b(V_i) = \begin{cases} \frac{\int_0^{V_i}[x(n-1)[F_V(x)^{n-3}f_V(x)(F_V(x)(1-\delta(n-1))+\delta(n-2))]]dx}{F_V(V_i)^{n-1}+\delta(n-1)(F_V(V_i)^{n-2}-F_V(V_i)^{n-1})} & si\ V_i \neq 0 \\ 0 & si\ V_i = 0 \end{cases}$$

Prueba:

En pasos anteriores se realizó constructivamente la búsqueda de la función de puja. Mostraremos que en realidad pujar de esta manera con respecto a la valoración es un máximo y que en efecto es una función contínua.

Por demostrar que $b(V_i)$ es continua.

El resultado de operaciones de suma, multiplicación y división de funciones continuas es una función continua, siempre que en el caso de las divisiones el denominador sea diferente de cero.

Por ello, para el caso cuando $b(V_i) > 0$, demostraremos que:

$$\int_0^{V_i} [x(n-1)[F_V(x)^{n-3} f_V(x)(F_V(x)(1-\delta(n-1)) + \delta(n-2))]]dx > 0$$

y

$$F_V(V_i)^{n-1} + \delta(n-1)(F_V(V_i)^{n-2} - F_V(V_i)^{n-1}) > 0$$

Para el caso de la primera de las condiciones anteriores, bastará con demostrar que:

$$F_V(x)(1-\delta(n-1)) + \delta(n-2) > 0$$

$$\Rightarrow F_V(x) + \delta[(n-2) - (n-1)F_V(x)] > 0; \forall n > 2, \delta \in (0,1)$$

Denótese $y = F_V(x)$ y entonces $g(y) = y + \delta[(n-2) - y(n-1)]$.Procederemos a demostrar que $g(y) > 0$ cuando $y \in [0,1]$.

Nótese que $g(y)$ es una función lineal en y. Verificando el valor de la función $g(y)$ en los extremos del intervalo:

$$g(0) = \delta(n-2) > 0$$

y

$$g(1) = 1 - \delta > 0$$

Entonces, como g es una función lineal en $[0,1]$ con $g(0) > 0$ y $g(1) > 0$, entonces $g(y) > 0$ para todo $y \in [0,1]$.

Ahora en $n = 2$ tenemos que:

$$(n-1)F_V(x)^{n-2} f_V(x) + \delta(n-1)[(n-2)F_V(x)^{n-3} f_V(x) - (n-1)F_V(x)^{n-2} f_V(x)] > 0$$

$$\Rightarrow F_V(x)^{n-2} f_V(x) - \delta F_V(x)^{n-2} f_V(x) > 0$$

Demostrando así que el numerador será distinto de cero siempre.

Para la segunda condición referida en la prueba de la continuidad, demostraremos primeramente que $F_V(V_i)^{n-1} + \delta(n-1)(F_V(V_i)^{n-2} - F_V(V_i)^{n-1}) > 0$ cuando $V_i > 0$

La expresión anterior puede escribirse como:

$$F_V(V_i)^{n-2}(\delta(n-1) + F_V(V_i)(1-\delta(n-1))) > 0$$

Nótese que $F_V(V_i)^{n-2}$ siempre es mayor a cero cuando $Vi > 0$, por lo que basta checar que:

$$\delta(n-1) + F_V(V_i)(1 - \delta(n-1)) > 0$$

Defínase $y = F_V(V_i)$ y entonces $g(y) = \delta(n-1) + y(1 - \delta(n-1)) > 0$

Por Demostrar que $g(y) > 0$ cuando $y \in [0, 1]$

Nótese que $g(y)$ es una función lineal en y. Verificando el valor de la función $g(y)$ en los extremos del intervalo:

$$g(0) = \delta(n-1) > 0$$

y

$$g(1) = 1 > 0$$

Entonces, como g es una función lineal en $[0, 1]$ con $g(0) > 0$ y $g(1) > 0$, entonces $g(y) > 0$ para todo $y \in [0, 1]$.

Por lo que queda demostrado que $b(V_i) > 0$ es continua.

Ahora demostraremos que en $b(V_i) = 0$ el límite por la derecha existe y es igual a cero cuando $V_i = 0$.

Cuando $V_i > 0$ se tiene:

$$b(V_i) = \frac{\int_0^{V_i}[x(n-1)[F_V(x)^{n-3}f_V(x)(F_V(x)(1-\delta(n-1)) + \delta(n-2))]]dx}{F_V(V_i)^{n-1} + \delta(n-1)(F_V(V_i)^{n-2} - F_V(V_i)^{n-1})} \tag{3.23}$$

Nótese que como $x \in [0, V_i]$ entonces, podemos plantear la desigualdad siguiente:

$$\begin{aligned} b(V_i) &< \frac{\int_0^{V_i}[V(n-1)[F_V(x)^{n-3}f_V(x)(F_V(x)(1-\delta(n-1)) + \delta(n-2))]dx}{F_V(V_1)^{n-1} + \delta(n-1)(F_V(V_1)^{n-2} - F_V(V_1)^{n-1})} \\ b(V_i) &= \frac{V(1-\delta(n-1))\int_0^{V_i}[(n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x)dx + \delta(n-1)\int_0^{V_i}(n-2)F_V(x)^{n-3}f_V(x)dx]}{F_V(V_1)^{n-1} + \delta(n-1)(F_V(V_1)^{n-2} - F_V(V_1)^{n-1})} \end{aligned}$$

Por el teorema fundamental del cálculo tenemos:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \; b(V_i) < \frac{[(1-\delta(n-1))F_V(V_1)^{n-1} + \delta(n-1)F_V(V_1)^{n-2}]V}{(1-\delta(n-1))F_V(V_1)^{n-1} + \delta(n-1)F_V(V_1)^{n-2}} \\ &\Rightarrow \; b(V_i) < V \end{aligned}$$

Con ello termina la prueba de la continuidad por la derecha de $b(V_i)$ cuando $V_i = 0$ y por lo tanto, se verifica que la función puja obtenida en realidad es una función continua.

Por demostrar que $b(V_i)$ es un máximo.

Tomando la ecuación 3.19 :

$$\begin{aligned} U_i'(x) &= (V_i - b(x))[(n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x) + \delta(n-1)[(n-2)F_V(x)^{n-3}f_V(x) \\ &\quad -(n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x)]] - b'(x)[F_V(x)^{n-1} \\ &\quad +\delta((n-1)F_V(x)^{n-2}(1-F_V(x)))] \\ U_i'(x) &= V_i[(n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x) + \delta(n-1)[(n-2)F_V(x)^{n-3}f_V(x) \\ &\quad -(n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x)]] - b(x)[(n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x) \\ &\quad +\delta(n-1)[(n-2)F_V(x)^{n-3}f_V(x) - (n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x)]] \\ &\quad -b'(x)[F_V(x)^{n-1} + \delta((n-1)F_V(x)^{n-2}(1-F_V(x)))] \end{aligned}$$

Nótese que según la ecuación 3.21 tenemos que:

$$\begin{aligned} & V_i[(n-1)F_V(V_i)^{n-2}f_V(V_i)(1-\delta(n-1)) + \delta(n-2)F_V(V_i)^{n-3}f_V(V_i)] \\ = \; & \frac{d(b(V_i)[F_V(V_i)^{n-1} + \delta(n-1)(F_V(V_i)^{n-2} - F_V(V_i)^{n-1})])}{dV_i} \end{aligned}$$

Nótese que:

$$\begin{aligned} & b(x)[(n-1)F_V(x)^{(n-2)}f_V(x) + \delta(n-1)[(n-2)F_V(x)^{(n-3)}f_V(x) - (n-1)F_V(x)^{(n-2)}f_V(x)]] \\ & -b(x)[F_V(x)^{(n-1)} + \delta((n-1)F_V(x)^{(n-2)}(1-F_V(x)))] \\ = \; & \frac{d(b(x)[F_V(x)^{(n-1)} + \delta(n-1)(F_V(x)^{(n-2)} - F_V(x)^{(n-1)})])}{dx} \end{aligned}$$

Entonces podemos sustituir 3.21 en 3.19.

$$\begin{aligned} U_i'(x) &= (V_i - x)[(n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x) \\ &\quad +\delta(n-1)[(n-2)F_V(x)^{n-3}f_V(x) - (n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x)]] \end{aligned} \tag{3.24}$$

Por Demostrar que:

$$(n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x) + \delta(n-1)[(n-2)F_V(x)^{n-3}f_V(x) - (n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x)] > 0$$

$$\Rightarrow (n-1)F_V(x)^{n-3}f_V(x)[F_V(x) + \delta[(n-2) - (n-1)F_V(x)]] > 0$$

La prueba sigue la misma dirección y técnicas que cuando se demostró que el numerador de la puja es distinto de cero, por lo que omitimos ese procedimiento.

Ahora es fácil ver que si $x < V \Rightarrow U_i'(x) > 0$ y si $x > V \Rightarrow U_i'(x) < 0$, por tanto concluimos que cuando en nuestro modelo el criterio utilizado es justamente la valoración $(x = V_i)$, en efecto se maximiza la función de utilidad esperada.

Con ello termina la prueba.

Ahora si asumimos que V_i tiene una distribucion uniforme y suponemos ciertas cantidades de sujetos fuera de la fila podriamos determinar el valor de la puja en función de la valoración de cada jugador en situaciones reales, entonces:

$$\begin{aligned} f_V(x) &= \begin{cases} \frac{1}{\overline{V}} & \text{si } x \in (0, \overline{V}) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ F_V(x) &= \int_0^x \frac{1}{\bar{V}} dt = \frac{x}{\bar{V}} \end{aligned}$$

Asumiendo que $\bar{V}$ está normalizado a una unidad ($\bar{V} = 1$), entonces:

$$\begin{aligned} b(V_i) &= \frac{\int_0^{V_i}[x(n-1)[F_V(x)^{n-3} f_V(x)(F_V(x)(1-\delta(n-1)) + \delta(n-2))]]dx}{F_V(V_i)^{n-1} + \delta(n-1)(F_V(V_i)^{n-2} - F_V(V_i)^{n-1})} \\ b(V_i) &= \frac{\int_0^{V_i}[x(n-1)[x^{n-3}(x(1-\delta(n-1)) + \delta(n-2))]]dx}{V_i^{n-1} + \delta(n-1)(V_i^{n-2} - V_i^{n-1})} \\ b(V_i) &= \frac{V_i^{n-1}(V_i(n-1)(1-\delta(n-1)) + \delta(n-2)n)}{n(V_i^{n-1} + \delta(n-1)(V_i^{n-2} - V_i^{n-1}))} \\ b(V_i) &= \frac{V_i(n-1)(1-\delta(n-1)) + \delta(n-2)n}{n + n\delta(n-1)(V_i^{-1} - 1)} \end{aligned} \tag{3.25}$$

Para saber que ocurre con la puja cuando $n \to \infty$, calculamos dicho límite:

Aplicando dos veces L ´Hopital tenemos:

$$\lim_{n \to \infty} b(V_i) = V_i \tag{3.26}$$

Si $n = 2, n = 3, n = 10$ o $n = 25$, $V_i = 0.5$ y $\delta = 1/2$, la puja tomará valor de:

Para $n = 2$:

$$b(V_i) = \frac{V_i}{4 + 2(V_i^{-1} - 1)} = 1/12 = 0.083 \tag{3.27}$$

Para $n = 3$:

$$b(V_i) = \frac{1}{2 + 2(V_i^{-1} - 1)} = 1/4 = 0.25 \tag{3.28}$$

Para $n = 10$:

$$b(V_i) = \frac{9V_i(1 - 9/2) + 40}{10 + 45(V_i^{-1} - 1)} = 97/220 = 0.44 \tag{3.29}$$

Para $n = 25$:

$$b(V_i) = \frac{24V_i(1 - 12) + 575/2}{25 + 300(V_i^{-1} - 1)} = 311/650 = 0.478 \tag{3.30}$$

Sección 3.3.

Caso $N = \{2, 3, ..., n\}$,$m = 2$ (depreciación).

Anteriormente se definió que el valor de la puja estaba afectado por un valor de depreciación, dado que se está pujando por dos lugares dentro de la cola con distintas valoraciones, asumiendo así que si se obtenía el segundo lugar de la cola se pagaría el valor de la puja multiplicado por dicho valor. Pero que pasaría si se pagara un único valor independientemente del lugar que se obtenga. A continuación realizamos este análisis manteniendo los mismos supuestos del caso anterior e integrando esta nueva particularidad, dando como resultado la siguiente función de utilidad esperada:

$$U_1(x) = (V_1 - b(x))F_V(x)^{n-1} + (\delta V_1 - b(x))(n-1)F_V(x)^{n-2}(1 - F_V(x)) \tag{3.31}$$

Las técnicas y justificaciones de los procedimientos a lo largo de toda la obtención de la forma funcional de la puja de equilibrio son los mismos que en la sección anterior.

Derivando:

$$\begin{aligned} U_1'(x) &= (V_1 - b(x))(n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x) \\ &\quad +(\delta V_1 - b(x))(n-1)[(n-2)F_V(x)^{n-3}f_V(x) \\ &\quad -(n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x)] - b'(x)[F_V(x)^{n-1} + ((n-1)F_V(x)^{n-2}(1 - F_V(x)))] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Despejando:

$$\begin{aligned} & V_1[(n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x) \\ & +\delta(n-1)[(n-2)F_V(x)^{n-3}f_V(x) - (n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x)]] \\ = \; & b(x)(n-1)[F_V(x)^{n-2}f_V(x) \\ & +[(n-2)F_V(x)^{n-3}f_V(x) - (n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x)]] \\ & +b'(x)[F_V(x)^{n-1} + ((n-1)F_V(x)^{n-2}(1 - F_V(x)))] \end{aligned} \tag{3.33}$$

Como se mencionó, bajo los mismos supuestos de simetría que en el caso anterior, tenemos que la expresión anterior puede escribirse como:

$$\begin{aligned} & V_1[(n-1)F_V(V_1)^{n-2}f_V(V_1)(1 - \delta(n-1)) \\ & +\delta(n-1)(n-2)F_V(V_1)^{n-3}f_V(V_1)] \\ = \; & \frac{d(b(V_1)[F_V(x)^{n-1} + ((n-1)F_V(x)^{n-2}(1 - F_V(x)))])}{dV_1} \end{aligned} \tag{3.34}$$

Tenemos las siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} & V_1(n-1)[F_V(V_1)^{n-2}f_V(V_1)(1 - \delta(n-1)) + \delta(n-2)F_V(V_1)^{n-3}f_V(V_1)] \\ = \; & \frac{d(b(V_1)[F_V(x)^{n-1} + ((n-1)F_V(x)^{n-2}(1 - F_V(x)))])}{dV_1} \end{aligned} \tag{3.35}$$

Utilizando el teorema fundamental del cálculo, tenemos que:

$$\begin{aligned} & b(V_1)(F_V(V_1)^{n-1} + ((n-1)F_V(V_1)^{n-2}(1 - F_V(V_1)))) \\ = & \int_0^{V_1} [x(n-1)[F_V(x)^{n-2} f_V(x)(1 - \delta(n-1)) + \delta(n-2)F_V(x)^{n-3} f_V(x)]]dx + c \end{aligned} \tag{3.36}$$

En donde c es la constante de integración, dado que sabemos que cuando $V_1 = 0 \Rightarrow b(V_1) = 0$ podemos determinar que $c = 0$. Con ello, estamos en condiciones de citar nuestro segundo resultado.

Teorema 3 *Para $M = \{1, 2\}$ jugadores dentro de una cola dispuestos a ceder su lugar y $N = \{2, 3, ..., n\}$ jugadores fuera de la cola, dado que la depreciacíon no afecta a la puja, con valoraciones V_i individuales y pujas independientes, la puja de equilibrio esta dada por:*

$$b(V_i) = \begin{cases} \frac{\int_0^{V_i}[x(n-1)[F_V(x)^{n-2} f_V(x)(1-\delta(n-1))+\delta(n-2)F_V(x)^{n-3} f_V(x)]]dx}{F_V(V_i)^{n-1}+((n-1)F_V(V_i)^{n-2}(1-F_V(V_i)))} & si\ V_i \neq 0 \\ 0 & si\ V_i = 0 \end{cases}$$

Prueba:

En pasos anteriores se realizó constructivamente la búsqueda de la función de puja. Mostraremos que en realidad pujar de esta manera con respecto a la valoración es un máximo y que en efecto es una función contínua.

Por demostrar que $b(V_i)$ es continua.

Por ello, para el caso cuando $b(V_i) > 0$, demostraremos que:

$$\int_0^{V_i} [x(n-1)[F_V(x)^{n-3} f_V(x)(F_V(x)(1 - \delta(n-1)) + \delta(n-2))]]dx > 0$$

y

$$F_V(V_i)^{n-1} + (n-1)(F_V(V_i)^{n-2} - F_V(V_i)^{n-1}) > 0$$

Para el caso de la primera de las condiciones anteriores, bastará con demostrar que:

$$F_V(x)(1 - \delta(n-1)) + \delta(n-2) > 0$$

$$\Rightarrow F_V(x) + \delta[(n-2) - (n-1)F_V(x)] > 0; \forall n > 2, \delta \in (0, 1)$$

Se hace como en la sección anterior.

Demostrando así que el numerador será distinto de cero siempre.

Por demostrar que $F_V(V_i)^{n-1} + (n-1)(F_V(V_i)^{n-2} - F_V(V_i)^{n-1}) > 0$ cuando $V_i > 0$

La expresión anterior puede escribirse como:

$$F_V(V_i)^{n-2}((n-1) + F_V(V_i)(1-(n-1))) > 0$$

Nótese que $F_V(V_i)^{n-2}$ siempre es mayor a cero cuando $V_i > 0$, por lo que basta checar que:

$$(n-1) + F_V(V_i)(1-(n-1)) > 0$$

Defínase $y = F_V(V_i)$ y entonces $g(y) = (n-1) + y(1-(n-1)) > 0$.

Por Demostrar que $g(y) > 0$ cuando $y \in [0, 1]$.

Nótese que $g(y)$ es una función lineal en y. Verificando el valor de la función $g(y)$ en los extremos del intervalo:

$$g(0) = (n-1) > 0$$

y

$$g(1) = 1 > 0$$

Entonces, como g es una función lineal en $[0, 1]$ con $g(0) > 0$ y $g(1) > 0$, entonces $g(y) > 0$ para todo $y \in [0, 1]$.

Por lo que queda demostrado que $b(V_i) > 0$ es continua.

Ahora demostraremos que en $b(V_i) = 0$ el límite por la derecha existe y es igual a cero cuando $V_i = 0$.

Cuando $V > 0$ se tiene:

$$\begin{aligned}
b(V_i) &= \frac{\int_0^{V_i}[x(n-1)[F_V(x)^{n-2}f_V(x)(1-\delta(n-1)) + \delta(n-2)F_V(x)^{n-3}f_V(x)]]dx}{F_V(V_i)^{n-1} + ((n-1)F_V(V_i)^{n-2}(1-F_V(V_i)))} \\
b(V_i) &< \frac{\int_0^{V_i}[V(n-1)[F_V(x)^{n-2}f_V(x)(1-\delta(n-1)) + \delta(n-2)F_V(x)^{n-3}f_V(x)]]dx}{F_V(V_i)^{n-1} + ((n-1)F_V(V_i)^{n-2}(1-F_V(V_i)))} \\
b(V_i) &= \frac{V(1-\delta(n-1)) \int_0^{V_i}[(n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x)dx + V\delta(n-1)\int_0^{V_i}(n-2)F_V(x)^{n-3}f_V(x)dx]}{F_V(V_i)^{n-1} + ((n-1)F_V(V_i)^{n-2}(1-F_V(V_i)))}
\end{aligned}$$

como $\delta < 1$ entonces:

$$\begin{aligned}
b(V_i) &< \frac{[F_V(V_i)^{n-1} + (n-1)F_V(V_i)^{n-2}(1-F_V(V_i))]V}{F_V(V_i)^{n-1} + (n-1)F_V(V_i)^{n-2}(1-F_V(V_i))} \\
b(V_i) &< V
\end{aligned}$$

Con ello termina la prueba de la continuidad por la derecha de $b(V_i)$ cuando $V_i = 0$ y por lo tanto, se verifica que la función puja obtenida en realidad es una función continua.

Por demostrar que $b(V_i)$ es un maximo.

$$\begin{aligned}
U_1'(x) &= (V_1 - b(x))(n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x) \\
&\quad +(\delta V_1 - b(x))(n-1)[(n-2)F_V(x)^{n-3}f_V(x) - (n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x)] \\
&\quad -b'(x)[F_V(x)^{n-1} + ((n-1)F_V(x)^{n-2}(1-F_V(x)))] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_1'(x) &= V_1[(n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x) \\
&\quad +\delta(n-1)[(n-2)F_V(x)^{n-3}f_V(x) - (n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x)]] \\
&\quad -b(x)[(n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x) \\
&\quad +(n-1)[(n-2)F_V(x)^{n-3}f_V(x) - (n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x)]] \\
&\quad -b'(x)[F_V(x)^{n-1} + ((n-1)F_V(x)^{n-2}(1-F_V(x)))] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_1'(x) &= (V_1 - x)[(n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x) \\
&\quad +\delta(n-1)[(n-2)F_V(x)^{n-3}f_V(x) - (n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x)]] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por Demostrar que:

$$(n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x) + \delta(n-1)[(n-2)F_V(x)^{n-3}f_V(x) - (n-1)F_V(x)^{n-2}f_V(x)] > 0$$

Demostrado en la sección anterior. Con ello termina la prueba.

Ahora si suponemos que V_i tiene una distribucion uniforme y que $n = 2$**,** $n = 3$**,** $n = 10$ **y** $n = 25$**,** entonces podriamos determinar el valor de la puja en función de la valoración de cada jugador en situaciones reales, se sigue:

$$\begin{aligned}
f_V(x) &= \begin{cases} \frac{1}{\overline{V}} & \text{si } x \in (0, \overline{V}) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
F_V(x) &= \int_0^x \frac{1}{\overline{V}} dt = \frac{x}{\overline{V}}
\end{aligned}$$

Asumiendo que $\bar{V}$ está normalizado a una unidad, entonces:

$$
\begin{aligned}
b(V_i) &= \frac{\int_0^{V_i}[x(n-1)[F_V(x)^{n-3}f_V(x)(F_V(x)(1-\delta(n-1))+\delta(n-2))]]dx}{F_V(V_i)^{n-1}+(n-1)(F_V(V_i)^{n-2}-F_V(V_i)^{n-1})} \\
b(V_i) &= \frac{\int_0^{V_i}[x(n-1)[x^{n-3}(x(1-\delta(n-1))+\delta(n-2))]]dx}{V_i^{n-1}+(n-1)(V_i^{n-2}-V_i^{n-1})} \\
b(V_i) &= \frac{V^{n-1}(V(n-1)(1-\delta(n-1))+\delta(n-2)n)}{n(V_i^{n-1}+(n-1)(V_i^{n-2}-V_i^{n-1}))} \\
b(V_i) &= \frac{V(n-1)(1-\delta(n-1))+\delta(n-2)n}{n+n(n-1)(V_i^{-1}-1)}
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

Para saber que ocurre con la puja cuando $n \to \infty$, calculamos dicho límite:

Aplicando dos veces L´Hopital tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} b(V_i) = \delta V_i \tag{3.38}$$

Si $n = 2, n = 3, n = 10$ o $n = 25$, $V_i = 0.5$ y $\delta = 1/2$, la puja tomará valor de:

Para $n = 2$:

$$b(V_i) = \frac{V_i}{4+4(V_i^{-1}-1)} = 1/16 = 0.0625 \tag{3.39}$$

Para $n = 3$:

$$b(V_i) = \frac{1}{2+4(V^{-1}-1)} = 1/6 = 0.16 \tag{3.40}$$

Para $n = 10$:

$$b(V_i) = \frac{9V(1-9/2)+40}{10+90(V^{-1}-1)} = 97/400 = 0.242 \tag{3.41}$$

Para $n = 25$:

$$b(V_i) = \frac{24V(1-12)+575/2}{25+600(V^{-1}-1)} = 311/1250 = 0.248 \tag{3.42}$$

CAPÍTULO 4

Conclusiones

A modo de conclusión, podemos exponer el cumplimiento de una serie de objetivos planteados al comienzo de esta investigación. Primeramente, se logró la idea de determinar un modelo matemático capaz de reflejar la situación planteada, y a su vez se plantearon variaciones del mismo. Posteriormente, se realizó el análisis de dicho modelo y sus variaciones, dandonos los siguientes resultados o conclusiones:

Dado el modelo general, se puede determinar que existe al menos un equilibrio, el cual está dado cuando se puja un valor de cero, lo cual es un resultado obtenido desalentador. También, pueden existir otros equilibrios, los cuales no conocemos dada la imposibilidad de resolver la ecuación diferencial.

Si suponemos que los jugadores dentro de la cola están dispuestos a ceder su lugar, entonces se es capaz de encontrar un equilibrio, el cual representa cuánto van a pujar los jugadores fuera de la fila para obtener un lugar en la misma, dicha puja está en función de la cantidad de jugadores fuera de la fila y de la valoración que le dan estar en la misma. También se obtiene como resultado que la puja nunca va a ser mayor a la valoración.

Si suponemos que los jugadores dentro de la cola están dispuestos a ceder su lugar y además que el valor de depreciación no afecta a la puja de los jugadores fuera de la cola, entonces se es capaz de encontrar un equilibrio, el cual representa cuánto van a pujar los jugadores fuera de la fila para obtener un lugar en la misma, dicha puja está en función de la cantidad de jugadores fuera de la fila y de la valoración que le dan estar en la misma. También se obtiene como resultado que la puja nunca va a ser mayor a la valoración multiplicada por la depreciación.

Para el futuro se recomienda continuar con la investigación, con el fin de encontrar todos los equilibrios del modelo general e ir relajando los supuestos que se plantearon para los modelos donde se encontraron los equilibrios.

Bibliografía

[1] Cui, S., Wang, Z., & Yang, L. (2023). Auctions for Trading Queueing Positions. In Innovative Priority Mechanisms in Service Operations: Theory and Applications (pp. 9-31). Cham: Springer International Publishing.

[2] El Haji, A., & Onderstal, S. (2019). Trading places: An experimental comparison of reallocation mechanisms for priority queuing. Journal of Economics & Management Strategy, 28(4), 670-686.

[3] Kleinrock, L. (1967). Optimum bribing for queue position. Operations Research, 15(2), 304-318.

[4] Lui, F. T. (1985). An equilibrium queuing model of bribery. Journal of political economy, 93(4), 760-781.

[5] Rosenblum, D. M. (1992). Allocation of waiting time by trading in position on a G/M/s queue. Operations Research, 40(3-supplement-2), S338-S342.

[6] Vickrey, W. (1961). Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders. The Journal of finance, 16(1), 8-37.

[7] Harsanyi, J. C. (1967). Games with incomplete information played by “Bayesian” players, I–III Part I. The basic model. Management science, 14(3), 159-182.

[8] Milgrom, P. R., & Weber, R. J. (1982). A theory of auctions and competitive bidding. Econometrica: Journal of the Econometric Society, 1089-1122.

[9] Menezes, F. M., & Monteiro, P. K. (2004). An introduction to auction theory. OUP Oxford.

[10] Mann L (1969) Queue culture: the waiting time line as a social system. Am J Sociol 75(3):340–354

[11] Myerson RB, Satterthwaite MA (1983) Efficient mechanisms for bilateral trading. J Econ Theory 29(2):265–281

[12] Ashenfelter, O.& Graddy, K. (2003), ‘Auctions and the price of art’, Journal of Economic Literature, 41(3): 763–787.

[13] Bulow, J. & Roberts, J. (1989), ‘The simple economics of optimal auctions’, The Journal of Political Economy 97: 1060–1090.

[14] Cremer, J. & MacLean, R. P. (1988), ‘Full extraction of the surplus in Bayesian and dominant strategy auctions’, Econometrica 56: 1247–1257.

[15] Grant, S., Kaiji, A., Menezes, F. M., & Ryan, M. J. (2006), ‘Auctions with options for reauction’, International Journal of Economic Theory, 2: 17– 39.

[16] Klemperer, P. (1999), ‘Auction theory: A guide to the literature’, Journal of Economic Surveys, 13(3): 227–286.

[17] Nash Jr, J. F. (1950). Equilibrium points in n-person games. Proceedings of the national academy of sciences, 36(1), 48-49.

[18] Nash Jr, J. F. (1951). Theory of Non-cooperative Games. Princeton University thesis, May I, 950

[19] Maschler, M., Zamir, S., & Solan, E. (2020). Game theory. Cambridge University Press.